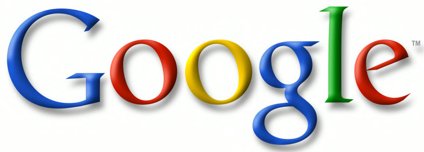
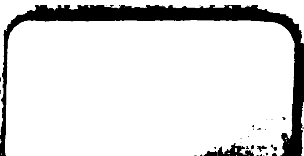
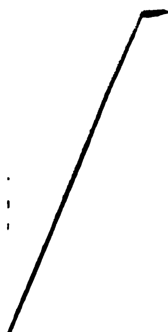




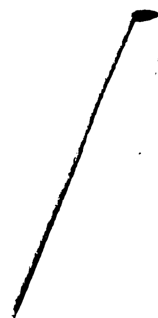












Mathematics

Jahrbuch

über die

Fortschritte der Mathematik

begründet

von

Carl Ohrtmann.

Im Verein mit anderen Mathematikern

und unter besonderer Mitwirkung der Herren

Felix Müller und **Albert Wangerin**

herausgegeben

von

Emil Lampe.

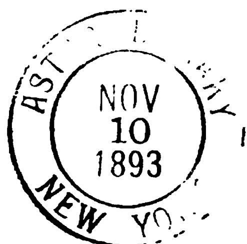
Band XXII.

Jahrgang 1890.

Berlin.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

1893.


NOV
10
1893
NEW YO

Erklärung der Citate.

Eine eingeklammerte (arabische) Zahl vor der (römischen) Bandzahl bezeichnet die Reihe (Serie), zu welcher der Band gehört. Einige periodische Schriften, in denen nur zuweilen eine vereinzelte mathematische Arbeit erschienen ist, sind in dieses Verzeichnis nicht aufgenommen worden; das bezügliche Citat im Texte ist dann in hinreichender Ausführlichkeit gegeben.

Acta Math.: Acta Mathematica. Zeitschrift herausgegeben von G. Mittag-Leffler. Stockholm. 4°. XIII, XIV.

Almeida J.: Journal de physique théorique et appliquée. Fondé par J. Ch. d'Almeida et publié par MM. E. Bouty, A. Cornu, E. Mascart, A. Potier. Paris. Au Bureau du Journal de Physique. 8°. (2) IX.

American J.: American Journal of Mathematics. Editor S. Newcomb, Associate Editor Th. Craig. Published under the auspices of the Johns Hopkins University. Baltimore. 4°. XII, XIII.

Amst. Versl. en Meded.: Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Academie van Wetenschappen. Afdeeling Natuurkunde. Amsterdam. (3) VII.

Annali di Mat.: Annali di matematica pura ed applicata diretti dal prof. Francesco Brioschi colla cooperazione dei professori: L. Cremona, E. Beltrami, E. Betti, F. Casorati. Milano. 4°. (2) XVIII.

Annals of Math.: Annals of Mathematics. Ormond Stone, editor. William M. Thornton, associate editor. Office of publication: University of Virginia. B. Westermann and Co. New York. 4°. V.

Ann. de Chim. et Phys.: Annales de Chimie et de Physique par MM. Berthelot, Pasteur etc. Paris. Gauthier-Villars et Fils. 8°. (6) XIX, XX, XXI.

Ann. de l'Éc. Norm.: Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, publiées etc. par un comité de rédaction composé de MM. les maîtres de conférences de l'École. Paris. Gauthier-Villars et Fils. 4°. (3) VII.

Arch. f. Art.: Archiv für die Artillerie- und Ingenieur-Officiere des Deutschen Reichsheeres. Redaction: Schröder, Meinardus. Berlin. Mittler u. Sohn. 8°. XCVII.

Arch. for Math. og Naturvid.: Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Kristiania. 8°. XIII.

Arch. Néerl: Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem et rédigées par J. Bosscha etc. Harlem. 8°. XXIV.

A*

Assoc. Franç.: Association Française pour l'avancement des sciences. Compte rendu de la 19me session (Congrès de Limoges). Paris au secrétariat de l'association et chez G. Masson. 8°.

Astr. Nachr.: Astronomische Nachrichten, begründet von H. C. Schumacher. Unter Mitwirkung des Vorstandes der Astronomischen Gesellschaft herausg. von A. Krüger. Kiel. 4°. CXXII, CXXIII; No. 2906-2953.

Atti dell' Acc. Pont.: Atti dell' Accademia Pontaniana. Roma. XX.

Batt. G.: Giornale di matematiche ad uso degli studenti delle università italiane pubblicato per cura del Prof. G. Battaglini. Napoli. gr. 8°. XXVIII.

Belg. Bull.: Bulletin de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles. 8°. (3) XIX, XX.

Belg. Mém.: Mémoires de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Collection in 4°. Bruxelles. F. Hayez.

Belg. Mém. S. É.: Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers publiés par l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles. F. Hayez. 4°.

Berl. Abh.: Abhandlungen der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 4°.

Berl. Ber.: Sitzungsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 8°. 1890.

Berl. Phys. Ges. Verh.: Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. Berlin. G. Reimer. 8°. IX.

Besso Per. mat.: Periodico di matematica per l'insegnamento secondario. Roma. 8°. V.

Bibl. Math.: Bibliotheca Mathematica, herausgegeben von Gustaf Eneström. Stockholm. (2) IV.

Böklen Mitt.: Mathematisch-naturwissenschaftliche Mitteilungen, herausgegeben von Dr. O. Böklen. Tübingen. Fr. Fues. 8°. III.

Bologna Mem.: Memorie della R. Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna. Bologna. 4°. (4) X, (5) I.

Bologna Rend.: Rendiconto delle sessioni dell' Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna. Bologna. 8°. 1889-90.

Bordeaux Mém.: Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Bordeaux. Paris. 8°. (3) V.

Brit. Ass. Rep.: Report of the meeting of the British Association for the advancement of science. London. gr. 8°.

Brux. S. sc.: Annales de la Société scientifique de Bruxelles. Bruxelles. F. Hayez. (Doppelt paginirt, unterschieden durch A und B.). XIV.

Cambr. Proc.: Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge. VII.

Cambr. Trans.: Transactions of the Philosophical Society of Cambridge. Cambridge.

Casop.: Casopis; Zeitschrift zur Pflege der Mathematik und Physik, redigirt mit besonderer Rücksicht auf Studirende der Mittel- und Hochschulen von F. J. Studnička, herausgegeben vom Vereine böhmischer Mathematiker in Prag. Prag. 8°. (Böhmisch.) XIX.

Centralbl. der Bauverw.: Centralblatt der Bauverwaltung. Herausgegeben im Ministerium der öffentlichen Arbeiten. Redacteure O. Sarrazin und O. Hossfeld. Berlin. Ernst u. Sohn. 4°. X.

Charkow Ges.: Sammlung der Mitteilungen und Protokolle der mathematischen Gesellschaft in Charkow. (Russisch.) (2) I, II.

Civiling.: Der Civilingenieur. Organ des sächsischen Ingenieur- und Architekten-Vereins. Unter Mitwirkung etc. herausgegeben von Dr. E. Hartig. Leipzig. Arthur Felix. 4°. (2) XXXVI.

Colorado Studies: Colorado College Studies. Papers read before the Colorado College scientific Society. Colorado Springs. 8°. I.

C. R.: Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. Paris. 4°. CX, CXI.

Darboux Bull.: Bulletin des sciences mathématiques, rédigé par MM. G. Darboux et J. Tannery avec la collaboration de MM. André, Battaglini etc. Paris. Gauthier-Villars et Fils. 8°. (2) XIV.

Delft Ann. d. l'Éc. Polyt.: Annales de l'École Polytechnique de Delft. Leiden. E. J. Brill. VI.

Deutsche Bauztg.: Deutsche Bauzeitung. Verkündigungsblatt des Verbandes deutscher Architekten- und Ingenieurvereine. Redacteure K. E. O. Fritsch und E. W. Büsing. Berlin. E. Toeche. XXIV.

Dublin Proc.: Proceedings of the Royal Irish Academy. Dublin.

Dublin Trans.: Transactions of the Royal Irish Academy. Dublin. XXIX.

Edinb. M. S. Proc.: Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. 8°. VIII.

Edinb. Proc.: Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh. 8°. XVIII.

Edinb. Trans.: Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh. 4°. XXXVI.

Ed. Times: Mathematical questions, with their solutions from the „Educational Times" with many papers and solutions not published in the „Educational Times." Edited by W. J. C. Miller. London. 8°. Francis Hodgson. LII, LIII.

Exner Rep.: Repertorium der Physik, herausgegeben von Exner. München und Leipzig. gr. 8°. XXVI.

Génie civil: Le Génie civil. Revue générale hebdomadaire des industries françaises et étrangères. Paris. XVII.

Gött. Abh.: Abhandlungen der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Göttingen. 4°. XXXVI.

Gött. Nachr.: Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen. Göttingen. 8°. 1890.

Hamb. Mitt.: Mitteilungen der Hamburger Mathematischen Gesellschaft. Hamburg. 8°. II.

Hannov. Zeitschr.: Zeitschrift des Architekten- und Ingenieurvereins zu Hannover, redigirt von Keck. Hannover. Schmorl u. Seefeld. 4°. XXXVI.

Hoffmann Z.: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Unter Mitwirkung von Fachlehrern herausgegeben von J. C. V. Hoffmann. Leipzig. Teubner. 8°. XXI.

Hoppe Arch.: Archiv der Mathematik und Physik mit besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Lehrer an den höheren Lehranstalten, gegründet von J. A. Grunert, fortgesetzt von R. Hoppe. Leipzig. C. A. Koch. 8°. (2) VIII, IX.

Japan Journ.: Journal of the college of science, imperial university, Japan. Published by the university. Tokyo. 4°.

J. de l'Éc. Pol.: Journal de l'École Polytechnique, publié par le conseil d'instruction de cet établissement. Paris. Gauthier-Villars et Fils. 4°. Cah. LX.

J. de Math. élém.: Journal de Mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du Gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. de Longchamps, Lucien Lévy. Paris. Delagrave. 8°. (3) IV.

J. de Math. spéc.: Journal de Mathématiques spéciales à l'usage des candidats aux Écoles Polytechnique, Normale et Centrale, publié sous la direction de MM de Longchamps, Lucien Lévy. Paris. Delagrave. 8°. (3) IV.

J. für Math.: Journal für die reine und angewandte Mathematik. In zwanglosen Heften. Herausgegeben unter Mitwirkung etc. von L. Kronecker. Berlin. G. Reimer. 4°. CVI, CVII.

Jordan Z. f. V.: Zeitschrift für Vermessungswesen. Organ des deutschen Geometervereins. Unter Mitwirkung von C. Steppes und R. Gerke herausgegeben von W. Jordan. Stuttgart. 8°. XIX.

Journ. de Math.: Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé en 1836 et publié jusqu'en 1874 par J. Liouville. Publié par C. Jordan avec la çollaboration de G. Halphen, M. Lévy, A. Mannheim, É. Picard, H. Poincaré, H. Resal. Paris. 4°. (4) VI.

Kasan Ber.: Sitzungsberichte der mathematischen Section des Naturforschenden Vereins zu Kasan. (Russisch.) VIII.

Kasan Ges.: Sammlung der Mitteilungen der physikalisch-mathematischen Gesellschaft zu Kasan. (Russisch.) VII, VIII.

Krak. Ber.: Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Section der Krakauer Akademie. Krakau. (Polnisch.) XX.

Krak. Denkschr.: Denkschriften der Krakauer Akademie der Wissenschaften. Krakau. (Polnisch.) XVII.

Leipz. Abh.: Abhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Klasse. Leipzig. 4°.

Leipz. Ber.: Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Klasse. Leipzig. 8°. XLII.

Leopold. Akad.: Verhandlungen der Kais. Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher. Halle. gr. 4°. LV.

Liège Mém.: Mémoires de la Société Royale des sciences de Liège. Bruxelles. Hayez; Paris. Roret. (2) V.

Lisboa Jorn.: Jornal de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturaes publicado sob os auspicios da Academia Real das Sciencias de Lisboa. Lisboa.

Lomb. Ist. Rend.: Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Milano. 8°. (2) XXIII.

Lond. M. S. Proc.: Proceedings of the London Mathematical Society. London. 8°. XXI.

Lond. Phil. Trans.: Philosophical Transactions of the Royal Society of London. London. 4°. CLXXXI.

Lond. R. S. Proc.: Proceedings of the Royal Society of London. London. 8°. XLVII, XLVIII.

Manchester Proc.: Memoirs and Proceedings of the literary and philosophical Society of Manchester. Manchester.

Math. Ann.: Mathematische Annalen. In Verbindung mit C. Neumann begründet durch R. F. A. Clebsch. Unter Mitwirkung der Herren P. Gordan, C. Neumann, K. VonderMühll gegenwärtig herausgegeben von F. Klein, W. Dyck und A. Mayer. Leipzig. Teubner. 8°. XXXV, XXXVI, XXXVII.

Mathesis: Mathesis, Recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne publié par P. Mansion et J. Neuberg. Gand. Hoste; Paris. Gauthier-Villars et Fils. 8°. X.

Mém. Sav. Étr.: Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France et imprimés par son ordre. 4°. (2) XXXI.

Mess.: The Messenger of Mathematics. Edited by J. W. L. Glaisher. London and Cambridge. Macmillan and Co. 8°. (2) XIX, XX.

Met. Zeitschr.: Meteorologische Zeitschrift. Herausgegeben von der österreich. Gesellschaft für Meteorologie und der deutschen Meteorol. Gesellschaft, redigirt von J. Hann u. W. Koeppen. Berlin. gr. 8°. VII.

Mitt. üb. Art. u. Genie: Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- und Genie-Wesens. Herausgegeben vom K. K. technischen u. administrativen Militär-Comité. Wien. R. v. Waldheim. 8°. XXI.

Modena Mem.: Memorie della Regia Accademia di scienze, lettere ed arti in Modena. Modena. 4°. (2) VII.

Monatsh. f. Math.: Monatshefte für Mathematik und Physik. Mit Unterstützung des hohen K. K. Ministeriums für Cultus und Unterricht herausgegeben von G. v. Escherich und Em. Weyr. Wien. 8°. I.

Mosk. Math. Samml.: Mathematische Sammlung, herausgegeben von der Mathematischen Gesellschaft in Moskau. (Russisch.) XIV, XV.

Münch. Abh.: Abhandlungen der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München. Zweite Klasse. München. 4°. XVII.

Münch. Ber.: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München. München. 8°. XX.

Napoli Rend.: Rendiconto dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli). Napoli. 4°. (2) IV.

Nature: Nature, a weekly illustrated journal of science. London and New York. Macmillan and Co. 4°. XLI, XLII.

Naturf. Ges. Bremen: Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte. 63. Versammlung zu Bremen 15. - 20. Septbr. 1890. I u. II. Herausg. von O. Lassar. Leipzig. F. C. W. Vogel. 1891. 8°.

Nieuw Archief: Nieuw Archief voor wiskunde uitgegeven door het Wiskundig Genootschap. Amsterdam. 8°. XVII.

Nouv. Ann.: Nouvelles Annales de mathématiques. Journal des candidats aux Écoles Polytechnique et Normale, rédigé par MM. Ch. Brisse et E. Rouché. Paris. Gauthier Villars et Fils. 8°. (3) IX.

Nuovo Cimento: Il Nuovo Cimento. Giornale fondato per la fisica e la chimica da C. Matteucci e R. Piria, continuato per la fisica esperimentale e matematica da E. Betti e R. Felici. Pisa. Salvioni. gr. 8°. (3) XXVII.

Nyt Tidss. for Math.: Nyt Tidsscrift for Mathematik. Redigeret af P. T. Foldberg og C. Juel. (Abteilung A für elementare, B für höhere Mathematik.) Kjöbenhavn. 8°. I.

Odessa Ges.: Denkschriften der mathematischen Abteilung der neurussischen Gesellschaft der Naturforscher. (Russisch.) X, XI.

Padova Atti: Atti della Reale Accademia di scienze, lettere ed arti di Padova. Padova. (2) VI.

Palermo Rend.: Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Palermo. gr. 8°. IV.

Petersb. Abh.: Abhandlungen der Kais. Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg. St. Petersburg. LXII.

Phil. Mag.: The London, Edinburgh and Dublin philosophical magazine and journal of science, by Kane, Thomson, Francis. London. 8°. (5) XXIX, XXX.

Phys. Ges. St. Petersb.: Journal der physiko-chemischen Gesellschaft zu St. Petersburg. (Russisch.) (2) XXII.

Phys.-Math. Wiss.: Die physiko-mathematischen Wissenschaften. Journal der reinen und angewandten Mathematik, Astronomie und Physik, herausgegeben von W. W. Bobynin. Moskau. (Russisch.) IX. (1890)

Pisa Ann.: Annali della Reale Scuola Normale Superiore di Pisa. Scienze fisiche e matematiche. Pisa. 8°.

Poske Z.: Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht. Unter der besonderen Mitwirkung von E. Mach und B. Schwalbe, herausgegeben von F. Poske. Berlin. J. Springer. gr. 8°. III.

Pr. = Programmabhandlung, *Gymn.* = Gymnasium, *Realgymn.* = Realgymnasium, etc.

Prace mat.-fiz.: Prace matematyczno-fizyczne. (Mathematische und physikalische Abhandlungen, hrsg. in Warschau von S. Dickstein, W. Gosiewski, E. u. W. Natanson.) gr. 8°. (Polnisch.) II.

Prag. Abh.: Abhandlungen der Königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag. Selbstverlag der Königl. Böhmischen Gesellschaft. 4°.

Prag. Ber.: Sitzungsberichte der Kgl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag. 8°. 1890.

Quart. J.: The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics. Edited by N. M. Ferrers, A. Cayley, J. W. L. Glaisher, A. R. Forsyth. London. 8°. XXIV, XXV.

Rev. d'Art.: Revue d'Artillerie paraissant le 15 de chaque mois. Paris. 8°. XXXV, XXXVI.

Rev. des Quest. sc.: Revue des Questions scientifiques, publiée par la Société scientifique de Bruxelles. Bruxelles. gr. 8°. XXVII, XXVIII.

Rom. Acc. L. Mem.: Memorie della Reale Accademia dei Lincei. Roma. gr. 4°. (4) VI.

Rom. Acc. L. Rend.: Atti della Reale Accademia dei Lincei. Rendiconti. Roma 4°. (4) VI. (Zwei Semester, unterschieden als VI_1 und VI_2.)

Rom. Acc. P. d. N. L.: Atti della Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei. Roma. 4°. XLII, XLIII.

Rom. Acc. P. d. N. L. Mem.: Memorie della Pontificia Accademia dei Nuovi Lincei. Roma. 4°. V, VI.

Schlömilch Z.: Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben unter verantwortlicher Redaction von Schlömilch, Kahl und Cantor. Leipzig. Teubner. 8°. XXXV.

Hl. A.: Historisch-litterarische Abteilung (besonders paginirt).

Schweiz. Bauztg.: Revue Polytechnique; Schweizerische Bauzeitung, Wochenschrift für Bau-, Verkehrs- und Maschinentechnik, Organ des Schweizerischen Ingenieur- und Architekten-Vereins etc. Herausgegeben von Waldner.

Silliman J.: The American Journal of science. Editors: J. D. and E. S. Dana. (3).

S. M. F. Bull.: Bulletin de la Société Mathématique de France publié par les secrétaires. Paris. 8°. XVIII.

Soc. Philom. Bull: Bulletin de la Société Philomathique de Paris. Paris. 8°. (8) II.

Stockh. Handl.: Handlingar af Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens. Stockholm.

Stockh. Öfv.: Öfversigt af Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. Stockholm.

Stockh. Vetensk. Bihang: Bihang till Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Stockholm. 8°. XV.

Teixeira J.: Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas publicado pelo Dr. F. Gomes Teixeira. Coimbra. 8°. IX, X.

Tokio Math. Ges.: Tokyo sugaku butsurigaku kwai kiji (Zeitschrift der Physiko-Mathematischen Gesellschaft in Tokio. Englisch u. Japanisch.) Tokio. 8°. IV.

Torino Atti: Atti della Reale Accademia di Torino. Torino. 8°. XXV, XXVI.

Torino Mem.: Memorie della Reale Accademia delle scienze di Torino. Torino. 4°.

Toulouse Ann.: Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse pour les sciences mathématiques et les sciences physiques, publiées par un comité de rédaction composé des professeurs de mathématiques, de physique et de chimie de la faculté etc. Paris. Gauthier-Villars et Fils. 4°. IV.

Toulouse Mém.: Mémoires de l'Académie des sciences, inscriptions et belles lettres de Toulouse. Toulouse. Douladoure-Privat. 8°.

Ungar. Ber.: Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Mit Unterstützung der Ung. Akad. der Wissensch. und der Königl. Ung. naturwissenschaftlichen Gesellschaft hrsg. von Baron R. Eötvös etc. Redig. v. I. Fröhlich. Budapest. 8°.

Ven. Ateneo: L'Ateneo Veneto. Rivista mensile di scienze, lettere ed arti diretta da A. S. de Kiriaki e L. Gambari. Venezia. 8°. (14) I, II.

Ven. Ist. Atti: Atti del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Venezia. 8°. (7) I.

Ven. Ist. Mem.: Memorie del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Venezia. 4°. XXIII.

Warsch. Nachr.: Nachrichten der Warschauer Universität. Warschau. (Russisch.)

Wiedemann Ann.: Annalen der Physik und Chemie. Unter Mitwirkung der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin und insbesondere des Herrn H. v. Helmholtz herausgegeben von G. Wiedemann. Leipzig. Barth. 8°. XXXIX, XL, XLI.

Wien. Bauztg.: Allgemeine Bauzeitung gegründet von Chr. L. Förster. Redigirt unter Mitwirkung etc. von A. Köstlin. Wien. R. v. Waldheim.

Wien. Ber.: Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Zweite Abteilung. Wien. 8°. XCIX.

Wien. Denkschr.: Denkschriften der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. Wien. 4°. LVII.

Wochenschr. f. Astr.: Wochenschrift für Astronomie, Meteorologie und Geographie. Redigirt von Hermann J. Klein. Halle. H. W. Schmidt. 8°. (2) XXXI-XXXIII.

W. Oestr. Ing. u. Arch.: Wochenschrift des Oesterreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins. Redacteur P. Kortz. Wien. 4°.

Wolf Z.: Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich von R. Wolf. Zürich. 8°. XXXV.

Z. dtsch. Ing.: Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, herausgegeben von Th. Peters. J. Springer. Berlin. 4°. XXXIV.

Z. f. Bauwesen: Zeitschrift für Bauwesen, herausgegeben im Ministerium der öffentlichen Arbeiten. Redacteure O. Sarrazin u. O. Hossfeld. Berlin. Ernst u. Sohn. 4°. XL.

Z. Oestr. Ing. u. Arch.: Zeitschrift des Oesterreichischen Ingenieur- u. Architekten-Vereins. Redacteur P. Kortz. Wien. 4°.

Vergleichende Uebersicht

der im

Jahrbuche bestehenden Verteilung des Stoffes mit dem „Index du répertoire bibliographique des sciences mathématiques", publié par la commission permanente du répertoire.*)

I. Abschnitt. Geschichte und Philosophie: Klasse V.

1. Capitel. Geschichte: V 2 bis V 10.
   - A. Biographisch-Litterarisches.
   - B. Geschichte einzelner Disciplinen.
2. Capitel. Philosophie und Pädagogik: V 1.
   - A. Philosophie.
   - B. Pädagogik: V 1 a.

II. Abschnitt. Algebra: Klasse A, B, dann C, D, I, J.

1. Capitel. Gleichungen. (Allgemeine Theorie. Besondere algebraische und transcendente Gleichungen): I 22, D 6 j, A 2, A 3, A 4.
2. Capitel. Theorie der Formen (Invariantentheorie): C 4 a, B 4 bis B 11.
3. Capitel. Elimination und Substitution. Determinanten, symmetrische Functionen: B 3, B 2, J 4, B 1, C 3, A 3 b, H 12 c.

III. Abschnitt. Höhere und niedere Arithmetik: Klasse A und I.

1. Capitel. Niedere Arithmetik: A 1 a, A 1 b, A 1 c β, A 5 a, I 1.
2. Capitel. Zahlentheorie: Klasse I.
   - A. Allgemeines: I 2 bis I 5, I 7 bis I 11, I 19.
   - B. Theorie der Formen: I 12 bis I 18, I 20 bis I 22.
3. Capitel. Kettenbrüche: D 2 d, D 2 e, D 2 f, I 23.

---

*) Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1893. XIV + 80 S. gr. 8°. Vergl. den Bericht in F. d. M. XXI. 1889. 2. — Die „Klassen" werden durch grosse lateinische Buchstaben von A bis X bezeichnet, Unterklassen durch angefügte Exponenten, z. B. M^3. Die Klassen werden in „Divisionen" geteilt, welche durch arabische Ziffern gekennzeichnet werden; die Divisionen spalten sich in „Sectionen". durch einen kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet. Endlich können noch „Subsectionen" einen griechischen Buchstaben erhalten. Das Ganze wird durch ein Rechteck eingerahmt: $\boxed{L^1 3, b\alpha}$. Vergleiche das auf S. XIII folgende Verzeichnis der Klassen des Répertoire.

IV. Abschnitt. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Combinationslehre: Klasse J (J1 und J2), Q4b, Q4c.

V. Abschnitt. Reihen: Aus Klasse A, C, D, I.

1. Capitel. Allgemeines: D2a, D2c, C1e, H12d.
2. Capitel. Besondere Reihen: D2b, A1a, A1c, A5b, I25.

VI. Abschnitt. Differential- und Integralrechnung: Klasse C, E, H, J.

1. Capitel. Allgemeines: O1a, O1.
2. Capitel. Differentialrechnung. (Differentiale, Functionen von Differentialen, Maxima und Minima.): C1, C4b, C4c, C5, O1.
3. Capitel. Integralrechnung: C2a bis C2g.
4. Capitel. Bestimmte Integrale: C2h bis C2l, E2 bis E5, O2a, O3c, O5a, O5b.
5. Capitel. Gewöhnliche Differentialgleichungen: H1 bis H6, H12.
6. Capitel. Partielle Differentialgleichungen: H7 bis H10, J4.
7. Capitel. Variationsrechnung: J3.

VII. Abschnitt. Functionentheorie: Klasse B, D, E, F, G, I, J.

1. Capitel. Allgemeines: J5, H11, B12a, B12f, B12g, D1, D3, D4, D5, D6a, G6.
2. Capitel. Besondere Functionen.
   - A. Elementare Functionen (einschliesslich der Gammafunctionen und der hypergeometrischen Reihen): D6b, D6c, D6d, E1, H5f, H5gβ, I24.
   - B. Elliptische Functionen: F1 bis F8.
   - C. Hyperelliptische, Abel'sche und verwandte Functionen: G1 bis G5.
   - D. Kugel- und verwandte Functionen: D6e, D6f, D6g, D6h, H5gα, H5i.

VIII. Abschnitt. Reine, elementare und synthetische Geometrie: Klasse K bis Q.

1. Capitel. Principien der Geometrie: Q1.
2. Capitel. Continuitätsbetrachtungen. (Analysis situs): J1c, K14b, K14g, Q3, Q4a.
3. Capitel. Elementare Geometrie. (Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie): K1 bis K5, K8 bis K21.
4. Capitel. Darstellende Geometrie: K22, K23.
5. Capitel. Neuere synthetische Geometrie.
   - A. Allgemeines: K7, $M^3$1, P1, P2a.
   - B. Besondere ebene Gebilde: $L^1$1 bis $L^1$21, $M^1$1 bis $M^1$8.
   - C. Besondere räumliche Gebilde: L^2, M^2, M^3.
   - D. Gebilde in Räumen von mehr als drei Dimensionen: Q2.
   - E. Abzählende Geometrie: $N^4$1, $N^4$2.

IX. Abschnitt. Analytische Geometrie: Klasse K bis Q.

1. Capitel. Allgemeines (Lehrbücher etc.): B12b bis B12e, I6, K6.
2. Capitel. Analytische Geometrie der Ebene.
   - A. Allgemeine Theorie der ebenen Curven: O4d, O1, O2.
   - B. Theorie der algebraischen Curven: $M^1$1 bis $M^1$4.
   - C. Gerade Linie und Kegelschnitte: $L^1$1 bis $L^1$21.
   - D. Andere specielle Curven: $L^1$15, $M^1$5 bis $M^1$8, M^4a bis M^4f, M^4m.
3. Capitel. Analytische Geometrie des Raumes.
   - A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumcurven: O4d, O2 bis O6.

B. Theorie der algebraischen Flächen und Raumcurven: $M^2 1$, $M^2 2$, $M^2 7a$, $M^2 8a$, $M^3 1$ bis $M^3 4$, $N^4 1e$ bis $N^4 1h$.
C. Raumgebilde ersten, zweiten und dritten Grades: $L^2 1$ bis $L^2 21$, $M^2 3$, $M^2 5$, $N^4 1a$ bis $N^4 1d$.
D. Andere specielle Raumgebilde: $L^2 16$, $M^3 4$ bis $M^3 9$, $M^3 6$, $M^4 g$ bis $M^4 l$, $M^4 n$, O6.
E. Gebilde in Räumen von mehr als drei Dimensionen: Q2.

4. Capitel. Liniengeometrie (Complexe, Strahlensysteme): $N^1 1$ bis $N^1 4$, $N^2 1$ bis $N^2 3$, N^3, O7.

5. Capitel. Verwandtschaft, eindeutige Transformationen, Abbildungen.
A. Verwandtschaft, eindeutige Transformationen, Abbildungen: P1 bis P6.
B. Conforme Abbildung und dergleichen: D5cα, P3, P5.

X. Abschnitt. Mechanik: Klasse R, S.

1. Capitel. Allgemeines (Lehrbücher etc.)
2. Capitel. Kinematik: O8, R1.
3. Capitel. Statik.
A. Statik fester Körper: R2, R3, R4, X4.
B. Hydrostatik: S1.
4. Capitel. Dynamik.
A. Dynamik fester Körper: R6 bis R9, S6.
B. Hydrodynamik: S2, S3, S5.
5. Capitel. Potentialtheorie: R5.

XI. Abschnitt. Mathematische Physik: Klasse T, U und aus S.

1. Capitel. Molecularphysik, Elasticität und Capillarität.
A. Molecularphysik: T1a, T1b.
B. Elasticitätstheorie: T2a, T2b.
C. Capillarität: T1bα.
2. Capitel. Akustik und Optik.
A. Akustik: S5b, T2c.
B. Theoretische Optik: T3b, T3c.
C. Geometrische Optik: T3a.
3. Capitel. Elektricität und Magnetismus: T3c, T5, T6, T7.
4. Capitel. Wärmelehre.
A. Mechanische Wärmetheorie: S4.
B. Gastheorie: S4b, S5a.
C. Wärmeleitung und Strahlung: T4.

XII. Abschnitt. Geodäsie, Astronomie, Meteorologie: Klasse U.

1. Capitel. Geodäsie: U10.
2. Capitel. Astronomie: U1 bis U6, U9.
3. Capitel. Mathematische Geographie und Meteorologie: U7, U8, U10b.

XIII. Anhang. X1 bis X8.

Verzeichnis
der
Klassen des Répertoire.

Analysis.

A. Elementare Algebra; Theorie der algebraischen und transcendenten Gleichungen; Galois'sche Gruppen; rationale Brüche; Interpolation.

B. Determinanten; lineare Substitutionen; Elimination; algebraische Theorie der Formen; Invarianten und Covarianten; Quaternionen; Aequipollenzen und complexe Grössen.

C. Principien der Differential- und Integralrechnung; analytische Anwendungen; Quadraturen; vielfache Integrale; Functionaldeterminanten; Differentialausdrücke; Differential-Operatoren.

D. Allgemeine Theorie der Functionen und ihre Anwendung auf die algebraischen und Kreis-Functionen; unendliche Reihen und Entwickelungen einschliesslich besonders der unendlichen Producte und der unter dem algebraischen Gesichtspunkte betrachteten Kettenbrüche; Bernoulli'sche Zahlen; Kugel- und verwandte Functionen.

E. Bestimmte Integrale und insbesondere Euler'sche Integrale.

F. Elliptische Functionen nebst ihren Anwendungen.

G. Hyperelliptische, Abel'sche, Fuchs'sche Functionen.

H. Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen; Functionalgleichungen; Gleichungen mit endlichen Differenzen; recurrirende Reihen.

I. Arithmetik und Zahlentheorie; unbestimmte Analysis; arithmetische Theorie der Formen und der Kettenbrüche; Kreisteilung; complexe, ideale, transcendente Zahlen.

J. Combinatorische Analysis; Wahrscheinlichkeitsrechnung; Variationsrechnung; allgemeine Theorie der Transformationsgruppen [unter Fortlassung der Galois'schen Gruppen (A), der linearen Substitutionsgruppen (B) und der geometrischen Transformationsgruppen (P)]; Theorie der Cantor'schen Mannigfaltigkeiten.

Geometrie.

K. Elementare Geometrie und Trigonometrie (Erforschung der aus Geraden, Ebenen, Kreisen und Kugeln gebildeten Figuren); Geometrie des Punktes, der Geraden, der Ebene, des Kreises und der Kugel; darstellende Geometrie; Perspective.

L. Kegelschnitte und Oberflächen zweiter Ordnung.

M. Algebraische Curven und Oberflächen; specielle transcendente Curven und Oberflächen.

N. Complexe und Congruenzen; Connexe; Scharen von Curven und Oberflächen; abzählende Geometrie.

O. Infinitesimale Geometrie und kinematische Geometrie; geometrische Anwendungen der Differential- und Integral-Rechnung auf die Theorie der Curven und der Oberflächen; Quadratur und Rectification; Krümmung; asymptotische, geodätische, Krümmungs-Linien; Flächeninhalte; Rauminhalte; Minimalflächen; orthogonale Systeme.

P. Geometrische Transformationen; Collinearität; Projectivität und Affinität; Correlation und reciproke Polaren; Inversion; birationale und andere Transformationen.

Q. Geometrie, Verschiedenes; n-dimensionale Geometrie; nichteuklidische Geometrie; Analysis situs; Topologie und geometrische Arithmetik.

Angewandte Mathematik.

R. Allgemeine Mechanik; Kinematik; Statik einschliesslich der Schwerpunkte und Trägheitsmomente; Dynamik; Mechanik der festen Körper; Reibung; Anziehung der Ellipsoide.

S. Mechanik der Flüssigkeiten; Hydrostatik; Hydrodynamik; Thermodynamik.

T. Mathematische Physik; Elasticität; Festigkeit der Materialien; Capillarität; Licht; Wärme; Elektricität.

U. Astronomie, Mechanik des Himmels und Geodäsie.

V. Philosophie und Geschichte der mathematischen Wissenschaften; Biographie.

X. Rechnungsverfahren; Tafeln; Nomographie; graphisches Rechnen; Planimeter; verschiedene Instrumente.

Inhaltsverzeichnis.

(Die mit einem † versehenen Arbeiten sind ohne Referate.)

Erster Abschnitt. Geschichte und Philosophie.

Capitel 1. Geschichte.

A. Biographisch-Litterarisches.

B. Geschichte einzelner Disciplinen.

Capitel 2. Philosophie und Pädagogik.

A. Philosophie.

B. Pädagogik.

Zweiter Abschnitt. Algebra.

Capitel 1. Gleichungen. (Allgemeine Theorie. Besondere algebraische und transcendente Gleichungen)

Capitel 2. Theorie der Formen.

Capitel 3. Elimination und Substitution. Determinanten, symmetrische Functionen.

Dritter Abschnitt. Niedere und höhere Arithmetik.

Capitel 1. Niedere Arithmetik.

Capitel 2. Zahlentheorie.

A. Allgemeines.

B. Theorie der Formen.

Seite

Capitel 3. Kettenbrüche.

Vierter Abschnitt. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Combinationslehre.

Fünfter Abschnitt. Reihen.

Capitel 1. Allgemeines.

Capitel 2. Besondere Reihen.

Sechster Abschnitt. Differential- und Integralrechnung.

Capitel 1. Allgemeines. (Lehrbücher etc.).

Capitel 2. Differentialrechnung. (Differentiale, Functionen von Differentialen, Maxima und Minima).

Capitel 3. Integralrechnung.

Capitel 4. Bestimmte Integrale.

Capitel 6. Partielle Differentialgleichungen.

Capitel 2. Besondere Functionen.

A. Elementare Functionen (einschliesslich der Gammafunctionen und der hypergeometrischen Reihen).

C. Hyperelliptische, Abel'sche und verwandte Functionen.

D. Kugel- und verwandte Functionen.

Achter Abschnitt. Reine, elementare und synthetische Geometrie.

Capitel 1. Principien der Geometrie.

Capitel 4. Darstellende Geometrie.

Seite

Capitel 5. Neuere synthetische Geometrie.

A. Allgemeines.

B. Besondere ebene Gebilde.

Neunter Abschnitt. Analytische Geometrie.

Capitel 1. Lehrbücher, Coordinaten.

Capitel 2. Analytische Geometrie der Ebene.

A. Allgemeine Theorie der ebenen Curven.

B. Theorie der algebraischen Curven.

C. Gerade Linie und Kegelschnitte.

D. Andere specielle Curven.

Capitel 3. Analytische Geometrie des Raumes.

A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumcurven.

Seite

B. Theorie der algebraischen Flächen und Raumcurven.

C. Raumgebilde ersten, zweiten und dritten Grades.

D. Andere specielle Raumgebilde.

B. Conforme Abbildung und dergleichen.

Zehnter Abschnitt. Mechanik.

Capitel 1. Allgemeines (Lehrbücher etc.).

Capitel 2. Kinematik.

Seite

Capitel 3. Statik.

A. Statik fester Körper.

B. Hydrostatik.

Capitel 4. Dynamik.

A. Dynamik fester Körper.

B. Hydrodynamik.

Capitel 5. Potentialtheorie.

Elfter Abschnitt. Mathematische Physik.

Capitel 1. Molecularphysik, Elasticität und Capillarität.

A. Molecularphysik.

B. Elasticitätstheorie.

C. Geometrische Optik.

Capitel 3. Elektricität und Magnetismus.

Capitel 4. Wärmelehre.

A. Mechanische Wärmetheorie.

B. Gastheorie.

Seite

Capitel 2. Astronomie.

Capitel 3. Mathematische Geographie und Meteorologie.

Anhang.

Verzeichnis
der Herren, welche für den zweiundzwanzigsten Band Referate geliefert haben.

(Die Verantwortlichkeit für den Inhalt der Referate tragen die Herren Referenten. Die in Klammern gesetzten Chiffern bezeichnen die Uebersetzer der in fremder Sprache eingesandten Referate.)

A. Herr Prof. August in Berlin.
Bb. „ Professor Bobylew in St. Petersburg.
Bdn. „ Dr. Brodén in Lund.
Bdt. „ Dr. Burkhardt in Göttingen.
Bm. „ Prof. v. Braunmühl in München.
Bö. „ Dr. Börsch in Potsdam.
Br. „ Dr. Brix in Berlin.
Cly. „ Prof. Cayley in Cambridge.
Dn. „ Dickstein in Warschau.
Dz. „ Prof. Dziobek in Charlottenburg.
E. „ Prof. G. Eneström in Stockholm.
E. K. „ Dr. E. Kötter in Berlin.
El. „ Prof. Engel in Leipzig.
F. „ Dr. Faerber in Berlin.
F. K. „ Dr. F. Kötter in Berlin.
G. „ Prof. van Geer in Leiden.
Gbs. „ Assist. Prof. Gibson in Glasgow.
Glr. „ Prof. Glaisher in Cambridge.
Gr. „ Prof. Günther in München.
Gz. „ Dr. Gutzmer in Berlin.
H. „ Prof. Hoppe in Berlin.
Hk. „ Prof. Hauck in Berlin.
Hn. „ Prof. Hensel in Berlin.
Hr. „ Prof. Hamburger in Berlin.
Ht. „ Prof. Hilbert in Königsberg i. Pr.
Hz. „ Prof. Hurwitz in Zürich.
Kr. „ Prof. Krazer in Strassburg.
Kü. „ Dr. Kühne in Berlin.
La. „ Prof. Loria in Genua.
Lbg. „ Prof. Lorberg in Bonn.
Lg. „ Prof. Lange in Berlin.
Lp. „ Prof. Lampe in Berlin.
Lsg. Herr Dr. Landsberg in Heidelberg.
M. „ Prof. F. Müller in Berlin.
Mh. „ Dr. Meth in Berlin.
Mi. „ Dr. Michaelis in Berlin.
Mk. „ Prof. Minkowski in Bonn.
Mn. „ Prof. Mansion in Gent.
Ms. „ Dr. Mestschersky in St. Petersburg.
My. „ Prof. F. Meyer in Clausthal.
Mz. „ Dr. Maynz in Ludwigslust.
No. „ Prof. Netto in Giessen.
R. M. „ Dr. R. Müller in Berlin.
Sbt. „ Dr. Siebert in Gross-Lichterfelde.
Schg. „ Prof. Schlegel in Hagen.
Schn. „ Prof. Schumann in Berlin.
Scht. „ Prof. Schubert in Hamburg.
Sfs. „ Prof. Schönflies in Göttingen.
Sh. „ Dr. Schafheitlin in Charlottenburg.
Sn. „ Dr. P. Simon in Bonn.
St. „ Dr. Stäckel in Halle a. S.
Std. „ Prof. Studnička in Prag.
Sz. „ Prof. H. A. Schwarz in Berlin.
Tn. „ Prof. Treutlein in Karlsruhe.
Tx. „ Prof. Teixeira in Porto.
V. „ Dr. Valentiner in Kopenhagen.
Vi. „ Dr. Vivanti in Mantua.
Wbg. „ Dr. Wallenberg in Berlin.
Wi. „ Prof. A. Wassilieff in Kasan.
Wn. „ Prof. Wangerin in Halle a. S.
W. St. „ Prof. W. Stahl in Berlin.
Wz. „ Dr. Weltzien in Berlin.

Briefe und Zusendungen erbitten wir entweder durch Vermittelung der Verlagshandlung oder unter der Adresse:
Professor Dr. Lampe, Berlin W, Kurfürstenstr. 139.

Erster Abschnitt.
Geschichte und Philosophie.

Capitel 1.
Geschichte.

A. Biographisch-Litterarisches.

G. Eneström. Sur les bibliographies des sciences mathématiques. Bibl. Math. (2) IV. 37-42.

Enthält eine Uebersicht über die schon vorhandenen mathematischen Bibliographien und einen Bericht über die grossen bibliographischen Arbeiten, mit denen Herr G. Valentin in Berlin und die „Société mathématique de France" in Paris seit einigen Jahren beschäftigt sind. E.

P. Riccardi. Saggio di una biblioteca matematica italiana del secolo XIX. Bologna Mem. (4) X. 635-651.

Der ungemein fleissige und belesene Verfasser hat seit 1870 in mehreren Bänden eine vom Anfang des Bücherdrucks bis zum 19. Jahrhundert reichende Bibl. mat. italiana veröffentlicht und giebt nun hier die Probe einer Fortsetzung seiner Arbeit mit kurzer Darlegung der leitenden Grundsätze. Tn.

P. Riccardi. De propositione novae Bibliothecae mathematicae italicae seculi XIX. Bibl. Math. (2) IV. 56.

Herr Riccardi, der eine Fortsetzung seiner ausgezeichneten „Biblioteca matematica italiana“ herauszugeben beabsichtigt, giebt in der citirten Note Auskunft über den Plan dieser Fortsetzung.

E.

G. Vicuna. Bibliographie espagnole de l'histoire des mathématiques. Bibl. Math. (2) IV. 13-21.

F. G. Teixeira. Sur les écrits d'histoire des mathématiques publiés en Portugal. Bibl. Math. (2) IV. 91-92.

H. Suter. Bibliographische Notiz über die mathematisch-historischen Studien in der Schweiz. Bibl. Math. (2) IV. 97-106.

Fortsetzung der Reihe von Notizen über das mathematisch-historische Studium in verschiedenen Ländern (vgl. F. d. M. XXI. 1889. 3), redigirt nach demselben Plan, wie die in der Bibl. math. 1889 publicirten. Die Anzahlen der in den chronologischen Verzeichnissen citirten Schriften sind in der folgenden Tabelle enthalten:

	–1750	1751–1800	1801–1850	1851–1890
Spanien	—	2*	4	59
Portugal	—	2	3	9
Schweiz	8	7	8	36.

Dem Decennium 1881—1890 gehören in Spanien 27, in Portugal 2, in der Schweiz 18 Schriften an, also ungefähr die Hälfte der ganzen Anzahl der Periode 1851-1890. E.

G. Vicuna. Sur quelques écrits mathématiques publiés en Espagne aux 16e et 17e siècles. Bibl. Math. (2) IV. 33-36.

Notizen über 9 spanische mathematische Arbeiten aus dem XVI. und dem XVII. Jahrhundert. Die erste ist 1516, die letzte 1698 gedruckt. E.

W. Bobynin. Russische physiko-mathematische Bibliographie. I. (1886-1890. Russisch.)

Der erste Band des Werkes, welches für die Geschichte der Mathematik in Russland und für die russische Bibliographie eine grosse Bedeutung haben wird, bringt eine sehr eingehende Uebersicht aller Werke über die Arithmetik, Artillerie, Astronomie, Geographie, Geometrie, Feldmesskunst, Mechanik, Navigation, Fortification, sowie auch der Kalender, welche in Russland vom Jahre 1587 bis 1763 erschienen sind. Der Band enthält auch das Verzeichnis der Abhandlungen physiko-mathematischen Inhaltes, welche in den Schriften der Kaiserlichen Akademie in St. Petersburg bis 1763 stehen. Wi.

W. Bobynin. Umriss der Geschichte der Entwickelung der physiko-mathematischen Wissenschaften in Russland. Phys.-Math. Wiss. VII (1888), VIII (1889), IX (1890). (Russisch.)

Diese Abhandlung bildet die Fortsetzung der Artikel (vgl. F. d. M. XIX. 1889. 2), welche früher in derselben Zeitschrift erschienen sind, die mit unermüdlichem Eifer von Hrn. Bobynin seit dem Jahre 1886 herausgegeben wird. Jetzt behandelt der Verf. die Epoche der Förderung des wissenschaftlichen Studiums von Seiten des Staates, besonders die ersten Versuche zur Eröffnung höherer Schulen und die Herausgabe von Büchern physiko-mathematischen Inhaltes am Ende des XVII. und am Anfange des XVIII. Jahrhunderts, ferner die pädagogische und litterarische Thätigkeit, deren Mittelpunkt die von Peter dem Grossen 1701 eröffnete Schule der Mathematik und Navigation war. Eine besondere Aufmerksamkeit wird der in Russland berühmten Arithmetik Magnitzky's gewidmet. Wi.

W. Bobynin. Umriss der Geschichte der Entwickelung der mathematischen Wissenschaften im westlichen Europa während der Periode der Aneignung der arabischen Wissenschaft. Phys.-Math. Wiss. VII (1888), VIII (1889). (Russisch.) Wi.

S. Dickstein. Bibliographische Notiz über die historisch-mathematischen Studien in Polen. Prace mat.-fiz. II. 247-257. (Polnisch.)

Dieser Aufsatz erschien zuerst französisch in Bibl. Math. (2) III (F. d. M. XXI. 1889. 3); hier wird er durch einige neue Angaben vervollständigt. Dn.

J. Bieliński. Mathematische und physikalische Wissenschaften auf der Universität zu Wilna. Bibliographischer Abriss. Prace mat.-fiz. II. 265-432. (Polnisch.)

Eine sorgfältige Bibliographie aller litterarischen Erscheinungen im Gebiete der Mathematik und Physik und ihrer Anwendungen während der kurzen Existenz der ehemaligen polnischen Universität zu Wilna (1807—1830). Der Verfasser schildert auch den Lebensgang bedeutender Professoren, führt uns die Programme ihrer Vorlesungen vor und fügt mehrere wichtige historisch-litterarische Notizen hinzu. Die verdienstliche Arbeit ist sehr wichtig für die Geschichte der Mathematik in Polen. Dn.

W. W. Rouse Ball. A history of the study of mathematics at Cambridge. Cambridge. University Press. XVI + 264 S. 8°. (1889.)

Das Buch, dessen Titel in F. d. M. XXI. 5 nur nach einer Anzeige in der Nature angeführt werden konnte, behandelt in elf Capiteln der Reihe nach: 1) Die Mathematik des Mittelalters, 2) die der Renaissance, 3) den Beginn der neueren Mathematik, 4) das Leben und die Werke Newton's, 5) das Emporkommen der Newton'schen Schule, 6) die spätere Newton'sche Schule, 7) die analytische Schule, 8) die Organisation und die Gegenstände der Erziehung, 9) die Uebungen in den Schulen, 10) die mathematischen Tripos, 11) Umriss der Geschichte der Universität. Da in Cambridge das Studium der Mathematik stets in hohem Ansehen stand, so weist das Werk eine lange Reihe berühmter Namen unter den Lehrern und Schülern auf, deren

äusseren Lebensgang und wissenschaftliche Thätigkeit der Verf. immer kurz schildert. Mit Stolz rühmt Hr. Ball (S. 253) von der Cambridger Universität: „Die mathematische Schule war es, welche die ausgeprägteste Ursprünglichkeit und Macht entfaltete. Die Schriften von Briggs, Horrox, Wallis, Barrow, Newton, Cotes und Taylor hatten Cambridge auf den ersten Rang europäischer Schulen gebracht. Unter dem Einflusse der Newton'schen Gedanken wurde die Mathematik allmählich das vorwiegende Studium des Platzes, und für die letztere Hälfte dieser Zeit beherrschten die Mathematiker die Studien der Universität fast so unumschränkt, wie die Logiker die der mittelalterlichen Universität beherrscht hatten.“ Die Namen der meisten Mathematiker und Physiker, welche den Ruhm Englands bilden, sind daher unter den Lehrern oder den Schülern dieser altehrwürdigen Pflegestätte der Mathematik enthalten. Lp.

F. Cajori. The teaching and history of mathematics in the United States. Washington. Government printing office. 440 S. 8°.

Hrn. Cajori's Forschungen zur Vorbereitung dieses Buches haben ihn mehrere Jahre lang beschäftigt und sind hauptsächlich durch die Bibliotheken von Baltimore, Philadelphia und Washington gefördert worden. Er hat persönlich einen ausgedehnten Briefwechsel mit Zöglingen, mit früheren und jetzigen Lehrern an den höheren Unterrichtsanstalten geführt und ist durch 1000 Fragebogen unterstützt worden, welche das Unterrichts-Büreau der Regierung zu Washington versandt hat. Die Veröffentlichung ist unter Autorisation derselben Regierung erfolgt; sie zeigt die allmähliche Entwickelung der Mathematik in dem civilisirtesten Teile der neuen Welt.

Der Verfasser hat den Stoff auf vier Abschnitte verteilt. Von ihnen behandelt der erste die Colonialzeit (bis 1776), der zweite die Verbreitung der englischen Mathematik von 1776 bis 1820, der dritte die Verbreitung der französischen Mathematik, der vierte den mathematischen Unterricht der gegenwärtigen Zeit

(etwa seit 1880). In jedem Abschnitte werden die Elementarschulen, die Colleges und Universitäten mit ihren Einrichtungen, Lehrern, Lehrplänen und Lehrbüchern besprochen; dann folgen die Autodidakten der Mathematik ausserhalb des Unterrichtsverbandes, die Zeitschriften. Die Darstellung bewegt sich zwischen lebendiger Schilderung, anekdotenhaft aneinander gereihten Erzählungen persönlicher Erfahrungen von Augenzeugen und trockener statistischer Aufzählung. Aus dem reichen Inhalte ist über das geistige Leben in Amerika, insbesondere über die Vertreter der Mathematik viel zu ersehen. Leider hat der Verfasser es verabsäumt, ein Personen- oder Sachregister beizufügen; daher kostet es viel Zeit, aus dem in sehr engem unterschiedslosem Drucke ausgeführten Texte einen Namen oder eine gesuchte Stelle herauszufinden. Von den Ergebnissen mag hier nur hervorgehoben werden, dass der wissenschaftliche Betrieb der Mathematik im europäischen Geiste vom Verfasser erst seit der Gründung der Johns Hopkins University mit Sylvester's Berufung datirt wird.

Die Seiten 296—360 geben ein Verzeichnis der 168 Unterrichtsanstalten, an welche die Fragebogen verschickt worden sind, der vorgelegten Fragen nebst den darauf gegebenen Antworten.

Ein fünfter Abschnitt tritt aus dem Rahmen des Werkes heraus, indem der Verfasser „historische Aufsätze“ seiner Feder zum Abdruck bringt, nämlich: a) Geschichte der unendlichen Reihen, b) über parallele Linien und verwandte Gegenstände, c) über die Begründung der Algebra, d) Unterschied zwischen Napier'schen und natürlichen Logarithmen, e) Kreis-Quadrirer. Ein Nachtrag enthält eine Bibliographie amerikanischer Werke über Fluxionen und Infinitesimalrechnung. Lp.

S. Günther. Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter bis zum Jahre 1525. Berlin. A. Hofmann & Comp. (9) + VI + 408 S. gr. 8°. (1887.)

Leider ist es erst jetzt möglich geworden, dieses Werk des langjährigen gelehrten Mitarbeiters des Jahrbuchs anzuzeigen; wir halten es aber für so wichtig, dass wir diese sehr verspätete

Anzeige gleichwohl noch bringen. Das Buch bildet den dritten Band der „Monumenta Germaniae Paedagogica. Schulordnungen, Schulbücher und pädagogische Miscellaneen aus den Landen deutscher Zunge“, herausgegeben von Karl Kehrbach, und ist „dem Geschichtsschreiber der deutschen Pädagogik, Professor Dr. F. Paulsen in Berlin“, gewidmet. Der Verf. bewegt sich auf einem Forschungsgebiete, in welchem er seit langen Jahren erfolgreich gearbeitet hat, überreicht aber in dem Vorworte mit einem Anfluge von Weichheit die Schrift als eine Abschiedsgabe den Geschichtsforschern der Mathematik, „nachdem ihm eine ausgebreitetere Wirksamkeit auf dem von ihm bisher mit besonderer Vorliebe gepflegten Arbeitsfelde künftighin kaum mehr vergönnt sein wird.“ Auch wir fügen hier unser Bedauern hinzu, dass der vorliegende Band des Jahrbuchs der letzte sein wird, welcher regelmässige Berichte aus seiner kundigen Feder enthält.

Wir müssen uns, unter Hervorhebung der Anerkennung, welche das Werk bei in- und ausländischen Forschern gefunden hat, damit begnügen, die Disposition des Stoffes abzudrucken.

Cap. I. Das Unterrichtswesen in der ältesten Zeit und die kaiserlichen Palastschulen; Beda und Alkuin.

Cap. II. Der mathematische Unterricht an den Kloster-, Stifts- und Stadtschulen.

Cap. III. Uebersetzungszeitalter und scholastische Periode; das Quadrivium als Lehrgegenstand an den Hochschulen.

Cap. IV. Der Aufschwung der Mathematik zum selbständigen akademischen Nominalfach.

Cap. V. Verbreitung arithmetischer und geometrischer Kenntnisse auf dem Wege privater Unterweisung.

Nachwort. Namen- und Sachregister. Verzeichnis der mehrfach erwähnten Schriften. Lp.

J. L. Heiberg. Beiträge zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter. Schlömilch Z. XXXV. Hl. A. 41-58, 81-100.

Enthält drei Beiträge (41-48; 48-58, 81-98; 98-100): 1) den Abdruck einer lateinischen, vermutlich von Gherardo von Cremona

gefertigten Uebersetzung der *Κύκλου μέτρησις* des Archimed, entnommen aus cod. Dresd. lat. D, b, 86, sowie eine Kritik dieser Uebersetzung; 2) den kritisch gesichteten Abdruck einer lateinischen Uebersetzung von Euklid's Elementen, sowie eine kritische Vergleichung der diese Uebersetzung enthaltenden Handschriften sowohl mit einander als auch mit der Adelhard-Campano'schen Uebersetzung; 3) den Abdruck einer mittelalterlichen Einleitung in das Studium der Mathematik, entnommen aus cod. Bamb. H. J. IV, 11 (b bei Friedlein). Tn.

J. Köstlin. Die Baccalaurei und Magistri der Wittenberger philosophischen Facultät 1538-1546 und die öffentlichen Disputationen derselben Jahre aus der Facultätsmatrikel veröffentlicht. Osterpr. der Univ. Halle-Wittenberg. Halle. Max Niemeyer. 24 S. 8°.

J. H. Graf. Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften in Bernischen Landen vom Wiederaufblühen der Wissenschaften bis in die neuere Zeit. Drittes Heft (2. Abtlg.): Die erste Hälfte des XVIII. Jahrhunderts. Bern u. Basel. K. J. Wyss. 280 S. 8°.

Ist Fortsetzung der in F. d. M. XX. 3 und XXI. 4 angezeigten drei Hefte. Enthält, aus dem Berner Staatsarchiv entnommen, Beiträge zur Geschichte der Akademie in Lausanne bis etwa 1750 (S. 1-19), dann drei Lebensbeschreibungen, die des Lausanner Professors und späteren Kasseler Prinzenerziehers J. P. de Crousaz (1663-1750) (S. 19-49), die dessen Enkels, des Astronomen und Astrologen J. P. Loys de Cheseaux (S. 49-68), endlich die des Genfer Geodäten und Physikers, zugleich „Staatsmärtyrers" J. B. Micheli du Crest (1690-1766) (S. 68-212), sowie 21 Briefe des letzteren (S. 212-273). Tn.

J. W. L. Glaisher. Mathematics and physics. Opening address. Nature XLII. 464-468.

Herr Glaisher giebt zur Eröffnung der Sitzungen der mathematischen Section der Brit.. Ass. zu Leeds eine Schilderung des Standes der mathematischen Forschung und des höheren mathematischen Unterrichts in England und flicht viele allgemeinen Ausblicke ein. „Ich behaupte nicht, dass das Interesse an den reinen Wissenschaften als ein Zeiger für die Thatkraft und Macht einer Nation angesehen werden kann; doch ist es sicher, dass die mathematische Forschung nur in einem kräftigen Gemeinwesen blüht. Das Trachten nach der abstracten Wahrheit um ihrer selbst willen ohne den leisesten Gedanken an praktische Anwendung oder Wiederkehr in irgend welcher Gestalt und das sehnliche Verlangen nach der Erforschung des Unerkannten sind die Anzeichen der Lebenskraft einer Nation, die bei beginnendem Verfalle zuerst schwinden.“ Lp.

A. Eisenlohr. Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter (Papyrus Rhind des British Museum) übersetzt und erklärt von A. E. Zweite Ausgabe. (Ohne Tafeln.) Leipzig. J. C. Hinrichs. (1877.) II + 278 S. 4°.

Rhind erwarb in Aegypten einen Papyrus mathematischen Inhalts, dessen Entstehung auf die Zeit 2000 v. Chr. zurückgeht. Unter Aufwand von viel Zeit und Kraft hat ihn Eisenlohr in vierjähriger Arbeit entziffert. Er giebt nun S. 208-233 eine Uebersetzung des Werkes (aus Einleitung und 85 Nummern bestehend), S. 9-208 die so notwendige sprachliche und inhaltliche Erläuterung dazu, S. 1-9 eine die Herkunft, die geschichtliche Bedeutung und den vermutlichen Verfasser des Papyrus behandelnde Einleitung, zwischen S. 8 und 9 eine Tabelle der vorkommenden Zahlzeichen und eine Erläuterung über Masse, endlich S. 233-270 das Wörterbuch. Der geschichtlich so überaus wertvolle und von Cantor (1875 und 1880) vollauf verwertete Inhalt umfasst Arithmetik, Körperinhalts-, im besonderen Pyra-

miden - Berechnungen, Felderberechnungen und eine Sammlung von 24 praktischen Rechenbeispielen. Tn.

V. Bobynin. Sur le procédé employé dans le papyrus de Rhind pour réduire les fractions en quantièmes. Bibl. Math. (2) IV. 109-112.

Im Papyrus Rhind befindet sich bekanntlich eine Tabelle, die alle Brüche von der Form $\frac{2}{2n+1}$ $(2 \gtreqless n \gtreqless 49)$ als eine Summe von Stammbrüchen giebt. Das Verfahren, wodurch die ägyptischen Mathematiker diese Summen erhielten, ist noch nicht wiedergefunden. Herr Bobynin sucht in der citirten Note zu zeigen, dass aller Wahrscheinlichkeit nach die von Leonardo Pisano sogenannte „regula universalis in disgregatione partium numerorum" dabei angewandt worden ist. Nach dieser Regel werden Zähler und Nenner des Bruches $\frac{2}{2n+1}$ mit einer Zahl multiplicirt, welche $> n$, aber $< 4n+2$ ist, und welche die grösste mögliche Anzahl von Factoren enthält. Dann erhält man durch passende Zerlegungen des neuen Zählers und durch einfache Reductionen die vom Papyrus Rhind angegebenen Summen von Stammbrüchen. E.

G. Loria. Il periodo aureo della geometria greca. Saggio storico. Torino. C. Clausen. 79 S.

In dieser Abhandlung, welche aus den Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino (2) XL abgedruckt ist, giebt Herr Loria eine interessante zusammenhängende Darstellung der Blütezeit der Mathematik bei den Griechen. Die neueren Untersuchungen über das Zeitalter des Euklid, Archimedes und Apollonius sind benutzt und die Quellen überall angeführt. Die Hauptvertreter dieser goldenen Epoche der griechischen Mathematik, welche hier geschildert werden, sind I. Euklid (5-25), II. Archimedes (26-46), III. Eratosthenes (47-49), IV. Apol-

lonius (49-69), V. Hypsikles (69-71), VI. Nikomedes, Diokles und Perseus (71-77), endlich VII. Zenodorus (78-79). In gedrängter Kürze folgen den biographischen Notizen Charakteristiken der Hauptwerke der soeben genannten Mathematiker. M.

P. Riccardi. Saggio di una bibliografia euclidea. Parte quarta. Aggiunte all'Elenco cronologico delle edizioni delle opere di Euclide, e scritti intorno al quinto postulato dei suoi Elementi. Bologna Mem. (5) I. 27-84.

Im ersten Teile der Bibliographie über Euklid (Bologna Mem. (4) VIII. 401) hatte der gelehrte Verfasser über Euklid und seine Schriften eine allgemeine Einleitung gegeben, im zweiten Teile (ebenda S. 409-523) ein chronologisches Register der Ausgaben der Werke Euklid's. Ueber den dritten Teil vergl. F. d. M. XXI. 1889. 7. Der jetzt vorliegende vierte Teil giebt nach einem Vorworte über die das fünfte Postulat betreffenden Schriften (S. 27-34) Zusätze, Ergänzungen und Berichtigungen zu dem zweiten Teile, welche der unermüdliche Sammler inzwischen zusammengetragen hat; in dieser Arbeit hatte er sich der Unterstützung der Herren Narducci, Jacoli, Heiberg, Manganotti, Sommervogel zu erfreuen. Lp.

G. Wertheim. Die Arithmetik und die Schrift über Polygonalzahlen des Diophantus von Alexandria. Uebersetzt und mit Anmerkungen begleitet. B. G. Teubner. IX + 346 S. 8°.

Das Buch bietet ausser dem im Titel Angegebenen die sämtlichen Zusätze von Fermat, sowie in einem Anhang (S. 318ff.) einen kurzen Abriss der Lehre von den figurirten Zahlen, Lagrange's Beweis über die Zerfällung in Quadratzahlen und die 46 Epigramme der griechischen Anthologie sowie das Rinderproblem des Archimedes. Tn.

M. Steinschneider. Ueber die mathematischen Handschriften der amplonianischen Sammlung. Bibl. Math. (2) IV. 65-72.

Amplonius de Berka legte gegen Ende des XIV. Jahrhunderts eine Sammlung von Handschriften an, welche sich jetzt in Erfurt befindet, und über die ein beschreibendes Verzeichnis 1887 von W. Schum herausgegeben worden ist. Herr Steinschneider teilt in der oben genannten Note verschiedene Bemerkungen mit, welche sich auf die in dieser Sammlung repräsentirten arabischen Mathematiker, Astronomen und Astrologen nebst ihren Uebersetzungen beziehen, und welche auch Berichtigungen zum Verzeichnis des Herrn Schum enthalten. Am ausführlichsten handelt er über Abraham Judaeus und Abu Ali Jah'ja al-Khajjât. E.

M. Steinschneider. Miscellen zur Geschichte der Mathematik. Bibl. Math. (2) IV. 107-108.

Fortsetzung der in Bibl. Math. (2) III (F. d. M. XXI. 1889. 6) begonnenen Reihe von vermischten Notizen zur Geschichte der Mathematik.

5. Notiz über Levi ben Gerson († 1344) und über seine Schrift vom „Baculus Jacobi“.

6. Bemerkung über die Uebersetzungen von Geminos' „Isagoge“. E.

G. Eneström. Questions 29, 30, 31, 32. Bibl. Math. (2) IV. 32, 64, 96, 120.

Anfragen über verschiedene Punkte der Geschichte der Mathematik. (Vgl. F. d. M. XXI. 1889. 4.)

29) Ueber die Productentafeln, die während des Mittelalters berechnet worden sind.

30) Ueber eine im XVI. Jahrhundert angewandte Formel, um den Abstand zweier Stellen der Erdoberfläche zu bestimmen.

31) Ueber den Mathematiker Guglielmo de Lunis.

32) Ueber die verschiedenen Namen der sogenannten „sectio aurea“ (Eukl. Elem. II: 11). E.

M. Steinschneider. Ueber eine lateinische Bearbeitung von Zarkali's Saphea. Bibl. Math. (2) IV. 11-12.

Nachricht über eine in Codex Vindob. 5280 von Jacob Lateranus verfertigte Bearbeitung von Zarkali's „Saphea", die unedirt und fast unbekannt geblieben ist. Die Bearbeitung scheint vom Jahre 1504 herzurühren; über Jacob Lateranus hat Herr Steinschneider nirgends Näheres erfahren können.

E.

M. Curtze. Kommentar zu dem „tractatus de numeris datis" des Jordanus Nemorarius, Buch I. Pr. Gymn. Thorn. 1890. 19 S. 4°.

Curtze giebt (S. 5ff.) jeweils links den gereinigten Text und rechts davon dessen Uebersetzung in heutiger Wort- und Zeichensprache. Vorausgeschickt ist eine Einleitung, welche über des Jordanus Darstellungsform sowie über den Hauptgehalt seiner Schrift Aufschluss giebt. Tn.

A. Favaro. Intorno ad un trattato anonimo sull' Astrolabio riconosciuto opera di Prosdocimo de' Beldomandi. Bibl. Math. (2) IV. 81-90.

Herr Favaro, der sich schon früher eingehend mit Prosdocimo de' Beldomandi beschäftigt hat, berichtet hier teils über Familienverhältnisse der Beldomandi, teils über eine anonym gedruckte Schrift mit dem Titel: „Astrolabii quo primi mobilis motus deprehenduntur canones", deren erste Abteilung fast wörtlich mit einer handschriftlich aufbewahrten „Compositio astrolabii" des Beldomandi übereinstimmt. Bei der bibliographischen Beschreibung der Schrift bemerkt Herr Favaro, dass zwar auf dem Titel steht „Instrumentum Astrolabii etiam impressum est Venetiis in officina Petri Liechtenstein Coloniensis Germani anno 1512", aber dass es unsicher ist, ob diese Angabe sich auf das Druckjahr bezieht, oder ob sie nicht eher als Anzeige einer anderen Schrift dient. E.

P. Riccardi. Intorno al trattato di Prosdocimo de' Beldomandi sull' Astrolabio. Bibl. Math. (2) IV. 113-114.

Mit Bezug auf den Aufsatz des Herrn Favaro „Intorno ad un trattato anonimo sull' Astrolabio riconosciuto opera di Prosdocimo de' Beldomandi“ (s. das vorangehende Referat) bemerkt Herr Riccardi, dass er die fragliche Schrift in seiner „Biblioteca matematica italiana“ unter dem Mathematiker S. Catena aufgenommen hat. Herr Riccardi ist der Ansicht, dass die Schrift vor 1512 gedruckt worden ist, und dass die Worte auf dem Titel: „Instrumentum Astrolabii ... impressum est .... anno 1512“ ein späterer Zusatz ist. E.

M. Fiorini. Gerardo Mercatore e le sue carte geografiche. Boll. della Soc. geogr. Italiana. (3) III. 94-110, 182-196, 243-256, 340-380.

Im ersten Teil dieser Abhandlung wird kurz das Leben von Gerhard De Cremer erzählt: er wurde 1512 zu Rupelmonde in Flandern geboren, ist 1594 zu Duisburg in Deutschland gestorben und wird gewöhnlich mit dem Namen Mercator bezeichnet, weil Cremer im Flämischen Hausirer heisst. Der Verfasser bespricht ferner alle von Mercator construirten Landkarten und giebt über dieselben weite historisch-bibliographische Nachrichten.

Im zweiten Teile nimmt der Verfasser auf sein Werk Le projezioni delle carte geografiche (Bologna 1881) Bezug und bestimmt die Kategorien, denen die von Mercator gebrauchten Projectionsmethoden angehören. La.

M. Fiorini. I globi di Gerardo Mercatore in Italia. Ibid. 550-556.

Diese Arbeit ist eine Fortsetzung der vorigen; sie soll als ein Beitrag zur Geschichte der mathematischen Geographie angesehen werden, da sie einige Nachrichten über durch Mercator gebaute und sich in Italien befindende Globen enthält.

La.

A. Favaro. Bonaventura Cavalieri nello studio di Bologna. Atti e Memorie della R. Deputazione di Storia patria per le Provincie di Romagna. (3) VI.

Ref. in Bibl. Math. (2) II. 118; Schlömilch Z. XXXIV. Hl. A. 76.

A. Favaro. Supplemento al carteggio di Ticone Brahe con G. A. Mazini nell' Archivo Malvezzi de' Medici in Bologna. Ib. (3) VII.

A. Favaro. Ticone Brahe e la Corte di Toscana. Archivio storico italiano. (5) III. 211-224.

Briefe und Documente, welche von den Beziehungen zwischen Tycho Brahe und Galileo Galilei handeln. La.

G. Eneström. Om den nya upplagan af Galilei's samlade arbeten. Stockh. Öfv. 401-404.

Bericht über die von Favaro redigirte neue Auflage von Galilei's sämtlichen Werken und Uebersicht über den Inhalt des 1. Bandes dieser Auflage. E.

A. Favaro. Rarità bibliografiche Galileiane. I e II. Di una rara edizione tedesca e di una rarissima traduzione francese del Sidereus Nuncius. III. Sopra una traduzione inglese di alcune opere di Galileo. IV. Le operazioni del compasso geometrico e militare. Rivista delle Biblioteche 1889. 81-86, 86-91, 169-173.

A. Favaro. Intorno alla licenza di stampa del Sidereus Nuncius di Galileo Galilei. Rivista delle Biblioteche 1889. 98-103.

A. Favaro. Serie quinta di scampoli Galileiani. Padova Atti (2) VI.

Fortsetzung einer Sammlung von Nachrichten und Documenten über Galilei's Leben und Werke; die vorhergehenden vier Teile der Arbeit befinden sich in derselben Reihe der Atti e Memorie, Bd. II, III, IV, V. La.

Galileo Galilei. Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend. Erster und zweiter Tag. Aus dem Italienischen übersetzt und herausgegeben von A. von Oettingen. Leipzig. W. Engelmann. 142 S. 8°.

Als Nr. 11 von Ostwald's Klassikern der exacten Wissenschaften enthält das vorliegende Büchelchen die beiden ersten Tage der Discorsi Galilei's in vortrefflicher Uebersetzung. Von diesem Hauptwerke Galilei's gelten vor allem die Bemerkungen der Ankündigung dieser Sammlung: „Während durch die vorhandenen Einrichtungen zwar die Kenntnis des gegenwärtigen Inhalts der Wissenschaft auf das erfolgreichste vermittelt wird, haben hochstehende und weitblickende Männer wiederholt auf einen Mangel hinweisen müssen, welcher der gegenwärtigen wissenschaftlichen Ausbildung jüngerer Kräfte nur zu oft anhaftet. Es ist dies das Fehlen des historischen Sinnes und der Mangel an Kenntnis jener grossen Arbeiten, auf welchen das Gebäude der Wissenschaft ruht. .... Denn in jenen grundlegenden Schriften ruhten nicht nur die Keime, welche sich inzwischen entwickelt und Früchte getragen haben, sondern es ruhen in ihnen noch zahllose andere Keime, die noch der Entwickelung harren, und dem in der Wissenschaft Arbeitenden und Forschenden bilden jene Schriften eine unerschöpfliche Fundgrube von Anregungen und fördernden Gedanken.“ Das Nachwort des Herausgebers berichtet über die Entstehung und Bedeutung der Discorsi; die Anmerkungen (S. 130-139) erläutern, ergänzen und berichtigen den Inhalt. Lp.

A. Favaro. De como y quando el santo officio anuló la prohibicion del sistema copernicano. Mexico Soc. Alzate III.

Historische Notiz über die Gelegenheit und die Art, wie das Verbot des Copernicanischen Systems von dem heiligen Stuhl aufgehoben und der berühmte Dialog des Galilei aus der Liste der verbotenen Bücher gestrichen wurde. Tx. (Lp).

W. Láska. Ueber Marcus Marci de Kronland. Schlömilch Z. XXXV. Hl. A. 1-3.

Giebt ein Verzeichnis von Marci's physikalischen Schriften (aus den Jahren 1639-53), dann einzelne Stellen und Capitelüberschriften aus diesen, um seine Bedeutung für die Geschichte der Mechanik darzuthun. Tn.

P. Tannery. Sur un opuscule de Desargues. Darboux Bull. (2) XIV. 248-250.

Originalexemplare von Desargues' Werken gelten meist als nicht mehr vorhanden; Tannery fand die „Perspective" (von 1636) in der Pariser Nationalbibliothek und berichtet darüber. Tn.

C. Le Paige. Un astronome belge du XVII[e] siècle. Belg. Bull. (3) XX. 709-727.

Gottfried Wendelin, geb. zu Herck den 6. Juni 1580, gest. nach 1660, hat zuerst die Aenderung der Schwingungsdauer des Pendels gefunden und die stetige Abnahme der Ekliptikschiefe festgestellt. Er hat mit einer grösseren Genauigkeit als seine Vorgänger die Sonnenparallaxe berechnet. Endlich hat er dazu beigetragen, dem Kepler'schen System Geltung zu verschaffen. Mn. (Lp.)

M. del Gaizo. Contributo allo studio della vita e delle opere di Giovanni Alfonso Borrelli. Atti dell' Acc. Pont. XX. 1-48.

G. A. Borrelli wurde in Neapel den 28. Jan. 1608 geboren. Er studirte als Jüngling in Rom und lehrte in Messina von 1635 bis 1656 und von 1667 bis 1672, in Pisa von 1656 bis 1667; um 1673 suchte er Zuflucht in Rom, wo er in Armut den 31. Dec. 1679 starb. Unter den grossen Männern des XVII. Jahrhunderts, welche in Italien die Galilei'sche Schule fortsetzten, ist er wie ein Riese; in ihm, welcher breite Bildung und wunderbare Thätigkeit mit dem Genius der Synthese verband, schien die starke Natur wieder erstanden, welche die griechische Weisheit oft so bewundernswürdig machte. Der wichtige Anteil, welchen Borrelli an der Stiftung der berühmten „Accademia del Cimento" hatte, und sein grosser Beitrag zur Uebersetzung der Bücher V, VI und VII der „Kegelschnitte" von Apollonius aus dem Arabischen ins Lateinische dürften dem Studirenden der physikalischen und mathematischen Wissenschaften die Schrift des Herrn del Gaizo interessant machen; ihr Wert wird durch die Angabe vieler und die Veröffentlichung einiger auf das Leben Borrelli's sich beziehenden wichtigen Documente erhöht. Von diesen Beweisstücken will der Verf. bei der Abfassung einer neuen, von ihm vorbereiteten Biographie dieses Gelehrten einen grösseren Gebrauch machen. La.

Ch. Huygens. Oeuvres complètes de Christiaan Huygens publiées par la Société hollandaise des sciences. Tome III. Correspondance 1660-1661. La Haye. Martinus Nyhoff. 591 S.

Dieser Band umfasst den Briefwechsel der Jahre 1660 und 1661. Obgleich der Zeitraum kurz ist, beläuft sich dennoch die Anzahl der hier mitgeteilten Briefe auf 246 nebst 24 im Supplement. Die bedeutendsten Correspondenten sind: Boulliau, Fr. van Schooten, Hevelius, Stevin, Wallis, Leopold de Medicis, Heynsius, die Brüder Constantijn und Lodewijk Huygens, Moray, Oldenburg, Thevenot und Fermat. Es werden in diesem Briefwechsel die verschiedensten Gegenstände auf mathematischem und physikalischem Gebiet abgehandelt, u. a. die wichtigsten Entdeckungen, bei denen Ch. Huygens das Seinige gethan hat. So

liegt hier auch der vollständige Briefwechsel über die Erfindung der Pendeluhr vor, wobei Huygens' Berechtigung Galilei gegenüber deutlich hervortritt. Von nicht geringerer Wichtigkeit ist der Briefwechsel über die Erfindung des Fernrohres, über die Versuche mit der eben erfundenen Luftpumpe und über den Ring des Saturn. Ein alphabetisches Verzeichnis der Correspondenten und der in den Briefen genannten Personen und Sachen ist wieder beigegeben. Dann folgen eine kurze Angabe aller behandelten Gegenstände und ein Verzeichnis der in diesem und in den beiden vorigen Bänden anzubringenden Verbesserungen. Im Texte findet man Abbildungen der von Galilei entworfenen Pendeluhren, eines von Hevelius wahrgenommenen Halo, des Planeten Saturn, wie Huygens denselben zeichnete, und eines seiner langen Fernröhre. Am Ende stehen Briefe in Facsimile von Fr. van Schooten und Bl. Pascal. Die ganze Ausstattung und Ausführung ist wieder mustergültig. G.

Ch. Huyghens. Abhandlung über das Licht (1678). Herausgegeben von E. Lommel. Leipzig. W. Engelmann. 115 S. (mit 57 Figuren im Text). [Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften No. 20.]

Der vollständige Titel der hier zum ersten Male in deutscher Uebersetzung veröffentlichten berühmten Abhandlung, welche 1678 verfasst, aber erst 1690 veröffentlicht ist, lautet im Original: Traité de la lumière. Où sont expliquées les causes de ce qui luy arrive dans la réflexion, et dans la réfraction. Et particulièrement dans l'étrange réfraction du cristal d'Islande. Par C. H. D. Z. Avec un discours de la cause de la pesanteur. A Leide chez Pierre van der Aa, marchand libraire. MDCXC.

Die Wichtigkeit der Arbeit, deren Aufnahme in die Ostwald'sche Klassikersammlung freudig zu begrüssen ist, beruht darin, dass in ihr der Grund zu der Wellentheorie des Lichtes gelegt ist. Ferner wird darin das sogenannte Huygens'sche Princip entwickelt und zur Erklärung der Reflexion und Brechung angewandt. Von besonderem Interesse ist das fünfte Capitel,

das die Gesetze der Doppelbrechung am Kalkspat ableitet, bei welcher Gelegenheit auch die Polarisation des Lichtes durch Doppelbrechung von Huygens entdeckt wurde. Den Schluss der Abhandlung, die noch die atmosphärische Strahlenbrechung behandelt, aber die Dispersion mit Stillschweigen übergeht, bildet ein Capitel über die Gestalt der durchsichtigen Körper, welche zur Brechung und Zurückwerfung dienen. — Der der Originalabhandlung beigefügte Discours de la cause de la pesanteur ist mit Recht in die vorliegende Ausgabe nicht aufgenommen.

Der Herausgeber hat der Huygens'schen Abhandlung Anmerkungen beigefügt, die zunächst einen kurzen Lebensabriss von Christian Huygens (Hr. Lommel gebraucht die alte Schreibweise Huyghens) enthalten, ferner eine ausführliche Analyse des Inhalts der Abhandlung, endlich litterarische und sachliche Bemerkungen zu einzelnen Stellen. Die Uebersetzung rührt von Herrn R. Mewes her. Wn.

G. Eneström. Emanuel Svedenborg såsom matematiker. Stockh. Vetensk. Bih. XV. 29 S.

Der berühmte Geisterseher und Naturforscher Emanuel Svedenborg (geb. 1688, gest. 1772) widmete sich in seinen jüngeren Jahren auch der reinen Mathematik. Seine Arbeiten auf diesem Gebiete, besonders sein Lehrbuch der Algebra („Regelkonsten“, 1718), wurden von seinen Bewunderern als sehr hervorragend bezeichnet; aber durch eine eingehende Untersuchung zeigt Herr Eneström, dass der Wert dieser Arbeiten überschätzt worden ist. Das so eben genannte Lehrbuch der Algebra ist zwar in einigen Punkten verdienstlich, enthält aber auch grobe Fehler, und die mathematischen Aufsätze, die Svedenborg in der Zeitschrift „Daedalus Hyperboreus“ (1716-1718) publicirte, sind wenig bedeutend. Von seinen nachgelassenen mathematischen Handschriften ist nur ein kleiner Aufsatz über die Vorteile der Octonalrechnung (Rechnung mit acht als Grundzahl anstatt zehn) vollendet worden. E.

FOURIER. Oeuvres de Fourier publiées par les soins de M. Gaston Darboux sous les auspices du ministère de l'instruction publique. Tome II. Mémoires publiés dans divers recueils. Paris. Gauthier-Villars & Fils. XVI + 636 S. 4°.

Mit diesem zweiten Bande ist die neue Ausgabe der gesammelten Werke von Fourier geschlossen. Während der erste Band die analytische Wärmetheorie nach der Ausgabe von 1822 zum Abdruck brachte, jedoch ohne die vielen Druckfehler und ohne die Flüchtigkeitsversehen, um deren Beseitigung sich Herr Darboux sehr verdient gemacht hat, bringt der zweite stärkere Band eine Auswahl der wichtigeren Arbeiten aus periodischen Schriften und aus dem handschriftlichen Nachlass, da, wie Herr Darboux in der Vorrede erklärt, „wir niemals daran gedacht haben, die vollständigen litterarischen und wissenschaftlichen Werke Fourier's zu veröffentlichen". Dagegen giebt eine „Liste der wissenschaftlichen Schriften Fourier's", in welcher die nicht in die Ausgabe aufgenommenen besternt sind, einen Weiser, wo man die betreffenden Arbeiten finden kann. So ist u. a. die erst nach Fourier's Tode herausgegebene, von ihm nicht mehr vollendete Analyse des équations déterminées nicht aufgenommen. Aber auch in der vorliegenden Beschränkung bietet der Band viel interessanten Stoff. Die Abhandlungen umfassen drei verschiedene Gruppen: die erste und wichtigste enthält die als Ergänzung zur analytischen Wärmetheorie anzusehenden Untersuchungen über die physikalische Theorie der strahlenden Wärme, über die säculare Abkühlung der Erdkugel, über die Temperatur der Räume zwischen den Planeten. Eine zweite Reihe bezieht sich auf die Theorie der Zahlengleichungen. Die dritte Reihe bringt eine Auswahl aus den Arbeiten über Wahrscheinlichkeitsrechnung, welche Fourier als Leiter der statistischen Untersuchungen verfasst hat. Endlich ist aus dem Cah. V des J. de l'Éc. Pol. (1796) das Mémoire sur le principe des vitesses virtuelles abgedruckt, in welchem der jetzt allgemein übliche Beweis zuerst gegeben ist. Lp.

R. Wolf. Die von Gauss im Jahre 1815 gehaltenen Vorlesungen über die Elemente der Astronomie. Wolf Z. XXXV. 236-251.

Die eidgenössische Sternwarte besitzt ein von dem Geologen Studer geschriebenes 181 Quartseiten grosses Kollegienheft über die im Titel genannten Vorlesungen. Hr. Wolf veröffentlicht daraus die den Zweck und Plan dieser Vorlesungen darstellende Einleitung und die nachfolgende Litteraturübersicht. Tn.

C. G. J. Jacobi. Gesammelte Werke. Herausgegeben auf Veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften. V. Band. Herausgegeben von K. Weierstrass. Berlin. G. Reimer. 515 S.

Der vorliegende fünfte Band der Werke Jacobi's enthält sieben Abhandlungen, welche sich auf die Theorie der Differentialgleichungen und auf Dynamik beziehen. Die erste: „Nova methodus aequationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum variabilium quemcunque propositas integrandi" (S. 1-189) wurde aus den hinterlassenen Manuscripten Jacobi's von Clebsch im Journal für Math. LX, 1-181 veröffentlicht. Die zweite Abhandlung: „De investigando ordine systematis aequationum differentialium vulgarium cuiuscunque" (S. 191-216) liess Borchardt in demselben Journal LXIV, 297-320, drucken. Die folgenden fünf Abhandlungen sind diejenigen, welche Clebsch seiner Ausgabe der Jacobi'schen „Vorlesungen über Dynamik", Berlin, G. Reimer 1866, hinzufügte. Zur ersten derselben: „Ueber diejenigen Probleme der Mechanik, in welchen eine Kräftefunction existirt, und über die Theorie der Störungen" (S. 217-395), bemerkt Herr Weierstrass (Anmerkungen, S. 514), dass sie von Jacobi wahrscheinlich nur als eine Vorarbeit für eine von ihm geplante ausführliche und systematische Darstellung seiner auf Dynamik sich beziehenden Untersuchungen angesehen sei. Einiges darin Enthaltene ist von Jacobi in späterer Zeit (— die vorliegende Abhandlung ist wahrscheinlich schon im Jahre 1836 oder spätestens 1837 entstanden —) vollständiger und genauer

entwickelt; vieles hat er auch in andere Abhandlungen aufgenommen. Die letzten vier Abhandlungen haben die Titel: „Ueber die vollständigen Lösungen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung“ (S. 397-438), „Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen vier Variabeln“ (S. 439-464), „De aequationum differentialium isoperimetricarum transformationibus earumque reductione ad aequationem differentialem partialem primi ordinis non linearem“ (S. 465-482) und „De aequationum differentialium systemate non normali ad formam normalem revocando“ (S. 483-513). Die „Anmerkungen“ enthalten ausser dem oben Angeführten kurze Notizen zu einzelnen Stellen und eine nachträgliche Berichtigung zweier Stellen im dritten Bande. M.

JAMES CLERK MAXWELL. Scientific papers, edited by W. D. Niven. 2 vols. Cambridge. University Press.

F. FOLIE. R. Clausius: sa vie et ses travaux. Rev. des Quest. sc. XXVII. 419-487.

Biographie von Clausius (vgl. F. d. M. XX. 1888. 20, XXI. 1889. 23), geb. den 2. Jan. 1822 zu Cöslin, gest. den 24. Aug. 1888 zu Bonn. Nach einander war er Professor an der Vereinigten Königl. Artillerie- und Ingenieurschule (1850), am eidgenössischen Polytechnikum (1855) und an der Universität (1857) von Zürich, an der Würzburger (1867) und an der Bonner (1869) Universität. Besprechung seiner Hauptarbeiten. Metaphysische Folgerungen aus dem Gesetze der Zerstreuung der Energie. Mn. (Lp.)

G. LAIS. Notizie biografiche dell' Ing. Prof. Vincenzo de Rossi Re. Rom. Acc. P. d. N. L. XLII. 83-88.

Rossi Re (1834-88) war Ingenieur und Architekt, dann Lehrer der Geometrie, stets treuer Anhänger des Papstes. 13 Arbeiten von ihm werden aufgezählt (S. 87 f.). Tn.

J. LIAGRE. Notice sur Jean Charles Houzeau. Belg. Annuaire. LVI. 207-310.

Biographie des Astronomen J. Ch. Houzeau de Lehaye, geb. zu Mons am 7. Oct. 1820, gest. zu Brüssel am 12. Juli 1888. Folgendes sind seine Hauptwerke: 1) Physique du globe. 2) Règles de climatologie. 3) Géographie physique de la Belgique. 4) Histoire du sol de l'Europe. 5) Études sur les facultés mentales des animaux. 6) Le ciel mis à la portée de tout le monde. 7) L'étude de la nature, ses charmes et ses dangers. 8) Uranométrie générale. 9) Répertoire des constantes de l'astronomie ou vademecum de l'astronome. 10) Traité élémentaire de météorologie. 11) Bibliographie générale de l'astronomie (mit A. Lancaster). Mn.

E. Picard. Notice sur la vie et les travaux de Georges-Henri Halphen. C. R. CX. 489-497.

Wenig Biographisches, wesentlich Würdigung der wissenschaftlichen Verdienste von Halphen (1844-89).

H. Poincaré. Notice sur Halphen. J. de l'Ec. Pol. LX. 137-161.

Nach etwas ausführlicherer Darlegung seines Lebensganges und Kennzeichnung seines Wesens und Talentes folgt (S. 144 ff.) in 6 Abschnitten eine kritische Würdigung seiner einzelnen Arbeiten.

Brioschi. Notice sur la vie et les travaux de Georges Henri Halphen. Darboux Bull. (2) XIV. 62-72. Tn.

E. N. Legnazzi. .Commemorazione del Prof. Gilberto Govi. Atti e Memorie della R. Accademia Virgiliana di Mantova, Biennio 1889-1890. 101-153.

In dieser am 6. Juli 1890 gehaltenen Rede findet der Leser keine vollkommene Würdigung der Werke des betrauerten Physikers, sondern vielmehr einen Bericht über seine verschiedenen Aemter und ein von Freundeshand gezeichnetes Gemälde seines Privatlebens. Diejenigen, welche einen Blick auf die wissenschaftliche Thätigkeit des Verstorbenen werfen wollen, erhalten eine Vorstellung hiervon aus dem Register der Veröffentlichungen, welches als Anhang dem Vortrage des Herrn Legnazzi beigedruckt

ist. Aus der Rede entnehmen wir die Data der vornehmsten Lebensereignisse des wohlbekannten Physikers und Historikers.

Gilbert Govi ist in Mantua den 21. September 1826 geboren. Im November 1844 ging er nach Padua, um seine Universitätsstudien zu machen, und den Wünschen seines Vaters entsprechend, schrieb er sich in die juristische Facultät ein; aber eine Verordnung der österreichischen Regierung, nach welcher die Lehrstühle der Mechanik oder Physik nur den mathematischen Doctoren erteilt werden sollten, bewog Govi, die Pandecten zu verlassen und sich in die mathematische Facultät einzuschreiben. Er nahm einen thätigen und ehrenvollen Anteil an der Revolution des Jahres 1848; hierauf wanderte er nach Frankreich aus, um mit grösstem Eifer die Physik zu studiren; in seinen Beziehungen zu dem berühmten Libri fand er den Antrieb zu jenen historischen Forschungen, welche einen so grossen Teil seiner Thätigkeit beanspruchten. Der Krieg des Jahres 1859 rief ihn wieder nach Italien; hier blieb er auch nach dem Frieden mit dem Grad eines Professors der Physik an dem Istituto di studi superiori von Florenz. Von diesem Lehrstuhl ging er zu dem entsprechenden an der Turiner Universität über; und nachdem er denselben wegen gewisser Entzweiungen mit den Schülern verliess, bekleidete er bis 1878 verschiedene Aemter; in den letzten Jahren wurde er zum Professor der Physik an der Universität Neapel gewählt. Und diesen Platz hatte er noch inne, als er in Mantua den 30. Juni 1889 unerwartet starb.

La.

G. Basso. In commemorazione di Gilberto Govi.
Torino Atti. XXV. 10-29.

Geboren in Mantua 1826, wird Govi durch die Stürme von 48 nach Frankreich verschlagen, kehrt 1859 zurück, wird 1862 Professor für Physik in Turin, später in Neapel und Rom; er stirbt 1889. Seine physikalischen und geschichtlichen Arbeiten werden gekennzeichnet. Den Schluss bildet die Aufzählung derselben in 196 Nummern (S. 15-29). Tn.

H. Léauté. Notice sur Éd. Phillips. C. R. CXI. 703-713.

Nach einer Betrachtung über die wissenschaftliche wie geschichtliche Beziehung zwischen angewandter und rationeller, sowie praktischer Mechanik einerseits und mathematischer Physik andrerseits, wird die Lebensarbeit von Eduard Phillips (1821-89) dargelegt, seine Verdienste um die theoretische und angewandte Mechanik in verschiedener Richtung, insbesondere betreffs der Spirale und der Temperaturausgleichung in Chronometern.

Tn.

G. Basso. Giacomo Prescott Joule. Torino Atti. XXV. 36-37.

Kurzer Lebensabriss (1818-89) und Skizzirung der Verdienste Joule's. Tn.

Professor Dr. August Hugo Emsmann †. Hoffmann Z XXI. 155-156.

Geb. 9. Jan. 1810 zu Eckartsberga, Reg.-Bez. Merseburg, gest. 27. Oct. 1889 zu Stettin. Lp.

Nachruf für Dr. Uth, Professor am Realgymnasium zu Wiesbaden. Hoffmann Z. XXI. 395-396.

Geb. zu Wolfhagen 1842, gest. 16. März 1890 zu Wiesbaden. Lp.

W. T. Lynn. Lorenzo Respighi. Nature XLI. 254.

Geb. 1824 zu Cortemaggiore, gest. als Director der Sternwarte zu Rom am 10. Decbr. 1889. Lp.

H. Weber. Paul du Bois-Reymond. Math. Ann. XXXV. 457-469.

C. von Voit. Nekrolog auf Paul du Bois-Reymond. Münch. Ber. XX. 415-418.

O. Böklen. Paul du Bois-Reymond. Böklen Mitt. III. 1-4.

Geb. 1831, erst Physiolog, dann Mathematiker: Gymnasial-

lehrer in Berlin, Hochschullehrer in Heidelberg (seit 1865), Freiburg (seit 1870), Tübingen (seit 1874), Charlottenburg (seit 1884 bis zum Tode 1889). Tn.

G. Torelli. Cenno necrologico di Rubini Raffaele. Napoli Rend. (2) IV. 134-135.

Zuerst Architekt, dann Lyceums- und gezwungen Privatlehrer, erhält R. 1861 an der Universität Neapel die Professur für Mechanik, 1863 die für Algebra, muss aber 1870 der Gesundheit wegen zurücktreten. Folgt Aufzählung seiner Schriften. Tn.

G. Van der Mensbrugghe. Discours prononcé aux funérailles de Ch. Montigny. Belg. Bull. (3) XIX. 308-312.

A. Slaby. John Ericsson und Gustav Adolf Hirn. Gedächtnisrede. Berlin. L. Simion. 16 S. 4°.

Giebt der beiden berühmten Ingenieure Bildnisse und skizzirt des ersteren (1803-90) Bedeutung für die Locomotive, die Heissluftmaschine und die Schiffsschraube (S. 1-8) und streift des zweiten (1815-90) Verdienste als Physiker und Philosoph, um seine Verdienste als Maschinentheoretiker etwas ausführlicher hervorzuheben (S. 9-16). Tn.

F. Folie. Gustave-Adolphe Hirn. Belg. Bull. (3) XIX. 175-179.

Mascart. Notice sur les travaux de M. Hirn. C. R. CX. 115-117.

Gedrängte Darlegung von Hirn's wissenschaftlichen Arbeiten und ihrer Bedeutung. Tn.

A. G. Greenhill. The life and work of G. A. Hirn. Nature XLI. 323-324.

G. A. Hirn geb. 21. Aug. 1815 zu Logelbach im Elsass, gest. am 14. Jan. 1890 (an der Influenza) zu Colmar. Lp.

J. Thirion. Le R. P. Perry. Rev. des Quest. sc. XXVII. 201-208.

Abriss des Lebens und der Werke von Stephen John Perry, geb. zu London den 26. August 1833, gest. im Jan. 1890, einer der besten beobachtenden Astronomen Englands. Von der englischen Regierung wurde er beauftragt, den Venusdurchgang von 1874 auf den Kerguelen, von 1882 in Madagascar, die Sonnenfinsternis 1870 in Spanien, von 1886 auf den Antillen, von 1887 in Russland, von 1889 in Guyana zu beobachten. Mn. (Lp.)

A. Wangerin. Otto August Rosenberger. Astr. Nachr. CXXIII. Nr. 2952. 415-416.

Otto August Rosenberger, geb. zu Tukkum in Kurland 1800, gest. 23. Jan. 1890 zu Halle a. S., studirte unter Bessel in Königsberg i. Pr. und war dann seit 1826 Professor in Halle a. S. Seine Hauptarbeit ist die Berechnung des Halley'schen Kometen. Wn.

F. Folie. Chr.-H. Buys-Ballot. Belg. Bull. (3) XIX. 180-181.

Christoforus Henricus Diedericus Buys Ballot. Nature XLI. 371.

W. v. Bezold. Nachruf an Christoph Heinrich Dietrich Buys-Ballot. Berl. Phys. Ges. Verh. IX. 19-26.

Geb. 10. Oct. 1817 zu Kloetingen in Holland, gest. am 3. Febr. 1890 zu Utrecht. Lp.

James Nasmyth. Nature XLII. 64.

Der Verfasser des „Moon considered as a planet, a world, and a satellite“ war eigentlich Ingenieur, geb. zu Edinburgh den 19. Aug. 1808, gest. den 7. Mai 1890 zu London; Privatgelehrter seit 1857. Lp.

B. Schwalbe. Nachruf an W. Gallenkamp, Director der Friedrich-Werder'schen Gewerbeschule in Berlin. Berl. Phys. Ges. Verh. IX. 71-73.

Geb. zu Lippstadt 1820, gest. 11. Mai 1890 zu Berlin. Lp.

C. H. F. Peters †. Nature XLII. 400-401.

Geb. 19. Septbr. 1813 in Coldenbüttel (Schleswig), gest. als Director der Litchfield Sternwarte, Hamilton College, Clinton (New-York) 19. Juli 1890. Vergl. auch Astron. Nachr. Lp.

F. Brioschi. F. Casorati. Annuncio necrologico. Annali di Mat. (2) XVIII. 264.

E. d'Ovidio. Felice Casorati. Cenno necrologico. Torino Atti XXVI. 3-4.

Casorati, geb. 17. Decbr. 1835, stirbt 11. Septbr. 1890.

R. Tucker. Alexander John Ellis †. Lond. M. S. Proc. XXI. 453-461.

Alexander John Ellis, geb. 14. Juni 1814, gest. 28. Oct. 1890, Verfasser von „Algebra identified with geometry“ (1874), in welchem Werke auch eine Autobiographie des Verfassers steht, und von einer grösseren Anzahl mathematischer, phonetischer und musiktheoretischer Schriften. Lp.

P. Dziwiński. Biographie des Mathematikers Lorenz Zmurko. Prace mat.-fiz. II. 433-448. (Polnisch.)

N. E. Joukoffsky, P. A. Nekrassoff und P. M. Pokroffsky. Leben und Wirken A. J. Dawidoff's. Mosk. Math. Samml. XV. 1-57.

Geboren 1823, gestorben 1885, war A. J. Dawidoff von 1850 bis zu seinem Tode Professor an der Universität zu Moskau, wo seine glänzende pädagogische Thätigkeit einen grossen Einfluss auf die Verbreitung der mathematischen Kenntnisse in Russland hatte. Seine wissenschaftlichen Arbeiten beziehen sich auf die Mechanik, die Theorie der Wahrscheinlichkeit und die Analysis. Eine eingehende Würdigung aller Arbeiten Dawidoff's bildet den grössten Teil des Inhalts der Biographie. Wi.

K. A. Andreieff. W. J. Buniakoffsky. Nekrologische Skizze. Chark. Ges. (2) II. 149-162.

W. J. Buniakoffsky, geboren 3. (15.) December 1804, gestorben 31. Nov. (12. Dec.) 1889, Vicepräsident der Akademie der Wissenschaften von Sanct-Petersburg, erhielt seine mathematische Bildung teilweise zu Paris in den Jahren 1824-1825 und erwarb dort im Jahre 1825 die Doctorwürde. Seit dem Jahre 1828 gehörte er der Akademie Sanct-Petersburg an, deren Denkschriften er mit einer grossen Anzahl von Abhandlungen bereicherte: Die wichtigsten von ihnen beziehen sich auf die Zahlentheorie und die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Besonders zu beachten ist sein Buch: „Die Grundlagen der mathematischen Theorie der Wahrscheinlichkeiten. 1846.“ Wi.

A. Wassilieff. Wladimir Maximowitsch. Kasan Ges. VIII. 53-56.

Nachruf für Wladimir Maximowitsch, geb. 1850, gest. in Sanct-Petersburg 17. (29.) October 1889. Doctor der Mathematik zu Paris im Jahre 1879, wurde er 1882 Privatdocent der Universität zu Kasan, dann Professor ebenda und in Kiew. Die wichtigste von seinen Arbeiten ist: „Die Auffindung der allgemeinen Differentialgleichungen erster Ordnung, die sich in endlicher Form integriren lassen, und der Beweis der Unmöglichkeit einer solchen Integration für die allgemeine lineare Gleichung zweiter Ordnung. Kasan 1885.“ (F. d. M. XVII. 305.)

Wi.

A. Wassilieff, G. Schebuieff und D. Goldhammer. J. S. Gromeka. Nekrolog. Kasan 1889. Aus Samml. der Mitt. der math. Section des Naturf.-Vereins zu Kasan. VIII. 164-194.

J. S. Gromeka, Professor der Mechanik an der Universität zu Kasan, geb. 1851, gest. 12. (24.) October 1889. Die vorliegende Schrift enthält eine Lebensskizze und eine Uebersicht über die Arbeiten des Verstorbenen auf dem Gebiete der Hydrodynamik und der Theorie der Capillarität. Wi.

CH. HERMITE. Mathematical teaching at the Sorbonne. 1809-1889. Nature XLI. 597-598.

CH. HERMITE. Discours prononcé à l'inauguration de la nouvelle Sorbonne. Darboux Bull. (2) XIV. 6-36.

Ist ein Rückblick auf die wissenschaftlichen Leistungen jedes einzelnen der seit 1809 an der Sorbonne thätig gewesenen Mathematiker: Lacroix, Francoeur, Biot, Poisson, Sturm, Poncelet, Delaunay, Le Verrier, Lamé, Liouville, Serret, Duhamel, Chasles, Cauchy, Puiseux, Briot und Bouquet. Tn.

A. CAYLEY. Collected mathematical papers. Vol. III containing papers numbered from 159 to 222. Vol. IV containing papers numbered from 223 to 299. Cambridge. University Press. 1890, 1891. 4°.

H. A. SCHWARZ. Gesammelte mathematische Abhandlungen. 2 Bände. Berlin. Springer. Bd. I. XI u. 338 S., Bd. II. VII u. 370 S. gr 8°.

Die vorliegenden beiden Bände enthalten eine Sammlung aller von Herrn H. A. Schwarz seit dem Jahre 1863 veröffentlichten mathematischen Abhandlungen mit Ausschluss der „Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen“ (Göttingen 1881-1885; cf. F. d. M. XV. 373, XVII. 419). Die einzelnen Abhandlungen sind vor dem Abdruck sorgfältig revidirt; dabei hat eine grössere Zahl von Stellen eine Neubearbeitung erfahren. Zusätze und Anmerkungen, die bei Gelegenheit des Neudrucks hinzuzufügen waren, sind an das Ende eines jeden Bandes gesetzt; dieselben umfassen 22 Seiten im ersten, 21 im zweiten Bande. Die Sammlung wird, abgesehen davon, dass sie eine Uebersicht über die wissenschaftlichen Leistungen des Verfassers giebt, den Fachgenossen darum willkommen sein, weil sie die wichtigen Arbeiten des Herrn Schwarz über Minimalflächen, sowie über conforme Abbildung, die bisher in verschiedenen und zum Teil schwer zu erlangenden Zeitschriften (z. B.

Acta Societatis Fennicae) zerstreut waren, in je einem Bande vereinigt und damit leichter zugänglich macht.

Ueber die allermeisten der neu abgedruckten Abhandlungen ist seiner Zeit in den Fortschritten ausführlich berichtet. Es kann daher nicht die Aufgabe dieses Referats sein, nochmals auf den Inhalt der einzelnen Arbeiten ausführlich einzugehen; es wird vielmehr genügen, deren Titel anzuführen und dabei auf die früheren Referate zu verweisen.

Der erste Band, welcher Herrn Kummer zu seinem 80. Geburtstage gewidmet ist, vereinigt diejenigen Aufsätze des Herrn Schwarz, welche auf die Flächen kleinsten Flächeninhalts Bezug haben. Es sind die folgenden:

1) Ueber die Minimalfläche, deren Begrenzung als ein von vier Kanten eines regulären Tetraeders gebildetes räumliches Vierseit gegeben ist. Berl. Ber. 1865.

2) Bestimmung einer speciellen Minimalfläche. Preisschrift der Berliner Akademie. (F. d. M. III. 409).

3) Fortgesetzte Untersuchungen über specielle Minimalflächen.

4) Ueber ein Modell eines Minimalflächenstückes, welches längs seiner Begrenzung vier gegebene Ebenen rechtwinklig trifft.

5) Beitrag zur Untersuchung der zweiten Variation des Flächeninhalts von Minimalflächenstücken im allgemeinen und von Teilen der Schraubenfläche im besonderen.

No. 3), 4) und 5) sind in den Berl. Ber. 1872 veröffentlicht (cf. F. d. M. V. 1873. 412).

6) Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen, Wolf Z. XIX, J. für Math. LXXX.

7) Ueber diejenigen Minimalflächen, welche von einer Schar von Kegeln zweiten Grades eingehüllt werden. J. für Math. LXXX.

[Ueber No. 6) und 7) ist F. d. M. VI. 517, VII. 508 berichtet].

8) Ueber einige nicht algebraische Minimalflächen, welche eine Schar algebraischer Curven enthalten. J. für Math. LXXXVII. (F. d. M. XI. 588).

9) Sur les surfaces à courbure moyenne nulle sur lesquelles

on peut limiter une portion finie de la surface par quatre droites situées sur la surface. C. R. XCVI. (F. d. M. XV. 643).

10) Ueber ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung. — Festschrift zum 70. Geburtstage des Herrn K. Weierstrass. Acta Soc. scient. Fennicae XV. (F. d. M. XVII. 776).

11) Ueber specielle zweifach zusammenhängende Flächenstücke, welche kleineren Flächeninhalt besitzen, als die benachbarten, von denselben Randlinien begrenzten Flächenstücke. Gött. Abh. XXXIV. (F. d. M. XX. 836).

Band II enthält die übrigen Arbeiten des Herrn Schwarz in ungefähr chronologischer Reihenfolge, nämlich:

1) Elementarer Beweis des Pohlke'schen Fundamentalsatzes der Axonometrie. J. für Math. LXIII (1864).

2) De superficiebus in planum explicabilibus primorum septem ordinum. Inauguraldissertation. J. für Math. LXIV.

3) Ueber die geradlinigen Flächen fünften Grades. J. für Math. LXVII.

4) Ueber einige Abbildungsaufgaben.

5) Conforme Abbildung der Oberfläche eines Tetraeders auf die Oberfläche der Kugel.

No. 4) und 5) sind im J. für Math. LXX erschienen (cf. F. d. M. II. 626).

6) Notizia sulla rappresentazione conforme di un'area ellittica sopra un'area circolare. Annali di Mat. (2) III. (F. d. M. III. 627).

7) Zur Theorie der Abbildung.

Dieser Aufsatz, der zuerst in dem Programme der eidgenössischen polytechnischen Schule in Zürich für das Schuljahr 1869 bis 1870 veröffentlicht, für den Neudruck aber teilweise umgearbeitet ist, enthält den Beweis des folgenden Satzes: „Wenn in der Ebene (u), deren Punkte die Werte einer complexen Grösse u geometrisch darstellen, ein die Ebene überall nur einfach bedeckender, einfach zusammenhängender Bereich U gegeben ist, dessen Begrenzung von einer überall convexen Linie C gebildet wird, so giebt es stets eine analytische Function $s(u)$ des Arguments u, — eindeutig erklärt mit dem Charakter einer ganzen

Function für alle diejenigen Werte des Arguments u, welche inneren Punkten des Gebiets U entsprechen, endlich und stetig für alle Werte des Arguments u, welche Punkten der Begrenzungslinie C entsprechen, — durch deren Vermittelung der Bereich U zusammenhängend und in den kleinsten Teilen ähnlich auf die Fläche S eines Kreises abgebildet wird."

8) Ueber einen Grenzübergang durch alternirendes Verfahren. Wolf Z. XV (F. d. M. II. 214).

9) Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen. Berl. Ber. 1870. (F. d. M. II. 214).

10) und 12) Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elements vorstellt. Verhandl. der Schweizer Naturf. Gesellsch. 1871. J. für Math. LXXV (F. d. M. V. 249).

11) Zur Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. J. für Math. LXXIV (F. d. M. IV. 193). — Ein Teil dieser Arbeit ist auch in Wolf Z. XV. (F. d. M. II. 214) veröffentlicht.

13) Ueber ebene algebraische Isothermen. J. für Math. LXXVII. (F. d. M. VI. 249).

14) Beispiel einer stetigen nicht differentiirbaren Function. Verhandl. der Schweizer Naturf. Gesellsch. 1873; Arch. d. sc. phys. et natur., Genève, 1873.

Die in Rede stehende Function ist folgende:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(2^n x)}{2^n \cdot 2^n},$$

wo

$$\varphi(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$$

ist, während $E(x)$ die grösste in x enthaltene ganze Zahl bezeichnet.

15) Ueber ein vollständiges System von einander unabhängiger Voraussetzungen zum Beweise des Satzes von der Umkehrbarkeit der Differentiationsordnung. Verhandl. d. Schweiz. Naturf. Gesellsch. 1873; Arch. d. sc. phys. et natur., Genève, 1873.

16) Ueber diejenigen algebraischen Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Grössen, welche eine Schar rationaler, eindeutig umkehrbarer Transformationen in sich selbst zulassen. J. für Math. LXXXVII (F. d. M. XI. 262).

17) Essai d'une démonstration d'un théorème de géométrie. Journ. de Math. (3) VI. (F. d. M. XII. 535).

18) Verallgemeinerung eines analytischen Fundamentalsatzes. Annali di Mat. (2) X. (F. d. M. XIII. 31).

19) Auszug aus einem Briefe an Herrn F. Klein.

[Ist in der Abhandlung des Herrn Klein: „Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie", Math. Ann. XXI, enthalten; cf. F. d. M. XV. 351.]

20) Démonstration élémentaire d'une propriété fondamentale des fonctions interpolaires. Torino Atti XVII. (F. d. M. XIV. 367.)

21) Sur une définition erronée de l'aire d'une surface courbe. In dieser Note, die in Herrn Hermite's: Cours professé pendant le 2e semestre 1881-1882, second tirage, Paris 1883, p. 35-36, abgedruckt ist, zeigt Herr Schwarz an einem Beispiel, dass Serret's [Serret, Cours de calcul différ. et intégr. II p. 296 (1e édit.), p. 293 (2e édit.)] Definition der Grösse einer krummen Fläche als Grenze der Fläche eines eingeschriebenen Polyeders einer Modification bedarf, die darauf hinauskommt, dem einbeschriebenen Polyeder gewisse, von Serret mit Stillschweigen übergangene Beschränkungen aufzuerlegen.

22) Bestimmung der scheinbaren Grösse eines Ellipsoids für einen beliebigen Punkt des Raumes. Götting. Nachr. 1883. (F. d. M. XV. 733).

23) Zur conformen Abbildung der Fläche eines Rechtecks auf die Fläche einer Halbkugel. Götting. Nachr. 1883 (F. d. M. XV. 757).

24) Beweis des Satzes, dass die Kugel kleinere Oberfläche besitzt, als jeder andere Körper gleichen Volumens. Götting. Nachr. 1884. (F. d. M. XVI. 232).

25) Beweis eines für die Theorie der trigonometrischen Reihen in Betracht kommenden Hülfssatzes.

(Ist in der Abhandlung des Herrn G. Cantor im J. für Math. LXXII p. 139-142 enthalten; cf. F. d. M. II. 218).

26) Beweis des Satzes, dass unter allen einem spitzwinkligen Dreiecke eingeschriebenen Dreiecken das Dreieck der Höhenfusspunkte den kleinsten Umfang hat.

Dieser Beweis ist in Jacob Steiner's Gesammelten Werken II. 728-729 veröffentlicht und deshalb fälschlich Steiner zugeschrieben.

27) Bemerkung zu der Mitteilung des Herrn Weierstrass: Zur Theorie der aus *n* Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen. Götting. Nachr. 1884 (F. d. M. XVI. 330).

Druck und Ausstattung der beiden Bände sind mustergültig; und dasselbe gilt auch von den vier, dem ersten Bande beigegebenen, lithographirten Figurentafeln. Wn.

B. Geschichte einzelner Disciplinen.

K. Lasswitz. Geschichte der Atomistik vom Mittelalter bis Newton. Erster Band. Die Erneuerung der Corpusculartheorie. XII + 518 S. Zweiter Band. Höhepunkt und Verfall der Corpusculartheorie des siebzehnten Jahrhunderts. VIII + 609 S. Hamburg und Leipzig. L. Voss.

Das vorliegende Werk liefert einen auf historische Forschung begründeten Beitrag für das erkenntniskritische Problem, inwiefern die Corpusculartheorie der Materie die Bedingungen der Naturerkenntnis zu enthüllen vermag, und ist für die Geschichte der Physik und Mechanik von höchster Bedeutung. Systematisches und Historisches bilden ein zusammenhängendes Ganzes; doch sind, um dem Leser die Benutzung des Buches je nach seinem Interesse zu erleichtern, diejenigen Capitel, welche hauptsächlich einen systematischen Charakter tragen, im Inhaltsverzeichnis besonders kenntlich gemacht.

Die geschichtliche Entwickelung beginnt mit den Kämpfen gegen die scholastische Physik und umfasst die Zeit bis zur Einführung der Begriffe der fernwirkenden Kräfte durch Newton. Das einleitende erste Buch: „Die Atomistik im Mittelalter“ (S. 9-259) enthält zugleich neue wichtige historische Untersuchungen über die Begriffe der allgemeinen Physik, wie Aggregatzustand, Bewegungslehre, Elasticität, Elemente, Gravitation, Cohäsion, Vacuum etc, bei den griechischen und orientalischen Philosophen und Mathematikern. Im ersten Abschnitte werden die wichtigsten Berichte der Kirchenväter über die Atomenlehre und ihre Einwendungen zusammengestellt. Der zweite skizzirt die Corpusculartheorie im Mittelalter vor dem Bekanntwerden der physikalischen Schriften des Aristoteles im Abendlande.

Der dritte behandelt die Physik des Aristoteles. Die Verteidigung der Atomistik seitens der Mutakallimun bildet den Gegenstand des vierten Abschnittes. Es folgen im fünften die jüdischen und arabischen Philosophen. Der Wendepunkt durch die mathematischen Wissenschaften wird im sechsten Abschnitt: „Das Continuitätsproblem“ beleuchtet. Das Bedürfnis nach corpusculartheoretischen Erklärungen und die Frage nach dem Verhalten der Bestandteile in den chemischen Verbindungen bilden den Inhalt der beiden folgenden Abschnitte. Mit den Kritikern Occam und Nicolaus de Autricuria im neunten Abschnitt schliesst das erste Buch.

In dem zweiten Buch „Die Erneuerung der Corpusculartheorie“ (S. 261-518) wie im folgenden ist eine Anzahl von Abhandlungen zur Geschichte der Corpusculartheorie, welche der Verfasser früher veröffentlicht hat, entsprechend umgestaltet aufgenommen. Der Inhalt der einzelnen Abschnitte wird aus den nachstehenden Ueberschriften erhellen. Erster Abschnitt: „Das Princip der inneren Entwickelung“, zweiter Abschnitt: „Angriffe auf die aristotelische Elementenlehre“, dritter Abschnitt: „Die Unverwandelbarkeit der Elemente“. Der vierte Abschnitt ist Giordano Bruno gewidmet, der zuerst die öffentliche Vertretung der Atomistik aufnahm. Von jetzt ab beginnt von den verschiedensten Seiten her die Erneuerung corpusculartheoreti-

scher Lehren sich zu regen. Doch muss man von nun an zwei verschiedene Richtungen unterscheiden, eine metaphysische und eine physikalische Atomistik. Vertreter der ersteren sind, wie im fünften Abschnitt gezeigt wird, Lubin und Bodin, den Uebergang bildet Francis Bacon. Der erste entschiedene Vertreter der physikalischen Atomistik ist Daniel Sennert. Seine Lehre wird im sechsten Abschnitt entwickelt. Es folgt im siebenten David van Goorle, und die beiden letzten Abschnitte schildern die Erneuerung der Corpusculartheorie in Frankreich (1621) und in Italien.

Das III. Buch (II. Band): „Der philosophische Ausbau der Corpusculartheorie“ (S. 1-242) beginnt mit der Zeit, wo die Schöpfung einer neuen Wissenschaft, der Mechanik, als der Wissenschaft von der Energie der Bewegung, zur That ward. Dem Altertum fehlte der Energiebegriff. Die Unterscheidung der phoronomischen von der dynamischen Bewegung ist das Merkmal der modernen Wissenschaft, wie im ersten Abschnitt: „Der neue Begriff der Bewegung“ dargelegt wird. Die Entdeckungen Leonardo da Vinci's blieben ohne Einfluss. Der erste Mechaniker vor Galilei war Giovanni Baptista Benedetti. Durch Galilei wurde Naturwissenschaft möglich als Wissenschaft von der Empfindung. Galilei's Atomistik ist Gegenstand des zweiten Abschnitts. Im dritten folgt Descartes, im vierten Gassendi, im fünften Digby, im sechsten Hobbes.

Das IV. Buch: „Die naturwissenschaftliche Vollendung der Corpusculartheorie“ (S. 243-397) nennt an der Spitze des Uebergangs zur praktischen Corpusculartheorie Joachim Jungius. Es beginnt die Reihe derjenigen Corpusculartheoretiker, bei welchen das chemische Interesse vorwiegt. Jungius ist der Vorläufer Robert Boyle's, von dem im zweiten Abschnitt die Rede ist. Der dritte Abschnitt bringt die Ansichten des Otto von Guericke. Im vierten folgt Giovanni Alfonso Borelli. Der fünfte handelt von den Vibrationstheorien, und den Schluss des Buches bildet der grosse Huygens, als Höhepunkt der kinetischen Atomistik.

Mit Huygens' Tode, mit dem Ende des siebzehnten Jahr-

hunderts beginnen die dynamischen Vorstellungen die Oberhand zu gewinnen. Daher wird hier die historische Darstellung der Corpusculartheorie abgebrochen und in Buch V: „Der Uebergang zur dynamischen Theorie der Materie“ (S. 401-580) geschildert. Es enthält sieben Abschnitte. Der erste behandelt „die Realität der Wechselwirkung in der Umbildung des Cartesianismus“. Es folgen im zweiten und dritten Abschnitt Spinoza und Leibniz. Der vierte schildert den Verfall der Corpusculartheorie. Der Missbrauch derselben rief eine Abneigung gegen jede Hypothesenbildung hervor, besonders bei Newton, der nur die mathematische Beschreibung der beobachteten Erscheinungen unter Ablehnung jeder zu fassenden Theorie der Materie bezweckte. Mit der dynamischen Theorie aber zog zugleich die metaphysische Deutung ein. Die Neigung zum Mysticismus charakterisirt Abschnitt 5: „Beseelte Körper und ausgedehnte Geister“. Der nächste Abschnitt: „Attractionshypothesen“, bildet den Uebergang zum Schlusscapitel, das dem grossen „Newton“ gewidmet ist. Durch seine „Mathematischen Principien der Naturlehre“ (1687) wurde Newton der Begründer der mathematischen Physik und der Urheber der Lehre von der Gravitation als einer allgemeinen Eigenschaft der Materie, mit allen ihren Folgen.

Der „Anhang“ (S. 581-609) enthält ein Verzeichnis der unter abgekürzten Titeln citirten Werke, ein ausführliches Sachregister und ein Namenregister. Schon ein Einblick in diese beiden Register überzeugt uns von der Reichhaltigkeit des bedeutenden Werkes, dessen Inhalt hier nur kurz skizzirt werden konnte. M.

F. Cajori. A mathematical textbook of the last century. Colorado studies. I. 27-33.

Berichtet über das an den nordamerikanischen (Hoch-)Schulen von 1737 bis 1787 vielfach gebrauchte, obschon auf dem Standpunkte der Mathematik vor Newton stehende Lehrbuch von J. Ward „The young mathematician's guide“, das, erstmals 1707

erschienen, auf 475 Seiten Arithmetik, Algebra, Geometrie, Kegelschnitte und die „Arithmetick of Infinites" lehrt. Tn.

K. Fink. Kurzer Abriss einer Geschichte der Elementar-Mathematik mit Hinweisen auf die sich anschliessenden höheren Gebiete. Tübingen. H. Laupp. X + 269 S. 8°.

Nach einem allgemeinen Ueberblick wird der Stoff in 5 Abschnitte gegliedert, nämlich: Zahlensysteme und Zahlzeichen (10 S.), Gemeines Rechnen (33 S.), Allgemeine Arithmetik und Algebra (101 S.), Geometrie (74 S.), Trigonometrie (12 S.); in jedem dieser Abschnitte wird die geschichtliche Entwickelung, nach grossen Zeitabschnitten getrennt, zur Darstellung gebracht. Biographische und Litteraturnachweise (27 S.) beschliessen das Buch. Tn.

F. Seeger. Geschichtliche Darstellung der Zahlen und der sieben ersten Rechnungsarten. I. Teil. Pr. Gymn. Oldenburg. Schulj. 1889-90. 24 S. 4°.

Handelt nur von der Darstellung der Zahlen, und zwar durch Gegenstände (Finger, Steinchen, Rechenmaschinen), durch Laute (Zahlwörter und Zahlwortsysteme), durch Zeichen (Zahlzeichen und Zahlzeichensysteme). Eine Abbildung der Darstellung von Zahlen durch Finger und Hände ist angehängt. Tn.

J. Hammond. Euclid and the associative law. Mess. (2) XX. 3-4.

Aus den Sätzen XVI, XVII, XVIII des siebenten Buchs der Elemente glaubt der Verf. schliessen zu dürfen, dass Euklid das associative Gesetz für die Multiplication dreier Zahlen gekannt und in der Sprache der Proportionen ausgedrückt habe. Lp.

S. Dickstein. Nachtrag zu dem Aufsatze: „Ueber die teleologische Methode von Hoene-Wronski für die Auflösung algebraischer Gleichungen". Krak. Ber. XX. 287-291. (Polnisch.)

Der Verfasser zeigt, dass die von Jacobi in der Abhandlung: „Observatiunculae ad theoriam aequationum pertinentes" (J. für Math. XIII, 1835) gegebene Verallgemeinerung der bekannten Methode von Daniel Bernoulli zur Auffindung der kleinsten Wurzel einer algebraischen Gleichung identisch ist mit der etwas früher (1827) von Wronski behandelten „teleologischen" Methode (vgl. Jahrb. über F. d. M. XXI. 1889. 29). Mit Hülfe des Jacobi'schen Verfahrens werden die Wronski'schen Sätze sehr einfach bewiesen und in einer bequemeren Form dargestellt. Es ergiebt sich weiter, dass die Fürstenau'sche Methode der Darstellung der Wurzeln algebraischer Gleichungen, welche Baltzer und Günther als neu anerkannt haben, im Grunde genommen mit der Jacobi'schen, also auch mit der Wronski'schen Methode ganz übereinstimmt. Dn.

J. W. L. Glaisher. The method of quarter squares. Nature XLI. 9.

Hinweis auf Leslie's „Philosophy of arithmetic" von 1820.
Lp.

Th. Muir. The theory of determinants in the historical order of its development. Part I. Determinants in general. Leibniz (1693) to Cayley (1841). London. Macmillan and Co. XI + 278 S.

Als Beitrag zur Geschichte der Mathematik wird dieses Buch einen Platz in der ersten Reihe einnehmen zufolge der gründlichen Erfassung der behandelten Dinge und zufolge der ungemeinen Klarheit der Darstellung. Vor einigen Jahren teilte Hr. Muir in dem Quarterly Journal (XVIII und XXI, vergl. F. d. M. XIII. 1881. 120, XVIII. 1886. 110) eine „Liste von Schriften über Determinanten" mit, und auf dieser Bibliographie als Basis erhebt sich das Gebäude des vorliegenden Werks. Im Plane desselben liegt die gesonderte Entwickelung der Geschichte jedes einzelnen der Abschnitte, in welche der Gegenstand geteilt ist, zuvörderst die Behandlung der Determinanten im allgemeinen und danach der Reihe nach die der verschiedenen besonderen

Formen. Jedes neue Ergebnis wird bei seinem Auftreten mit einer römischen Zahl bezeichnet, und wenn dasselbe Ergebnis auf einem anderen Wege erhalten, oder von einem späteren Forscher verallgemeinert wird, so wird es zwischen den Beiträgen des letzteren unter dieselbe römische Zahl eingeordnet mit Beifügung einer arabischen. Dadurch ist Bequemlichkeit bei Verweisungen wirksam gesichert. Die erste der beiden im ersten Teile unterschiedenen Perioden erstreckt sich von 1693 bis 1812; in ihr rührt fast jeder bedeutsame Fortschritt von den französischen Mathematikern her. Es wird bemerkt, dass bei Fortlassung der Beiträge von Bézout, Vandermonde, Laplace, Lagrange, Monge, Binet und Cauchy für alle Uebrigen äusserst wenig übrig bleiben würde, und selbst dieses Wenige dürfte von geringerem Interesse sein. Die zweite Periode reicht von 1813 bis 1841, umfasst also beinahe dreissig Jahre. Der hervorragendste Name dieser Periode ist Jacobi, nächst ihm dann Schweins; doch ist nach des Verfassers Meinung nicht ein Name vorhanden, der so hervortritt wie Cauchy in der ersten Periode; ausserdem wurden die wichtigsten Leistungen an dem Gegenstande der besonderen Determinantenformen erzielt. Der Vorrang der deutschen Mathematiker kennzeichnet diese Periode, sowie derjenige der französischen die erste, obgleich auch Frankreich nicht unrühmlich in zweiter Linie steht.

In allen Beziehungen ist das Buch ein achtungswerter Beitrag zur Geschichte der Mathematik; seiner Vollendung sehen wir voller Erwartung entgegen. Gbs. (Lp.)

G. Eneström. Note historique sur la somme des valeurs inverses des nombres carrés. Bibl. Math. (2) IV. 22-24.

Herr Reiff hat in seiner „Geschichte der unendlichen Reihen“ (Tübingen 1889) Johann Bernoulli als Entdecker des Satzes $\sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{\pi^2}{6}$ angegeben. Herr Eneström zeigt hier, dass diese Angabe falsch ist, und dass Euler der wahre Entdecker des Satzes ist; Johann Bernoulli hat nur, nachdem der Satz ihm

von Euler mitgeteilt worden war, einen der zwei Euler'schen Beweise selbständig wiedergefunden. E.

S. Dickstein. Ueber das „loi suprême" von Hoene-Wronski. I. Prace mat.-fiz. II. 145-168. (Polnisch.)

Es handelt sich hier um die von Wronski für die Entwickelung von Functionen aufgestellte, nach willkürlichen Functionen fortschreitende Reihe, die, formal betrachtet, mehrere und, wenn man will, auch alle möglichen specielleren Entwickelungsformen einschliesst. Es versteht sich aber von selbst, dass bei einer so grossen formalen Allgemeinheit die Frage nach den Gültigkeits- und Convergenzbedingungen der Entwickelung um so peinlicher erscheinen muss. Bei dem damaligen Zustande der Analysis konnte aber diese Frage nicht so wichtig erscheinen, ja überhaupt nicht mit subtileren Mitteln behandelt werden. Sie wird also von Wronski meist unterschätzt und mehrmals ganz vernachlässigt. Es verdienen aber mehrere Gesichtspunkte des polnischen Mathematikers und weitgehende Anwendungen, die derselbe aus seinen Formeln zu ziehen weiss, unsere Aufmerksamkeit.

In diesem (I.) Artikel schildert der Verfasser nach einigen historischen und kritischen Bemerkungen die von Wronski und anderen gemachten Versuche, das „loi suprême" zu beweisen, und zeigt einige Anwendungen der Wronski'schen Formeln.

Dn.

H. W. Lloyd Tanner. On the history of Arbogast's rule. Mess. (2) XX. 83-101.

Hr. Tanner giebt eine Bibliographie der Arbogast'schen Regel. Diese wurde von ihrem Entdecker mitgeteilt auf S. 1-33 des Werkes: L. F. A. Arbogast. Du calcul des dérivations. Strasbourg. An VIII (1800). XXIII + 404 S. 4°. Die weiteren Autoren, deren bezügliche Schriften der Reihe nach besprochen oder bloss angeführt werden, sind: Pietro Paoli (1806), S. F.

Lacroix (1810), J. F. Français (1815), John West (1838), A. De Morgan (1839, 1842, 1846, 1851, 1865), W. F. Donkin (1851), A. Cayley (1861, 1878), S. Roberts (1861, 1866), J. J. Thomson (1878), G. David (1882, 1887). Lp.

P. MANSION. Sur les postulats et les axiomes d'Euclide. Brux. S. sc. XIV B. 35-45.

Hinter den Definitionen des I. Buchs der Elemente Euklid's stehen in den meisten Handschriften und Ausgaben dieses berühmten Werks fünfzehn Sätze unter zwei verschiedenen Ueberschriften geordnet: „Postulate“ und „Grundsätze“ oder „Axiome“. Der Verf. unterzieht diese Sätze einer kritischen Sichtung in Betreff ihrer Urkundlichkeit. Folgendes sind seine schliesslichen Ermittelungen: 1) Die besten Handschriften der Elemente enthalten die sechs Postulate und die neun Axiome. 2) Jedermann giebt zu, dass die drei ersten Postulate (Constructionspostulate) des Euklid würdig sind und ihm zugeschrieben werden dürfen. 3) Ebenso verhält es sich mit den drei übrigen. (4. Alle rechten Winkel sind gleich. 5. Zwei Geraden treffen sich, wenn die Summe zweier inneren Winkel einer und derselben Seite kleiner als zwei Rechte ist. 6. Zwei Gerade können keinen Raum umschliessen.) Euklides hat praktisch die Notwendigkeit des Rückgriffs auf diese Postulate erkannt, und zwar bei dem fünften, weil er es nicht beweisen konnte; beim vierten und sechsten, weil er die sphärische Geometrie vermeiden musste. 4) Die Axiome 1 bis 9 bilden einen logischen Inbegriff ganz eng mit einander verwandter Sätze, welche Euklid nicht von einander wird haben trennen wollen. Alles zusammengefasst, die sechs Postulate und die neun Axiome dürfen dem Euklid zugeschrieben werden. Mn. (Lp.)

P. MANSION. Analyse des recherches du P. Saccheri, S. J., sur le postulatum d'Euclide. Brux. S. sc. XIV A. 43-45, 59; B. 46-59.

Geschichtliche Darstellung der ersten Untersuchungen über

die nichteuklidische Geometrie (Lobatschewski, Bolyai, Gauss, Riemann, De Tilly, Beltrami). Möglichkeit der Ableitung der nichteuklidischen Geometrie aus dem Satze bezüglich des Hypotenusenquadrats beim rechtwinkligen Dreiecke. Endlich Besprechung des Werks: „Euclides ab omni naevo vindicatus, auctore H. Saccherio, S. J. Mediolani MDCCXXXIII", von dem Hr. Beltrami in der Sitzung vom 17. März 1889 in der Akademie der Nuovi Lincei (V_1. 441-448, F. d. M. XXI. 33) eine Inhaltsübersicht gegeben hat. Saccheri hat das Euklidische Postulat zu beweisen vermeint; was er aber im Grunde streng begründet hat, das sind die ersten Grundsätze der Lobatschewski'schen Geometrie und die ersten Eigenschaften der Aequidistanten einer Geraden, die später durch Lamarle, De Tilly, Frischauf ermittelt sind. Mn. (Lp.)

W. J. James. The use of the word antiparallel. Nature XLI. 10.

E. M. Langley. On the use of the word antiparallel. Nature XLI. 104-105.

Mitteilungen über verschiedene Stellen, wo das Wort vorkommt, so bei Leibniz, Acta erudit. 1691, S. 279, ferner in Murray's New English Dictionary von etwa 1660. Lp.

J. S. Mackay. Historical notes on a geometrical problem and theorem. Edinb. M. S. Proc. VIII. 93-94.

Die betreffende Aufgabe ist die, zwischen zwei Seiten eines Dreiecks eine Gerade so zu legen, dass sie jeder der beiden Strecken auf diesen Seiten zwischen ihr und der Basis gleich ist. Neuere Lösungen in Edinb. M. S. Proc. II, III (F. d. M. XVI. 1884. 483), Educ. Times XXXVII. 328, Vuibert's Journ. de Math. élém. IX. 45 werden angeführt. Dann wird gezeigt, dass Hr. Neuberg sie gestellt und gelöst hat in der Nouv. Corresp. math. I, II; aber eine viel frühere Lösung ist jetzt gefunden worden, nämlich von J. Turner aus „Ladies'

diary" für 1774 in der Lösung einer 1773 von T. Moss gestellten Aufgabe.

Der Lehrsatz, welcher den zweiten Teil der Notizen betrifft, ist der über die Mittelpunkte der Diagonalen eines vollständigen Vierseits. Derselbe ist im „Ladies' diary" für 1795 gegeben, während man ihn gewöhnlich Gauss zuschreibt (1810).

Gbs. (Lp.)

F. Rudio. Das Problem von der Quadratur des Zirkels. Wolf Z. XXXV. 1-51.

Zuerst werden die Gründe für die Berühmtheit dieses Problems dargelegt, dann wird seine Geschichte von den ältesten Zeiten ab erzählt. Eingehendere Behandlung erfahren die Leistungen von Vieta und Snellius-Huygens, dann von Euler und besonders Lambert, endlich die schrittweise Lösung durch Liouville, Hermite und Lindemann. Tn.

M. Cantor. Ueber einige Constructionen von Lionardo da Vinci. Hamb. Mitt. II. 8-15.

Aus Lionardo's Nachlass sind 13 Hefte handschriftlicher Notizen erhalten; 1881-89 wurden sie in photographischem Abdruck herausgegeben. Darin findet sich auch Mathematisches; von diesem erschliesst uns Hr. Cantor die Zeichnungsweise regelmässiger Vielecke, und zwar des Fünfecks (in drei Arten), des 8-, 9- und 18-Ecks. Richtig ist nur eine, unbrauchbar eine, die übrigen liefern praktisch genügende Ergebnisse. Tn.

R. H. Graham. Newton's influence on modern geometry. Nature XLII. 139-142.

An einzelnen Constructionen wird der enge Zusammenhang zwischen den Anschauungen Newton's und denen der neueren Geometrie nachgewiesen, als Beitrag zu der englischen Ansicht, dass bei Newton schon alle Entdeckungen der Neuzeit vorgebildet seien, so u. a. Culmann's graphische Statik und die Geometrie der Lage. Lp.

É. Vigarié. Esquisse historique sur la marche du développement de la géométrie du triangle. Mathesis X. Suppl. 25 S.

Sonderabzug aus Assoc. Franç. XVIII; vergl. F. d. M. XXI. 1889. 35. Lp.

É. Vigarié. Sur un ouvrage de Crelle. J. de Math. élém. (3) IV. 32-35.

Dieser Artikel ist durch einen von Hrn. Schlömilch hervorgerufenen Prioritätsstreit bezüglich der sogenannten Brocard'schen Punkte veranlasst; Hr. Vigarié bespricht kurz den Inhalt der Schrift von A. L. Crelle: „Ueber einige Eigenschaften des ebenen geradlinigen Dreiecks rücksichtlich dreier durch die Winkelspitzen gezogenen geraden Linien“. Berlin. 1816. Lp.

P. Mansion. Crelle ou Brocard. Mathesis X. 28-30.

Crelle hat 1816 die Grundeigenschaft der Punkte gefunden, welche Brocard'sche Punkte von Hrn. Neuberg genannt worden sind; von dem Letzteren stammt auch die Benennung des Lemoine'schen Punktes für den Treffpunkt der antiparallelen Mittellinien her. Da Crelle die Verfolgung des Gegenstandes aufgegeben hat, während die Herren Lemoine und Brocard die Dreiecksgeometrie beträchtlich bereichert haben, so ist es nach des Verfassers Ansicht richtig, die beiden Bezeichnungen beizubehalten: „Brocard'sche Punkte“, „Lemoine'scher Punkt“. Mn. (Lp.)

É. Vigarié. Sur l'origine du mot orthocentre. J. de Math. élém. (3) IV. 106-107.

Von H. Besant und von Ferrers in Cambridge wurde der Name „orthocentre“ 1866 für den „Höhenschnitt“ eines Dreiecks gebraucht; gedruckt zuerst in des Ersteren „Conic sections treated geometrically“ 1869. Lp.

C. Le Paige. La formule d'Ozanam est due à Snell. Mathesis X. 34-36.

Die Näherungsformel (F. d. M. XXI. 1889. 375):

$$B = \frac{3b}{c+2a},$$

welche den Gegenwinkel B der kleineren Kathete b in dem rechtwinkligen Dreiecke mit den Katheten b, c und der Hypotenuse a giebt, oder vielmehr die entsprechende Construction, stammt von W. Snell her (Cyclometricus, 1621). Sie wird ihm ausdrücklich von A. Girard zugeschrieben (Table des sinus, 1626), ebenso von Huygens (De circuli magnitudine inventa, 1654). Letzterer zeigt, dass die Formel für B immer einen zu kleinen Wert liefert. (Nach M. Cantor, Vorlesungen über die Geschichte der Math. II. 184, kommt die Formel schon bei Nicolaus Cusanus vor, also fast 200 Jahre vor Snell. Lp.) Mn. (Lp.)

E. de Jonquières. Note sur un mémoire de Descartes longtemps inédit, et sur les titres de son auteur à la priorité d'une découverte dans la théorie des polyèdres. C. R. CX. 261-266.

E. de Jonquières. Écrit posthume de Descartes sur les polyèdres. C. R. CX. 315-317.

E. de Jonquières. Note sur un mémoire présenté, qui contient, avec le texte complet et revu de l'écrit posthume de Descartes: „De solidorum elementis“, la traduction et le commentaire de cet Ouvrage. C. R. CX. 677-680.

In (1) wird hingewiesen auf eine Stelle in Descartes' Werken (Ausgabe von 1860, Bd. II, 214), aus welcher, in Verbindung mit einer anderen (II, 216), folge, dass Descartes schon etwa 130 Jahre vor Euler dessen berühmten Hauptsatz von den Vielflächnern gekannt und benützt habe. In (2) wird dann dargethan, dass D. diesen Satz selbst und bestimmt ausgesprochen habe (II, 218), so dass er künftig der Euler-Descartes'sche Satz

heissen müsse, wie übrigens schon Baltzer nachgewiesen (1861). Aufsatz (3) enthält die Begleitworte zu dem wörtlichen und zum Teil verbesserten Abdruck der betreffenden Arbeit von Descartes.

Tn.

E. DE JONQUIÈRES. Note sur le théorème d'Euler dans la théorie des polyèdres. C. R. CX. 169-173.

Gegen Euler's Satz von den Vielflächnern (1752) hat Lhuilier drei Einwände erhoben (1813 mitgeteilt durch Gergonne); diese Einwände entkräftet hier der Verf. Tn.

E. DE JONQUIÈRES. Écrit posthume de Descartes intitulé „de solidorum elementis". Texte latin, revu et accompagné de quelques notes explicatives. Bibl. Math. (2) IV. 43-55.

Unter den nachgelassenen Handschriften von Descartes befand sich auch eine Abhandlung zur Polyedrometrie mit dem Titel: „De solidorum elementis". Das Originalmanuscript dieser Abhandlung ist jetzt verloren gegangen, aber wir besitzen noch eine von Leibniz um 1675 verfertigte Abschrift, welche 1860 von Foucher de Careil herausgegeben worden ist. Da aber der Text dieser Ausgabe an mehreren Stellen verstümmelt ist, hat Herr de Jonquières es unternommen, eine berichtigte Textausgabe zu besorgen und die schwer verständlichen Stellen mit erläuternden Anmerkungen zu versehen. Die Abhandlung von Descartes ist besonders dadurch merkwürdig, dass die bekannte Euler'sche Relation zwischen der Anzahl von Ecken, Flächen und Kanten eines Polyeders schon hier aufgestellt und bewiesen ist: sie enthält auch verschiedene Sätze über die fünf regelmässigen und über neun der 13 Archimedischen Polyeder. E.

A. VON BRAUNMÜHL. Notiz über die ersten Kegelschnittzirkel. Schlömilch Z. XXXV. Hl. A. 161-165.

Vier Kegelschnittzirkel werden beschrieben und abgebildet:

der erste von Barocius (1586), der zweite von Tiene (Ende des 16. Jh.), der dritte von dem bekannten Chr. Scheiner (1614), der vierte von Bramer (1684). Tn.

S. Dickstein. Hoene-Wronski's Phoronomie. Denkschr. d. Pos. Ges. d. Freunde d. Wiss. XVII. 1-10. (Polnisch.)

Der Verfasser untersucht hier die von Transon (F. d. M. VI. 1874. 237) angeregte Prioritätsfrage in Bezug auf die Idee einer reinen Bewegungslehre. Transon hat diese Frage für Wronski gegen Ampère entschieden. Er wusste aber nicht, dass Wronski selbst die Idee der Phoronomie auf Kant (Metaph. Anfangsgründe der Naturlehre) zurückführt, und dass auch Carnot gleichzeitig mit Wronski ganz ähnliche Gedanken geäussert hat. Die Erörterung dieser Sache bildet den Inhalt dieses kleinen Aufsatzes. Dn.

A. Kiel. Geschichte der absoluten Masseinheiten. Pr. Kgl. Gymn. Bonn. Schuljahr 1889-90. 24 S. 4°.

Nach einer Erklärung des Begriffes der absoluten Masseinheiten werden diese in solche im weiteren Sinne oder Fundamentaleinheiten und in solche im engeren Sinne oder abgeleitete absolute Masse unterschieden. Darauf folgt die Geschichte einer jeden Gruppe dieser Einheiten. Bei den Fundamentaleinheiten (S. 3-13) wird das System der alten, insbesondere der babylonischen Zeit und dann das der neueren, mit Huygens (1658) beginnenden Zeit besprochen, ausführlicher die Festsetzung und Einführung der metrischen Masse. Bei der geschichtlichen Entwickelung der zweiten Gruppe (S. 13-24) werden die Bemühungen und Erfolge von Fourier, Gauss, Maxwell, Weber und der British Association dargethan. Tn.

G. Karsten. Die internationale General-Conferenz für Mass und Gewicht in Paris 1889. Rectoratsrede. Kiel. Univers.-Buchh. Paul Toeche. 23 S. 8°.

O. Röthnick. Darstellung der Entwickelung der Gesetze des Stosses von Cartesius an. Pr. Ritter-Ak. Brandenburg a. H. Schuljahr 1889-90. 11 S. 4°.

Berichtet zuerst von den misslungenen Versuchen Descartes', die Gesetze des Stosses festzustellen (1692), und von seinen missglückten Abweisungen der erhobenen Einwände, dann (S. 4) von den Bestrebungen eines Fabri, Borelli und Marci, hierauf ausführlicher (S. 5 ff.) von den naturgemässen Aufstellungen, welche Huygens, Wallis, Wren machten. Tn.

Dwelshauvers - Dery. Sur une notice biographique relative à G. H. Hirn. Belg. Bull. (3) XX. 132-137.

In einer Hirn'schen Arbeit aus dem Jahre 1854 behauptet dieser Physiker das Princip der Aequivalenz von Wärme und Arbeit in einem besondern Falle gefunden zu haben, bevor er die von Mayer erhaltenen Resultate kennen gelernt hatte.

Mn. (Lp.)

Noble. Mechanical science. Opening address. Nature XLII. 499-507.

Der Eröffnungsvortrag der Section für Mechanik bei der Brit. Ass. in Leeds beschäftigt sich mit den Aenderungen der Ausrüstung und Ausstattung der Kriegsschiffe, welche die moderne Technik seit dem Krimfeldzuge hervorgerufen hat.

Lp.

Berthelot. Sur l'histoire de la balance hydrostatique et de quelques autres appareils et procédés scientifiques. C. R. CXI. 935-941.

Führt Stellen aus Handschriften des 13. und des 12. sowie aus einem Gedichte des 4. oder 5. Jahrhunderts an, durch welche der Gebrauch der hydrostatischen Wage im Mittelalter und im Altertum erwiesen wird, ebenso der des Aräometers, entnimmt aus einer Handschrift des 10. Jh. die specifischen Gewichte von

6 Metallen, erweist unser Wort „Bronze“ als von Brundisium herstammend nach, zeigt endlich die sogenannte „Cardanische Aufhängung“ als in einer Handschrift des 12. Jahrhunderts vorkommend und das wörtliche Uebereinstimmen mancher Recepte dieser Handschrift mit Stellen des Leydener Papyrus. Tn.

E. Lampe. Litterarische Notiz über den Körper grösster Anziehung. Berl. Phys. Ges. Verh. IX. 78-79.

Mitteilung der Stelle aus den Mém. Sav. Étr. I. 175 (1750), wo der Marquis de Saint-Jacques diesen Körper behandelt.

Lp.

E. Wiedemann. Zur Geschichte der Brennspiegel. Wiedemann Ann. (2) XXXIX. 110-130.

Nachdem der Verfasser die Spärlichkeit sowohl der physikalischen Experimente des Altertums als der Litteratur über die physikalischen Kenntnisse der Griechen und Araber besprochen, wendet er sich der Lebensbeschreibung des hervorragendsten Optikers der Araber, Ibn al Haitam, und der Aufzählung seiner zahlreichen Werke nebst deren Bearbeitungen zu. Näher eingegangen wird auf seine Schrift über sphärische und auf die über parabolische Hohlspiegel und deren Inhalt in folgendem zusammengefasst: Ibn al Haitam kennt die Lage des Brennpunktes, ebenso die Längsabweichung der sphärischen Spiegel und construirt stark wirkende Hohlspiegel durch Aneinanderfügen verschiedener Kugelzonen von passender Krümmung. Desgleichen ist er mit den Eigenschaften der parabolischen Spiegel wohl vertraut. Das bedeutendste Verdienst Ibn al Haitam's besteht darin, dass er die optischen Kenntnisse des Altertums, durch eigene Forschungen vertieft und erweitert, dem Abendlande übermittelt hat. Nach einer ausführlichen Mitteilung bibliographischer Notizen, optische Arbeiten des Altertums und des Mittelalters betreffend, wird zum Schlusse noch die Frage, ob Roger Baco Teleskope mit Linsen gekannt habe, verneint. Mh.

E. Wiedemann. Zur Geschichte der Lehre vom Sehen. Wiedemann Ann. (2) XXXIX. 470-474.

Von den zwei Hauptansichten des Altertums über das Zustandekommen des Sehens, der Platonischen, nach welcher tastende Strahlen vom Auge zu den Objecten gehen, und der Aristotelischen, nach welcher umgekehrt Strahlen von den Gegenständen in das Auge gesandt werden, war die erstere, gestützt durch die Autorität des Euklid und Ptolemaeus, für viele Jahrhunderte die allein geltende. Wiedemann widerlegt nun die Meinung, nach welcher Ibn al Haitam († 1038) zuerst wieder die Anschauung des Aristoteles zu Ehren gebracht hat, indem er zeigt, dass bereits dessen Vorgänger Al Fârâbî (870-950), Al Râzî († 923 oder 932), Avicenna († 1037) und die Schriften der lauteren Brüder (10. Jahrh.) sich zu dieser richtigen Anschauung bekannten. Aber erst Averroes († 1198) dringt darauf, dass der oft aus Bequemlichkeit — auch von Ibn al Haitam — noch benutzte Ausdruck „Sehstrahlen“ gänzlich vermieden werden solle.

Mh.

E. Wiedemann. Ueber das Sehen durch eine Kugel bei den Arabern. Wiedemann Ann. (2) XXXIX. 565-576.

Die Arbeit nimmt Bezug auf eine Notiz Schellbach's, welche dieser in Poske Z. II. 291 im Anschluss an seine darstellende Optik S. 17 unter dem Titel „Ueber eine unbekannte Eigenschaft der Convexlinsen“ gegeben hatte. Es handelt sich um die Thatsache, dass ein Auge hinter einer Linse in gewissen Fällen als Bild eines Punktes einen Punkt und eine Kreislinie sieht. Wiedemann zeigt, dass dies schon zwei arabischen Gelehrten, welche sich mit dem Studium des Regenbogens beschäftigten, bekannt gewesen sei. Der eine, ein Commentator der Optik des Ibn al Haitam, war vielleicht Kamâl ed Dîn Abû al Hasan al Fârisî, der andere war Kotb ed Dîn Abû al Tanâ. Als bemerkenswert sei hervorgehoben, dass jener Commentator das Entstehen des Regenbogens ähnlich wie wir heute erklärt; ferner die Erkenntnis, dass an einer brechenden Kugel der Einfalls-

und Austrittswinkel in die Luft gleich sind, dass ein Strahl auf demselben Wege hin- und zurücklaufen kann, und dass parallele in derselben Ebene einfallende Strahlen sich je nach der Grösse ihres Einfallswinkels innerhalb der Kugel, auf ihrer Oberfläche, oder ausserhalb, alle aber die Axe hinter der Kugel schneiden. Die hieraus sich ergebenden Brechungserscheinungen, von denen eine die am Anfange dieses Referats angegebene ist, werden gefolgert und durch zwei Versuche geprüft. Die Darstellung in der Abhandlung ist nicht durchweg klar, die Terminologie mehrmals verschwommen und die eine beigegebene Figur wenigstens in einigen Punkten fehlerhaft, so dass die Identität des arabischen Versuchs mit dem Schellbach'schen nicht ohne weiteres einleuchtet. (Vergl. hierzu Poske Z. III. 301 und IV. 111). Mh.

B. Göhne. Abriss der Geschichte der Elektricität.
Pr. Neust. Realgymn. Dresden 1889-90. 29 S. 4°.

In vier Abschnitte (S. 1; 12; 20; 23) ist der Stoff verteilt: 1) Leistungen bis Galvani; 2) Entdeckungen von Galvani, Volta, Davy u. a. bis 1820; 3) Entwickelung der Elektrodynamik; 4) Thatsachen und Bedingungen der Induction. Zahlreiche genaue Litteraturnachweise erhöhen den Wert der gedrängten Arbeit. Tn.

R. Wolf. Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Litteratur. In zwei Bänden. Erster Halbband.
Zürich. F. Schulthess. XVI + 384 S. gr. 8°.

Das neue Handbuch der Astronomie verfolgt einen ähnlichen Zweck und ist auch in der Ausführung ähnlich angelegt wie das bekannte vor zwanzig Jahren erschienene „Handbuch der Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie" desselben Verfassers. Das auf 4 Bücher, in 4 Halbbänden, bemessene Werk, dessen erstes Buch hier vorliegt, verfolgt einen doppelten Zweck. Einmal soll es gleichsam eine Einführung in das Studium der Astronomie sein, welche dem Studirenden einen durch lange Erfahrung erprobten und bewährten Weg zeigt, der ihn sicher auf die Höhe

der Wissenschaft führt; zweitens soll das Werk den Fachgenossen als handliches Nachschlagebuch dienen.

Das erste Buch giebt nach einem einleitenden Capitel über die Aufgabe der Astronomie eine gedrängte Uebersicht über die Geschichte dieser Wissenschaft (S. 6-50) und macht dann den Studirenden mit den einem Astronomen nötigen Vorkenntnissen aus der Arithmetik, Geometrie, Mechanik und Physik bekannt. Die „Arithmetik" (S. 51-138) umfasst die Elemente der Arithmetik, der Algebra, der Reihen, der Differential- und Integralrechnung und die Methode der kleinsten Quadrate; die „Geometrie" (S. 139-259) enthält Planimetrie, Trigonometrie, Elemente der analytischen Geometrie der Ebene, Stereometrie, die Elemente der Theorie der Raumcurven und der krummen Flächen und die Lehre von den verschiedenen Projectionen; die Mechanik (S. 260-283) behandelt kurz die Elemente der Theorie der Kräfte und der Bewegungen, besonders die Centralbewegung, die wichtigsten Principien der Mechanik, die Rotation, die Brachistochrone und Isochrone und die Anziehung des Ellipsoids; die „Physik" (S. 284-380) bringt Grundbegriffe der Physik, das Pendel mit Anwendungen, einiges aus der Hydraulik und Pneumatik, die Hypsometrie, die Wellenlehre, die Theorie der optischen Instrumente, die Hauptsätze der Wärmelehre und einige Anwendungen der Lehre vom Magnetismus und der Elektricität. Alle diese einleitenden Lehren sind mit Rücksicht auf ihre Anwendung in der Astronomie ausgewählt. Ueberall tritt neben der kurzen Einführung in die Theorie das historische Moment wesentlich hervor. Die Anmerkungen zu den einzelnen Paragraphen enthalten eine Fülle litterarisch-historischer Notizen.

Das zweite Buch wird eine „Einleitung in die Astronomie" geben, das dritte eine „Theorie der Instrumente und Messungen", das vierte, als Krönung des Ganzen, die „Mechanik und Physik des Himmels" behandeln. M.

J. Oppert. Un annuaire astronomique chaldéen, utilisé par Ptolémée. C. R. CXI. 716-721.

Im britischen Museum liegen Keilschriftberichte über Planetenstellungen und Mondfinsternisse aus dem Jahre 522-521 v. Chr., Berichte von grosser Wichtigkeit, weil sie einerseits mit Angaben des Almagest sich decken und genaue Daten für die Zeit des Kambyses liefern, andererseits die von Le Verrier gegebenen Elemente der Mondberechnung grossartig bestätigen. Oppert giebt eine Uebersetzung des Actenstückes, das Ergebnis zwanzigjähriger Forschung. Tn.

W. M. PAGE. New light from solar eclipses; or chronology corrected by the rectification of errors in the received astronomical tables. With an introduction by the Rev. J. Brookes. St. Louis. Barns Publishing Co. [Nature XLI. 529-531.]

Das Werk eines Theologen, dessen „Theorie irrig in ihren Begriffen und nicht gewährleistet in ihrer Anwendung“ ist. Lp.

W. E. PLUMMER. The eclipse of Thales. Nature XLII. 390-391.

Zurückweisung der durch Hrn. Page in dem eben erwähnten Werke getroffenen Bestimmung (8. Juli 597 v. Chr. statt 585 nach Hind und Newcomb.) Lp.

J. D. LUCAS. L'astronomie à Babylone. Rev. des Quest. sc. XXVIII. 450-483.

Darstellung der Untersuchungen der Herren Strassmaier und Epping. 1) Berechnung des Neumonds bei den Chaldäern. 2) Mondephemeriden der Chaldäer. (Vgl. F. d. M. XXI. 1889. 44). Mn. (Lp.)

FRIEDRICH MÜLLER. Die Chronologie des Simeon Šanglâwâjâ nach den drei Berliner Handschriften dargestellt. Diss. Leipzig. 70 S. 8°.

A. Kraemer. De Manilii qui fertur astronomicis. Inest de imperatoribus Romanis in siderum numerum relatis disputatio. Diss. Marburg. 71 S. 8°.

S. H. Barberena. Tratado elemental del calendario musulmán. San Salvador 1890. 4 + 98 + 1 S. 8°.

Enthält eine ausführliche Darstellung der mohammedanischen Zeitrechnung. Als Einleitung dient eine Notiz über die Zeitrechnung der Araber vor Mohammed; dann folgt die Auseinandersetzung des mohammedanischen Kalenderwesens und Herleitung von Formeln, welche den Uebergang vom mohammedanischen zum julianischen oder gregorianischen Kalender und vice versa ermöglichen. Einige historische Noten und chronologische Tabellen sind der Darstellung beigefügt. E.

Hues's Treatise on the globes (1592). Edited by Clements R. Markham. London. Reprinted by the Hakluyt Society (1889). [Nature XLI. 459-460.]

A. Breusing. Die nautischen Instrumente bis zur Erfindung des Spiegelsextanten. Bremen. Silomon. 46 S. 8°.

Zuerst wird der Schiffskompass besprochen, dessen praktische, den ungehinderten Gebrauch erst eigentlich ermöglichende Einrichtung — Befestigung der Strichrose auf der Magnetnadel — der Verfasser dem Amalfitaner Flavio Gioja zuzuschreiben geneigt ist. Auch über den Ursprung der „cardanischen“ Aufhängung, sowie über die Vorrichtungen, mittels deren man den Kompass zur Uhr umzugestalten suchte, werden wir orientirt. Jener Burrus, der die erste Isogonenkarte anfertigte, war nicht, wie der Berichterstatter vermutete, ein Engländer Borough, sondern ein Italiener Namens Borri. Hierauf wendet sich die Darstellung der Logge zu; gedacht an eine Messung des vom Schiffe zurückgelegten Weges scheint zuerst der bekannte Nicolaus

Cusanus zu haben, aber wirklich beschrieben wird die gewöhnliche Logge erst 1577 von Bourne. Die „Hinterteilskette“, von der bei der Magelhaens'schen Erdumsegelung die Rede ist, war nur ein Hülfsmittel zum Messen der „Abtrift.“ Zu den Beobachtungsinstrumenten übergehend, schildert der Verfasser, dessen klaren Darlegungen anschaulich gezeichnete Figuren zur Stütze dienen, das Astrolabium, den die Genauigkeit der Ablesung um das Doppelte vergrössernden Seering, sowie den Davisquadranten und die überaus mannigfaltigen Formen, unter denen der sogenannte „Jakobsstab“ im 15., 16. und 17. Jahrhundert auftrat. Herr Breusing scheidet scharf den bloss geometrischen Gebrauch des Gradstockes vom astronomischen und erblickt in Regiomontan den Neuerer, der zuerst mit diesem Werkzeuge himmlische Distanzen bestimmt habe; nach neueren Ermittelungen des Referenten muss indessen auch der Anwendung dieses Instrumentes in der eigentlichen Sternkunde ein höheres Alter zuerkannt werden. Gr.

S. Günther. Die erste Anwendung des Jakobsstabes zur geographischen Ortsbestimmung. Bibl. Math. (2) IV. 73-80.

Als Erfinder des Jakobsstabes oder des „Baculus astronomicus“ war bis vor kurzem Regiomontanus angesehen worden; aber Herr Günther hat in einer früheren Notiz gezeigt, dass dieses Instrument schon um die Mitte des XV. Jahrhunderts bekannt war. In dem jetzt zu besprechenden Aufsatze beabsichtigt er, die beiden folgenden Fragen zu beantworten:

I. Wer hat den Jakobsstab zuerst erfunden, resp. zuerst zu astronomischen Beobachtungen verwendet?

II. Ist es wirklich Martin Behaim gewesen, der dieses Instrument in die Nautik einführte, d. h. Beobachtungen der Mittagshöhe der Sonne mit demselben vorzunehmen lehrte?

Die erste Frage wird, wenn auch nicht endgültig, erledigt durch Hinweisung auf eine Schrift über den Jakobsstab, die von Levi ben Gerson in der ersten Hälfte des XIV. Jahrhunderts verfasst

ist, und in welcher die Anwendung des Jakobsstabes zu astronomischen Beobachtungen gezeigt wird.

Die zweite Frage muss aller Wahrscheinlichkeit nach bejaht werden, und der Verf. beruft sich dabei auf eine portugiesische Bearbeitung der „Sphaera materialis“ des Sacrobosco, woraus hervorzugehen scheint, dass Behaim die Seeleute Portugals in der Handhabung des Jakobsstabes unterwies. E.

J. Thirion. L'astronomie sidérale. Rev. des Quest. sc. XXVII. 88-136.

Systematische und historische Darstellung unseres Wissens von dem Glanze, der Farbe, der Veränderlichkeit, der Eigenbewegung und der Entfernung der Sterne. Mn. (Lp.)

E. Sang. On last-place errors in Vlacq. Nature XLII. 593.

Nach einer Besprechung der bezüglichen Fehler wird ihre Anzahl auf 270 bestimmt. Lp.

S. Dickstein. Die logarithmischen Canones von Hoene-Wronski. Warschau. 30 S. 8° m. 6 Taf. (Polnisch.)

Die zuerst im Jahre 1827 von Wronski herausgegebenen „Canons de logarithmes“ unterscheiden sich von allen bekannten logarithmischen Tafeln (vgl. jedoch D. Biddle in Ed. Times XLVIII, F. d. M. XX. 1888. 1287. Lp.) durch ihre merkwürdige Einrichtung, welche es erlaubt, den ganzen Inhalt jeder Logarithmentafel auf ein einziges Blatt aufzunehmen. Der Canon No. 1 enthält Logarithmen mit 4 Decimalstellen, die NNo. 1bis, 2 und 3 Log. mit 5, No. 3bis mit 6, endlich No. 4 Log. mit 7 Decimalstellen.

Der Text von Wronski ist vom Herausgeber vereinfacht und gekürzt worden, auch wurde die Auffindung der zum gegebenen Logarithmus gehörigen Zahl (welche Aufgabe bei Wronski fehlt) durch Beispiele erläutert. Dn.

S. Dickstein. Die logarithmische Tafel von Hoene-Wronski. Warschau 1890. 8°. 15 S. (Polnisch.)

Enthält den Canon No. 3 der grösseren Ausgabe mit erläuterndem Text. (Vgl. das vorige Referat). Dn.

H. Schubert. The squaring of the circle. Smithsonian Inst. Rep. (1890.) 97-120. [Uebersetzung. Vgl. F. d. M. XX. 1888. 33.]

W. C. Winlock. Progress of astronomy for 1889, 1890. Smithsonian Inst. Rep. (1890.) 121-182.

Capitel 2.
Philosophie und Pädagogik.

A. Philosophie.

G. Heymans. Die Gesetze und Elemente des wissenschaftlichen Denkens. I. Leiden. S. C. van Doesburgh. Leipzig. O. Harrassowitz. 270 S. 8°.

Hr. Heymans bietet in seinem leicht verständlich geschriebenen Werke dem Nichtphilosophen ein Lehrbuch der Erkenntnistheorie, dem Philosophen eine durch Beispiele erläuterte Abhandlung über die Methode. Aufgabe der Erkenntnistheorie ist ihm die exacte, durch empirische Untersuchung des gegebenen Denkens zu ermittelnde Feststellung und Erklärung der causalen Beziehungen, welche das Auftreten von Ueberzeugungen im Bewusstsein bedingen. Die Methode ist die empirisch-psychologische Forschung. Die einfachsten Verbindungsgesetze unserer Urteile werden aufgesucht, ihre Geltung in der gegebenen Welt gerechtfertigt, die elementaren Ueberzeugungen in den einzelnen Wissenschaften durchmustert und begründet. Der vorliegende

erste Band gelangt bis zur Phoronomie oder Kinematik. Die Untersuchung über die allgemeinen Thatsachen des logischen Denkens gestaltet sich zu einer Art formaler Logik, zu einer Urteils- und Schlusslehre, in der psychologische Thatsachen klassificirt werden. In der sich daran anschliessenden kritischen Erörterung des Problems der Gültigkeit der Denkgesetze im Bereiche der Wirklichkeit verwirft Heymans die empiristische Theorie, deren hervorragendster Vertreter St. Mill ist. So weit unser Wissen auf Abstraction beruht, ist seine Quelle die Erfahrung, aber die logischen Gesetze werden von dem Geiste nicht aus der Erfahrung geschöpft, sondern in dieselbe hineingetragen. Ebensowenig befreundet sich Heymans mit der geometrischen Theorie A. Lange's und Kroman's, logische Gesetze auf Raumgesetze reduciren und hieraus den apodiktischen Charakter derselben erklären zu wollen. Ein nicht schon logisch organisirtes Wesen könnte aus den Raumfiguren, die zur Erläuterung logischer Gesetze dienen, die logischen Gesetze niemals schöpfen. Die Lösung des Problems liegt in der Erkenntnis, dass das logische Denken sich zwar scheinbar auf die Erscheinungen, thatsächlich aber nur auf die durch das Denken in Urteile umgesetzten Erscheinungen bezieht. — Die Untersuchungen über die arithmetischen Elementarurteile führen zu einer Charakteristik des Zahlbegriffs in seiner grundlegenden, durch das Zählen bestimmten Form und in abgeleiteten Formen. Die Erklärung der Apodikticität und Geltung des arithmetischen Urteils führt ebenfalls zu einer Kritik der empiristischen Theorie Mill's, der die Existenz reiner Zahlen leugnet, sowie der geometrischen Theorie Kroman's und der Ableitung der Zahl aus der Zeit, die übrigens schon Kant versucht hat. Heymans stellt eine Art linguistischer Theorie auf: Der Anfang des Rechnens ist das Zählen. Dieses erfolgt durch eine gedächtnismässige Verbindung von Lauten in bestimmter Reihenfolge und die successive Verbindung dieser Laute mit vorliegenden Objecten. Auf diese willkürlich gewählten, aber fest gewordenen Laute beziehen sich sämtliche Sätze der reinen Arithmetik. Die apodiktische Gewissheit der arithmetischen Sätze aber bietet kein Problem, da dieselben analytisch

sind. Ihre Anwendung auf die Wirklichkeit geschieht entweder durch directe Zählung wirklicher Objecte; dann sind die Sätze a posteriori, und ihre Gültigkeit ist selbstverständlich; oder die arithmetischen Urteile werden auf Thatsachen angewandt. Hier rechtfertigt sich ihre Anwendbarkeit ebenso wie bei den logischen Gesetzen, weil sie sich nicht auf die Naturerscheinungen selbst, sondern nur auf die Auffassungsweisen derselben beziehen. — In der Untersuchung über die Grundlagen der Geometrie giebt Heymans im Anschluss an Riemann und v. Helmholtz eine Charakteristik des Raumbegriffs. Den Riemann-Helmholtz'schen Versuchen verdankt die Erkenntnistheorie die Möglichkeit, vollständig und genau die einfachen synthetisch-apriorischen Urteile aufzustellen, aus deren Verbindung alle geometrische Gewissheit thatsächlich entsteht. In der Erklärung der Gewissheit und Anwendbarkeit der geometrischen Urteile auf die Natur rechnet Heymans wiederum mit Mill ab und entwickelt die Raumtheorie Kant's, der er zugiebt, dass sie einzig und allein die seit Jahrtausenden feststehende Evidenz des geometrischen Wissens zu begründen im Stande sei, die er aber mehr für ein Postulat als für eine Hypothese gelten lassen will. Den psychologischen Ursprung der Raumvorstellung sucht er in den Bewegungsempfindungen und acceptirt die Riehl'sche Hypothese. — Die zum Schluss kurz besprochene Kinematik bringt im wesentlichen eine Charakteristik des Zeitbegriffs. Eine Hypothese, die dem Gedanken der formal-subjectiven Natur der Zeitvorstellung einen bestimmten Inhalt giebt und es möglich macht, dieselbe an den Thatsachen zu verificiren, existirt noch nicht. — Der Erkenntnistheorie Heymans' fehlt nach dem Urteil des Referenten eine Begriffslehre. Nicht nur im Urteil, sondern in der Formung des Begriffs oder der Kategorie liegt die logische und allgemein gültige Bestimmung der Wirklichkeit in der menschlichen Erkenntnis. Mi.

P. du Bois-Reymond. Ueber die Grundlagen der Erkenntnis in den exacten Wissenschaften. Tübingen. H. Laupp. VII u. 130 S. 8°.

Der Schrift P. du Bois-Reymond's liegt ein Kolleg desselben vom Winter 1887/8 zu Grunde, aus dem bereits ein Abschnitt (über die Unbegreiflichkeit der Schwerkraft, Phys. Ges. III Jahrg. No. 14) veröffentlicht ist. Herr G. Hauck hat aus den hinterlassenen Papieren des verstorbenen Verfassers, in denen die Arbeit noch nicht im druckreifen Zustande, aber dem Gedankeninhalte nach völlig klar vorlag, gestützt auf seine durch langjährige Freundschaft gewonnene Kenntnis der Anschauungen P. du Bois-Reymond's und auf Ratschläge des Herrn Emil du Bois-Reymond, die Herausgabe übernommen. In acht Abschnitten entwickelt sich folgende Gedankenreihe: Nach Inhalt und Ziel lassen sich drei Forschungsrichtungen in den exacten Wissenschaften unterscheiden, die empirische, mechanische und metamechanische. Für die zweite Richtung ist die Hauptsache die Aufsuchung der einfachsten Naturmechanismen und die Synthese oder Construction des Erscheinungsgebietes aus ihnen. Die Hypothese stetiger Raumerfüllung durch die Materie wird durch das Problem der Berührung zweier Körper, durch die innere Bewegung, die Volumenveränderung und die Durchdringung der Substanzen ausgeschlossen. Eine stetige Substanz müsste unbeweglich, undurchdringlich und absolut hart sein. Man muss also die Substanz als porös annehmen. Und zwar nötigt die Durchsichtigkeit der Körper, die Ausdehnung durch Wärme, der Uebergang in die verschiedenen Aggregatzustände etc. zur Annahme, dass die Substanz aus räumlich getrennten Substanzteilchen besteht. Die Körner oder Corpuskeln der Substanz müssen als Träger der Fernkräfte angesehen werden. In einzelnen Teilen der Physik, in der Statik oder der analytischen Mechanik etc. kommen wir mit der Voraussetzung homogen stetiger Körper, Flächen und Linien oder mit Körperelementen aus. Im übrigen bedürfen wir der Corpuskeln. Denkt man sich nun die Corpuskeln als der uns vertrauten Körpersubstanz gleich, als teilbar, zusammendrückbar etc., so bilden sie für unsere Vorstellung nur eine Station, von der aus die Synthese vieler Erscheinungsgebiete gelingt, regen aber dann die weitere Speculation an. Werden die Corpuskeln dagegen als unendlich klein und mit den Eigen-

schaften der Kraft und Trägheit ausgestattet gedacht, so gelangen wir zur Vorstellung des Atoms und haben eine Grundlage für die Construction. Die Zurückführung der den Atomen zugeschriebenen Fernkräfte auf mechanische Kräfte gelingt nicht. Das fernwirkende, mit Beharrungsvermögen ausgestattete, frei bewegliche Wirkungscentrum ist der einfachste Naturmechanismus, den wir der mechanisch-physikalischen Synthese zu Grunde legen können. Doch genügt in der Molecularphysik nicht die Annahme fernwirkender Atome, wie sie bei den Erscheinungen der Gravitation vorausgesetzt werden; es muss zu der Newton'schen Fernkraft, die aller Substanz zukommt, noch eine Art von Fernwirkung hinzugefügt werden, die nur in nächster Nähe wirksam ist. Zur Erklärung der Erscheinungen der Capillarität, des Widerstandes der Körper gegen Zusammendrückung und Ausdehnung müssen die Atome mit einer Fernkraft ausgerüstet werden, die unter einer gewissen kleinen Entfernung Abstossung, in grösserer Entfernung Anziehung bewirkt. Für die Erklärung der krystallinischen Structur des Festen und für die Construction der Veränderung des Aggregatzustandes genügt auch diese Annahme noch nicht. Mindestens muss noch die Voraussetzung, dass die Intensität der Fernkräfte und der Ort, wo sie Null ist, von der Temperatur abhängig ist, hinzutreten oder auch eine eigentümliche Annahme über die von dem Atom ausgeübte Kraft gemacht werden. So entsteht die Grundvorstellung von mindestens zwei im Raume vorhandenen verschiedenen Arten von Substanzen, der materiellen Substanz und dem Aether. Die Atome der materiellen Substanz zeigen ein viel grösseres Beharrungsvermögen und üben eine unermesslich viel stärkere Wirkung aus, als die des Aethers. Betreffs der Wirkung der materiellen Atome auf einander wird angenommen, dass sie sich anziehen, oder auch, dass sie sich abstossen; zwischen den Atomen des Aethers besteht Abstossung. Die Anziehung zweier Körper wird direct auf die materiellen Substanzen, oder auf die Einwirkung der materiellen Substanz in dem einen, auf den Aether im anderen zurückgeführt. So ergiebt sich der Elementarmechanismus des materiellen Atoms mit seiner Aetherhülle. Die Aetherhüllen

stossen sich gegenseitig ab, die materiellen Atome, wenn man will, ebenso; dagegen ziehen sich die Aetherhüllen und die materiellen Atome gegenseitig an. Die kinetische Moleculartheorie kommt mit diesen Voraussetzungen noch nicht aus. Ihre Elementarmechanismen sind die sich nach allen Seiten hin und her bewegenden Gasteilchen, die sich so lange fortbewegen, bis sie die Wand des Gefässes, in welchem das Gas eingeschlossen ist, erreichen oder auf ein anderes Gasteilchen stossen. Von beiden prallen sie ohne Geschwindigkeitsverlust ab. Doch genügt auch diese Hypothese nicht. Den Uebergang der strahlenden Wärme in Erwärmung und umgekehrt construirt die kinetische Gastheorie ungenügend oder gar nicht, und betreffs des Wechsels der Aggregatzustände lässt sie uns ganz im Stich. Eine geeignete Verbindung der statischen und der kinetischen Moleculartheorie dürfte daher einige Aussicht auf dereinstige allgemeine Synthese eröffnen. So erweist sich das ätherumhüllte Atom im Kreise der physikalischen Erscheinungen als der wesentlichste Elementarmechanismus der Körpersubstanz. Die Chemie ist im gegenwärtigen Zustand für die mechanische Synthese noch nicht reif und pflegt daher mit vollem Rechte die empirische Richtung. In der Zukunft wird einer chemisch-mechanischen Hypothese jedenfalls das Prout'sche Gesetz von dem Atomgewichte der Elemente zu statten kommen. Für die Construction der Erscheinungen des Lebens haben wir noch keinen Ausgangspunkt. Als Zukunftsziel sind auch hier Constructionselemente aufzufassen. Von der mechanischen Richtung findet nun ein natürlicher Uebergang zur metamechanischen statt. Wir erhalten durch die mannigfaltigen Wahrnehmungen den Begriff der Genauigkeit. Bei einer grossen Zahl dieser Wahrnehmungen zeigt aber veränderte Beobachtung an demselben Gegenstande, dass die Genauigkeit in Ungenauigkeit übergeht; bei andern bleibt sie wenigstens bei gewöhnlicher Beobachtung erhalten. Daraus entsteht der wissenschaftliche Begriff der Genauigkeit und das Bestreben, den Grad derselben durch alle seine Abstufungen zu verfolgen. Vollkommene Genauigkeit ist der Vorstellung gänzlich entrückt und ist nur ein Wort. Die Folge der gegenständlichen Vorstellungen

des Genauen hat als Abschluss ein Wort für etwas Unvorstellbares. Ueberhaupt bewirkt, wo eine Vorstellungsfolge keine Vorstellung zur Grenze hat, die Analogie zahlloser Vorstellungsfolgen, die bei einer Vorstellung als Grenze angelangen, dass wir eine Grenze unwillkürlich da voraussetzen, wo sie fehlt. So entsteht der Idealismus. Der Idealist glaubt an das Vorhandensein unwahrnehmbarer und unvorstellbarer durch unsern Denkvorgang erzeugter Wortabschlüsse von Vorstellungsfolgen; der Empirist verwirft dergleichen Abschlüsse und nimmt nur das als vorhanden in sein Denken auf, was vorstellbar ist. Die Atomistik kann nun sowohl idealistisch als empiristisch gedeutet werden und liefert unter beiden Gesichtspunkten brauchbare Constructionselemente; dem gewöhnlichen Denken scheint das idealistische Atom annehmbarer als das empiristische Corpuskel. Bis zu einer gewissen Entscheidung zwischen beiden Standpunkten wird man bei dem Versuch auf Grund des letzten Elementarmechanismus der Synthese der Physik, die Weltanschauung abzuschliessen, gedrängt. Es erhebt sich die Frage, in welchem Umfang uns der Inhalt des Weltalls durch unsere Wahrnehmung und durch unsern Denkprocess offenbart werden kann. Wenn wir nun auch annehmen wollten, dass das gesamte Erscheinungsgebiet einmal in den Kreis unserer Vorstellungen gezogen sein würde und damit das Ziel der empirischen Forschung erreicht wäre, so würden doch unvollkommene und unbegreifliche Thatsachen übrig bleiben. Das Naturbegreifen auch auf diesem Standpunkte würde nicht befriedigen. Die Fernkraft, das Corpuskel oder Atom, das Absolute, das Unendlich-grosse und -kleine liefern den Beweis, dass die Welt mit unserm Vorstellen noch nicht zu Ende ist. Wir stossen auf ein physisches Jenseits, aber wir stehen auch hiermit vor etwas Unerreichbarem. Wir denken nur mit unsern Vorstellungen, die aus Wahrnehmungen stammen, und mit den aus ihnen abgezogenen Begriffen. Was in Wirklichkeit hinter diesen Vorstellungen steckt, wissen wir nicht. Für das Wirkliche fehlt uns das Organ, und wir kommen aus unseren Vorstellungen nicht heraus. Von der Wirklichkeit können wir wissenschaftlich nichts aussagen. Wir müssen uns also bei un-

serer Welt der Vorstellungen und Begriffe bescheiden und uns hier, so gut es geht, einrichten. Weltschmerz darüber, dass wir die Wirklichkeit nicht kennen, fruchtet nichts.

Dies in kurzem die Gedankenkette du Bois-Reymond's, die wohl nicht in allen Punkten gleichmässig befriedigt. Der Kern liegt in der Zurückführung der Erscheinungen auf Elementarmechanismen, unvollkommen ist dagegen die Charakterisirung des Empirismus und Idealismus und schief die Gegenüberstellung dieser beiden Richtungen. In der Geschichte der Philosophie stehen sich Empirismus und Rationalismus sowie Idealismus und Realismus gegenüber; Empirismus und Idealismus sind gar keine greifbaren Gegensätze. Die Gedankenketten, die zum Idealismus geführt haben, sind nachweislich vielfach ganz andere als der Gedanke der Genauigkeit etc. Weder Plato, noch Leibniz, noch Kant etc., höchstens die Eleaten sind auf diesem Wege zu ihrem Idealismus gelangt. Die Berücksichtigung der Geschichte der Philosophie ist auch dem Naturforscher, der sich seine Philosophie von neuem selbst schaffen will, anzuempfehlen. Mi.

K. A. F. Knabe. Ueber den directen Beweis. Kassel. G. Klaunig. 26 S. 4°.

Unmittelbar gewiss ist, was in eine der durchgängigen Uebereinstimmung der reinen Anschauung gleichende widerspruchslose Verbindung gebracht ist; mittelbare objective Gewissheit giebt der logische Beweis. Die Beweisführung besteht in der Aufsuchung und Ordnung der Prämissen und dem Vollzuge der Schlussfolgerung aus ihnen. Der directe Beweis, der auf dem Satze beruht, dass mit dem Grunde die Folge und mit der Folge der Grund gegeben ist, erschliesst entweder deductiv aus Allgemeinem Allgemeines oder Besonderes, oder inductiv aus Besonderem Besonderes oder Allgemeines. Der deductive Beweis ist entweder synthetisch oder analytisch. Der synthetische Beweis geht von den Gründen zu der Folge, der analytische umgekehrt. Der synthetische Beweis ist entweder genetisch oder künstlich. Nur der genetische Beweis

beantwortet die Frage nach dem Warum. Der Beweis durch Kunstgriffe gestattet diese Einsicht nicht und wird passend durch eine Analysis des Beweises ergänzt. Der analytische Beweis gestattet teilweise einen Einblick in die Entstehung der Folge, teilweise gewährt er diesen nicht, wie z. B. wenn er durch Identität oder in hypothetischer Schlussweise geführt wird. Der deductive Beweis ist dem inductiven überlegen; seine Schlussweise ist zwingend, während diejenige des inductiven Beweises häufig nur zur Wahrscheinlichkeit führt. Der inductive Beweis geschieht entweder durch reine (vollständige) Induction, oder durch ein entscheidendes Merkmal, oder durch Beispiele oder durch Anschauung. Bei affirmativen Sätzen ist stets ein deductiver genetischer Beweis anzustreben. Die Evidenz wird dann noch erhöht durch den Zutritt eines indirecten Beweises.

Mi.

C. H. Kummell. On the method of continued identity. Annals of Math. V. 85-98.

Durch Einsetzung von $\frac{1+x_1}{q}$ für x (wo $\frac{1}{q}$ Näherungswert von x und $\frac{x_1}{q}$ die Ergänzung zu vollkommener Identität ist), von $\frac{1+x_2}{q_1}$ für x_1 etc. ergiebt sich eine bequeme Approximationsmethode, die Kummell zur Bestimmung der Wurzeln kubischer Gleichungen etc. verwendet.

Mi.

A. Schmidt. Dillmann, die Mathematik, die Fackelträgerin einer neuen Zeit. Böklen Mitt. III. 37-55.

Schmidt bespricht die vom Ref. im vorigen Jahrg. d. F. d. M. angezeigte Schrift Dillmann's vom Standpunkte des Empirismus und Realismus aus und mit Hineinziehung metamathematischer Speculationen. Als Ziel sieht der Verfasser die Ueberbrückung der Kluft zwischen Natur und Geist, zwischen realistischer und idealistischer Weltanschauung an.

Mi.

H. V. Hahn. Fragen über Raum, Zeit und Gott. Stuttgart. M. Brennwald. 120 S. 8°.

Der Verfasser, dem die Welt als ein Inbegriff verbundener Wesen erscheint, deren jedes ebenso sehr Mittel wie Zweck ist, leugnet die Unendlichkeit des Raumes, die weder durch die sinnliche Wahrnehmung gegeben, noch durch die Gesetze des Denkens gefordert sein soll, so dass die Verbindung des Prädicates unendlich mit dem Subjecte Raum einen Widerspruch in sich schliesse. Es giebt, nach ihm, nur Raum, soweit Körperliches ist und erscheint, und dieser Raum, wenn er sich auch nicht mit unserm Gesichtskreis deckt, bildet den sachlichen, wie vorgestellten Formbegriff für die Gesamtheit der wirklichen und möglicherweise uns anschaubaren Dinge. Ueberall da ist die Grenze des Raumes', wo unserer Wahrnehmung nichts sinnlich Anschaubares und Erfassbares mehr gegeben ist. Bei allem, was räumlich ist, kommt der sichtbaren und greifbaren Begrenzung die eigentlich massgebende Bedeutung zu. Luft z. B. kann nicht als räumlich im Vollsinn gelten. Raum in Fülle und Formbestimmtheit ist uns nur auf Erden gegeben, nicht einmal mehr in der sie umgebenden Dunsthülle. Was gewöhnlich Weltraum genannt ist, wovon wir nichts sehen, ist ein sinnliches Nichts oder sinnlicher Schein, oder unbegrenzte Finsternis, Wüste und Leere, nicht aber Raum. Nicht anders als mit dem Raume verhält es sich mit der Zeit. So wenig sich ein unendlicher Raum sinnlich anschauen und wirklich denken lässt, so wenig lässt sich eine ewige Form des Werdens anschauen und denken. Der Verknüpfung von Mitteln und Zwecken im Nebeneinander des Raumes entspricht in der Zeit das Verhältnis von Grund und Folge. Giebt es aber keinen unendlichen Raum und keine unendliche Zeit, so trägt doch der Mensch die Unendlichkeit in sich vermöge seiner geistigen Begabung. Er kann sich über die räumliche Gebundenheit erheben und sich der zeitlichen Schranken entledigen und zum Gottesglauben gelangen. — Der Verfasser erklärt, dass er mit seiner Auseinandersetzung wissenschaftliche Lorbeeren nicht habe pflücken wollen. Man wird ihm das wohl glauben müssen. Mi.

A. Voigt. Die Auflösung von Urteilssystemen, das Eliminationsproblem und die Kriterien des Widerspruchs in der Algebra der Logik. Diss. Freiburg i. B.; Leipzig. A. Danz. 92 S. 8°.

Voigt knüpft an die Forschungen Boole's, Grassmann's, Peirce's und namentlich E. Schröder's an. In drei Abschnitten (1. Allgemeine Logik, 2. Logik der realen und partialen Klassen, 3. Logik der Individuen und Individuensummen) behandelt er das Grundproblem der formalen Logik in algebraischer Form. Die fundamentalen Relationen der Begriffe, Ueber- und Unterordnung, Gleichsetzung, Verneinung dieser Beziehungen, werden in Gleichungen ausgedrückt. Der logische Kalkül mit diesen Gleichungen gestattet eine Erweiterung und Verallgemeinerung logischer Probleme und eine schärfere Bestimmung der Grundgesetze des Denkens. An Stelle der Syllogistik tritt das Problem, aus einem beliebigen System von Relationen in beliebig vielen Begriffen durch Elimination eines derselben eine neue Relation zwischen den übrigen herzustellen; an Stelle der Umkehrung der Urteile tritt die Aufgabe, aus einem System von Relationen in beliebig vielen Begriffen einen derselben als Function der übrigen darzustellen, oder eine Lösung des Systems nach einer Unbekannten zu suchen. Statt des einen Satzes des Widerspruchs ergeben sich drei Formen, und jeder Teil der Logik erweist sich als durch besondere Kriterien des Widerspruchs bestimmt. Besonders in dem letzten Teil der Arbeit liegt eine Weiterführung der Forschungen Schröder's. Mi.

Mary Boole. A new logical machine. Nature XLI. 79.

Eine „Maschine zur Erläuterung des Zusammenhanges zwischen den mathematischen Gesetzen des Denkens und den Gesetzen des Wachstums“ ist von Hrn. Betts in Auckland gebaut worden. Frau Boole stellt sie dem Buche ihres Mannes George Boole an die Seite. Lp.

R. Bettazzi. Teoria delle grandezze. Opera premiata dalla R. Accademia dei Lincei. Pisa. Spoerri. VII u. 181 S. 4°.

Eine „Grösse“ ist nach H. Grassmann (Lehrbuch der Arithmetik, Berlin 1861) ein Element einer solchen Kategorie, dass von irgend zwei Elementen derselben entschieden werden kann, ob sie gleich ($=$) oder ungleich ($\neq$) sind, welches auch die Bedeutung der Begriffe „Gleich-“ und „Ungleichsein“ sei, wenn sie nur die zwei folgenden Bedingungen erfüllen:

a) ist $A = B$, so ist $B = A$;

b) ist $A = B$, $B = C$, so ist $A = C$.

Bezeichnen wir durch S eine commutative und associative Operation, welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

a) ist $B = C$, so ist $S(A, B) = S(A, C)$;

b) ist $B \neq C$, so ist $S(A, B) \neq S(A, C)$;

durch D die inverse Operation; $S(A, B)$ heisse die „Resultante“, $D(A, B)$ die „Divergenz“ von A und B. Ist dann eine Grössenmenge vorhanden, welche neben A und B immer auch $S(A, B)$ enthält, so bildet diese Menge eine „Klasse“ in Bezug auf die Operation S. Enthält eine Klasse neben A und B stets auch $D(A, B)$, so heisst sie „eigentlich“.

Eine Klasse ist „eindimensional“, wenn von irgend zwei ungleichen Elementen derselben entschieden werden kann, welches das „grössere“ ($>$) und welches das „kleinere“ ($<$) ist, welches auch die Bedeutung dieser Wörter sei, wenn nur die folgenden Bedingungen stattfinden:

a) ist $A > B$, $A = A'$, $B = B'$, so ist $A' > B'$;

b) ist $A > B$, so ist $B < A$;

c) ist $A \geqq B$, $B > C$, so ist $A > C$;

d) ist $A > B$, so ist $S(A, C) > S(B, C)$.

Die erste Abteilung der vorliegenden Abhandlung ist der allgemeinen Theorie der Klassen von Grössen gewidmet. Wollten wir dem Verfasser durch alle Einzelheiten folgen, so müssten wir zuerst eine Menge neuer Benennungen darlegen, was uns schon zu weit führen würde. Wir beschränken uns also darauf, einen sehr wichtigen Punkt hervorzuheben. Die eindimensionalen

Klassen zerfallen in zwei „Arten“, je nachdem sie dem sogenannten Archimedischen Axiome gehorchen oder nicht; und Herr Bettazzi stellt die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür auf, dass eine Klasse der ersten Art angehöre. Die bisher wenig bekannten Klassen zweiter Art, von denen ein Beispiel durch den Inbegriff der Ordnungen des Unendlichwerdens aller möglichen Functionen dargeboten wird, werden hier einem eingehenden Studium unterworfen.

Die zweite Abteilung beschäftigt sich mit der Anwendung der allgemeinen Theorie auf eine besondere Familie von Grössen, d. i. auf die Zahlen. Je nachdem zwei Grössen *A*, *B* gleich oder ungleich sind, kann man sagen, sie haben gleiche oder ungleiche Zahl. Man ordnet dadurch jeder Grösse ein neues Object (Zahl) zu; und man kann immer über das Gleich- und Ungleichsein von zwei Zahlen entscheiden, sobald man die zu Grunde gelegte Klasse von Grössen vollkommen kennt. Die Zahlen können also als Grössen angesehen werden; man sagt, dass sie die ihnen zugeordneten Grössen „messen“. Das Eigentümliche an ihnen ist aber, dass eine und dieselbe Zahlenklasse zur Messung unendlich vieler verschiedenen Klassen von Grössen dienen kann, — aller derjenigen Klassen nämlich, deren Elemente derart ein-eindeutig einander zugeordnet werden können, dass die Resultanten entsprechender Grössen sich gegenseitig entsprechen. So können insbesondere alle eindimensionalen Klassen erster Art durch die gemeinen reellen Zahlen gemessen werden.

Die Abhandlung schliesst mit einem Anhange, in dem der Zahlbegriff direct, d. i. ohne Vermittelung des Grössenbegriffes, eingeführt wird.

Eine ausführliche Recension der Bettazzi'schen Schrift wurde vom Berichterstatter in Darboux Bull. (2) XV. 53-68 gegeben.

Vi.

H. Keferstein. Ueber den Begriff der Zahl. Hamb. Mitt. II. 119-125.

Keferstein sucht gegen Wundt, sich auf Frege (Die Grund-

lagen der Arithmetik 1884) und auf Dedekind (Was sind und was sollen die Zahlen? 1888) stützend, die Möglichkeit einer rein logischen Definition des Zahlbegriffs nachzuweisen, der wohl mehr mit Recht ein reiner Verstandesbegriff heissen dürfte als alle Kategorien, und den ja auch Wundt als die abstracteste Form, in der das Gesetz des discursiven Denkens zum Ausdruck kommt, anerkennt. Mi.

E. Schröder. Ueber das Zeichen. Festrede. G. Braun'sche Hofbuchdr. 24 S. gr. 8°.

Das Zeichen, zunächst in allgemeinster Bedeutung als Mittel der Verständigung, wird unter steter Berücksichtigung seiner culturgeschichtlichen Bedeutung in seinen wichtigsten Entwickelungsstufen als Naturlaut, Sprache, Schrift und Druck vorgeführt, wobei die mannigfachsten sonstigen Arten der Mitteilung (auch in der Tierwelt) wenigstens gestreift werden. Dann wendet sich die Rede zu den Anforderungen, welche die Denkoperationen an ihr Werkzeug, die Sprache, stellen, und verbreitet sich über die verschiedenen Versuche, nach dem Muster der mathematischen Zeichenschrift eine solche internationale Sprache auch für das allgemeine Denkgebiet herzustellen, wozu in der neueren mathematischen Darstellung der Logik wenigstens der Anfang gemacht ist. Die geistvolle, von allen Seiten her interessantes Detail heranziehende Darstellung des Stoffes macht diese Rede zu einer ebenso anziehenden wie anregenden Lectüre. Schg.

E. Schröder. Vorlesungen über die Algebra der Logik. (Exacte Logik). I. Leipzig. B. G. Teubner. XII u. 717 S. 8°. Berichtigung hierzu. Math. Ann. XXXVI. 602.

Durch das vorliegende Werk löst der Verfasser das im Vorwort zu seinem „Operationskreis des Logikkalküls" gegebene Versprechen ein, eine ausführliche Darstellung jener bedeutsamen Untersuchungen zu geben, durch welche die Logik zum Range einer exacten Wissenschaft erhoben worden ist. Mit Recht darf der Verfasser seiner Arbeit heute diesen stolzen Titel

voraussetzen; denn während damals (1877) in den einschlägigen Werken von Boole und R. Grassmann nur erst die kaum beachteten Grundlagen der mathematischen Logik vorhanden waren, wird uns hier ein Handbuch geboten, welches, indem es die eigenen bahnbrechenden Untersuchungen des Verfassers und die Leistungen zahlreicher anderer Autoren zu einem einheitlichen System zusammenfasst, bereits das Bild einer nach den verschiedensten Richtungen hin ausgebauten Wissenschaft gewährt. Und bei aller Anerkennung der Verdienste, welche sich moderne Forscher wie Trendelenburg, Drobisch, Wundt um die Logik erworben haben, zeigt sich jetzt doch, dass es erst der mathematischen Behandlung vorbehalten war, den von Alters her auf ihr lastenden Bann der Stagnation zu brechen und ihr Gebiet in ungeahntem Masse zu erweitern und zu vertiefen. — Wenn der Verf. sich mit seinem Werk vermittelnd an die Mathematiker und Philosophen wendet, so haben wir gegenwärtig um so mehr Grund, diesem Streben Erfolg zu wünschen, je lebhafter sich die Philosophie gegen die Fortschritte wehrt, welche ihr von der Mathematik hinsichtlich des Raumbegriffes aufgenötigt werden. Aber auch für vergleichende Sprachwissenschaft erwachsen aus den zahlreichen neuen Gesichtspunkten, welche sich jetzt eröffnen, anziehende und lehrreiche Probleme. Vor allem dürfte hier nach Ansicht des Ref. zum ersten Male der wissenschaftliche Boden gewonnen sein für eine Abwägung der logischen Vorzüge zweier Sprachen gegen einander. Doch dies nur nebenbei.

Wenden wir uns nun zu den Einzelheiten des Inhalts. Eine umfangreiche Einleitung enthält Vorbetrachtungen über Thatsachen und Aufgaben des Denkens, über Zeichen und Namen und über die Grundbegriffe der Logik. Schon hier, wie auch im weiteren Verlaufe der Darstellung, wird ein über Erwarten umfangreiches Gebiet täglicher Erfahrungen im Denken und Sprechen in Anspruch genommen, um Beispiele zu liefern für Fragen und Unklarheiten, zu deren Lösung die Logik berufen ist. Es ist ein Gegenstand besonderer Sorgfalt des Verfassers gewesen, hierdurch den trockenen Stoff in anziehender Weise zu beleben und uns gleichzeitig die Wissenschaft

in ihrer neuen Gestalt als eine eminent praktische vor Augen zu führen.

Der in 14 Vorlesungen gegliederte Stoff des vorliegenden ersten Bandes erstreckt sich im wesentlichen über Inhalt und Umfang von Begriffen und die darauf bezüglichen Urteile („Gebietekalkül" im Gegensatz zu dem im zweiten Bande behandelten „Aussagenkalkül"). Von fundamentaler Bedeutung ist die Operation der „Einordnung" (Subsumtion), die einzige, welche ein neues Zeichen erfordert. So ist z. B. der Begriff Gold (a) eingeordnet dem Begriffe Metall (b). In Zeichen ausgedrückt:

$$a \subseteq b.$$

Formell betrachtet, kommt der ganze Logikkalkül, so weit er hier dargestellt ist, zu Stande durch consequente Durchführung des Unterschiedes zwischen den beiden Zeichen der Einordnung und Gleichheit. Verschiedene mathematische Anwendungen, z. B. auf mehrdeutige Zahlenausdrücke, ergeben sich unmittelbar. Vor allem aber gründen sich auf die Unterscheidung von Subsumtion und Gleichheit wesentliche Unterschiede der einfachen Urteile nach Inhalt und Form. Die Mehrdeutigkeit vieler sprachlichen Urteile tritt in helles Licht, und die Logik löst hier die Aufgabe, die verschiedenen Deutungen zu sondern. Veranschaulicht wird die Subsumtion durch die Euler'schen Diagramme.

Grundlage der mathematischen Logik ist der „identische Kalkül". Aus einer Mannigfaltigkeit beliebiger Elemente (z. B. Punkte einer ebenen Tafel) werden irgend welche Zusammenstellungen von Elementen (z. B. Figuren) herausgenommen, „Gebiete" genannt und durch Buchstaben bezeichnet. Mit diesen Buchstaben rechnet der identische Kalkül. Dieselben können aber nicht nur stetige, aus Elementen gebildete Gebiete darstellen, sondern auch discrete, aus Individuen gebildete „Klassen", ferner Begriffe, Urteile, Schlüsse, Gleichungen, Kalküle, Gruppen u. s. w. Hierdurch erlangt der identische Kalkül seine universale Anwendungsfähigkeit. — An der Spitze des Kalküls stehen die beiden Principien: $a \subseteq a$, und: Wenn $a \subseteq b$ und $b \subseteq c$, so ist auch $a \subseteq c$. Die Null bedeutet ein Gebiet, welches jedem

Gebiete, und die Eins ein Gebiet, welchem jedes Gebiet eingeordnet ist. — Die Rechnungsarten des identischen Kalküls sind: Multiplication, Addition (mit den Eigenschaften der gleichen arithmetischen Rechnungen) und Negation (in welchen Specialfall die in ihrer Allgemeinheit überflüssigen Rechnungen der Subtraction und Division zusammenfliessen). Zur Erklärung von Product und Summe dienen die Sätze:

Wenn $c \subseteqq a$ und $c \subseteqq b$, so gilt: $c \subseteqq ab$.

Wenn $a \subseteqq c$ und $b \subseteqq c$, so gilt: $a + b \subseteqq c$.

Hiermit ist das Product als Prädicat, die Summe als Subject definirt. Ferner ist ab das zwei Gebieten a und b gemeinsame Gebiet, $a + b$ dasjenige, zu welchem sie sich gegenseitig ergänzen. Sind a und b Zahlen, so entspricht ab dem grössten gemeinsamen Factor, $a + b$ dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen. — Die weitere Discussion dieser Rechnungen und der für sie geltenden Theoreme liefert Material zur Aufdeckung einer Reihe gewohnter Nachlässigkeiten im Gebrauch der Sprache. Excurse wie derjenige über die Mehrdeutigkeit des Wortes „oder" in den modernen Sprachen gegenüber der exacten Unterscheidung, welche hier die lateinische Sprache trifft, dürften geeignet sein, so manchen Fanatiker der modernen antiklassischen Richtung zu ernüchtern. — Weiter sind hervorzuheben die Tautologiegesetze $a + a = a$ und $a \cdot a = a$. Merkwürdigerweise zeigt sich das Distributivgesetz in der Form $a(b + c) \subseteqq ab + ac$ als unbeweisbar. Es wird als Princip aufgestellt, welches für den identischen Kalkül Geltung hat, nicht aber für den „logischen Kalkül mit Gruppen" (z. B. von Functionalgleichungen, Algorithmen oder Kalkülen).

Ein weiterer Abschnitt ist den Regeln der Negation gewidmet. Hier finden auch der Satz des Widerspruchs, des ausgeschlossenen Dritten und die logischen Einteilungen ihre Stelle. Ein dualistisches Princip gilt hinsichtlich der Zeichen 0 und 1, mal und plus, sowie derjenigen für Ueber- und Unterordnung. — Die Functionstheorie gründet sich auf die Sätze: Jedes Gebiet y lässt sich durch jedes andere Gebiet x und dessen Negation linear und homogen ausdrücken. Jede Function von x lässt sich als lineare Function von x darstellen. — Auf den Unterschied zwischen

Gleichungen und Formeln, zwischen speciellen und allgemeinen Bedeutungen der Buchstaben gründet sich nun auch die Klassification der Urteile (Propositionen) einerseits in synthetische und analytische, andererseits in specielle und allgemeine. Das analytische Urteil sagt Selbstverständliches aus und stellt, wenn es allgemein ist, Gesetze des Denkens dar, innerhalb deren eine Umformung gegebener Ausdrucksweisen gestattet ist. Das synthetische Urteil giebt neue Aufschlüsse über die Klassen oder Gebiete, von denen es handelt. Sofern es allgemein und nicht etwa absurd ist, lässt es sich durch Einsetzen gewisser specieller Bedeutungen (Wurzeln) an Stelle der allgemeinen in ein richtiges specielles Urteil verwandeln. Beiläufig erweisen sich hier die Wahrheiten der Mathematik, wenn sie Zahlen betreffen, als analytische, die der Geometrie dagegen als synthetische. Hierdurch bestätigt sich auch die Grassmann'sche Auffassung der Geometrie als einer angewandten Wissenschaft. Es folgen nun die Auflösungen der Propositionen (Gleichungen) und die damit zusammenhängenden Eliminationen, wobei die Abweichungen des logischen Kalküls vom algebraischen sich mehr geltend machen als vorher.

Dem vorstehend skizzirten Gange der Hauptuntersuchung schliesst sich, in Form von Zwischenbetrachtungen oder Anhängen, noch allerlei dankenswertes Beiwerk an. Wiederholt setzt der Verfasser ausführlich auseinander, warum er diesen und nicht einen andern Weg einschlägt, rechtfertigt nachträglich sein Vorgehen, weist Wege, deren Vernachlässigung dem Leser auffallen muss, als überflüssig oder unfruchtbar zurück, wird den abweichenden Darstellungen desselben Gegenstandes bei fremden Autoren gerecht und giebt ein reiches Material von Anwendungen und von teilweise ausführlich gelösten Aufgaben. Dieses Material ist geeignet, die Ueberlegenheit der rechnenden Methode gegenüber der bisherigen schulmässigen, verbalen Ueberlegungsweise in überzeugender Weise darzuthun. Die Anhänge geben weiteres Detail über Multiplication und Addition und verbreiten sich ausführlich über den oben erwähnten logischen Kalkül mit Gruppen.

Unser Urteil zusammenfassend, müssen wir sagen, dass der allgemeine Charakter der mathematischen Behandlung für die Wissenschaft der Logik die Möglichkeit einer fruchtbaren Weiterentwickelung geschaffen hat, dass ferner die Schärfe der mathematischen Behandlung, welche die feinsten Unterschiede im Denken zum Ausdruck bringt, den Wert dieser Wissenschaft für die Schärfe und Klarheit des Denkens schon in ihren hier erst vorliegenden Elementen ganz erheblich gesteigert hat, und dass hier die ersten selbständigen, verheissungsvollen Schritte einer bisher von der Philosophie am Gängelbande geführten Wissenschaft vorliegen. — Unfruchtbare Nebenwege aber werden hier gerade so wie in der Mathematik als solche erkannt und verlassen werden. — Dass es dem Verfasser gelungen ist, in einer überall leicht verständlichen und nirgends langweilenden Weise ein Handbuch der mathematischen Logik herzustellen, gereicht nicht weniger dem Gegenstande zur Empfehlung wie ihm selbst zum Verdienst. Litteraturverzeichnis und Namenregister beschliessen den stattlichen Teubner-Band. Durch die in den Math. Ann. enthaltene Bemerkung wird eine, Miss Ladd betreffende, Litteraturangabe nachgeholt. Schg.

A. Nagy. Fondamenti del calcolo logico. Batt. G. XXVIII. 1-35.

Der Verfasser findet, dass die Grundbegriffe des logischen Kalküls von den Autoren nicht völlig klargestellt seien; hieraus ergeben sich Zweifel über den Gültigkeitsbereich der logisch-mathematischen Gesetze. Er unterzieht daher jene Grundbegriffe einer Revision, definirt (nach Grassmann) die „logischen Grössen“, stellt drei Postulate für dieselben auf und entwickelt kurz die Grundoperationen mit diesen Grössen. Ebenso werden die „logischen Elemente“ behandelt, die Mannigfaltigkeiten („logischen Räume“) und Klassen. Der Verfasser erreicht hierbei einen noch engeren Anschluss der logischen Methoden an die mathematischen und eine umfangreichere Verwendungsfähigkeit der letzteren. Der von Schröder aufgestellte Dualismus findet sein

Gegenbild in der geometrischen Reciprocität des Schneidens und Projicirens im mehrdimensionalen Raume. Die logischen Grössen sind durch Kreise, die Elemente durch Punkte repräsentirt, die logischen Räume durch geometrische, die logischen Grössen und Klassen durch Summen von Elementen. Das Element selbst erscheint als Product seiner Merkmale. Beispiele werden zumeist den Gebieten der Töne und Farben entnommen.

Schg.

A. Nagy. Sulla rappresentazione grafica delle quantità logiche. Rom. Acc. L. Rend. (4) VI_2. 50-55, 373-378.

Die Euler'sche Darstellung logischer Grössen und ihrer Beziehungen durch Kreise in der Ebene verliert, wie Bolzano und Venn gezeigt, ihre Gültigkeit, sobald es sich um mehr als drei Grössen handelt. Dagegen ist die Definition eines logischen Elementes durch n Merkmale analog der Bestimmung eines Punktes durch n Coordinaten im n-dimensionalen Raume. Wird nämlich eine logische Grösse zunächst in der Ebene durch einen Kreis mit dem Mittelpunkte C, und eins ihrer Merkmale durch einen Punkt P innerhalb des Kreises dargestellt, so kann die Intensität des Merkmals dem Abstande des Punktes von der Peripherie proportional gesetzt werden. Die Lage des Punktes P lässt sich alsdann durch 2 Coordinaten bestimmen, die für unendlich grossen Abstand PC in gewöhnliche cartesische Coordinaten übergehen. — Hierdurch ist die Aufgabe der exacten graphischen Darstellung logischer Grössen in der Ebene zurückgeführt auf die Aufsuchung einer eindeutigen und umkehrbaren Beziehung zwischen dem n-dimensionalen Raume und der Ebene. Schg.

A. B. Kempe. On the relation between the logical theory of classes and the geometrical theory of points. Lond. M. S. Proc. XXI. 147-182.

Anwendung des in der mathematischen Logik verwendeten Algorithmus auf Symbole von der Form $ab \cdot c$ und ähnliche damit zusammenhängende. Resultante der Symbole $ab \cdot x$, $bc \cdot x$, $ca \cdot x$ heisst der Ausdruck $[abc]$. Ist c constant, a und b varia-

bel, so kann die Resultante als Function von a und b angesehen werden. Hiermit begründet der Verfasser eine „primitive Algebra". Bedeuten a, b, c Klassen (oder auch Urteile), so drückt $ab \cdot c$ aus, dass c in $a+b$, und ab in c enthalten ist, was durch zwei sich schneidende Kreise a, b und den kleinsten durch ihre Schnittpunkte gehenden Kreis c veranschaulicht wird. Bedeuten a, b, c Punkte einer Geraden, so drückt $ab \cdot c$ aus, dass c zwischen a und b liegt. Nach diesen beiden Richtungen hin wird ein Teil der zahlreichen, zuerst abstract entwickelten Formeln interpretirt. Schg.

A. Fola. Investigaciones filosofico-mathematicas sobre las cantidades imaginarias.

In diesem Werke untersucht der Verfasser den Begriff der imaginären Zahl und erzählt von der Geschichte und Kritik der philosophischen und mathematischen Theorien, zu denen dieser Gegenstand den Anlass gegeben hat. Tx. (Lp.)

G. Cantor. Zur Lehre vom Transfiniten. Gesammelte Abhandlungen. 1. Abteilung. Halle a. S. C. E. M. Pfeffer. 92 S. 8°. (Sonderdruck.)

J. Delsaulx. Quelques applications du calcul des probabilités à la démonstration de vérités de certitude morale. Rev. des Quest. sc. XXVIII. 5-36.

J. Delsaulx. La probabilité philosophique et la nature cinétique de la chaleur. Rev. des Quest. sc. XXVIII. 484-516.

Betrachtungen über die objective Tragweite der Wahrscheinlichkeitsrechnung nebst verschiedenen Anwendungen. Aehnliche Betrachtungen über den Grad der Gewissheit der kinetischen Wärmetheorie. Mn. (Lp.)

G. Garbieri. La matematica nello sviluppo delle scienze. Discorso. Genova.

A. Köpcke. Ueber empirische und idealisirende Raumauffassung. Pr. Realsch. Altona-Ottensen.

Die idealisirende euklidische Geometrie, die von Flächen ohne Dicke, Linien ohne Breite, Punkten ohne Ausdehnung redet, wird von den modernen, auf dem Boden des Empirismus stehenden Mathematikern verworfen, die sich auf die Betrachtung der aus der Erfahrung gewonnenen wirklich vorstellbaren Körper beschränken zu wollen erklären und den euklidischen Gebilden den Vorwurf des Nichtvorhandenseins und der Nichtvorstellbarkeit machen. Aber die in den euklidischen Definitionen geforderte Realisirung der Raumgebilde wird auf die Dauer von keinem Mathematiker ganz vermieden. Bei empirischer Auffassung construirt man nur mit nicht immer klein zu nennenden Körpern, ohne den Unterschied ihrer noch erkennbaren Teile zu berücksichtigen, während man in der idealisirenden Auffassung immer mit so kleinen Körpern construirt, dass ihre Teile nur mit Mühe zu unterscheiden sind, und diese so behandelt, als ob sie gar keine Teile hätten. Die Gebilde der idealisirenden Geometrie existiren allerdings nicht als Anschauungen oder als Begriffe, wohl aber als Anschauungsgrenzen im Vorstellungskreise eines jeden Menschen. Der Empirist gerät bei dem Versuch, die Teilbarkeitsgrenze zu bestimmen, leicht in Schwierigkeiten, welche die idealisirende Raumauffassung am leichtesten hebt. Der Idealist setzt von vorn herein in den Erklärungen voraus, dass einem geometrischen Lehrsatz in Wirklichkeit nichts mit der ausgesprochenen Genauigkeit entsprechen kann, und dass über den höchsten in der Natur möglichen Grad von Genauigkeit nichts bekannt ist; der Empiriker muss sich diese Beschränkungen bei jedem einzelnen Satze denken, ohne doch hoffen zu können, dadurch etwas Neues zu erreichen. Erst dann käme eine wirklich neue empirische Geometrie zu Tage, wenn auf Grund einer Beobachtung oder einer Hypothese ein höchster in der Natur möglicher Grad von Genauigkeit constatirt wäre, z. B. der pythagoreische Lehrsatz als bis nur zu einer gewissen Decimalstelle anwendbar nachgewiesen würde. Der Versuch, die Geometrie zu einer echten Naturwissenschaft zu machen, ist so

lange unausführbar, als es zweifelhaft bleibt, ob wir die Eigenschaften unseres Raums ebenso durch Beobachtung kennen lernen, wie die Naturgesetze. Mi.

M. Raschig. Erkenntnistheoretische Einleitung in die Geometrie. Pr. Gymn. Schneeberg.

In einfacher und klarer psychologischer Entwickelung leitet Raschig unter Zugrundelegung der nicht unbegründet gelassenen Hypothese einer sich in uns spiegelnden Aussenwelt die Grundlagen der Geometrie ab. Er sucht zu beweisen, dass zu der Entwickelung der geometrischen Begriffe die Erfahrung gehört, dass aber zu den empirischen Grundlagen durch die geforderte Gesetzmässigkeit der Gebilde ein apriorisches Element hinzutritt. Er bespricht die Abstractionen, durch welche die Klassenformen geometrischer Gebilde (Körper, Fläche, Linie, Punkt) gewonnen werden, und zeigt, wie die rein geometrischen Formen erst durch ein Bildungsgesetz unter Zugrundelegung des Princips der Bewegung entstehen. Die Natur kommt durch eine in ihr waltende Tendenz der Bildung gesetzmässiger Körper unserer Raumphantasie entgegen; Vernunft, jene Tendenz erkennend, postulirt die Identität derselben und fordert auf Grund einer Unendlichkeitsinduction strenge Allgemeinheit geometrischer Lehrsätze. An der Geraden, dem Zusammenhang der Geraden und der Ebene und dem elften Axiom Euklid's, für das Raschig das von Günther formulirte Axiom setzt, werden speciell die Grundlagen der euklidischen Geometrie erörtert. Mi.

H. Gisevius. Kant's Lehre von Raum und Zeit, kritisch beleuchtet vom Standpunkte des gemeinen Menschenverstandes aus. Hannover. Helwerg. 38 S. 8°.

J. Duclout. Los fondamentos de la geometria y el conocimiento del espacio. Soc. Argentinea XXX, XXXI.

Vortrag vor der Argentinischen wissenschaftlichen Gesellschaft zur Erläuterung der Grundlagen der euklidischen und nichteuklidischen Geometrie, sowie der vornehmsten bekannten geometrischen Untersuchungsmethoden. Tx. (Lp.)

A. Nagy. Sulla recente questione intorno alle dimensioni dello spazio. Rivista Italiana di Filosofia. Anno V. Volume I. 120-151.

Herr Nagy behandelt abermals die so oft und so stark bestrittene Frage der Existenz einer vierten Dimension des Raumes. Seine treffliche Kenntnis der Litteratur über diesen Gegenstand erhellt aus dem § I seiner Arbeit, wo er im raschen Laufe die bezüglichen Schriften vorführt; er belehrt insbesondere uns Mathematiker, in welchem Masse und auf welche Weise sich nicht nur die Philosophen, sondern auch die Theologen mit diesem Thema beschäftigt haben; ferner setzt er den Anteil in ein klares Licht, welchen besonders Kant und Zöllner an der Formulirung der genannten Frage hatten. Und wir Mathematiker werden eine neue und nicht minder interessante Belehrung im § II finden, wo die schönen Erfahrungen dargelegt werden, welche einige Physiologen bei dem Nachweise gemacht haben, dass wir nur nach und nach den Begriff einer dritten Dimension in unserem Raume erwerben; dadurch wird man zu der Annahme geführt, es sei nicht unmöglich, dass es gelinge, dass wir durch eine grössere Verfeinerung der Organe unserer Sinne eine vierte Dimension in unserem Raume wahrnehmen. Uebrigens haben die Dinge zu ihrem Wesen gehörende innere Eigenschaften, welche doch auf irgend eine Art durch uns wahrgenommen werden, die von unserem eigenen Organismus abhängt: wer kann daher versichern, dass die Unmöglichkeit der Wahrnehmung einer vierten Dimension in unserem Raume gerade von unserer Leibesbeschaffenheit nicht abhänge? Die Nützlichkeit einer vierten Dimension, um einige unerklärliche Verschiedenheiten zwischen Planimetrie und Stereometrie wegzuschaffen, ist schon durch Kant und Zöllner betont; ihre Brauchbarkeit, um beifallswürdige

Erklärungen anderer durch die Krystallographie und die Chemie dargebotenen Erscheinungen zu finden, wurde ebenfalls durch Zöllner selbst und dann durch Mach bemerkt. Herr Nagy setzt diese Bemerkungen auf's neue sehr klar in den §§ III und IV seiner Arbeit auseinander, um jedoch zu schliessen, dass dieselben keine zureichenden Elemente liefern, um eine bejahende Antwort auf die Frage zu geben: „Soll man dem Raume eine vierte Dimension zuschreiben?“ Mit vollem Rechte folgt er Zöllner zur Untersuchung neuer Entscheidungselemente nicht in die Spiritistik und macht (§ V) eine neue Definition der vierten Dimension bekannt, welche Eduard Wagener auf Grund dynamischer Betrachtungen vortrug, welche aber die vorgelegte Aufgabe nicht löst. Nachher schliesst er endlich (§ VI), dass man nur Gründe hat, um die Möglichkeit einer vierten Dimension anzunehmen. Und auch wir glauben, dieses sei die einzige Behauptung, welche man heute mit Recht aufstellen darf: bescheiden sollen wir bei dieser Gelegenheit das berühmte Ignoramus des Herrn du Bois-Reymond wiederholen; aber es wäre etwas gefährlich, das nicht minder berühmte Ignorabimus desselben Physiologen beizufügen. La.

F. Haft. La quarta dimension. Soc. Argentinea XXX.

Vortrag vor der Argentinischen wissenschaftlichen Gesellschaft. Der Verf. schildert die Entwickelung der Gedanken bei den Geometern und bei den Philosophen in Bezug auf die Art, sich in der Geometrie eine vierte Dimension vorzustellen.

Tx. (Lp.)

V. R. Fontana. Saggio sul riordinamento delle matematiche. Genova. Stabilimento Tipo-lit. Forense.

I. Kant. Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels. (1755.) Hrsg. von H. Ebert. (Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften. 12.) Leipzig. W. Engelmann. 101 S. 8°.

Der neue Abdruck von Kant's allgemeiner Naturgeschichte und Theorie des Himmels dürfte die wichtige Abhandlung einem weiteren Leserkreise zugänglich machen. Der Wert des Abdrucks beschränkt sich aber dadurch, dass der Herausgeber die vierte, nach Kant's Tode erschienene Auflage zu Grunde gelegt und sich Kürzungen und Abänderungen erlaubt hat, auch keine Entstehungsgeschichte der Kant'schen Schrift gegeben und die Anmerkungen in sehr beschränktem Umfang gehalten hat. Für den Kantphilologen ist der Abdruck unbrauchbar. Mi.

J. G. VOGT. Das Wesen der Elektricität und des Magnetismus auf Grund eines einheitlichen Substanzbegriffes. I. Teil. Die Constellationen der einheitlichen Substanz als die Träger der physikalischen Kraftäusserungen. Leipzig. Wiest. VI + 472 S. 8°.

G. CANTONI. Congetture su le azioni a distanza. Rom. Acc. L. Rend. (4) VI_2. 379-383.

F. ENGEL. Der Geschmack in der neueren Mathematik. Antrittsvorlesung. Leipzig. Lorentz. 22 S. 8°.

Der naiven Periode Euler's, in der man sich wenig um die strenge Begründung der Mathematik kümmerte, folgte gegen Ende des vorigen Jahrhunderts die kritische Periode, unter deren Zeichen wir noch jetzt stehen. Man begann die ganze Mathematik von Grund auf neu und einwandsfrei zu erbauen. Diese kritischen Bestrebungen sind auch auf die ganze Art und Weise, Mathematik zu treiben, von Einfluss gewesen. Man hat sich bemüht, unter den möglichen Methoden die beste ausfindig zu machen, und der Geschmack musste schliesslich entscheiden, welche Methode die beste sei. Der Verfasser beweist nun eingehend, dass der Geschmack bei Beurteilung mathematischer Entwickelungen eine Rolle spielen kann, und zeigt, wie man

Mathematik treiben muss, damit auch das ästhetische Bedürfnis seine Rechnung findet. Als Beispiele dienen ihm die Theorie der algebraischen Gleichungen und die projective Geometrie.

M.

F. MOHR. Das enthüllte Geheimnis der Pythia. Hannover. Schmorl u. v. Seefeld Nachf. 15 S. 8°.

Die Schrift F. Mohr's täuscht mit ihrem Titel, wenn sie von einer Kunst, auf mathematischem Wege lateinische Hexameter zu machen, spricht. Mathematisches ist in derselben nicht vorhanden. Die vier in der Schrift gegebenen Tabellen lassen sich bequem auf zwei reduciren, und das ganze Geheimnis, das wahrlich nicht tief liegt, besteht in folgenden 9 Reihen:

	1	2	3	4	5	6
I	Hic o	etenim	fausto	rumpet tibi	foedera	fatum
II	Esto	petis	cupido	complebit	talia	casus
III	Ecce	scias	licite	non indet	prospera	numen
IV	Tanta	nimis	dubie	solvet tibi	commoda	sydus
V	Forte	lubent	votis	promittit	gaudia	hic annus
VI	Iure	satis	certo	praedicit	nubila	thema
VII	Mille	magis	dominans	uouet tibi	saecula	carmen
VIII	Nonne	optas	vitas	non reddet	praemia	tempus
IX	Credo	quidem	merito	donabit	debita	caelum.

Man hat, um einen Hexameter zu machen, irgend ein Wort oder einen Wortcomplex der Columne 1 mit einem der Columne 2 und so fort bis 6 zu verbinden. Es sind allerdings 531441 ($= 9^6$) Hexameter möglich, aber das Latein der Pythia ist recht armselig; es besteht aus 58 Wörtern. Klassisch wird es auch niemand nennen, und die Pythia macht gelegentlich einen prosodischen Schnitzer. Und warum redet die Pythia lateinisch? Hätte sie doch lieber gesagt:

Ἀλλὰ σαφῶς σοι πάντα κομίζει δεξιὰ πότμος,

oder: *Νῦν δὲ τριπλῶς ἥσθητι, περαίνει καιρία δαίμων* etc.

Wozu aber die ganze Spielerei und Geheimnisthuerei? Mi.

B. Pädagogik.

G. Eneström. Programme d'un cours universitaire d'histoire des mathématiques. Bibl. Math. (2) IV. 1-10.

Nach einer allgemeinen Einleitung über die beste Anordnung von akademischen Vorlesungen über Geschichte der Mathematik giebt der Verfasser das Programm eines solchen Vorlesungscursus, der die ganze Geschichte der Mathematik übersichtlich in 30 Vorlesungen (von 1¼—1½ St.) behandeln dürfte, und ein Verzeichnis mathematisch-historischer Arbeiten, die dabei benutzt werden können. Zuletzt folgt eine Liste der mathematisch-historischen Vorlesungen, die im Jahre 1890 an verschiedenen Universitäten gehalten worden sind. E.

W. Bobynin. Der heutige Zustand des Unterrichts der Geschichte der Mathematik. Phys.-math. Wiss. IX. 1-6.

W. Bobynin. Programm der Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik an der Universität Moskau. Phys.-math. Wiss. IX. 6-22. (Russisch.)

Seit 1882/83 hält Hr. Bobynin an der Universität Moskau Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik. In einer ersten Note berichtet der Verf. über den Plan und die leitenden Gedanken und Ansichten seiner Vorlesung, nachdem er kurze Mitteilungen über die denselben Gegenstand betreffenden Vorlesungen der Herren Cantor (Heidelberg), Favaro (Padova) und Mansion (Gent) voraufgeschickt hat. Die zweite Note enthält ein eingehendes Programm dieser Vorlesungen. Wi.

P. G. Laurin. Om den matematiska undervisningen vid högre allmänna läroverk. Pr. Gymn. Christianstad 1890. 42 S.

Der Verf. bringt (nach einer Studienreise) Mitteilungen über den mathematischen Gymnasialunterricht in Deutschland, vor

allem in Oesterreich, und stellt im Zusammenhange hiermit ausführliche mathematisch-pädagogische Betrachtungen an, wobei er eine realistisch-praktische Richtung und eine genetisch-heuristische Unterrichtsmethode eifrig verteidigt. Bdn.

A. Brill. Ueber die Schulreform und den Unterricht in Mathematik und Zeichnen auf den Gymnasien. Darmstadt. L. Brill. 20 S. 8°.

Der Verfasser hat die bekannte „Heidelberger Gegenerklärung", welche hauptsächlich für die Beibehaltung des Griechischen als eines obligatorischen Unterrichtsgegenstandes auf den Gymnasien eintrat, unterzeichnet und rechtfertigt im vorliegenden Vortrage ausführlich seine Unterschrift. Er erklärt als vornehmste Aufgabe des Gymnasialunterrichtes die Ausbildung eines gesunden selbständigen Urteils, was bei Beschränkung des Gesichtskreises leichter zu erreichen ist als bei Vielseitigkeit. Dasjenige Mass von Kenntnissen in griechischer Grammatik, welches den Weg zum Verständnis der griechischen Klassiker bahnt, ist ein weit geringeres, als es der Lehrplan solcher Gymnasien vorauszusetzen scheint, welche ein correctes griechisches Scriptum von den Abiturienten verlangen. Was das mathematische Pensum anbetrifft, so hält der Verfasser eine Erweiterung desselben, z. B. durch Aufnahme der Elemente der Differentialrechnung oder der analytischen Geometrie, für überflüssig, ja sogar für schädlich. Dagegen reclamirt er dringend eine Disciplin für das Gymnasium, die bisher fehlte, die Elemente der darstellenden Geometrie. Neben dem obligatorischen Freihandzeichnen in den Unterklassen sollte Linearzeichnen in den mittleren Klassen und ein Cursus der Elemente der darstellenden Geometrie in den höheren einhergehen, der jedoch nicht von einem Künstler, sondern von einem Mathematiker geleitet werden müsste. M.

H. Thieme. Die Bedeutung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer für die allgemeine Bildung. Hoffmann Z. XXI. 81-100.

Unter besonderer Berücksichtigung der Schriften: F. Paulsen, „das Realgymnasium und die humanistische Bildung", und F. Pietzker, „Humanismus und Schulzweck". Lp.

D. Valeri. Sull' insegnamento della matematica nelle scuole classiche. Besso Per. mat. V. 46-59, 65-71.

Bemerkungen über die Methoden, nach welchen der Unterricht der Mathematik unter die verschiedenen Klassen der italienischen Gymnasien und Lyceen verteilt und in ihnen erteilt wird. La.

A. J. Pick. Sternwarten und Lehrerbildung. Hoffmann Z. XXI. 481-493.

R. Langerheim. Ein Vorschlag, um den ersten Unterricht in der Mathematik umzugestalten. Hoffmann Z. XXI. 578-582.

Gemäss einer den Aufsatz begleitenden Kritik ein missglückter Versuch. Lp.

Th. Wittstein. Die Methode des mathematischen Unterrichts. Nebst Proben einer schulmässigen Behandlung der Geometrie. 2. Aufl. Hannover. Hahn'sche Buchhdlg. IV + 103 S. 8°.

B. Buchdrucker. Ist die Beseitigung der Fremdwörter aus der Schulmathematik möglich und nützlich? Hoffmann Z. XXI. 312-316.

L. Viereck. Fremdwort und Schule. Hoffmann Z. XXI. 460-465.

Weisflog. Der Rechenunterricht an höheren Lehranstalten. Pr. Realsch. Crefeld.

Der Verfasser geht von der Thatsache aus, dass die Schüler

der mittleren und oberen Klassen höherer Lehranstalten selten die erforderliche Fertigkeit im Rechnen besitzen. Ursache dieser Erscheinung ist nach seiner Ansicht die oft mangelhafte, zu sehr sich an den Volksschulunterricht anlehnende Methode auf der untern Stufe, die das Rechnen in geistloser, rein mechanischer Weise lehrt, und welche die Lösung praktischer Aufgaben zu früh, und daher nur nach einem fest eingeprägten Schema, verlangt. Dem gegenüber fordert der Verfasser für die höheren Lehranstalten eine geistvollere Behandlung des Rechenunterichts, die vor allem darauf hinzielt, die Selbstthätigkeit des Schülers zu wecken, und die den Schüler anleitet, jede Aufgabe durch eigenes Nachdenken und nicht nur nach der Schablone zu lösen. Auf Grund dieser Principien giebt der Verfasser einige Andeutungen über den Gang des Rechenunterrichts. So soll schon in Sexta der Gebrauch der Klammern eingeübt und die Multiplication und Division ganzer Zahlen auf die mannigfaltigsten Arten ausgeführt werden, um eine rein mechanische Thätigkeit nicht aufkommen zu lassen. Die Decimalbrüche sind erst nach den gemeinen Brüchen zu behandeln. Im Mittelpunkte des gesamten Rechenunterrichts hat das Kopfrechnen zu stehen. F.

E. Höbel. Zur Reform des planimetrischen Unterrichts, mit besonderer Rücksicht auf Realschulen. Pr. (No. 392) Neue Realschule Cassel. 10 S. 4°.

Die leitenden Grundsätze bei der Abfassung dieser Arbeit, mit denen die Fachcollegen gewiss übereinstimmen, spricht der Verfasser in den Worten aus: „Der Unterricht muss anschaulich sein und der Lehrstoff zum bleibenden Eigentum des Schülers gemacht werden. Eine weise Beschränkung des gedächtnismässigen Wissens und weniges gründlich erfassen ist besser, als vieles oberflächlich kennen lernen.“ Im speciellen wird ausgeführt: nur durch Anschauung gewinnt der Schüler richtige Vorstellungen und klare Begriffe. Form und Ausdrucksweise der Erklärungen und Lehrsätze müssen einfach und dem Fassungsvermögen des Schülers angepasst sein; insbesondere sind über-

flüssige Fremdwörter durch deutsche Bezeichnungen zu ersetzen. Die vielen Hülfs-, Zu- und Nebensätze, namentlich die philosophischen Grundsätze sind überflüssig. Nebensächliches muss hinter Wichtigem auch äusserlich zurücktreten und die algebraische, schematische Kunstsprache ist namentlich anfangs möglichst zu vermeiden, dagegen ist der Schüler daran zu gewöhnen, ähnlich wie in den beschreibenden Naturwissenschaften oder der Geschichte, über ein seinen Standpunkt entsprechendes Thema einen kleinen Vortrag zu halten; als Beispiel wird „das gleichschenklige Dreieck“ behandelt. — Auf die Art der Stoffverteilung unter die einzelnen Klassen einzugehen, ist wohl um so weniger angezeigt, als dieselbe nunmehr in den neuen Lehrplänen festgelegt und vorläufig ausser Discussion gestellt ist. Lg.

Oxford „pass“ geometry. ἀγεωμέτρητος μηδεὶς ἐνταυθοῖ εἰσίτω. Nature XLI. 467-468.

Kritisirt die mechanische Art des Prüfens, wobei der Euklid zahlenmässig auswendig gewusst werden muss. Lp.

H. J. Woodall. How to teach geometry. Nature XLI. 60.
H. Geometrical teaching. Nature XLI. 80-81.

Erörterungen über das mechanische Einprägen des Euklid in England. Lp.

J. Bazala. Beitrag zum Mittelschulunterrichte über Kegelschnittslinien. Hoffmann Z. XXI. 19-22.

Mit Rücksicht auf den Artikel von Hrn. H. Martus: „Bestimmung der Krümmungsradien“. (Vgl. F. d. M. XXI. 1889. 690.) Lp.

M. Simon. Noch einmal der einbeschriebene und der umbeschriebene Kreis. Hoffmann Z. XXI. 341-342.

D. Sanders. Eine sprachliche Studie für Mathematiker. Hoffmann Z. XXI. 465-471.

Vollhering. Zum Capitel der Ungenauigkeiten des Ausdrucks in der Mathematik. Eine interessante Controverse. Ueber den Begriff „Dividiren“. Hoffmann Z. XXI. 501-504.

C. Rodenberg. Ueber Wesen und Aufgaben der Kinematik mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse höherer Schulen. Hoffmann Z. XXI. 3-18, 161-180.

„Die Kinematik bietet ein weites und in vielen Gebieten bis jetzt noch wenig bebautes Feld. Erfinden wird zwar niemand mit Hülfe der Mathematik allein ein neues Getriebe, welches einem vorgegebenen Zwecke zu dienen geeignet ist, ebenso wenig wie ein Maler die Idee zu einem Gemälde den Gesetzen der Perspective zu entnehmen vermag. Aber ein sicheres Urteil über den Gang eines Getriebes und ein zielbewusstes Verbessern eines Entwurfes unter Vermeidung planlosen Probirens ist nur auf Grund strenger mathematischer Untersuchung möglich. Und wenn Kant sagt, dass in jeder besonderen Naturlehre nur so viel eigentliche Wissenschaft angetroffen werden könne, als Mathematik anzutreffen sei, so gilt diese Behauptung in vollstem Masse für die Kinematik.“ Lp.

P. Konz. Der physikalische Unterricht in der Gymnasial-Secunda. Pr. (No. 418) Ritterakademie Bedburg. 24 S. 4°.

J. Karnas. Zur Stellung und Methode des physikalischen Unterrichts, insbesondere auf dem Gymnasium. Pr. (No. 183) Gymn. Kattowitz. 17 S. 4°.

F. Kühnemann. Ein Beitrag zum Unterricht in der Physik auf dem Gymnasium. Pr. (No. 14) Gymn. Memel. 25 S. 4°.

Alle drei Arbeiten behandeln den physikalischen Unterricht, wie er sich speciell auf dem Gymnasium nach den Lehrplänen

von 1882 gestaltet hat, und zwar I für das gesamte Gebiet, II und III hauptsächlich für die mathematische Geographie. Die aus der Erfahrung hervorgegangenen Gedanken und Wahrnehmungen über Methode und Stoffverteilung werden auch heute noch den Fachcollegen Anregung gewähren, wo durch die neuesten Lehrpläne die Vorschläge erfüllt (Anordnung des Lehrstoffs in concentrischen Kreisen) oder vorläufig ausser Discussion gestellt sind, wie der propädeutische Cursus in der astronomischen Geographie. Lg.

A. Richter. Das Mathematische im physikalischen Unterricht auf den Gymnasien. Hoffmann Z. XXI. 325-338.

Einleitung: Der Zweck des Gymnasialunterrichts im allgemeinen.

A. Der Zweck des Physikunterrichts. a. Die Beobachtungsfähigkeit. b. Die Kenntnisse. c. Das Interesse. d. Die formale Bildung.

B. Die Abgrenzung des physikalischen Gymnasialpensums. a. Auszuscheidendes. b. Einzuschliessendes.

C. Das Mathematische im physikalischen Gymnasialunterricht. a. Der Wert der mathematischen Formulirung der Gesetze. b. Mathematisch-physikalische Aufgaben. c. Vermehrung des Mathematischen im Physikunterricht. d. Der Beginn des Physikunterrichts mit der Mechanik. Lp.

B. Fest. Das Ohm'sche Gesetz in der Schule. Pr. (No. 333) Realprogymn. Northeim. 12 S. 4°.

Es wird gezeigt, wie man mit möglichst einfachen Hülfsmitteln in drei Unterrichtsstunden zu einer experimentellen Bestätigung des Ohm'schen Gesetzes gelangen kann. Zuerst wird mittels eines Stöpselrheostaten aus 10 Neusilberspiralen à 5 S. E. nach der Substitutionsmethode das Widerstandsgesetz für lineare Leiter, alsdann dasselbe Gesetz für Flüssigkeiten hergeleitet mit einem besonders construirten Apparat, welcher die bequeme Einschaltung einer Flüssigkeitssäule von verschiedenen Dimensionen

gestattet. Endlich wird die Abhängigkeit der Stromstärke vom Gesamtwiderstand und der elektromotorischen Kraft ermittelt. Als constantes Element dient ein Bunsen'scher Becher, als Strommesser ein Wagegalvanometer. Das beschriebene Verfahren dürfte wohl, auch mit Benutzung des constanten Elements, allgemein üblich sein. Lg.

GROSSE. Sind Abschnitte der Physik beim physikalischen Unterricht an höheren Lehranstalten (bes. Gymnasien) auszuscheiden und dem akademischen Unterricht vorzubehalten, und welche? Mit besonderer Rücksicht auf die Optik. Hoffmann Z. XXI. 261-262.

B. HOFFMANN. Ueber die Behandlung der Mathematischen Geographie in den mittleren und unteren Klassen. Pr. Realgymn. Nordhausen.

Ueberzeugt, dass nur der Anschauungsunterricht eine wirkliche Einsicht in das Wesen der Vorgänge am Himmel zu vermitteln vermöge, sucht der Verf. den elementaren Lehrstoff für die vier Klassen Quinta, Quarta, Unter- und Obertertia zweckmässig zu verteilen. Seine Vorschläge bekunden durchweg den erfahrenen Lehrer; insonderheit verdient der Rat an junge Lehrer Beachtung, dass nicht allzu viel Gewicht auf die — für gewisse Zwecke ja höchst schätzbaren — Demonstrationsapparate gelegt werde. Gr.

J. KLAU. Ueber die Behandlung der Himmelskunde am Gymnasium. Pr. Gymn. Wiesbaden.

Da merkwürdigerweise den preussischen Gymnasien der Unterricht in der sphärischen Trigonometrie entzogen worden ist, so ist auch die Astronomie viel schwerer als früher zu lehren, und es begreift sich, dass der Lehrer die Frage, wie unter solchen Umständen doch noch didaktische Erfolge auf einem so schwer zugänglichen Gebiete zu erzielen seien, in ernstliche Er-

wägung ziehen muss. So giebt hier der Verf. eine Gestaltung des Unterrichtsstoffes, wie sie mit geringen mathematischen Vorkenntnissen sich empfiehlt. So unbeweisbare Behauptungen, wie die, dass die Sonne zur Zeit des südlichen Sommers, „wenn sie aus geringer Entfernung und unter grossem Winkel wirkt", gewaltige Wassermassen nach dem Süden ziehe, die während des nördlichen Sommers nicht alle wieder auf die Nordhalbkugel zurückkehren könnten, sollte man aber gerade in einer für Anfänger bestimmten Darstellung aufzustellen sich hüten; bekanntlich ist auch nach den neueren Untersuchungen von Hann und Spitaler die „klimatische Zurücksetzung des Südens gegen den Norden" nichts weniger als eine Thatsache. Auf beschreibende Himmelskunde und Astrophysik legt der Verf. ein sehr grosses, vielleicht allzu grosses Gewicht und schlägt vor, gewisse Partien der mechanischen Physik ganz wegzulassen oder doch mit solcher Kürze zu erledigen, dass für einen astronomischen Cursus, wie er ihn sich denkt, die Zeit gewonnen werde. Gr.

F. Ludwig. Weitere Capitel zur mathematischen Botanik. Hoffmann Z. XXI. 243-248.

Fortsetzung früherer Betrachtungen (vgl. F. d. M. XX. 1888. 66). Die Curven des Höhenwachstums, deren Abscissen die verschiedenen Altersstufen, deren Ordinaten die zugehörigen Höhenzuwachse bilden, sind für die einzelnen Baumarten nahezu constant, insgesamt sind es logarithmische Curven. — Betreffs der Bewegung der pflanzlichen Flugorgane wird auf das Buch von H. Dingler verwiesen: „Ueber die Bewegung der pflanzlichen Flugorgane. Ein Beitrag zur Physiologie der passiven Bewegungen im Pflanzenreiche". München. Th. Ackermann. 1889. Lp.

J. Waldvogel. Uebungen aus dem mathematischen Repetitionsstoffe der Obergymnasialklasse. Pr. Studienanst. Aschaffenburg. S. 77-122. 8°.

Fortsetzung der Sammlung von Aufgaben (No. XXXIV bis LXVI), über welche F. d. M. XXI. 1889. 66 berichtet ist. Lp.

J. C. V. Hoffmann. Aufruf zu einem Congress der Lehrer der Mathematik und Naturwissenschaften an höheren Schulen Deutschlands. Hoffmann Z. XXI. 241-242.

J. C. V. Hoffmann. Noch einmal die Congressangelegenheit. Hoffmann Z. XXI. 321-324.

J. C. V. Hoffmann. Der Congress von Lehrern der Mathematik und Naturwissenschaften an höheren Lehranstalten Deutschlands zu Jena vom 25. - 28. September 1890. Hoffmann Z. XXI. 561-574.

Buchbinder. Ausführlicher Bericht über den Congress von Lehrern der Mathematik und Naturwissenschaften an höheren Lehranstalten Deutschlands in Jena vom 26. - 28. September 1890. Hoffmann Z. XXI. 611-632.

Zweiter Abschnitt.

Algebra.

Capitel 1.

Gleichungen. (Allgemeine Theorie. Besondere algebraische und transcendente Gleichungen.)

TODHUNTER. Elementi di Algebra con molti esempi. Versione dall' Inglese del Prof. O. Porcalli. XIII ed. interamente rifatta. Napoli. B. Pellerano.

P. VISALLI e G. MANDES. Trattato di Algebra ad uso degli alunni della R. Accademia Navale, delle Scuole militari e secondarie. Livorno. Giusti. [Ref. in Lugli Per. VI. 109.]

CH. DE COMBEROUSSE. Cours de Mathématiques. Tome IV: Algèbre supérieure. IIe Partie: Étude des imaginaires. Théorie générale des équations. Paris. Gauthier-Villars et Fils. XXIV + 832 S. 8°.

L. KRONECKER. Zur Theorie der allgemeinen complexen Zahlen und der Modulsysteme. Berl. Ber. 1888. S. 429-438, 447-465, 557-578, 595-612, 983-1016.

Im Bande XX der F. d. M. S. 73 findet sich unter dem obigen Titel die Bemerkung: „Referat folgt im nächsten Bande nach

Beendigung der Arbeit." Die Arbeit ist unvollendet geblieben; der Tod hat dem bis zum letzten Augenblicke schaffensfreudigen und schaffensgewaltigen Gelehrten die Feder aus der Hand genommen und die Reihe der Gedanken unterbrochen, denen die Wissenschaft so viel an Tiefe und an Ausdehnung verdankt. Wie eine grosse Fülle anderer weitgehender Arbeiten, so hat auch dieser Aufsatz von Leopold Kronecker nicht zu Ende geführt werden können.

Der Verf. knüpft an die Frage nach den aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen an, wie sie von den Herren Weierstrass, Dedekind, Petersen, H. A. Schwarz behandelt worden ist, und ersetzt das Problem durch ein anderes der Theorie der Divisorensysteme angehöriges: „in der allgemeinsten Weise $\frac{1}{2}\nu(\nu+1)$ ganze Functionen

$$(N)\quad y_h y_k - c_0^{(h,k)} - c_1^{(h,k)} y_1 - \dots - c_\nu^{(h,k)} y_\nu \quad (h \leqq k;\, h, k = 1, 2, \dots, \nu)$$

von ν unbestimmten Variabeln $y_1, y_2, \dots, y_\nu$ als Elemente eines Divisorensystems zu bestimmen, für welches jede ganze Function der Variabeln y einer einzigen linearen Function derselben congruent wird, für welches also die $\nu+1$ Grössen $1, y_1, y_2, \dots, y_\nu$ ein Fundamentalsystem bilden." Diese Aufgabe lässt sich in einfacher und allgemeiner Weise auf die Aufsuchung derjenigen Modulsysteme (M) zurückführen, deren Rang n gleich der Zahl ihrer Variabeln $x_1, \dots, x_n$ ist. Daraus folgt dann, dass die c sich rein algebraisch als algebraische Functionen von unbestimmten Variabeln darstellen, in welchen die Elemente entweder sämtlich unbestimmte Variabeln sind oder mit Ausnahme eines einzigen, welches dann eine algebraische Function der übrigen wird.

Die Divisorensysteme (N) sind innerhalb eines bestimmten Rationalitätsbereiches $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \dots)$ zu betrachten; erst nach dieser Festsetzung können sie in Primmodulsysteme und Nicht-Primmodulsysteme unterschieden werden; hiernach unterscheiden sich auch die complexen Zahlen. Die weiteren Untersuchungen führen auf Divisorensysteme (N), deren Discriminante Null wird; charakteristisch hierbei ist, dass es für solche stets ganze Functionen der Variabeln y giebt, welche erst, zu einer gewissen Potenz

erhoben, congruent Null werden; und charakteristisch bei Nicht-Primmodulsystemen, dass ganze Functionen bestehen, deren Product congruent Null wird, ohne dass ein Factor es ist. Es heben sich übrigens diejenigen complexen Zahlen, welche von Modulsystemen mit verschwindender Determinante herstammen, als besonders singulär heraus; bei den Weierstrass'schen Untersuchungen waren gerade diese ausgeschlossen.

Der Uebergang von den Modulsystemen (*M*) zu den Systemen (*N*) giebt die Veranlassung, solchem Uebergange von einem Systeme zu einem anderen principiell näher zu treten. Dabei wird ein neuer Begriff, der „einer Klasse von Modulsystemen", eingeführt. Wenn ein Modulsystem (*P*) der Variabeln x durch eine Transformation $x_k = \mathfrak{F}_k(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ in ein Modulsystem der φ transformirt wird, welches das Modulsystem ($\mathfrak{P}$) der φ enthält, und wenn Gleiches umgekehrt stattfindet, dann gehören (*P*) und ($\mathfrak{P}$) zu derselben Klasse. Findet nur das Erste statt, so steht die Klasse von ($\mathfrak{P}$) unter der von (*P*). Diese Begriffsbildung steht in enger Beziehung zur Einteilung algebraischer Grössen in Gattungen, sowie das Enthaltensein einer Klasse unter einer anderen mit der Bildung von Arten oder Species ganzer Functionen eines Modulsystems.

Die Betrachtungen des Verfs. erweitern sich nun mehr und mehr. Er geht auf den allgemeinsten Begriff von Composition und Aequivalenz ein, den er so umfassend aufstellt, dass die Untersuchungsmethoden sich nicht bloss auf Zahlen und Systeme von Zahlen, sondern auch auf andere Objecte anwenden lassen. Das Wichtige dabei ist: erstens die Darstellung der Elemente eines beliebigen Systems, für welches Composition gilt, durch Indicessysteme $(z_1, z_2, z_3, \ldots)$, deren Elemente z rationale Zahlen sind, und für welche der Begriff der Composition durch den der Addition ersetzt wird; — und zweitens die Einführung von Intervallen, so dass alle in einem Intervalle liegenden rationalen Zahlen als äquivalent betrachtet werden können. Dieser letzte Umstand giebt die strenge Begründung für die Theorie angenäherter oder abgekürzter Rechnungen. Von den Beispielen, die sich anschliessen, möge hier noch die Behandlung von

Reihen rationaler Zahlen, die mit wachsendem Index gegen einander convergiren, hervorgehoben werden; hier tritt der Begriff des Irrationalen auf, und die schönen Christoffel'schen Resultate werden abgeleitet. No.

L. Stickelberger. Ueber eine Verallgemeinerung der Kreisteilung. Math. Ann. XXXVII. 321-367.

Nach einer trefflichen kurzen historischen Uebersicht über die Beziehungen zwischen Kreisteilung und Zahlentheorie giebt der Verfasser selbst eine so vollständige Inhaltsangabe seiner Abhandlung, dass wir dieselbe wörtlich folgen lassen: „Der vorliegenden Abhandlung, welche durch die für 1885 und 1888 ausgeschriebene Preisfrage der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen veranlasst ist, liegt eine Verallgemeinerung der Kreisteilungsresolvente zu Grunde, nämlich eine aus m^{ten} und p^{ten} Einheitswurzeln gebildete Zahl, welche ganz ähnliche Eigenschaften besitzt wie die gewöhnliche Resolvente; dabei bedeutet p eine Primzahl und m eine beliebig zusammengesetzte, aber durch p nicht teilbare Zahl. Zu diesen Resolventen stehen die Kummer'schen Zahlen Ψ in ähnlicher Beziehung, wie die Jacobi'schen ψ zu den gewöhnlichen Resolventen. Ferner zerlegen sich unsere Resolventen stets in zwei Factoren, deren einer entweder eine gewöhnliche Resolvente oder gleich $-p$ ist, während der andere nur von den m^{ten} Einheitswurzeln abhängt und in gleicher Weise gebaut ist wie die besonderen, von Eisenstein untersuchten Summen, weshalb wir denselben als Eisenstein'sche Summe bezeichnen. — Die Analogie der gewöhnlichen und der verallgemeinerten Resolventen bewährt sich auch bei der Zerlegung derselben in ihre idealen Factoren; wenn p für den Modul m zum Exponenten f gehört, so verhält sich die allgemeine Resolvente ähnlich wie ein Product von f gewöhnlichen Resolventen. Vollständiger wird die Analogie, wenn man eine beliebige „Gruppe“ von Resten nach dem Modul m betrachtet; sobald die Primzahl p dieser Gruppe angehört, kann man ein Product von Resolventen herstellen, dessen ideale Primfactoren von jenem Exponenten f gar nicht explicite abhängen, und das

Gleiche gilt auch von dem Reste dieses Productes nach der niedrigsten Potenz eines idealen Primfactors von p, durch die das Product nicht teilbar ist. Ist die Zahl m so beschaffen, dass $-m$ eine Fundamentaldeterminante quadratischer Formen ist, und besteht die Restgruppe aus denjenigen (ungeraden positiven) Zahlen, für die das Jacobi'sche Zeichen $\left(\frac{-m}{k}\right)$ den Wert $+1$ hat, so werden unsere allgemeineren Producte wie die von Jacobi und Cauchy betrachteten zweiwertig und geben daher die Darstellung einer gewissen Potenz von p durch die Hauptform jener Determinante; zugleich genügen die darstellenden Zahlen zwei linearen Congruenzen nach dem Modul p, von denen jedoch nur eine von der gewählten Wurzel der Congruenz $x^2+m\equiv 0 \pmod{p}$ unabhängig ist. Da der Exponent jener Potenz gleich der Klassenzahl der quadratischen Formen ist, so ist die Analogie mit den Sätzen von Jacobi und Cauchy eine vollständige; zur wirklichen Herstellung der quadratischen Zerfällungen reichen freilich unsere Formeln so wenig aus wie die der genannten Mathematiker, sobald die Klassenanzahl grösser als Eins ist.

Diese Resultate habe ich im Jahre 1888 der Gesellschaft der Wissenschaften vorgelegt in einer Abhandlung: „Theorie der Eisenstein'schen Summen u. s. w.“, von welcher die gegenwärtige eine Umarbeitung ist. In der neuen Fassung treten die Eisenstein'schen Summen mehr zurück als in der früheren, nachdem es mir seither gelungen ist, die Zerlegung der Resolventen in ihre idealen Primfactoren auf neuem Wege, nämlich ohne die Hülfe jener Summen, zu bewerkstelligen. Dieser neue Beweis findet sich in § 6; er umfasst zugleich den in § 5 gegebenen; wiewohl also § 5 an sich entbehrlich ist, mochte ich ihn nicht beseitigen, da er immerhin das Verständnis von § 6 nicht unwesentlich erleichtern dürfte. Auch sonst ist die Anordnung des zweiten Teils wesentlich geändert und § 4 beträchtlich verkürzt, während in § 1-3 nur untergeordnete redactionelle Aenderungen vorgenommen sind.

Die Theorie der idealen Zahlen ist in derjenigen Form benutzt, die ihr Herr Dedekind zuerst in der zweiten Auflage der

Dirichlet'schen Vorlesungen über Zahlentheorie gegeben hat. Die wenigen speciell auf Kreisteilungskörper bezüglichen Sätze, welche hier gebraucht werden, finden sich in der dritten Auflage desselben Werkes in der Fussnote zu Seite 587 angegeben." Wbg.

G. Landsberg. Untersuchungen über die Theorie der Ideale. Diss. Breslau. 58 S. 8°.

E. Netto. Ueber den gemeinsamen Teiler zweier ganzen Functionen einer Veränderlichen. J. für Math. CVI. 81-88.

In seinem Aufsatze „Ueber einige Anwendungen der Modulsysteme auf elementare algebraische Fragen" [J. für Math. IC, F. d. M. XVIII. 57] hat Kronecker unter anderem den grössten gemeinsamen Teiler von zwei ganzen Functionen einer Veränderlichen für irgend ein Primmodulsystem des Bereiches ihrer Coefficienten bestimmt, und zwar auf einem Wege, welcher sich der Bézout-Jacobi'schen Eliminationsmethode anschliesst. In der vorliegenden Arbeit stellt sich Herr Netto die Fragen: „Lassen sich die Kronecker'schen Ergebnisse auch auf das alte Euler'sche Eliminationsverfahren übertragen? Und in welcher Beziehung stehen, wenn dies der Fall sein sollte, die hier und die dort benutzten Modulsysteme?" Durch elementare Determinantentransformationen gelingt es, nachzuweisen, dass die Kronecker'schen Resultate auch bei der Euler'schen Eliminationsmethode bestehen bleiben, und dass die beiderseits benutzten Modulsysteme einander äquivalent sind. F.

E. Netto. Ueber den grössten gemeinsamen Teiler zweier ganzer Functionen. Hamb. Mitt. II. 36-43.

Für die Existenz eines gemeinschaftlichen Teilers vom Grade $n-k$ zweier ganzen Functionen vom Grade n ist bekanntlich die hinreichende und notwendige Bedingung die, dass aus einer Reihe von Determinanten der Ordnungen $2n$, $2n-2$, $2n-4$, ..., welche in bestimmter Weise aus den Coefficienten der beiden gegebenen Functionen gebildet sind, die ersten $n-k$ verschwinden, während

die nächste (von der Ordnung $2k$) von Null verschieden ist. Der grösste gemeinsame Teiler ist alsdann eine ganze Function φ vom Grade $n-k$, deren Coefficienten Determinanten der Ordnung $2k$ sind. In der vorliegenden Arbeit weist nun Herr Netto mittels Determinantenbetrachtungen im Anschluss an seine frühere Arbeit „Anwendung der Modulsysteme auf eine elementare algebraische Frage" (cf. F. d. M. XXI. 132) die charakteristische Bedeutung nach, welche die erwähnte Function φ noch in dem Falle besitzt, dass die Determinanten der Ordnungen $2n$, $2n-2, \ldots$ nicht verschwinden. F.

N. W. Bugaieff. Verschiedene Anwendungen des Princips der grössten und kleinsten Exponenten in der Theorie der algebraischen Functionen. Mosk. Math. Samml. XIV. 553-590.

Unter dem Princip der grössten und kleinsten Exponenten versteht der Verf. die Methode, successive Glieder der Zerlegung algebraischer Functionen in unendliche Reihen nach abnehmenden oder wachsenden Potenzen der Veränderlichen zu ermitteln. Diese Methode wird auf die simultanen Gleichungen erweitert und hierdurch eine wichtige Anwendung auf die Zerlegung ganzer Functionen mit mehreren Veränderlichen in irreductible Factoren ermöglicht. Die Methode des Verfassers zur Gewinnung der Zerlegung ist sehr zweckmässig und führt schnell zum Ziele.

Wi.

A. Kneser. Ein neuer Beweis der Unmöglichkeit, allgemeine Gleichungen höheren Grades algebraisch aufzulösen. J. für Math. CVI. 48-64.

Sind $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ die Wurzeln einer algebraischen, im Rationalitätsbereich $(\mathfrak{R})$ irreductiblen Gleichung n^{ten} Grades

$$F(x)=0,$$

so gehört das Product $G(x) = \prod\limits_{(i)}(x-u_1\,\omega_{i_1}-u_2\,\omega_{i_2}-\cdots-u_n\,\omega_{i_n})$

(das Product über alle geraden Permutationen der Indices $1, 2, \ldots, n$ erstreckt)

dem Rationalitätsbereiche ($\mathfrak{R}$) an, sobald man zu diesem die Quadratwurzel aus der Discriminante von $F(x)=0$ adjungirt. Wenn $F(x)=0$ eine „allgemeine“ Gleichung ist, so ist $G(x)=0$ im Bereiche ($\mathfrak{R}$) irreductibel. Aus der Annahme nun, dass $F(x)=0$ durch Wurzelausziehungen auflösbar sei, lässt sich schliessen, dass $G(x)=0$ durch Adjunction einer Kette von Radicalen reductibel wird. Dieser Schluss führt unter Benutzung des vorher bewiesenen Satzes: „Besitzt eine Gruppe Γ, deren Ordnungszahl m ist, eine ausgezeichnete Untergruppe Γ' von der Ordnung $m:q$, wo q eine Primzahl bedeutet, so ist die Ordnungszahl jeder Substitution der Gruppe Γ, welche der Untergruppe Γ' nicht angehört, durch q teilbar“, zu der Folgerung, dass jede ungerade Zahl zwischen n und 1 durch eine gewisse, von 1 verschiedene Primzahl q teilbar sein muss, was unmöglich ist, sobald $n>4$. Erwähnt sei noch, dass Herr Kneser im Anfange seiner Arbeit einen rein arithmetischen Beweis des Abel'schen Satzes giebt, wonach jede binomische Gleichung vom Primzahlgrad $x^p-a=0$ in dem Rationalitätsbereiche, welchem a angehört, entweder irreductibel ist oder eine rationale Wurzel besitzt. F.

O. Tognoli. Intorno alla risoluzione algebraica delle equazioni. Batt. G. XXVIII. 315-329.

Herr Tognoli stellt sich die Aufgabe, die von Galois, Abel und ihren Nachfolgern gefundenen Resultate in Bezug auf die algebraische Auflösbarkeit der Gleichungen höheren Grades in einfacherer Weise, als es bisher geschehen ist, abzuleiten. Sehr einfach sind die Entwickelungen des Herrn T. allerdings geworden. Welches aber ihr Wert ist, mögen nur die Schlüsse lehren, mittels deren er die Unauflösbarkeit der allgemeinen Gleichungen fünften Grades nachweist. Nachdem er den „Lehrsatz“ bewiesen hat:

„Damit eine irreductible Gleichung n^{ten} Grades auflösbar sei, ist es notwendig und hinreichend, dass es eine Function von n Grössen gebe, welche die gegebene Gleichung verificirt und bei Anwendung aller Substitutionen n verschiedene Werte an-

nimmt", schliesst er aus dem bekannten Satze der Substitutionentheorie:

„Wenn eine Function von 5 Grössen 5 verschiedene Werte hat, so ist sie symmetrisch in Bezug auf 4 von diesen Grössen", dass eine solche Function im allgemeinen nicht existire und demnach die Gleichung fünften Grades nicht algebraisch auflösbar sei. F.

C. F. GAUSS. Die vier Beweise für die Zerlegung ganzer algebraischer Functionen in reelle Factoren ersten oder zweiten Grades. (1799 - 1849.) Hrsg. von E. NETTO. (Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften Nr. 14.) Leipzig. W. Engelmann. 81 S. 8°.

Das vorliegende Bändchen ist eine deutsche Ausgabe der 4 Gauss'schen Beweise für die Existenz der Wurzeln einer algebraischen Gleichung. Der Herausgeber hat einige Anmerkungen hinzugefügt, in denen er die verschiedenen Grundlagen der Beweise kurz charakterisirt und zugleich noch der hauptsächlichsten an diese Beweise anknüpfenden Litteratur Erwähnung thut. Ht.

H. G. ZEUTHEN. Bevis for at en algebraisk Ligning altid har en Rod. Nyt Tidss. for Math. I. 65-67.

Herr Zeuthen giebt hier einen neuen, sehr einfachen Beweis für den Satz, dass jede algebraische Gleichung eine Wurzel hat.

Die vorgelegte Gleichung sei $f(z)=0$, wo $f(z)=z^n+az^{n-1}+\cdots$ eine ganze rationale algebraische Function n^{ten} Grades ist. Die Grössen $a, b, \ldots$ können reell oder complex sein. Es wird angenommen, dass, wie gewöhnlich, eine Grösse $z=x+iy$ durch einen Punkt in einer gegebenen Ebene abgebildet wird. Setzt man jetzt

$$\varphi(z)=[f(z)]^{\frac{1}{2n}},$$
$$z=r(\cos\Theta+i\sin\Theta)$$

und lässt Θ von 0 bis zu 2π wachsen, während r constant bleibt, so beschreibt z einen Kreis um den Anfangspunkt. Wird r hin-

länglich gross angenommen, so kann man schreiben

$$f(z) = z^n\left(1 + \frac{a}{z} + \cdots\right) = r^n(\cos n\Theta + i\sin n\Theta)\varrho(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

wo ϱ und Θ beliebig wenig von respective 1 und 0 abweichen. Man sieht dann, dass

$$\varphi(z) = \sqrt[n]{r}\sqrt[2n]{\varrho}\left(\cos\frac{\Theta}{2} + i\sin\frac{\Theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2n} + i\sin\frac{\alpha}{2n}\right)$$

ein Wert von $\varphi(z)$ ist.

Lässt man jetzt Θ von 0 bis 2π wachsen, so werden, indem $\varphi(z)$ continuirlich variirt, φ und α auch sich ändern. Da aber α, wenn r hinlänglich gross genommen wird, hierbei so wenig, als man will, schwankt, so kann α nicht, indem Θ von 0 bis 2π variirt, von α bis $\frac{\alpha + 2p\pi}{n}$ sich ändern, und muss also, wenn Θ den Wert 2π annimmt, seinen anfänglichen Wert wieder annehmen. Dagegen wird $\cos\frac{\Theta}{2} + i\sin\frac{\Theta}{2}$ von dem Wert $+1$ in den Wert -1 übergehen. Dieses ist aber unmöglich, wenn kein Verzweigungspunkt von $\varphi(z)$ innerhalb des Kreises liegt. Aber in einem Verzweigungspunkt von $\varphi(z)$ muss $\varphi(z) = 0$ sein, da in allen anderen Punkten die Werte von $\varphi(z)$ um eine endliche Grösse verschieden sind. V.

A. Cayley. Sur les racines d'une équation algébrique. C. R. CX. 174-176.

A. Cayley. Sur les racines d'une équation algébrique. C. R. CX. 215-218.

$f(u)$ sei eine ganze rationale Function n^{ten} Grades mit reellen oder imaginären Coefficienten; es werde gesetzt

$$f(u) = f(x + iy) = P(x, y) + i.Q(x, y).$$

Aus der Voraussetzung, dass die Gleichung $f'(u) = 0$ $n-1$ Wurzeln besitzt, ergiebt sich durch Discussion der Fläche

$$c - z = P^2 + Q^2,$$

(wo c eine gegebene positive Grösse bedeutet),

dass P^2+Q^2 für n Wertsysteme (x, y) verschwindet, $f(u)=0$ also n Wurzeln besitzt.

In der zweiten Note betrachtet Herr Cayley die Fläche

$$(c-z)^2=P^2+Q^2,$$

mit Hülfe deren er graphisch die Newton'sche Annäherung construirt. Im Anschluss hieran behandelt er das Newton-Fourier'sche Problem (cf. F. d. M. XI. 67 u. 260) für eine quadratische Gleichung. F.

E. Amigues. Théorème de d'Alembert. Nouv. Ann. (3) IX. 116-118, J. de Math. spéc. (3) IV. 145-146.

Beweis des Satzes, dass, wenn es einen (oder auch mehrere) bestimmten, endlichen Wert z_0 der Variable z giebt, für welchen der absolute Betrag der ganzen rationalen Function $f(z)$ mit reellen oder imaginären Coefficienten kleiner ist als für alle anderen Werte von z, notwendig $f(z_0)=0$ ist. F.

P. Mansion. Sur le théorème fondamental de l'analyse algébrique. Brux. S. sc. XIV A. 46.

Die Beweise dieses Satzes, welche das Vorhandensein einer Wurzel feststellen und gleichzeitig ergeben, dass diese Wurzel sich mit den Coefficienten stetig ändert, können eine rein arithmetische Gestalt bekommen. Mn. (Lp.)

Riquier. Sur les fonctions continues d'un nombre quelconque de variables et sur le principe fondamental de la théorie des équations algébriques. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

J. W. Rasch. Meetkundige plaats van de wortelpunten eener hoogere machtsvergelijking. Nieuw Archief XVII. 233-234.

Es wird hier eine Beziehung abgeleitet zwischen den Orten der Wurzelpunkte einer Gleichung höheren Grades und denen

einer anderen, deren Grad um 1 niedriger ist und die in überaus einfacher Weise aus der ersteren abgeleitet wird. Wenn ein geometrischer Ort ein Kreis ist, so bekommt die Gleichung des anderen eine merkwürdige Form. G.

F. Mertens. Ueber einen Satz der höheren Algebra. Wien. Ber. XCIX. 907-909.

Arithmetischer Beweis des Abel'schen Satzes, dass die reine Gleichung $x^p - A = 0$, deren Grad eine Primzahl ist, nur dann in dem Rationalitätsbereiche A reductibel sein kann, wenn A eine p^{te} Potenz ist. F.

Ch. Biehler. Sur les équations binômes. Nouv. Ann. (3) IX. 472-476.

Die Gleichung

$$x^{2m+1} - 1 = 0$$

lässt sich bekanntlich, nach Division durch $x-1$, durch die Substitution

$$y = x + \frac{1}{x}$$

auf eine Gleichung m^{ten} Grades zurückführen. Dass sämtliche Wurzeln der letzteren reell sind und zwischen den Grenzen (-2) und $(+2)$ liegen, wird durch Benutzung der Sturm'schen Methode bewiesen. F.

A. Cayley. Note on the ninth roots of unity. Mess. (2) XX. 63.

Zur Auflösung der Gleichung $\theta^6 + \theta^3 + 1 = 0$ setzt der Verfasser $a = \theta + \theta^8$, $b = \theta^2 + \theta^7$, $c = \theta^4 + \theta^5$, berechnet die symmetrischen Verbindungen der a, b, c und findet hieraus, dass diese Grössen Wurzeln von $x^3 - 3x + 1 = 0$ sind, dass daher alle rationalen symmetrischen Functionen von a, b, c ebenfalls rationale Werte haben. Lp.

A. CAYLEY. On the equation $x^{17}-1=0$. Mess. (2) XIX. 184-188.

Beitrag zur übersichtlichen Berechnung der Wurzeln dieser Gleichung, insbesondere von $2\cos\frac{2\pi}{17}$, u. s. w. Lp.

W. J. C. SHARP, E. LAMPE. Solution of question 8951. Ed. Times LII. 93-94.

Hr. Sharp hatte den Beweis dafür verlangt, dass

1) $x^{4n}+x^{3n}+x^{2n}+x^n+1$ durch $x^4+x^3+x^2+x+1$,

2) $x^{4n}+x^{3n}+x^{2n}+x^n+1$ „ $x^4-x^3+x^2-x+1$,

3) $x^{4n}-x^{3n}+x^{2n}-x^n+1$ „ $x^4-x^3+x^2-x+1$

teilbar sei, jedoch im Falle 2) nur für ein gerades n, im Falle 3) für ein ungerades. Ref. weist in seiner eingesandten Note auf den Zusammenhang dieser Fragen mit der Theorie der Kreisteilungsgleichungen hin und ersetzt z. B. die Formel 1) durch $\frac{x^{n(p-1)}+x^{n(p-2)}+\cdots+x^n+1}{x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1}$ ohne Rest teilbar, wenn n und p relative Primzahlen sind. Lp.

G. DE LONGCHAMPS. Note sur la question 278. J. de Math. spéc. (3) IV. 87-88.

Ist $f(x)=0$ eine Gleichung mit lauter reellen und ungleichen Wurzeln, so hat die Gleichung

$$f+A_1f'+A_2f''+\cdots+A_pf^{(p)}=0$$

dieselbe Eigenschaft, falls alle Wurzeln der Gleichung

$$z^p-A_1z^{p-1}+A_2z^{p-2}\cdots+(-1)^pA_p=0$$

reell sind. Dieser von Hrn. de Longchamps zum Beweise vorgelegte Satz rührt von Herrn Hermite her (Nouv. Ann. 1866. 479). Lp.

L. LACHTINE. Der Ausdruck der Wurzeln einer dreigliedrigen algebraischen Gleichung durch bestimmte Integrale Mosk. Math. Samml. XV. 61-83.

Vergl. Abschnitt VI, Cap. 4, bestimmte Integrale. Wi.

F. J. Studnička. Eine Bemerkung über die Hamilton'schen Zahlen. Casop. XIX. 119. (Böhmisch.)

Bezieht sich auf eine in diesem Jahrb. (XIX. 1887. 80) gemachte Bemerkung, dass die dortige Substitution $t=\frac{1}{2}$ ein paradoxes Ergebnis liefert, wobei das Paradoxon beseitigt wird.

Std.

Lalbalétrier. Sur la formule de Waring (équations du second degré). J. de Math. élém. (3) IV. 5-10, 25-29.

Von der für Gleichungen zweiten Grades specialisirten und für sie bewiesenen Waring'schen Formel werden Anwendungen auf Lösungen zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten gemacht.

Lp.

F. J. Studnička. Beitrag zur Theorie der reciproken Gleichungen. Casop. XIX. 1. (Böhmisch.)

Enthält eine kurzgefasste Darstellung des Vorgangs, wie man von der Gleichung

$$A_0x^{2s}+A_1x^{2s-1}+\cdots+A_sx^s+A_{s-1}kx^{s-1}+A_{s-2}k^2x^{s-2}+\cdots+A_0k^s=0$$

durch Vermittelung der Grössen

$$V_m=x^m+\frac{k^m}{x^m},$$

woraus folgt

$$V_0=2,\ V_1=x+\frac{k}{x}=y,$$

die Relation

$$A_0V_s+A_1V_{s-1}+\cdots+A_s=0$$

und die neue Gleichung

$$B_0y^s+B_1y^{s-1}+\cdots+B_s=0$$

ableitet, wobei zu setzen ist

$$B_i=A_i+\sum_{h=1}(-1)^h\frac{n+2h-i}{h}(n-i+h-1)_{h-1}k^hA_{i-2h},$$

so dass nach Auflösung dieser Gleichung mit Hülfe der so erhaltenen Wurzelwerte y_i noch die Gleichung

$$x^2-y_ix+k=0\qquad(i=1,2,3,\ldots,s)$$

aufzulösen ist, um die $2s$ Wurzeln der gegebenen Gleichung zu erhalten.

Hierauf wird noch der specielle Fall

$$k = -1$$

behandelt und an einer Gleichung 8ten Grades der ganze Vorgang dargestellt. Std.

HELGE VON KOCH. Om upplösningen af ett system lineära likheter mellan ett oändligt antal obekanta. Stockh. Öfversigt. 109-129.

Durch Untersuchungen von Hill, Appell und Poincaré angeregt, beschäftigt sich der Verf. mit Systemen von unendlich vielen linearen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Es werden allgemeine Bedingungen hergeleitet für die Existenz einer Lösung und für die Eindeutigkeit derselben. Auch gewinnt der Verf. durch functionentheoretische Betrachtungen eine ziemlich allgemeine analytische Form der Lösung. Bdn.

W. J. ALBITZKY. Die Untersuchung der Gleichungen zweiten Grades mit zwei Veränderlichen in Bezug auf ihre Zerlegbarkeit in zwei lineare Factoren. Petersb. Techn. Inst. (Russisch.)

Beweis dafür, dass

$$AE^2 + CD^2 + FB^2 - BDE - 4ACF = 0$$

der Ausdruck für die Bedingung der Zerlegbarkeit von

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$$

in zwei lineare Factoren ist. Wi.

H. NISSEN. Om Vinkler's Tredeling, kubiske Ligninger og det deliske Problem. Nyt Tidss. for Math. IA. 2-7.

Es wird die Dreiteilung eines Winkels bewerkstelligt mittels eines rechten Winkels, dessen einer Schenkel einen Kreis berührt, und dessen Scheitel auf einer Geraden gleitet. Es wird darnach gezeigt, wie die Lösung einer Gleichung dritten Grades

(in dem nicht irreduciblen Falle) geometrisch mittels desselben Hülfsmittels gelöst werden kann. (Vergl. Bartl, „Mechanisch-graphische Lösung der kubischen und biquadratischen Gleichungen“, Hoppe Arch. (2) I. 1—46; F. d. M. XVI. 1884. 87. Lp.)

V.

V. Mollame. Sul casus irreductibilis dell' equazione cubica. Napoli Rend. (2) IV. 167-171.

Wenn man von der Form ausgeht, auf welche man, nach Abel, jede Function der Coefficienten einer algebraisch auflösbaren Gleichung bringen kann, die eine ihrer Wurzeln darstellt, so lässt sich mit Benutzung des Satzes: „Ist die dritte Potenz einer ganzen rationalen, mehr als zweiwertigen Function ψ dreier Grössen x zweiwertig, so kommen in ψ complexe Coefficienten vor“, der Schluss ziehen, dass, auf welche Weise man auch eine allgemeine kubische Gleichung mit drei reellen Wurzeln auflösen mag, der resultirende Ausdruck notwendig die Kubikwurzel aus einer complexen Grösse enthält.

Im zweiten Teil der Note werden einige besondere Arten von Gleichungen dritten Grades behandelt, deren drei reelle Wurzeln sich algebraisch in reeller Form darstellen lassen.

F.

Ch. Brisse. Nouvelle méthode de discussion de l'équation en S. Nouv. Ann. (3) IX. 367-372.

Die „Gleichung in S“

$$\varDelta(S) = \begin{vmatrix} A-S & B'' & B' \\ B'' & A'-S & B \\ B' & B & A''-S \end{vmatrix} = 0$$

kann als notwendige und hinreichende Bedingung dafür angesehen werden, dass der Ausdruck

$$\varphi - S\sigma,$$

wo $$\varphi = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy$$

mit reellen Coefficienten und

$$\sigma = x^2 + y^2 + z^2$$

ist, sich auf eine Summe von weniger als drei Quadraten reducirt. Daraus lassen sich in einfachster Weise die Eigenschaften der „Gleichung in S“ entwickeln, deren wichtigste hier angegeben werden mögen:

1) Die Gleichung in S hat reelle Wurzeln.

2) Der Ausdruck $\varphi - S\sigma$ reducirt sich auf eine Summe von zwei Quadraten, oder auf ein Quadrat, oder ist identisch Null, je nachdem S einfache, zweifache oder dreifache Wurzel der Gleichung in S ist, und umgekehrt.

3) Eine einfache Wurzel der Gleichung in S annullirt nicht alle Unterdeterminanten zweiter Ordnung der Determinante $\Delta(S)$, eine zweifache Wurzel alle Unterdeterminanten zweiter Ordnung, aber nicht alle erster Ordnung, eine dreifache Wurzel auch alle Unterdeterminanten erster Ordnung, und umgekehrt.

4) Die kleinste Wurzel der Gleichung in S liefert eine Zerlegung des Ausdruckes $\varphi - S\sigma$ in zwei positive, die grösste Wurzel in zwei negative Quadrate, die mittlere Wurzel allein zerlegt diesen Ausdruck in ein Product zweier verschiedenen reellen Factoren. Wbg.

F. Lucas. Nature des racines de l'équation du quatrième degré. S. M. F. Bull. XVIII. 145-149.

Die Arbeit behandelt Beziehungen zwischen den Wurzeln einer Gleichung vierten Grades und denen ihrer nach der Descartes'schen Methode gebildeten Resolvente dritten Grades, und zieht aus dem Vorzeichen der Discriminante der letzteren Schlüsse auf die Realität der Wurzeln der Gleichung vierten Grades.

F.

A. Cayley. On a soluble quintic equation. American J. XIII. 53-58.

Angabe der Wurzeln der auflösbaren Gleichung

$$x^5 + 3000x^2 + 20000x - 100000 = 0$$

und Verification der Lösung. F.

N. W. BUGAIEFF und L. K. LACHTINE. Ueber die auflösbaren Gleichungen fünften Grades. Mosk. Math. Samml. XV. 83-98.

Die Resolvente der Gleichung $x^5 + ax + b = 0$ wird in der Form:

$$2^6 a^5 (y-11)^4 (y^2+4) - 5^5 b^4 (2y+3)^5 = 0$$

erhalten. Damit diese Resolvente eine rationale Wurzel hat, was, wie bekannt, eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Auflösbarkeit der Gleichung (1) ist, muss diese Gleichung die Form haben:

$$(\lambda x)^5 + \frac{(\mu-1)(\mu-11)}{4(\mu^2+4)}(\lambda x) + \frac{\mu-11}{2(\mu^2+4)} = 0.$$

Die Wurzel der Resolvente dieser Gleichung y ist gleich $\frac{11\mu+4}{\mu-11}$. (Vergleiche Runge: Ueber die auflösbaren Gleichungen von der Form $x^5 + ux + v = 0$. Acta Math. VII. 173–186; F.d.M. XVII. 1885. 69.) Wi.

R. ALAGNA. Condizioni perchè una forma dell' ottavo ordine abbia quattro punti doppii. Palermo Rend. IV. 25-29.

Es werden die sieben Relationen zwischen den Invarianten einer Form achten Grades mit vier Doppelpunkten aufgestellt, indem die Form als das Quadrat einer biquadratischen Form betrachtet und ihre Invarianten als Functionen der Invarianten der letzteren ausgedrückt werden; man findet dann die gesuchten Relationen durch eine einfache Elimination. Wbg.

R. ALAGNA. Intorno ad alcuni casi di multiplicità delle radici dell' equazione d'ottavo ordine. Palermo Rend. IV. 287-298.

Die vorliegende Arbeit ist eine Fortsetzung der vorher besprochenen: Es werden die Relationen zwischen den Invarianten einer Form achten Grades aufgestellt, welche 1) einen dreifachen und einen Doppelpunkt, 2) einen dreifachen und zwei Doppel-

punkte, 3) zwei dreifache Punkte, 4) zwei dreifache und einen Doppelpunkt besitzt. Zu diesem Zweck wird die Form als das Product des Quadrates einer quadratischen in eine biquadratische Form betrachtet, und es werden zunächst die Relationen zwischen den simultanen Invarianten dieser beiden Formen ermittelt. Eine einfache Elimination führt auch hier in den einzelnen Fällen zum Ziele. Wbg.

J. J. Sylvester, P. H. Schoute. Solution of question 7668. Ed. Times LIII. 33-34.

Ist m eine beliebige positive ganze Zahl und sind a, b, c reelle Grössen, so kann die Gleichung

$$a\left\{1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^m}{m!}\right\}$$
$$+b\left\{1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^m\cdot\frac{x^m}{m!}\right\}+c=0$$

nicht mehr als zwei reelle Wurzeln haben. Lp.

A. Hurwitz. Ueber die Wurzeln einiger transcendenten Gleichungen. Hamb. Mitt. II. 25-31.

Ein von dem Verfasser in einer Abhandlung über die Bessel'schen Functionen $I_n(z)$ (Math. Ann. XXXIII. 246, F. d. M. XX. 1888. 502) bewiesener Satz über die Wurzeln transcendenter Gleichungen wird auf die Gleichungen

$$(a_0+a_1z+\cdots+a_mz^m)\sin z+(b_0+b_1z+\cdots+b_mz^m)\cos z=0$$

und

$$\sum_{x=0}^{\infty}\frac{z^x}{\Gamma(x+1)\Gamma(\alpha_1+x)\dots\Gamma(\alpha_r+x)}=0$$

(die linke Seite der letzteren ist eine höhere hypergeometrische Reihe) sowie auf einige durch Specialisirung aus diesen hervorgehende transcendente Gleichungen angewandt. Es ergiebt sich, dass die erste Gleichung stets, ausser unendlich vielen reellen Wurzeln, nur eine endliche Anzahl (mit angebbarer oberer Grenze)

von imaginären Wurzeln besitzt, während die Wurzeln der zweiten Gleichung sämtlich reell sind. Wbg.

B. Niewenglowski. Note sur le théorème de Sturm. Nouv. Ann. (3) IX. 181-182.

Einige einfache Beziehungen zwischen der Zahl der Zeichenwechsel in der Sturm'schen Reihe, der Zahl der imaginären Wurzeln und der reellen Wurzeln, die oberhalb einer bestimmten Grenze liegen. F.

A. Poulain. Sur trois théorèmes de Budan. J. de Math. spéc. (3) IV. 58-62, 79-82, 97-101.

Der Verf. teilt aus dem Budan'schen Werke: „Nouvelle Méthode pour la résolution des équations numériques" (par Fr. Budan de Boislaurent, Inspecteur général de l'Université. 2me éd. Paris. Bachelier, 1822) ausser dem bekannten „Budan'schen Satze", den er als Nr. 1 bezeichnet, noch zwei andere mit, welche zur Ergänzung jenes ersten dienen und zur Vereinfachung der Rechnungen benutzt werden können. Diese Sätze werden bewiesen und ihre Anwendungen bei der numerischen Auflösung von Gleichungen erläutert. Lp.

G. Fouret. Sur la méthode d'approximation de Newton. Nouv. Ann. (3) IX. 567-585.

Behufs Feststellung der hinreichenden und notwendigen Bedingungen, unter denen sich die Newton'sche Näherungsmethode mit Sicherheit anwenden lässt, wird folgende Regel hergeleitet:

Wenn die Zahl a ein erster Näherungswert einer Wurzel α der Gleichung

$$f(x)=0$$

ist, so liegt die Zahl

$$a_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)}$$

stets zwischen a und α, ist also ein neuer, günstigerer Näherungs-

wert, falls $f(a)$ und $f''(a)$ dasselbe Vorzeichen haben und $f''(x)$ im Intervall $(a \dots \alpha)$ sein Vorzeichen nicht wechselt. F.

E. Carvallo. Extension de la méthode de Gräffe. Méthode pratique pour la résolution numérique complète des équations algébriques ou transcendantes. Thèse d'analyse. Paris. Gauthier-Villars et Fils. 40 S. 4°.

R. Mehmke. Neues Verfahren zur Bestimmung der reellen Wurzeln zweier numerischer algebraischer Gleichungen mit zwei Unbekannten. Schlömilch Z. XXXV. 174-185.

Das mitgeteilte Verfahren ist die unmittelbare Erweiterung der vom Verf. für die Auflösung der Gleichungen mit einer Unbekannten veröffentlichten Methode (vgl. Civilingenieur XXXV. 617 und F. d. M. XXI. 1889. 93, 882). Die beiden Gleichungen

$$f_1(x,y)=f_2(x,y),$$
$$g_1(x,y)=g_2(x,y)$$

sind äquivalent den beiden Gleichungssystemen

$$z=f_1(x,y),\quad z=f_2(x,y),$$
$$z=g_1(x,y),\quad z=g_2(x,y).$$

Projicirt man die Schnittcurve der durch die beiden ersten Gleichungen dargestellten Fläche und ebenso die Schnittcurve der durch die beiden letzten Gleichungen dargestellten Fläche auf die xy-Ebene, so sind die Coordinaten der Schnittpunkte beider Projectionscurven Näherungswerte für die Wurzeln der vorgelegten Gleichungen. Statt nun aber die eben erwähnten Flächen selbst zu construiren, zeichnet der Verf., und zwar ohne Rechnung nach den Methoden der darstellenden Geometrie, diejenigen Flächen, resp. ihre Projectionen, welche den algebraischen Zusammenhang zwischen $\log x$, $\log y$, $\log z$ repräsentiren. Die Schnittpunkte der Projectionscurven liefern alsdann die Logarithmen der gesuchten Wurzeln. Zur punktweisen Construction der

letzterwähnten Flächen wird dieselbe Additionscurve benutzt, wie in der früheren Arbeit. Hat man eine Anzahl Gleichungssysteme von bestimmter Form, nur mit verschiedenen Coefficienten, zu lösen, so kann man Apparate construiren, die eine rein mechanische Bestimmung der Wurzeln ermöglichen. F.

R. Mehmke. Ueber das Aufzeichnen ebener Curven mit numerisch gegebener Gleichung. Böklen Mitt. III. 4-9 (und ein autogr. Blatt „Berichtigung"). Mit Fig. 1-3.

Der Gedanke, welcher Herrn Mehmke zur Auffindung eines Verfahrens, numerische Gleichungen graphisch aufzulösen, geführt hat (cf. F. d. M. XXI. 1889. 93 und das vorangehende Referat), nämlich die Logarithmen der Variabeln einzuführen, erweist sich auch als nutzbringend, um beliebig viele Punkte einer Curve mit numerisch gegebener Gleichung durch Zeichnung zu bestimmen. In der vorliegenden Mitteilung erläutert er sein Verfahren an einer aus drei Gliedern bestehenden Curvengleichung. Man hat nur ein für alle Mal eine Fundamentalcurve zu zeichnen ($\pm 10^{\xi} \pm 10^{\eta} = 1$) und ein von den speciellen numerischen Werten abhängiges neues Axen-System einzutragen; dann sind die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Fundamentalcurve in Bezug auf das letztere Axen-System die Logarithmen der Coordinaten eines Punktes der zu construirenden Curve.

F.

R. Mehmke. Ueber eine periodische kettenbruchartige Entwickelung der Wurzeln algebraischer Gleichungen. Böklen Mitt. III. 9-14.

Mitteilung des Satzes (ohne Beweis):

„Jede reelle Wurzel einer algebraischen Gleichung n^{ten} Grades mit rationalen Coefficienten kann in Näherungsbrüche entwickelt werden, bei denen der Zähler eines jeden eine lineare Function von den Zählern der n vorhergehenden Brüche, und der Nenner dieselbe lineare Function von den Nennern jener Brüche ist; und zwar so, dass die Entwickelung eingliedrig periodisch wird."

Benutzung desselben zur Auflösung einiger numerisch gegebenen Gleichungen. F.

W. Wirtinger. Bemerkung über ganzzahlige irreductible Gleichungen. Monatsh. f. M. I. 47-48.

Ist R eine beliebige positive Grösse und n eine positive ganze Zahl, so liegt in einem um den Nullpunkt beschriebenen Kreise mit einem Radius, der kleiner ist als

$$\frac{1}{2\,.\,(2R)^{n(2n-1)-1}},$$

höchstens eine einzige Wurzel einer solchen irreductiblen ganzzahligen Gleichung n^{ten} Grades, deren sämtliche Wurzeln dem absoluten Betrage nach kleiner als R sind. F.

F. Lucas. Résolution électromagnétique des équations. C. R. CXI. 965-967.

Die gegebene Gleichung $\varphi(z)=0$ sei vom Grade p. Auf einem Blatte Papier zeichne man ein rechtwinkliges Coordinatensystem und nehme auf der x-Axe $p+1$ Punkte $O_1, \dots, O_{p+1}$ an, deren Abscissen $x_1, \dots, x_{p+1}$ seien. Man setze

$$F(z)=(z-x_1)\dots(z-x_{p+1})$$

und bestimme $p+1$ Zahlen $\mu_1, \dots, \mu_{p+1}$ so, dass

$$\frac{\varphi(z)}{F(z)}=\sum_{n=1}^{n=p+1}\frac{\mu_n}{z-x_n}.$$

Alsdann führe man, senkrecht zur Ebene des Papiers, durch jeden der Punkte O einen Draht, dessen Länge dem zugehörigen μ umgekehrt proportional ist, während Stoff und Dicke aller Drähte übereinstimmen. Die Drähte werden von elektrischen Strömen, die aus derselben Batterie stammen, durchlaufen, so dass die Stromintensitäten in den einzelnen Drähten den Zahlen μ proportional sind. Auf diese Weise entsteht in der Ebene des Papiers ein magnetisches Feld, dessen Kraftlinien durch Aufstreuen von Eisenfeilspänen sichtbar gemacht werden können.

Die Punkte, in denen die magnetische Kraft den Wert 0 hat, entsprechen den Wurzeln der gegebenen Gleichung. F.

D. BESSO. Sull' eguaglianza $a^b = b^a$ con a e b interi e positivi. Besso Per. mat. V. 12-15.

U. DAINELLI. Sull' equazione $x^y = y^x$ con x e y interi e positivi. Daselbst 115-117.

L. CARLINE. Sull' uguaglianza $a^b = b^a$ con a e b interi e positivi. Daselbst 117-119.

Die einzige Lösung für $a > b$ ist $a = 4$, $b = 2$. Der Satz ist nicht neu; siehe F. d. M. XX. 1888. 164. Vi.

A. CAPUZZO. Soluzione grafica d'un sistema di due equazioni di primo grado a due incognite. Treviso. Longo.

Capitel 2.

Theorie der Formen.

E. B. ELLIOTT. On the interchange of the variables in certain linear differential operators. Lond. Phil. Trans. CLXXXI. 19-53.

Die zu betrachtenden Operatoren schliessen ein oder umfassen alle diejenigen, welche in den neueren Theorien der functionalen Differentialinvarianten, der Reciprocanten, der Cyklicanten u. s. w. als Annihilatoren und als Erzeugende aufgetreten sind. Die allgemeine Form der binären Operatoren (Operatoren, deren Argumente die Ableitungen einer abhängigen Veränderlichen in Bezug auf eine unabhängige sind), welche der Verf. zuerst der Betrachtung unterwirft, wird in Uebereinstimmung

mit der von Herrn MacMahon in den beiden bemerkenswerten Schriften benutzten angenommen: „The theory of a multilinear partial differential operator with applications to the theories of invariants and reciprocants“, Lond. M. S. Proc. XVIII (F. d. M. XIX. 1887. 94), „The algebra of multilinear partial differential operators“, ibid. XIX (F. d. M. XX. 1889. 91). Diese Operatoren enthalten vier Elemente. Die analogen ternären Operatoren, denen der Verf. hiernach seine Aufmerksamkeit zuwendet, sind von den MacMahon'schen Operatoren aus sechs Elementen verschieden. Ihre Argumente sind die partiellen Ableitungen einer der drei Variabeln, die als durch eine einzige Relation in Bezug auf die beiden anderen verbunden vorausgesetzt sind.

Die Abschnitte 2 bis 15 beziehen sich auf die binären Operatoren. Ihre Definition werde im folgenden erläutert. Man schreibe y_r zur Bezeichnung von $\frac{1}{\Pi r}\frac{d^r y}{dx^r}$ und x_r für $\frac{1}{\Pi r}\frac{d^r x}{dy^r}$; entsprechende Zunahmen von x, y seien ξ und η, so dass

$$\eta = y_1\xi + y_2\xi^2 + y_3\xi^3 + \cdots,\ \xi = x_1\eta + x_2\eta^2 + x_3\eta^3 + \cdots,$$

wobei die eine Entwickelung eine Umkehrung der anderen ist; ferner bezeichne $Y_s^{(m)}$ den Coefficienten von ξ^s in der Entwickelung von η^m nach aufsteigenden Potenzen von ξ und $X_s^{(m)}$ den Coefficienten von η^s in der Entwickelung von ξ^m nach aufsteigenden Potenzen von η, wobei m eine positive oder negative ganze Zahl, die Null nicht ausgeschlossen, bedeutet. Ausserdem sei n eine positive oder negative Zahl oder Null; μ, ν seien beliebige Zahlgrössen. Dann sind die betrachteten Operatoren:

$$\left\{\mu,\nu;\ m,n\right\}_x = \frac{1}{m}\Sigma\left\{(\mu+\nu s)X_s^{(m)}\frac{d}{dx_{n+s}}\right\},$$

$$\left\{\mu,\nu;\ m,n\right\}_y = \frac{1}{m}\Sigma\left\{(\mu+\nu s)Y_s^{(m)}\frac{d}{dy_{n+s}}\right\}.$$

Die Summationen beziehen sich auf s, welches der Reihe nach alle ganzzahligen Werte annimmt, die nicht kleiner als der grössere der Werte m und $-n+1$ sind. Das zu erreichende Ziel besteht darin, jeden Operator $\{\mu,\nu;\ m,n\}_x$, der von x abhängt, als einen Operator oder eine Summe von Operatoren gleicher Gestalt $\{\mu',\nu';\ m',n'\}_y$, von y abhängig, auszudrücken.

Die übrigen Abschnitte 16 bis 24 beziehen sich auf ternäre Operatoren, nämlich:

$$m\left\{\mu, \nu, \nu'; m, n, n'\right\}_x = \Sigma\left\{(\mu+\nu r+\nu' s)X_{rs}^{(m)}\frac{d}{dx_{n+r,n'+s}}\right\},$$

$$m\left\{\mu, \nu, \nu'; m, n, n'\right\}_y = \Sigma\left\{(\mu+\nu r+\nu' s)Y_{rs}^{(m)}\frac{d}{dy_{n+r,n'+s}}\right\},$$

$$m\left\{\mu, \nu, \nu'; m, n, n'\right\}_z = \Sigma\left\{(\mu+\nu r+\nu' s)Z_{rs}^{(m)}\frac{d}{dz_{n+r,n'+s}}\right\}.$$

Hierin bedeuten μ, ν beliebige Zahlengrössen;
m eine positive ganze Zahl;
n, n' positive ganze Zahlen, mit Einschluss der Null;
r, s Grössen, welche der Reihe nach alle positiven ganzzahligen Werte von Null an durchlaufen, die der Bedingung $r+s<m$ genügen. Cly. (Lp.)

Z. Elliott. Sur les invariants d'une classe d'équations du premier ordre. C. R. CX. 629-632.

Die Differentialgleichung erster Ordnung $\frac{dy}{dx}=\frac{P_2}{P_1}$, wo die P Polynome zweiten resp. ersten Grades in y bezeichnen, kann durch die Substitution

$$y=aY+b,\quad \frac{dX}{dx}=c,$$

wo a, b, c geeignete Functionen von x bedeuten, auf die kanonische Gestalt

$$\frac{dY}{dx}+1=\frac{J}{Y}$$

gebracht werden: J ist dann eine absolute Invariante der gegebenen Gleichung. Stimmt J, abgesehen von einem Factor, mit X überein, so wird die Gleichung integrabel, und man kommt so auf eine Klasse von Gleichungen, welche bereits Jacobi studirt hatte. Von der einschlägigen Litteratur wird sonst nur Appell erwähnt. My.

RIVEREAU. Sur les invariants des équations différentielles linéaires. Toulouse Ann. IV M. 1-5.

Halphen hatte in seiner bekannten Arbeit „Sur la réduction des équations différentielles aux formes intégrables“ eine Methode angegeben, um die Invarianten solcher Gleichungen zu bilden, welche indessen für eine wirkliche Ausführung in besonderen Fällen weniger geeignet schien.

Seien y, x die alten Veränderlichen, Y, X die neuen, so bestimmt der Verfasser die Hülfsfunctionen $U(x)$, $M(x)$ als Lösungen von Differentialgleichungen zweiter Ordnung derart, dass vermöge der Transformation

$$y = YU(x), \quad \frac{dX}{dx} = M(x)$$

die gegebene lineare Differentialgleichung in eine solche übergeht, für welche der zweite und dritte Coefficient verschwinden. Aus den weiteren Coefficienten und deren Ableitungen setzen sich dann die gesuchten (relativen) Invarianten linear zusammen. Die Rechnung wird im Falle der vierten und fünften Ordnung durchgeführt. My.

DIETRICHKEIT. Ueber eine Invariante der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Schlömilch Z. XXXV. 52-56.

Ist die lineare Differentialgleichung

$$P\frac{d^2y}{dx^2} + Q\frac{dy}{dx} + Ry = 0$$

vorgelegt, so ist der Ausdruck

$$J = \frac{d}{dx}\left(\frac{Q}{P}\right) + 2\left(\frac{Q}{P}\right)^2 - 2\frac{R}{P}$$

eine absolute Invariante gegenüber allen Transformationen von der Form $y = z\varphi(x)$: umgekehrt lassen sich zwei Gleichungen mit derselben Invariante J durch eine Transformation der genannten Art in einander überführen.

Kennt man daher ein Integral einer der beiden Gleichungen, so auch eines der andern. Der Verf. giebt damit eine Illustration

zu den allgemeinen Theorien von Lie und Halphen, ohne auf die Letzteren irgendwie Bezug zu nehmen. My.

P. Gordan. Ueber Begriff und Eigenschaften der Differentialinvarianten; ihr Zusammenhang mit den gewöhnlichen Invarianten. Naturf. Ges. Bremen. 4.

J. Durán y Loriga. Teoria elemental de las formas algebricas. Segovia (1889).

Dieses Werklein enthält den Teil der Theorie der algebraischen Formen, den die Prüfungsvorschriften für die Aufnahme in die Vorbereitungsschule für die Ingenieure in Madrid verlangen. Der Stoff ist auf zehn Capitel verteilt; in denselben kommen die linearen Substitutionen, die Discriminanten, die Invarianten, die Jacobi'sche und Hesse'sche Determinante, die Covarianten, die Emananten und die kanonischen Formen zum Vortrag. Tx. (Lp.)

G. Salmon. Traité d'algèbre supérieure. 2e éd. franç., publiée d'après la 4e éd. angl., par O. Chemin. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

L. Maurer. Ueber Invariantentheorie. J. für Math. CVII. 89 - 116.

Während man sich bisher in der Invariantentheorie in der Hauptsache auf „allgemeine" Urformen beschränkt hat, will der Verf. eine Theorie aufstellen, welche auch die „speciellen" Formen mitumfasst, d. h. solche, zwischen deren Coefficienten algebraische Relationen herrschen.

Die Formen einer bestimmten Ordnung werden zu dem Behuf in Klassen eingeteilt. Ω_0 umfasst alle Formen; Ω_1 diejenigen, deren Coefficienten einem bestimmten (irreducibeln) System algebraischer Gleichungen genügen; Ω_2 solche, deren

Coefficienten einem weiteren System solcher Gleichungen genügen, u. s. f.

Die scheinbare Willkür dieser Einteilung verschwindet im weiteren Verlauf der Untersuchung, insofern die notwendig vorauszusetzende Eigenschaft der auszuübenden Transformationen, eine „continuirliche endliche Transformationsgruppe" zu bilden, zu einer ganz bestimmten Klasseneinteilung hinführt.

In einer beliebigen Form f der Klasse Ω_i ist nur noch ein Teil der Coefficienten frei verfügbar; $f = f(x, u)$ darf also betrachtet werden als eine ganze, homogene Function von n „Variabeln" x und als algebraische homogene Function von t „Parametern" u. Statt der u können beliebige t unabhängige algebraische Functionen derselben eintreten.

Die Variabeln x und Parameter u werden nun gleichzeitig einer Transformation in neue Grössen φ, v unterworfen:

$$\text{(S)} \qquad x_i = \varphi_i(y/p), \quad u = \psi_k(v/p).$$

Die p sind hier m willkürliche Substitutionsparameter, welche in die Functionen φ, ψ algebraisch eingehen: gleichfalls hängen die ψ algebraisch von den v ab, während die y nur rational innerhalb der φ auftreten.

Zugleich sollen die Transformationen eine „Gruppe" in dem Sinne bilden, dass einmal die Zusammensetzung zweier derselben wieder eine Transformation des Systems ergiebt, sowie dass die Umkehrung einer Transformation gleichfalls von derselben Art sei:

$$y_i = \varphi_i'(x/p), \quad v_k = \psi_k'(u, p).$$

Weiterhin ergiebt sich, dass die Functionen φ, φ' (rational) vom ersten Grade in den Variabeln sein müssen; im übrigen ist es erlaubt, anzunehmen, dass die φ, φ' auch noch von den v resp. u algebraisch abhängen.

Die Substitutionen (S) sollen nun die Eigenschaft besitzen, dass sie für alle Werte der Grössen p die Form $f(x, u)$ in $f(y, v)$ transformiren; dann heissen sie der Klasse Ω_i „zugeordnet."

Eine Function J der u, welche durch ein der Klasse Ω_i zugeordnetes System (S) in sich übergeht, ist eine Invariante der Form $f(x, u)$. Sowohl f, als J, wie auch die φ, ψ, werden gewissen linearen partiellen Differentialgleichungen genügen

müssen. Stellt man dieselben auf, so gestatten sie vor allem eine wichtige Folgerung. Existirt nämlich ein System (S), so gehört auch nur eine bestimmte Klasse Ω_i dazu; umgekehrt dagegen kann ein und derselben Klasse noch eine endliche oder selbst unendliche Anzahl von Systemen (S) entsprechen. In diesem Falle könnte es scheinen, als ob auch $f(x, u)$ mehrere Invariantensysteme besässe. Dies ist indessen, falls man nach Christoffel gewisse extreme Fälle ausschliesst, nicht der Fall. Behufs Aufstellung der Differentialgleichungen selbst war der Verf. genötigt, die von Lie angewandten Methoden der specifischen Eigenart der vorliegenden Transformationen gemäss abzuändern. In der That macht sich auch in der Endgleichung eine gewisse Separation der veränderlichen Grössen geltend. So genügt z. B. die Form $f(x, u)$ m linearen partiellen Differentialgleichungen von der Form:

$$X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} + U_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + U_2 \frac{\partial f}{\partial u_2} + \cdots + U_t \frac{\partial f}{\partial u_t} = 0,$$

wo die X nur von den x (ev. noch von den u), die U nur von den u abhängen.

Entsprechendes gilt von den m Gleichungen, welchen jeweils die φ', ψ', J genügen. Die letzteren sind einfach von der Gestalt:

$$U_1 \frac{\partial J}{\partial u_1} + U_2 \frac{\partial J}{\partial u_2} + \cdots + U_t \frac{\partial J}{\partial u_t} = 0.$$

Ist m' die Anzahl der „wesentlichen" unter diesen Differentialgleichungen, so hat die Formenklasse Ω_i $t - m'$ von einander unabhängige Invarianten.

Besitzen die Gleichungen für $f(x, u)$ noch eine weitere ganzrationale Lösung, so ist dieselbe als „Covariante" der Urform f zu betrachten.

Die verschiedenen aufgeführten Arten von je m Differentialgleichungen bilden lauter vollständige Systeme, wie aus dem Gruppencharakter der ausgeübten Transformationen folgt.

Sieht man von besonderen Fällen ab (so z. B., wenn die Discriminante der Urform f, resp. noch deren Ableitungen verschwinden sollten), so ist das System von Differentialgleichungen,

welchen die allgemeine Form der Klasse Ω_i genügt, im wesentlichen analog den auf die Klasse Ω_{i+1} bezüglichen.

Daraus folgt aber, dass die n^2 Aronhold'schen Differentialgleichungen für die allgemeine Klasse Ω_0 auch für die folgenden Klassen typisch sind.

Zum Schlusse macht der Verf. darauf aufmerksam, dass sich neben die oben getroffene Einteilung der Formen nach Ordnungen und Klassen eine zweite gleichberechtigte stellt. Man kann nämlich die Formen von n Variabeln zunächst in „Systeme" nach der Anzahl der „Parameter" u einteilen, weiter jedes dieser Systeme in Klassen, deren jede durch ein System invariantiver Differentialgleichungen charakterisirt ist, und schliesslich sind die Formen einer Klasse nach ihrer Ordnung in Bezug auf die Variabeln x in „Ordnungen" einzuteilen.

Diese zweite Einteilung empfiehlt sich vornehmlich zur Untersuchung der Ausnahmefälle, in denen die Anzahl der invariantiven Differentialgleichungen die Zahl n^2 übersteigt.

Die vorstehend skizzirten Entwickelungen bilden eine Weiterführung derjenigen, welche der Verf. hinsichtlich gewöhnlicher linearer Substitutionsgruppen angestellt hatte. (F. d. M. XX. 1888. 102). My.

E. Wiltheiss. Eine besondere Art von Covarianten bildender Operation. II. III. Math. Ann. XXXVI. 134-153, XXXVII. 229-272.

Die beiden vorliegenden Arbeiten bilden die Fortsetzung einer Arbeit gleichen Titels, über welche F. d. M. XXI. 1889. 109 referirt worden ist. Der dort behandelte Process $\underset{v=u}{\delta}$ geht, wenn man die Grundform f von der sechsten Ordnung in ein Product von zwei kubischen Formen φ und ψ zerlegt, über in den Process

$$\delta = G_0 \frac{\partial}{\partial a_0} + G_1 \frac{\partial}{\partial a_1} + \cdots + G_3 \frac{\partial}{\partial a_3} + \Gamma_0 \frac{\partial}{\partial \alpha_0} + \Gamma_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \cdots + \Gamma_3 \frac{\partial}{\partial \alpha_3},$$

wo $G_0, \cdots, G_3, \Gamma_0, \cdots, \Gamma_2$ die Coefficienten von simultanen Covarianten G und Γ der Formen φ und ψ sind, welche noch eine weitere Veränderlichenreihe v_1, v_2 im 2ten Grade enthalten; ausserdem möge die Covariante G in den Coefficienten a von φ vom 2ten Grade, dagegen in den Coefficienten α von ψ vom 1ten Grade sein, und die Covariante Γ entstehe aus G durch Vertauschung der a und α. In der ersten Arbeit wird nun gezeigt, dass die 9 Covarianten $\varphi\,\psi, (\varphi, \psi)_1, (\varphi, \psi)_2, (\varphi, \psi)_3, \nabla\,\Delta, (\nabla, \Delta)_1, (\nabla, \Delta)_2, p\,\pi, (p, \pi)_1$ die Eigenschaft besitzen, dass man stets eine ganze rationale Function der nämlichen Covarianten erhält, wenn man auf dieselben jenen Process $\underset{v=u}{\delta}$ anwendet. Dabei haben ∇, Δ, p, π die in der Theorie zweier kubischen Formen übliche Bedeutung (vergl. Gordan: Vorlesungen über Invariantentheorie Bd. II § 32). Um diesen Satz zu beweisen, werden zunächst gewisse 5 Simultancovarianten von φ und ψ aufgestellt, welche die verlangte Eigenschaft besitzen, wie sie den Covarianten G und Γ zukommen soll, und durch welche alle übrigen Paare von Simultancovarianten der nämlichen Eigenschaft mittels linearer Combination erhalten werden können. Die Rechnung zeigt dann, dass für die diesen 5 Covariantenpaaren entsprechenden 5 Processe $\underset{v=u}{\delta_1}, \ldots, \underset{v=u}{\delta_5}$, einzeln genommen, der obige Satz gültig ist, womit dann derselbe auch allgemein bewiesen ist.

Die Ergebnisse dieser Untersuchung finden ihre Anwendung in der Theorie der θ-Functionen zweier Argumente u_1, u_2. Wenn man nämlich die partiellen Differentialgleichungen der θ-Functionen so schreibt, dass die Differentiation nach den Parametern die Gestalt eines Aronhold'schen Processes annimmt, so erhält man eine Recursionsformel zur Berechnung der Glieder der Potenzentwickelung der θ-Functionen, und zwar sind diese Glieder im Falle der geraden θ-Functionen Covarianten von der oben betrachteten Art; dieselben sind daher sämtlich im wesentlichen ganze rationale Functionen der genannten 9 Simultan-Covarianten. Der anzuwendende Aronhold'sche Process hat die Gestalt

$$\underset{v=u}{\delta_0} = -\tfrac{1}{40}\left\{9\underset{v=u}{\delta_1} - 42\underset{v=u}{\delta_2} + 30\underset{v=u}{\delta_3} + 15\underset{v=u}{\delta_4} + 10\underset{v=u}{\delta_5}\right\},$$

wo $\underset{v=u}{\delta_1}, \dots, \underset{v=u}{\delta_5}$ die oben betrachteten 5 besonderen Processe sind. Indem der Verfasser die zur Anwendung dieses Processes $\underset{v=u}{\delta_6}$ nötigen Formeln noch besonders ausrechnet, ist somit die Entwickelung der geraden θ-Functionen zweier Argumente in eine Potenzreihe auf eine ganz einfache Rechnung zurückgeführt.

In der zweiten Arbeit wird die entsprechende Untersuchung für den Fall durchgeführt, dass man die Grundform f in das Product einer Form g fünfter Ordnung und einer Form t erster Ordnung zerlegt. Es lassen sich dann 10 Simultancovarianten von G und t derart angeben, dass, wenn man einen ganzen rationalen Ausdruck A aus denselben bildet, deren Grad in den Coefficienten von g den Grad in den Coefficienten von t höchstens um 2 Einheiten übersteigt, und dann auf diesen Ausdruck A den betreffenden Process $\underset{v=u}{\delta}$ anwendet, wieder ein Ausdruck von der besonderen Art A entsteht. Der Beweis gestaltet sich analog dem vorigen; nur muss eben der Umstand mit in Betracht gezogen werden, dass im Gegensatz zu vorhin jetzt nicht sämtliche 10 Covarianten schon selbst Ausdrücke von der besonderen Art A sind. Die gefundenen Resultate gestatten die entsprechende Anwendung auf die Potenzentwickelung der ungeraden θ-Functionen zweier Veränderlichen und liefern den Satz, dass alle Glieder der Entwickelung im wesentlichen ganze rationale Functionen jener 10 Simultancovarianten sind.

Ht.

G. Vivanti. Alcune formole relative all' operazione Ω. Palermo Rend. IV. 261-268.

Der Verf. studirt die Wirkung des Ω-Processes auf ein Product von beliebig vielen Formen mit beliebig vielen Variabelnreihen. Das Resultat ist eine Summe von Producten, die dadurch gebildet werden, dass auf die Formen einzeln Ω-Processe ausgeübt werden, welche sich auf weniger Variabelnreihen erstrecken. Der Beweis geschieht durch vollständige Induction.

Zum Schlusse wird noch die Wirkung des Ω-Processes auf eine Potenz einer Determinante von Variabeln untersucht; man erhält, abgesehen von einem Zahlenfactor, die nächst höhere Potenz der Determinante, mit einer gewissen Unterdeterminante der letzteren multiplicirt. My.

J. Deruyts. Sur la réduction des fonctions invariantes. Belg. Bull. (3) XX. 265-271.

Ist eine unendliche Reihe von Formen (von n Variabeln $x_1, x_2, \dots, x_n$) vorgelegt, so besitzt dieselbe nach Hilbert (siehe F. d. M. XXI. 1889. 102) eine endliche „Basis" in dem Sinne, dass jede Form der Reihe sich aus einer gewissen Anzahl m solcher Formen linear zusammensetzt mit Hülfe von Coefficienten, welche selbst Formen der x sind.

Der Verfasser macht hiervon eine interessante Anwendung auf die von Capelli eingeführten „primären Covarianten" (fundamentale Covarianten von $n-1$ Reihen von n Variabeln, welche gewissen n—1 linearen partiellen Differentialgleichungen genügen), indem er nachweist, dass dieselben in Gordan'schem Sinne ein volles System von Grundformen besitzen.

Der leitende Gedanke des Beweises ist der, dass an Stelle der primären Covarianten zunächst ihre „Leitglieder" ψ substituirt werden, sodann aber diese wiederum ersetzt durch gewisse Bildungen χ, welche einen ähnlichen symbolischen Aufbau haben, wie die ψ, aber von den Coefficienten einfacherer Urformen abhängen. Auf die letzteren ist dann der Hilbert'sche Satz unmittelbar anwendbar. My.

J. Deruyts. Sur les covariants primaires. Belg. Bull. (3) XX. 116-132.

Es sei eine Anzahl von Ur-Formen f mit einer oder mehreren (cogredienten) Reihen von n Variabeln vorgelegt. Eine primäre Covariante ψ ist eine solche Covariante jener Urformen, welche $n-1$ Reihen $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n-1)}$ von je n Variabeln ent-

hält und den $n-1$ Differentialgleichungen genügt:

$$D_{12}=0,\ D_{23}=0,\ \ldots,\ D_{n-2,n-1}=0,$$

wo

$$D_{ik}=\Sigma x^{(i)}\frac{\partial}{\partial x^{(k)}}.$$

Soll der Begriff der primären Covariante wirklich ein fundamentaler sein, wie Capelli und Deruyts in früheren Arbeiten betont haben, so muss vor allem gezeigt werden, wie sich eine beliebige Covariante C der f mit Hülfe von Formen ψ ausdrückt. Hiermit beschäftigt sich die vorliegende Arbeit.

Versteht man unter dem „Leitgliede" einer Covariante der f, welche n Reihen $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \ldots, x_i^{(n)}$ von je n Variabeln enthält, den Coefficienten des Productes der höchsten Potenzen von $x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(n)}$, und unter einer „Polare" eine Bildung, welche mit Hülfe von Processen der Art $\Sigma x_i \frac{\partial}{\partial y_i}$ entsteht, so wird zuvörderst der grundlegende Hülfssatz bewiesen, dass jeder Coefficient einer Covariante C das Leitglied einer Polare von C ist.

Des weiteren ist der Verf. einer Reihe von Eigenschaften der primären Covarianten benötigt, vor allem solcher, welche die letzteren zu charakterisiren geeignet sind.

Eine wichtige Rolle spielt dabei eine Operation „Ω". Auf irgend eine Form F angewandt, bedeutet ΩF eine homogene Summe von identischen Covarianten, jede noch mit einer gewissen Polare von F multiplicirt. Unterwirft man insbesondere die primären Covarianten ψ dem Processe Ω, so lässt sich die lineare Abhängigkeit resp. Unabhängigkeit zwischen Formen ψ auf solche zwischen Bildungen $\Omega\psi$ übertragen.

Es zeigt sich nun, dass eine Covariante C unter gewissen Bedingungen selbst auf die Form $\Omega\psi$ gebracht werden kann.

Alle möglichen Darstellungen von C mit Hülfe von primären Covarianten sind durch lineare Transformationen in einander überführbar, d. h. es giebt in projectivischem Sinne nur eine einzige Darstellung dieser Art. My.

J. Deruyts. Sur les fonctions semi-invariantes. Belg. Bull. (3) XIX. 255-272.

Setzt man die allgemeine lineare Transformation aus gewissen einfachsten zusammen, so genügt eine Invariante gegebener Formen, jeder solchen Elementarsubstitution entsprechend, je einer gewissen linearen partiellen Differentialgleichung, die eben aussagt, dass sich die Invariante bei Ausübung jener Substitution nur um einen Factor ändert. (Vgl. Kronecker, F. d. M. XXI. 1889. 149).

Der Verf. greift nun einen gewissen Teil solcher Differentialgleichungen heraus und nennt die ihnen genügenden Formen „semiinvariante Functionen", wenn sie auch noch von den Variabeln abhängen, „Semiinvarianten", wenn das Letztere nicht der Fall ist. Durch Hinzufügung gewisser arithmetischer Gleichheiten wird die semiinvariante Function zu einer invarianten Function. Es werden die einfachsten Eigenschaften dieser Functionen aufgestellt: Ihre Leitglieder sind gewöhnliche Semiinvarianten; im übrigen sind sie mit den oben erwähnten primären Covarianten eng verwandt. Auf solche semiinvarianten Functionen lässt sich auch ein bekannter Satz von Sylvester so übertragen, dass durch Anwendung von gewissen Differentiationen nach den Coefficienten abermals semiinvariante Functionen entstehen. My.

S. Roberts. Concerning semi-invariants. Lond. M. S. Proc. XXI. 219-233.

Der Verf. beweist zunächst einen schon 1865 von ihm ausgesprochenen Satz. Gegeben sei eine binäre Form f (beliebig hoher Ordnung), mit Binomialcoefficienten geschrieben, und mit den Coefficienten $a_0, a_1, a_2, \dots$. Man bilde eine Hülfsform F, mit den nämlichen Coefficienten a, aber nunmehr mit den bezüglichen Binomial-Coefficienten im Nenner und in einer nicht homogenen Variable:

$$F = a_0 + a_1 z + \frac{a_2}{2!}z^2 + \frac{a_3}{3!}z^3 + \cdots.$$

Dann sind die Coefficienten der Potenzen und Producte der Veränderlichen $x, y, z, \dots, u, v$ bei der Entwickelung des Productes:

$$F(x-y)\,F(y-z)\dots F(u-v)\,F(v-x)$$

Semiinvarianten von f.

Der Beweis ist mit Hülfe des Operators

$$a_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + a_3 \frac{\partial}{\partial a_2} + \cdots$$

leicht zu führen. Hierauf gestützt, construirt der Verfasser eine Reihe von Differentiationsprocessen, welche aus Semiinvarianten wiederum Semiinvarianten erzeugen, Verallgemeinerungen von solchen, welche schon von Perrin, d'Ocagne, Deruyts entwickelt waren. My.

D. Hilbert. Ueber die Theorie der algebraischen Formen.
Math. Ann. XXXVI. 473-534.

Der Verfasser ist zu den Ergebnissen der vorliegenden Untersuchung, welche vier früher erschienene Noten (F. d. M. XX. 1888. 109, XXI. 102) zu einem einheitlichen Ganzen verarbeitet, durch die Aufgabe geführt worden, die bisher nur für Systeme von binären und für die einfachsten ternären Formen nachgewiesene Existenz „voller Systeme von Grundformen", durch welche sich alle weiteren invarianten Bildungen der Urformen ganz-rational ausdrücken lassen, auf Systeme beliebiger Formen mit beliebigen Variabelnreihen auszudehnen.

Indem er aber dieses sein erstes Ziel dadurch erreicht, dass er den Kern der Frage von dem engeren Gebiet der Invariantentheorie loslöst und als eine fundamentale Eigenschaft von unendlichen Systemen algebraischer Formen überhaupt statuirt, gelingt es ihm, darüber hinaus eine Reihe von Sätzen nachzuweisen, welche die von Kronecker einerseits, von Dedekind und Weber andererseits begründete Theorie der algebraischen Moduln weiterführen und zugleich bemerkenswerte Anwendungen auf Zahlentheorie, Algebra und Geometrie zulassen.

Wir versuchen, zunächst den erstgenannten Gegenstand im Zusammenhange darzulegen.

Man denke sich ein Gesetz gegeben, nach welchem eine unendliche Reihe von Formen $F_1, F_2, \ldots$ der n Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fortschreitet. Dabei sollen die Ordnungen der F keiner Beschränkung unterliegen, während von deren Coefficienten nur

angenommen wird, dass sie irgend einem „Rationalitätsbereiche" R angehören. Dann lautet der Hauptsatz (A):

„Aus der Reihe der F lässt sich stets eine endliche Anzahl derselben $F_{i_1}, F_{i_2}, \ldots, F_{i_m}$ derart herausgreifen, dass jede Form F_s der Reihe in der Gestalt darstellbar ist:

$$F_s = A_{s_1} F_{i_1} + A_{s_2} F_{i_2} + \cdots + A_{s_m} F_{i_m},$$

wo die A ebenfalls Formen der x sind, mit Coefficienten des nämlichen Rationalitätsbereiches R."

Es sei nämlich F irgend ein Individuum der Reihe, von der Ordnung r in den x. Es darf angenommen werden, dass der Coefficient von x_n^r in F nicht verschwindet. Zieht man nun die mit einer geeigneten Hülfsform B multiplicirte Form F von der Form F_s ab, so lässt sich dadurch stets der Grad in x_n von F_s unter r herabdrücken, und es kommt:

$$F_s = B_s F + g_{s_1} x_n^{r-1} + g_{s_2} x_n^{r-2} + \cdots + g_{s_r},$$

wo die g nur noch von den $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ abhängen, während ihre Ordnung in denselben eventuell beliebig hoch steigt.

Man nehme jetzt den Satz für Formen von $n-1$ Variabeln als richtig an und wende ihn auf die Coefficientencolonne der g_{s_1} an. Dann muss es möglich sein, aus den obigen Darstellungen der F_s eine endliche Anzahl μ (etwa für $s = 1, 2, \ldots, \mu$) so herauszugreifen, dass nach beiderseitiger Multiplication mit geeigneten Hülfsformen der $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, Addition und schliesslicher Subtraction von der Darstellung für jede Form F_s die letztere sich linear zusammensetzt aus $F, F_1, F_2, \ldots, F_\mu$ und einer Form, deren Grad in x_n höchstens der $(r-2)^{\text{te}}$ ist.

Das nämliche Verfahren wird angewandt auf die Colonne der nunmehr mit der höchsten Potenz von x_n multiplicirten Coefficienten der neuen Darstellungen für $F_{\mu+1}, F_{\mu+2}, \ldots$, so gelangt man nach höchstens r Schritten der Art zu einer endlichen Anzahl von Formen F, aus denen sich in der angegebenen Weise alle übrigen linear componiren.

Da der einfachste Fall $n=1$ fast unmittelbar evident ist, so ist der Satz (A) damit bewiesen. Während bei der Durchführung des mitgeteilten Verfahrens das Auftreten rationaler Verbin-

dungen der ursprünglichen Coefficienten unvermeidlich ist, lässt sich bei umgekehrter Reihenfolge der einzelnen Schritte erreichen, dass nur ganze und ganzzahlige Verbindungen der gegebenen Coefficienten eingeführt werden, womit eine Verwertung für Zwecke der Zahlentheorie möglich wird.

Es liege nun etwa eine einzelne ternäre Urform f vor, so kann man das System der (ganz-rationalen) Invarianten $i_1, i_2, \ldots$ von f in eine einfach unendliche Reihe anordnen, für die der Satz (A) gilt. Man hat also für jede Invariante i eine Darstellung der Art:

$$i = A_1 i_1 + A_2 i_2 + \cdots + A_m i_m,$$

die indessen noch so umgeformt werden muss, dass die A nur von den $i_1, i_2, \ldots, i_m$ abhängen. Dies gelingt mit Hülfe einer Eigenschaft des Ω-Processes:

$$\Omega = \frac{\partial^3}{\partial a_{11}\partial a_{22}\partial a_{33}} - \frac{\partial^3}{\partial a_{11}\partial a_{23}\partial a_{32}} \pm \cdots - \frac{\partial^3}{\partial a_{13}\partial a_{22}\partial a_{31}},$$

wo die a_{ik} die Coefficienten einer linearen Transformation bedeuten, durch welche f in f' übergehe. Hat man nämlich eine isobare Form der Coefficienten von f', die man noch mit einer (positiven) Potenz der Transformations-Determinante multipliciren mag, und übt auf dieses Product den Process Ω so oft aus, bis die a_{ik} ganz herausgehen, so resultirt eine Invariante von f.

Die vorstehenden Betrachtungen gelten analog für ein System von Urformen mit Reihen von n Variabeln, die sogar auch ganz oder teilweise verschiedenen Substitutionen unterliegen können.

Selbst für gewisse Untergruppen der allgemeinen linearen Substitutionsgruppe bleibt der Beweis in Kraft.

Andererseits kann man mit denselben Mitteln auch die Existenz voller Systeme von „Syzyganten" nachweisen.

Zunächst hat man im Satze (A) nur eine der n Variabeln der Einheit gleich zu setzen, um den Satz auch für nicht homogene ganze Functionen brauchbar zu machen.

Nun herrschen zwischen den Invarianten einer Reihe von Urformen unbegrenzt viele Relationen („Syzygien"), welche in den ursprünglichen Coefficienten identisch erfüllt sind. Die Syzyganten, d. h. die linken Seiten der Relationen, sind aber nicht-

homogene Formen, als deren Variabeln die Grundformen des vollen Systems anzusehen sind, so dass man, wie oben, vorgehen kann u. s. f.

Die Syzyganten sind abermals durch eine unbegrenzte Anzahl von identisch in jenen Grundformen erfüllten Relationen verknüpft. Die linken Seiten, die „Syzyganten zweiter Art", besitzen daher wiederum ein volles System etc.

Es erhebt sich jetzt von neuem die Frage, ob dieser Process der fortgesetzten Syzygienbildung nach einer endlichen Zahl von Malen abbricht oder nicht. Durch ein nicht ganz einfaches Schlussverfahren beweist der Verf. die Richtigkeit der ersteren Annahme.

Um eine vollständige Einsicht in die Structur der aus einer vorgelegten Reihe von Urformen entspringenden invarianten Formen zu gewinnen, muss man volle Systeme nicht nur für jene Invarianten, sondern auch für deren successive Syzyganten aufstellen.

Wir erwähnen nunmehr noch einige Anwendungen des Satzes (A) auf die oben berührten „Modulsysteme". Ein Modul ist insbesondere ein System von unbegrenzt vielen Formen derart, dass jedes Product einer Systemform mit einer ganz beliebigen anderen Form, und zugleich jede Summe solcher Producte, wiederum dem Systeme angehört.

Der Satz (A) gilt demnach auch für Moduln. Beispielsweise bilden die linken Seiten der Gleichungen der Flächen, welche durch eine algebraische Raumcurve gehen, einen Modul. Die Anwendung des Satzes (A) löst damit ein bekanntes Problem aus der Geometrie der Raumcurven. Um auch ein rein algebraisches Beispiel zu geben, so bilden einen Modul diejenigen Formen der Coefficienten einer gegebenen Gleichung, welche verschwinden, wenn die Gleichung eine gewisse Anzahl vielfacher Wurzeln besitzt.

Das wichtigste Ergebnis ist wohl die Schaffung eines neuen, fundamentalen Begriffes, der „charakteristischen Function χ" eines Moduls. Sei das „volle System" des Moduls bezeichnet mit $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$, so heisst gemäss Kronecker eine Form nach dem Modul der Null

congruent, wenn sie aus den m Formen F_i linear ableitbar ist.

Die Zahl der von einander unabhängigen Bedingungen, welchen die Coefficienten einer Form F der R^{ten} Ordnung genügen müssen, damit dieselbe nach dem Modul $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ der Null congruent sei, erweist sich für genügend grosse Werte von R gleich einer ganzen rationalen „charakteristischen Function $\chi(R)$“ mit rationalen Zahlencoefficienten.

Zugleich wird eine Methode zur wirklichen Bildung einer solchen Function $\chi(R)$ angegeben.

Zwischen den charakteristischen Functionen zweier Moduln herrscht die einfache Beziehung, dass ihre Summe gleich ist der Summe der charakteristischen Functionen für den „kleinsten enthaltenden“ und den „grössten gemeinsamen“ Modul. Die beiden letzteren Moduln werden gebildet durch die gemeinsamen Formen der beiden gegebenen Moduln, resp. durch Zusammensetzung der beiden gegebenen Moduln. Dies findet seine Anwendung auf die Anzahl der gemeinsamen Schnittpunkte zweier Raumcurven von den Geschlechtern p_1, p_2, welche zusammen den vollständigen Durchschnitt zweier Flächen von den Ordnungen r_1, r_2 bilden. Die gesuchte Anzahl ist dann $-2r_1r_2 + \frac{1}{2}r_1r_2(r_1+r_2) - (p_1+p_2) + 2$.

My.

A. Capelli. Sur les opérations dans la théorie des formes algébriques. Math. Ann. XXXVII. 1-37.

Der Verfasser vereinigt hier zu einem Ganzen eine Reihe früherer Untersuchungen (F. d. M. XV. 1883. 105; XVIII. 1886. 92; XIX. 1887. 107, 108, 151; XX. 1888. 92, 93), welche zum Ziele hatten, den Polarenprocess in den Mittelpunkt der ganzen Formentheorie zu stellen, sodass nicht nur alle übrigen invarianten Differentiations-Processe durch explicite Formeln mittels des Polarenprocesses ausdrückbar werden, sondern dass auch die grundlegende Aufgabe der „Reihenentwickelung“ von Formen mit mehreren Variabelnreihen als ein unmittelbarer Ausfluss aus Relationen zwischen Polarenprocessen erscheint.

Unter dem Polarenprocesse D_{pq} wird die Summe $\Sigma q_i \frac{\partial}{\partial p_i}$

verstanden, wo die q, p zwei cogrediente Reihen von gleich viel Variabeln bedeuten. Hat man mehrere solche Variabelnreihen und übt auf eine Form derselben derartige Processe in irgend welcher Reihenfolge aus, so erhält man den allgemeinsten Begriff der „Polare" der Form: eine solche Polare genügt einer Reihe von Differentialgleichungen, die nichts anderes sind, als Relationen zwischen Polarenprocessen selbst. Alle diese Relationen kommen aber auf nur 7 zurück, die selbst in drei verschiedene Typen zerfallen:

$$\text{I.} \quad D_{sq}D_{pt} - D_{pt}D_{sq} = D_{sq}D_{st} - D_{st}D_{sq} = D_{sq}D_{pq} - D_{pq}D_{sq} = 0,$$
$$\text{II.} \quad D_{tq}D_{pt} - D_{pt}D_{tq} = D_{pq}D_{pp} - D_{pp}D_{pq} = D_{qq}D_{pq} - D_{pq}D_{qq} = D_{pq},$$
$$\text{III.} \quad D_{qp}D_{pq} - D_{pq}D_{qp} = D_{pp} - D_{qq}.$$

Aus n Reihen von ν Variabeln lassen sich offenbar $N = n^2$ solcher „elementaren" Processe D bilden: man bezeichne sie in irgend einer Reihenfolge mit D_1, D_2, ..., D_N. Betrachtet man für den Augenblick die D als beliebige Grössen derart, dass das Product zweier „DD'" den durch die Aufeinanderfolge der Processe D, D' entstehenden Process bedeutet, so kann man sich eine beliebige ganze Function F sämtlicher D gebildet denken, die natürlich in ihrer Bedeutung auch von der Reihenfolge der D in jedem Gliede bedingt ist.

Dann lässt sich F stets in die Gestalt bringen:

$$F = \Sigma C D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \ldots D_N^{\alpha_N},$$

wo die C numerische Factoren, die α ganzzahlige (symbolische) Exponenten $\geqq 0$ bedeuten, also die D in jedem Gliede die einmal gewählte Reihenfolge beibehalten.

Es geht das aus dem einfacheren Satze hervor, wonach die Differenz zweier Producte, die aus denselben λ Factoren D, aber in verschiedener Reihenfolge gebildet sind, eine lineare Function von Producten aus je nur $\lambda - 1$ Factoren D ist.

Die D-Processe sollen nun vor allem dazu dienen, eine beliebige Form der ν Variabelnreihen aus einem einzigen Producte durch wiederholte Differentiation herzuleiten. Dies gelingt in der That. Denn sei f eine solche ganze, homogene

Function:

$$f = \Sigma c x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_\nu^{\lambda_\nu} \cdot y_1^{\mu_1} y_2^{\mu_2} \ldots y_\nu^{\mu_\nu} \ldots v_1^{\varrho_1} v_2^{\varrho_2} \ldots v_\nu^{\varrho_\nu} \qquad (\nu \overline{\gtrless} n),$$

die ausserdem noch in Bezug auf jeden Index i „isobar" angenommen wird, sodass also für jedes Glied die Summe $\lambda_i + \mu_i + \cdots + \varrho_i$ einen constanten Wert β_i besitzt, so geht f aus dem einen Gliede $x_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \ldots u_p^{\alpha_p}$ vermöge einer zusammengesetzten Polarenoperation hervor, welche sich auf alle Variabelnreihen (x), (y), ..., (u), ..., (v) bezieht.

Indem wir weitere Sätze der Art übergehen, erwähnen wir ein weiteres Untersuchungsmittel. Es handelt sich darum, über die zwischen zusammengesetzten Polarenprocessen herrschenden linearen Relationen (mit numerischen Coefficienten) eine Uebersicht zu gewinnen. In diesem Betracht sei der Satz angeführt, dass zwischen irgend welchen Potenzproducten $D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \ldots D_r^{\alpha_r}$ (wo die D immer in derselben Folge zu nehmen sind) keine lineare Relation bestehen kann. Auch die verschiedenen Potenzen einer und derselben Operation D sind linear unabhängig.

Behufs Anwendung auf Fragen der Formentheorie bedarf es noch der Kenntnis des Zusammenhanges zwischen dem (Cayley'schen) Ω-Process und den Polarenprocessen. Der Process Ω schreibt sich symbolisch als Determinante $\Sigma \pm \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_2} \cdots \frac{\partial}{\partial v_\nu}$, wo also nachträglich in jedem Gliede die Folge der n Zeichen ∂ durch das eine Zeichen ∂^n der n-maligen Differentiation zu ersetzen ist. Bezeichnet man das Product $\triangle\Omega$ von Ω mit der Determinante $\triangle$ der Variabeln durch H, so kommt successive:

$$H_{xy} = \begin{vmatrix} D_{xx} & D_{xy} \\ D_{yx} & 1 + D_{yy} \end{vmatrix}, \quad H_{xyz} = \begin{vmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & 1 + D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & 2 + D_{zz} \end{vmatrix} \quad \text{etc.}$$

Diese Operation H hat die ausgezeichnete Eigenschaft, mit allen Polarenprocessen, die mit den ν Variabelnreihen vorgenommen werden können, vertauschbar zu sein.

Eine wichtige Anwendung davon prägt sich aus in der Eigenschaft einer ganzen homogenen Function der (x), (y), ...,

(*u*), (*v*), welche den $n-1$ Differentialgleichungen genügt:

$$D_{xy}=0,\quad D_{yz}=0,\ \ldots,\ D_{uv}=0,$$

das Product zu sein aus einer Potenz der Determinante Δ mit einer anderen ganzen Function F', welche den nämlichen Differentialgleichungen genügt.

Mit den bisher erwähnten Hülfsmitteln gelingt es, ein leicht zu handhabendes Kriterium dafür aufzustellen, ob eine vorgegebene ganze Function von n Variabelnreihen eine „uneigentliche" ist oder eine „eigentliche", d. i. ob sie sich durch Polaroperationen aus Functionen von $n-1$ (oder weniger) Reihen von Variabeln ableiten lässt oder nicht. Beispielsweise ist eine ganze Function von n Reihen von n Variabeln, welche die Determinante der letzteren zum wirklichen Factor besitzt, eine eigentliche.

Hierauf gestützt, wendet sich der Verfasser zum Beweise des Hauptsatzes über Reihenentwickelung (F. d. M. XIV. 1882. 86). Der grundlegende Gedanke ist, eine ganze Function F von n Reihen von n Variabeln in zwei Teile zu zerlegen, von denen der eine durch die Determinante Δ der Variabeln teilbar ist, während der andere durch Polarenprocesse aus Functionen ableitbar ist, welche eine Variabelnreihe weniger enthalten.

Durch Wiederholung dieses Processes wird F nach Potenzen von Δ entwickelt mit Coefficienten, welche uneigentliche Functionen der gegebenen Variabeln sind. My.

A. Berger. Om användningen af invarianter och halfinvarianter vid lösningen af allmänna algebraiska ekvationer. Stockh. Öfv. 165-188.

Die Wurzeln der allgemeinen Gleichungen der 4 niedrigsten Gradzahlen werden durch die Invarianten und Halbinvarianten der Gleichungen ausgedrückt, und die aufgestellten Formeln werden zur Bestimmung der Discriminanten der Gleichungen angewandt. Vorher geht eine elementare Herleitung gewisser Sätze aus der Invariantentheorie. Bdn.

G. B. Mathews. On class-invariants. Lond. M. S. Proc. XXI. 234-246.

Die Gleichung zwischen der Modularfunction $J(\omega)$ und ihrer Transformirten $J' = J\left(\frac{\omega}{n}\right)$ ist, wie Klein hervorgehoben hat, vom Geschlechte Null in den Fällen $n = 2, 3, 4, 5, 7, 13$; für diese Fälle wird die auf jene Gleichung direct bezogene complexe Multiplication algebraisch durchgeführt. Dies geschieht am bequemsten mit Hülfe der von Klein eingeführten Irrationalität τ; J' wird dann dieselbe (rationale) Function von einer Grösse τ', wie J von τ, und zugleich sind τ und τ' durch eine lineo-lineare Relation verbunden. Man hat dann für den vorliegenden Zweck J' gleich J zu setzen und τ' zu eliminiren, wodurch die singulären Werte von τ und damit J gefunden werden. Jeder solche Wert „correspondirt" einer bestimmten Klasse quadratischer Formen. So erhält man z. B. im Falle $n = 2$ für $J' = J$ die Gleichung

$$\frac{(4\tau-1)^3}{\tau} = \frac{(4-\tau)^3}{\tau^2} \quad \text{oder} \quad (\tau^2-1)(64\tau^2-47\tau+64) = 0$$

und damit die brauchbaren Wertepaare $\tau = 1, J = 1; \tau = -1, J = \frac{5^3}{3^3}$, welche den Formenklassen (1, 0, 1) resp. (1, 0, 2) correspondiren. Für die höheren Fälle erheischt die richtige Anordnung der Rechnung ein grosses Geschick. My.

Ed. Weyr. Zur Theorie der bilinearen Formen. Monatsh. f. M. I. 163-236.

Diese Arbeit stellt einen Auszug aus einer grösseren dar, über welche bereits F. d. M. XXI. 1889. 123 berichtet worden ist. My.

K. Geiger. Die Covarianten der binären biquadratischen Formen, entwickelt aus den projectivischen Eigenschaften des vollständigen, einer Curve zweiter Ordnung eingeschriebenen Vierecks. Diss. München. VI u. 74 S. 8°. Mit 10 Fig.-Taf. in besonderem Atlas.

Wird eine binäre biquadratische Form f durch vier Punkte eines Kegelschnitts K repräsentirt, so stellt bekanntlich jede Punktgruppe auf K, auf welche man durch projectivische Constructionen in der Ebene von K geführt wird, die Wurzeln einer Covariante von f dar. Auf diese Weise deutet der Verf. die Covarianten von f, sowie die zwischen ihnen bestehenden Beziehungen.

Das Bemerkenswerte der Arbeit ist, dass die verschiedenen Realitätsmöglichkeiten bis ins Einzelnste discutirt und durch saubere, vom Verf. selbst in Stein gravirte Figuren erläutert werden. My.

E. Stroh. Ueber die symbolische Darstellung der Grundsyzyganten einer binären Form sechster Ordnung und eine Erweiterung der Symbolik von Clebsch. Math. Ann. XXXVI. 262-303, Diss. Erlangen. 44 S. 8°.

Dieser Aufsatz bietet einen bemerkenswerten Fortschritt in der Theorie der Syzyganten, sowie in der Symbolik der Formen überhaupt.

Durch die Arbeiten von Perrin, Stéphanos, Hammond und v. Gall waren im ganzen 204 irreducible Syzyganten der binären Form 6. Ordnung f_6 aufgefunden und berechnet, und zwar nach verschiedenartigen, teils umständlichen, theils schwer controllirbaren Methoden.

Im ersten Teil seiner Arbeit weist der Verf. nach, dass sämtliche 204 Syzyganten verschiedene Formen von im ganzen nur 11 elementaren Syzyganten sind: es sind jene daher durch nur 11 verschiedene Symbole darstellbar und dadurch zugleich vollständig bestimmt. Dabei ist jede Syzygante unabhängig von den übrigen berechnet worden, wodurch fehlerhafte Resultate möglichst vermieden wurden.

Der Gang der Untersuchung stützt sich wesentlich auf eine frühere Abhandlung des Verf. (vgl. F. d. M. XX. 1888. 120), in der alle linearen Relationen (Syzygien) zwischen den Ueberschiebungen von je zwei aus vier Formen f, φ, ψ, χ aufgestellt sind.

Diese Relationen werden hier auf 11 „elementare“ reducirt, deren linke Seiten eben die in Rede stehenden Syzyganten bilden. Um dieselben auf ihre Richtigkeit zu prüfen, nimmt man die darin vorkommenden vier Formen als wirkliche Potenzen linearer Formen an: $f=(x-a)^{n_1}$, $\varphi=(x-b)^{n_2}$, $\psi=(x-c)^{n_3}$, $\chi=(x-d)^{n_4}$; bildet daraus alle Ueberschiebungen und nimmt den ersten Coefficienten jeder derselben. Dies kommt einfach darauf hinaus, dass man z. B. $(f, \varphi)^{\lambda}$ ersetzt durch $(a-b)^{\lambda}$, $((f\psi)^2\varphi)^2$ durch $(a-c)^2(a-b)^2$ u. s. f. Die Syzygante wird so eine Form F der Elemente a, b, c, d, die der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial F}{\partial a}+\frac{\partial F}{\partial b}+\frac{\partial F}{\partial c}+\frac{\partial F}{\partial d}=0$$

genügt, und demzufolge allein durch die drei Differenzen $a-b$, $a-c$, $a-d$ dargestellt werden kann. Man braucht daher in F nur $a=0$ zu setzen, um dann das identische Verschwinden der Function F einzusehen. Umgekehrt lässt sich aus jeder solchen identisch verschwindenden Function dreier Variabeln die entsprechende Syzygie herstellen. Die Anwendung auf die binäre Form f geschieht nun in der Weise, dass zunächst jede der 26 Clebsch'schen Grundformen als eine Ueberschiebung zweier niedrigeren Grundformen geschrieben wird. Sodann bildet man alle Producte der Grundformen zu zweien, die demnach die Form $(f\varphi)^{\lambda}(\psi\chi)^{\mu}$ annehmen; nach Früherem können nunmehr die zugehörigen elementaren Syzyganten entwickelt werden, welche dieses Product enthalten.

Bis zum Grade 9 sind sämtliche irreducibeln Syzyganten ausgewertet, von da ab ist nur derjenige Teil der Syzygante beigesetzt, aus welchem die Irreducibilität derselben ersichtlich ist.

Im zweiten Teile der Arbeit wird die oben berührte symbolische Darstellung $F(a, b, c, d)$ der Syzyganten auf ihren Grund genauer untersucht: es zeigt sich, dass durch Verfolgung eines entsprechenden Leitgedankens die bisherige Clebsch-Gordan'sche Symbolik (und zwar nicht nur für binäre Formen) einer fruchtbaren Verallgemeinerung und damit zugleich Vereinfachung fähig ist.

Beschränken wir uns mit dem Verfasser auf binäre Formen,

so kann bekanntlich eine Covariante C, die in den Coefficienten einer Form f vom i^{ten} Grade ist, symbolisch als simultane Covariante der i Potenzen $(a_\lambda x_1 + a_\lambda x_2)^n$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, i)$ dargestellt werden. Hier darf nun offenbar $a_1 = a_2 = \cdots = a$ gesetzt werden, ohne dass in C beim Uebergange zum wirklichen Werte irgend eine Vieldeutigkeit der zu ersetzenden Symbole eintritt. Es kann sogar a gleich der Einheit angenommen werden: man hat dann nur C nachträglich mittels eines ersten Coefficienten $\overline{a_0}$ homogen zu machen.

Versteht man unter C_0 das Leitglied von C, so bleibt von den 4 ursprünglichen Differentialgleichungen für C, wie bekannt, nur eine charakteristische Gleichung für C_0 übrig, die aber hier die durchsichtige Gestalt annimmt:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=i} \frac{\partial C_0}{\partial a_\lambda} = 0.$$

Jede in den a_i ganze und homogene Function, welche der letzteren Gleichung genügt, liefert eine Covariante C.

Nach einem Satze von Hesse ist aber eine „Form" (d. h. eine homogene ganze Function) von i Variabeln a, welche die Gleichung $\sum \frac{\partial \varphi}{\partial a_\lambda} = 0$ befriedigt, dadurch charakterisirt, dass sie eine ebensolche Function von nur $i-1$ Grössen $a_2', a_3', \ldots, a_i'$ ist, wo die letzteren als Differenzen der a bestimmt sind:

$$a_2' = a_2 - a_1, \quad a_3' = a_3 - a_1, \quad a_4' = a_4 - a_1 \text{ etc.}$$

Um also die allgemeinste Form φ der a von einer Ordnung g zu finden, für welche $\sum \frac{\partial \varphi}{\partial a_\lambda} = 0$ ist, stelle man die allgemeinste Form φ der a' von der Ordnung g auf, in der keine Variable in einer höheren Potenz als n auftritt, und substituire hinterher statt der a' die a. Dies ist immer ausführbar, wenn $g \leqq n$ ist: die anderen Fälle lassen sich darauf zurückführen. Praktischer jedoch verfährt man so: Unter „Grundsymbolen" seien diejenigen Lösungen von $\sum \frac{\partial \varphi}{\partial a_\lambda} = 0$ verstanden, welche vom ersten Grade in den a sind. Offenbar giebt es dann nur $i-1$ linear unab-

hängige, und jede Lösung jener Gleichung kann durch dieselben rational und ganz ausgedrückt werden.

Um demnach die symbolische Darstellung für das Leitglied einer Covariante von f zu erhalten, bilde man aus g Grundsymbolen ein Product, in welchem jedes Symbol höchstens in der n^{ten} Potenz vorkommt.

Die einfachsten Grundsymbole sind die Differenzen $a_r - a_s$, und diese sind es gerade, welche der Clebsch'schen symbolischen Darstellung zu Grunde liegen.

Der Verf. entwickelt darauf hin, wie sich irgend eine in der Symbolik von Clebsch gegebene Covariante in seine Grundsymbole umsetzen lässt, und vice versa.

Da die Anzahl der auftretenden Grundsymbole höchstens $i-1$ beträgt — im Gegensatz zu den $\frac{i(i-1)}{2}$ Clebsch'schen Klammerfactoren — so bietet die neue Darstellung mancherlei Vorteile. Beispielsweise schreibt sich die Covariante

$\tau = (ab)^2 (bc) a_x^{n-2} b_x^{n-3} c_x^{n-1}$ in der Gestalt $(a+b-2c)^3$.

Das Verfahren des Verfassers erscheint besonders brauchbar, wenn die Ordnung n der Ausgangsform f stets höher bleibt als das Gewicht g der zu betrachtenden Covarianten, also bei Formensystemen einer Form unbegrenzt hoher Ordnung, wie sie von englischen Mathematikern (Sylvester, Cayley, MacMahon u. a.) studirt worden sind. Für solche „Semiinvarianten" C_0 gilt dann der grundlegende Satz: „Alle Semiinvarianten vom Grade i und vom Gewichte g sind durch symbolische Potenzen

$$(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_i a_i)^g$$

linear ausdrückbar."

Daraufhin ist der Verf. in der Lage, alle irreducibeln Semiinvarianten (Perpetuanten) von gegebenem Grade i und gegebenem Gewichte g zu ermitteln. Ihre Anzahl ist gleich der Zahl ganzzahliger Lösungen $\mu_2, \mu_3, \cdots, \mu_i$ der Gleichung:

$$2\mu_2 + 3\mu_3 + \cdots + i\mu_i = g - 2^{i-1} + 1,$$

wodurch ein Satz von MacMahon bestätigt wird (cf. F. d. M. XVI. 1884. 105). Aber auch die Bildungen selbst lassen sich in symbolischer Gestalt sofort hinschreiben.

Zum Schlusse giebt der Verf. kurz an, wie sich die entsprechende Umformung der Differentialgleichungen für Invarianten nebst der Bildung der „Grundsymbole“ im ternären Gebiete vollzieht. My.

G. Maisano. L'Hessiano della sestica binaria e il discriminante della forma dell' ottavo ordine. Nota II^a. Palermo Rend. IV. 1-8.

Die Note ist eine Fortsetzung der in F. d. M. XXI. 1889. 111 besprochenen. Die Aufgabe, die Discriminante einer binären Form f achter Ordnung als ganze Function der 9 Invarianten von f darzustellen, führt auf ein System von linearen numerischen Gleichungen mit 31 Unbekannten. Gestützt auf die frühere Ausführung, wo f speciell die Hesse'sche Covariante einer Form sechster Ordnung war, vermag der Verf. mittels symbolischer Rechnung jene Unbekannten zu ermitteln. Der definitive Ausdruck der Discriminante enthält 30 Glieder. My.

J. Hammond. A simple proof of the existence of irreducible invariants of degrees 20 and 30 for the binary seventhic. Math. Ann. XXXVI. 255-261.

Sylvester und Franklin (F. d. M. XI. 1879. 82) hatten nicht vermocht, für die Covarianten einer binären Form 7. Ordnung f_7 eine repräsentirende erzeugende Function herzustellen, insofern der Zähler der letzteren ins Unendliche ging. Hierbei war indessen infolge eines Rechenfehlers die Annahme gemacht worden, dass die f_7 keine irreducibeln Invarianten von den Graden 20 und 30 besitzen könne, während v. Gall (F. d. M. XX. 1888. 128) solche (ohne vollständigen Beweis) wirklich auffand. Der Verf. deckt direct vermöge geeigneter Specialisirung der f_7 die Existenz solcher zwei Invarianten auf und entwickelt daraufhin die correcte Gestalt der gesuchten repräsentirenden erzeugenden Function. Damit ist eine wesentliche Lücke der bezüglichen Sylvester'schen Theorie ausgefüllt. My.

C. Mollo. Sul sistema di due cubiche binarie. Batt. G. XXVIII. 330-348.

Die Covarianten des Systems zweier kubischen binären Formen werden mit Bezugnahme auf frühere Untersuchungen von Battaglini, Clebsch, Gordan, d'Ovidio symbolisch noch einmal abgeleitet und dann geometrisch gedeutet. My.

E. Stroh. Bemerkung zu v. Gall's Untersuchung über die Grundsyzyganten zweier simultanen biquadratischen binären Formen. Math. Ann. XXXVI. 154-156.

Hammond hatte den Satz empirisch ausgesprochen, dass jede (irreducible) Grundsyzygante eine binäre Combination der Grundformen enthalten müsse. Indessen war v. Gall auf ein Beispiel gestossen, welches dem Satze zu widersprechen schien. Die Relation zwischen den acht Invarianten von zwei binären Formen vierter Ordnung enthält die vierte Potenz einer Grundform D, konnte jedoch trotz aller Anstrengungen nicht weiter reducirt, und zugleich konnte aber keine Syzygante mit dem Terme D^3 aufgefunden werden.

Durch geeignete Specialisirung der gegebenen Formen zeigt der Verf. direct mittels Ausrechnung, dass die Ansicht v. Gall's richtig war, dass also der von Hammond aufgestellte Satz nicht allgemein gültig ist. My.

A. del Re. Sulle coppie di forme bilineari. Rom. Acc. L. Rend. (4) VI_1. 237-244.

Der Verf. beabsichtigt, mit den Hülfsmitteln der Geometrie der Lage die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür abzuleiten, dass ein Paar von symmetrischen bilinearen Formen in ein eben solches linear transformirt werden kann, und im Falle der Möglichkeit die (endliche) Zahl von bezüglichen Transformationen zu ermitteln. Dies geschieht hier zunächst für die binären Formen, wo man mit einfachen Hülfssätzen über projectivische Punktreihen und Involutionen auf einer geraden Linie ausreicht. Es werden fünf verschiedene Typen von trans-

formirbaren Paaren binärer symmetrischer bilinearer Formen (Involutionen) aufgestellt mit resp. 2, 4, 2, 8, 4 Transformationen.

My.

A. Cayley. On two invariants of a quadriquadric function. Mess. (2) XX. 68-69.

Die „quadriquadratische“ Function
$$z^2(ax^2+2hxy+g'y^2)+2zw(h'x^2+2bxy+fy^2)+w^2(gx^2+2f'xy+cy^2)$$
besitzt, einmal als Function von z und w, sodann als Function von x und y betrachtet, zwei Discriminanten U und V vierter Ordnung mit gleichen quadratischen und kubischen Invarianten. Diese letzteren werden, vollständig ausgerechnet, zum Abdruck gebracht.

Lp.

R. Perrin. Essai de théorie complète du système de deux formes ternaires quadratiques. S. M. F. Bull. XVIII. 1-80.

Das „volle System“ zweier quadratischen ternären Formen C_2, bestehend aus 20 Grundformen, ist von Gordan aufgestellt worden. (Siehe Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie I S. 288, sowie Math. Ann. XIX, cf. F. d. M. XIV. 1882. 80). Der Verf. giebt hier eine abgeschlossene Theorie: manche seiner Resultate sind übrigens in der zweitgenannten Arbeit Gordan's enthalten, welche dem Verf., wie es scheint, unbekannt war.

Die Untersuchung zielt wesentlich auf geometrische Anwendungen: es ist in der That einleuchtend, dass schon das vollständige Studium der projectivischen Eigenschaften eines einzelnen Kegelschnitts eine Reihe von Fragen aus der projectivischen Theorie zweier Kegelschnitte in sich begreift.

Insbesondere war es von Wichtigkeit, die zwischen den 20 Grundformen bestehenden Relationen (Syzygien) aufzustellen, sowie die nötigen Folgerungen daraus zu ziehen, um z. B. eine simultane Covariante unmittelbar auch in Liniencoordinaten schreiben zu können.

Das Bemerkenswerteste der Arbeit scheint jedoch eine Art Uebertragungsprincip zu sein. Hiernach sind die Invarianten

eines Systems von vier binären Formen, zwei linearen und zwei quadratischen (welche der Verf. schon früher vollständig untersucht hatte, cf. F. d. M. XIX. 1887. 133), die Leitglieder der invarianten Bildungen zweier C_2, sodass man ohne weiteres von den bekannten Syzygien zwischen den binären Grundformen übergehen kann zu denjenigen zwischen den ternären.

In der That, seien die beiden vorgelegten Formen:

$$s = ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy,$$
$$s' = a'x^2+b'y^2+c'z^2+2f'yz+2g'zx+2h'xy,$$

so gehen dieselben vermöge der Substitution

$$x = X-hY-gZ, \quad y = aY$$

über in:

$$s = a(X^2+V), \quad s' = a'(X^2+2UX+V'),$$

wo V, V', U binäre Formen in Y, Z sind. Um nun zunächst die Leitglieder des vollen Systems der In- und Covarianten von s, s' zu haben, würde es genügen, die Invarianten von U, V, V' zu bilden, dieselben unter sich und mit a, a' derart zu combiniren, dass die Ergebnisse durch eine möglichst hohe Potenz von a teilbar werden.

Indessen empfiehlt es sich, statt der V, V', U vier binäre Formen mit der Eigenschaft einzuführen, dass deren Coefficienten weder von einander, noch von a und a' abhängen. Dies geschieht von selber, indem man V, V', U nach a, a' ordnet:

$$U = au'-a'u, \quad V = av-u^2, \quad V' = a^2v'-2auu'+a'u^2,$$

wo nunmehr u, u', v, v' die gewünschten Formen sind, nämlich:

$$u = hY+gZ, \quad u' = h'Y+g'Z, \quad v = bY^2+2fYZ+cZ^2,$$
$$v' = b'Y^2+2f'YZ+c'Z^2,$$

die übrigens unmittelbar entstehen, wenn man s, s' nach Potenzen von x ordnet. (Vgl. auch Brill, F. d. M. X. 1878. 459).

Das System (u, u', v, v') besitzt 13 Invarianten, aus denen sich die 6 Invarianten des Systems (U, V, V') zusammensetzen; letztere sind Leitglieder von In- oder Covarianten des Systems (s, s'), die sich mit Anwendung eines einfachen Residuencalculs (cf. F. d. M. XV. 1883. 73) zum Teil durch noch einfachere ersetzen lassen.

Zugleich wird aber bewiesen, dass die entsprechenden 6 wirklichen Bildungen, 4 Invarianten, eine quadratische und eine kubische Covariante, für die In- und Covarianten von (s, s') ein volles System bilden, verbunden durch eine Syzygie.

Es erübrigt noch die Berücksichtigung der Contravarianten und Zwischenformen. Zu dem Behuf ist den drei Formen U, V, V' noch eine vierte U' zu adjungiren:

$$U' = (a\eta - h\xi)Y + (a\zeta - g\xi)Z,$$

wo die ξ, η, ζ die zu x, y, z contragredienten Variabeln bedeuten. Man bilde wiederum die Invarianten des binären Systems (U, U', V, V'), combinire dieselben unter sich, sowie mit a, a', sodass eine möglichst hohe Teilbarkeit durch a erreicht wird, so gelangt man zur Gesamtheit der Leitglieder der Contravarianten und Zwischenformen von (s, s'). Von den 13 Invarianten des Systems (U, U', V, V') waren 6 bereits berücksichtigt; die 7 übrigen führen in der That zu 2 Contravarianten und 5 Zwischenformen, von denen zwei lineo-linear sind.

Durch Fortsetzung des Verfahrens entstehen einmal noch drei weitere Formen, deren Existenz schon aus Symmetriegründen notwendig war, schliesslich noch, ausser der identischen Zwischenform, zwei letzte Formen. Die bezüglichen 7 Syzygien sind der unmittelbare Ausdruck für die Herleitung der Formen. Durch weitere Uebertragung binärer Syzygien auf das ternäre Gebiet resultirt eine Anzahl von im ganzen 67 Syzygien, deren Vollständigkeit allerdings nicht nachgewiesen wird. Die Syzygien stehen in einem gewissen eigentümlichen Reciprocitätsverhältnis zu einander, abgesehen von der Symmetrie in Bezug auf die Coefficienten von s und s'.

Behufs geometrischer Auswertung empfiehlt es sich, ein typisches Coordinatendreieck zu Grunde zu legen, das repräsentirt wird (etwa bei festgehaltenen ξ, η, ζ) durch die beiden lineo-linearen Zwischenformen nebst der identischen $x\xi + y\eta + z\zeta$: die Coefficienten sämtlicher invarianten Bildungen werden dann von selbst von invariantem Charakter.

Es werden Aufgaben gelöst, wie: die Gleichung desjenigen Kegelschnittes (s, s') zu bilden, welcher noch eine gegebene Ge-

rade berührt. Das Verschwinden von Invarianten u. s. f. wird eingehend untersucht.

Als Beispiel der Bedeutung von Syzygien sei der Satz erwähnt: Alle covarianten Kegelschnitte, welche eine feste Gerade berühren, berühren noch drei weitere feste Geraden.

Auch die verschiedenen Ausnahmefälle hinsichtlich Berührung der beiden Kegelschnitte werden der Reihe nach in Betracht gezogen. My.

F. Gerbaldi. Sui combinanti di tre forme ternarie quadratiche. Torino Atti. XXV. 390-396.

Unter den Invarianten dreier ternären quadratischen Formen befinden sich bekanntlich zwei Combinanten vom 2. resp. vom 4. Grade in den Coefficienten jeder Form. Dieselben werden hier als ganze Functionen der 11 fundamentalen Invarianten der drei gegebenen Formen berechnet, und damit auch die Resultante derselben. Für die erstgenannte Combinante war die gemeinte Formel bereits von Mertens abgeleitet worden (F. d. M. XVIII. 1886. 99). My.

A. R. Johnson. On certain concomitants of systems of conics and quadrics, and on the calculation of the covariant S of the ternary quartic. Lond. M. S. Proc. XXI. 432-441.

Die Arbeit zerfällt in drei völlig getrennte Abschnitte.

Im ersten Abschnitt drückt der Verfasser gewisse geometrisch interessante Combinanten von drei quadratischen Formen durch fundamentale Invarianten der letzteren aus.

Es wird das beispielsweise auf die Aufgabe angewandt, die Gleichung für die Regelfläche aufzustellen, deren Geraden drei Flächen zweiter Ordnung zugleich berühren.

Im zweiten Abschnitt werden zwei Aufgaben über Involution behandelt. Die eine lautet, den Complex von Geraden zu finden, welche drei Flächen zweiter Ordnung in Involution schneiden.

Im dritten Abschnitt endlich berechnet der Verf. die Covariante S einer ternären biquadratischen Form als ein typisches Beispiel für Invarianten von Polaren. My.

G. Maisano. Il combinante N della forma ternaria cubica. Palermo Rend. IV. 153-185.

Eine kubische ternäre Form $f = a_x^3$ besitzt nach Clebsch und Gordan eine ausgezeichnete Covariante $N = (a\alpha u)a_x^2\alpha_x^2$ (bei constanten u), welche bezüglich f und deren Hesse'scher Form α_x^3 Combinanteneigenschaft besitzt. Bei Clebsch und Gordan finden sich auch schon alle Formen zweiten Grades in den Coefficienten von N.

Auf Grund einer früheren Arbeit (F. d. M. XIII. 1881. 110) berechnet der Verf. auf symbolischem Wege einige für die Theorie der Form f fundamentale Formen vom 3., 4. und 6. Grade in den Coefficienten von N und macht Anwendungen davon auf eine Reihe geometrischer Eigenschaften der Curve $N = 0$.

My.

E. Wölffing. Ueber die Hesse'sche Covariante einer ganzen rationalen Function von ternären Formen. Math. Ann. XXXVI. 97-120. Auch Diss. Tübingen. Leipzig. B. G. Teubner. 26 S. 8°.

Die Untersuchung einiger Fälle von Singularitäten einer ebenen Curve, in denen sich die Hesse'sche Curve durch ein anomales Verhalten auszeichnet, führte den Verf., auf Anregung von Hrn. Brill hin, auf folgende algebraische Aufgabe. Sei eine ternäre Form F als Product von anderen Formen gegeben, oder allgemeiner als ganze Function von anderen ternären Formen $f_0, f_1, f_2, \dots$, so soll die Hesse'sche Form H von F, eine Simultancovariante der f, in Function der im vollständigen Formensystem der f enthaltenen In- und Covarianten dargestellt werden.

Der Verf. beschäftigt sich zuvörderst mit dem einfachen Falle, wo F eine mehrfach-lineare Function der f ist, und wo jedes der f immer nur je in einem einzigen Gliede F_i auftreten

soll. Man hat dann in $H(F)$ erstens die Symbole der F und zweitens an Stelle dieser die Symbole der f einzuführen. Die Ausführung zeigt, dass sich der Ausdruck von H zurückführen lässt auf solche simultanen Covarianten der f, welche nur zwei Klammerfactoren enthalten; die reale Endformel ist freilich, wie nicht anders zu erwarten, complicirt.

Nunmehr darf auch die Erweiterung zugelassen werden, dass in den Gliedern F_i mehrere gleiche Factoren f vorkommen, sowie dass diese Glieder F_i, F_k, ... einzelne Factoren f unter sich gemein haben. Es werden dann vorerst alle Factoren sämtlicher F mit verschiedenen Indices bezeichnet und die letzteren erst nach Anwendung der Zwischenformeln teilweise einander gleich gesetzt.

Eine specielle Untersuchung ist erforderlich, falls unter den Formen f lineare vorkommen. Diese werden innerhalb der einzelnen Glieder F_i in geeigneter Weise zu nicht-linearen Formen zusammengefasst, sodass einer unmittelbaren Anwendung der früheren Formeln nichts im Wege steht; es erübrigt dann noch, an Stelle der Symbole jener nicht-linearen Hülfsformen die Symbole der linearen Formen einzuführen, wozu ein erheblicher Formelapparat in Thätigkeit gesetzt werden muss.

Der Verf. vereinigt die von ihm verwendeten invarianten Gebilde nebst ihrer geometrischen Bedeutung, bespricht das Vorkommen einzelner unter denselben in der bisherigen Litteratur und geht zuletzt zu der anfangs erwähnten Anwendung über. Es ergeben sich Ergänzungen von Sätzen, welche früher von Brill (F. d. M. X. 1878. 459) aufgestellt waren. Beispielsweise berührt die Hesse'sche Curve in einem Undulationspunkt der gegebenen Curve die Undulationstangente. Es sind hauptsächlich Symmetriegründe, welche in letzter Linie zur Erklärung des abweichenden Verhaltens der Hesse'schen Curve herbeigezogen werden müssen. My.

F. Mertens. Die Invarianten dreier quaternären quadratischen Formen. Wien. Ber. XCIX. 367-384.

Der Verf. ermittelt auf Grund seiner früheren Methoden

(cf. F. d. M. XXI. 1889. 122) ein volles System der invarianten Bildungen von drei quaternären, quadratischen Formen f, f', f''. Es seien $F(u), F'(u), F''(u)$ die zugehörigen Formen in Ebenen-Coordinaten u, desgleichen $\varphi(p), \varphi'(p), \varphi''(p)$ die zugehörigen Formen in Liniencoordinaten p, so bilde man zunächst das Potenzproduct $\tau = f^{\alpha}(x)\varphi^{\beta}(p)F^{\gamma}(u)$ nebst zwei analogen τ', τ''.

Stellt man sodann sämtliche Modificationen des Ω-Processes auf, welche bei unseren Reihen von Punkt-, Linien- und Ebenenvariabeln möglich sind, und bildet solche Potenzproducte $\mathfrak{B}$ dieser Processe, deren (symbolische) Exponenten, zusammen mit den in den τ auftretenden, gewissen diophantischen Gleichungen genügen, so ist jede invariante Bildung ϑ von f, f', f'' linear und homogen aus Ausdrücken von der Art $A^{\varrho}A'^{\sigma}A''^{\tau}\mathfrak{B}(\tau, \tau', \tau'')$ zusammensetzbar, wenn die A die drei Discriminanten der f bedeuten. Es kommt nun darauf an, sowohl die Producte τ, wie auch gleichzeitig den Process $\mathfrak{B}$ je in einfachere zu zerlegen, um so im Verein mit der Discussion jener diophantischen Gleichungen eine Uebersicht über alle möglichen Bildungen zu erhalten. Als Gesamtergebnis stellt sich heraus, dass das gesuchte volle System aus 22 Bildungen von geradem Charakter und aus 28 Bildungen von ungeradem Charakter besteht. My.

F. Mertens. Die invarianten Gebilde der räumlichen Collineation. Monatsh. f. M. I. 13-22.

Der Verfasser ermittelt auf Grund seiner früher entwickelten Methoden (F. d. M. XXI. 1889. 122) ein volles System der zu einer quaternären bilinearen Form $f(x, u) = \Sigma\Sigma a_{ik} x_i u_k$ (von Punkt- und Ebenencoordinaten) gehörigen invarianten Bildungen.

Zunächst werden einige einfachste solcher Bildungen aufgestellt. Das sind:

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial u_i} = \Sigma\Sigma b_{ik} x_i u_k;\quad h = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial u_i} = \Sigma\Sigma c_{ik} x_i u_k;$$

$$A = a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44},\quad B = b_{11}+b_{22}+b_{33}+b_{44},$$
$$C = c_{11}+c_{22}+c_{33}+c_{44},\quad D = |a_{ik}|.$$

Auf diese (nebst f selbst und der identischen Covariante u_x) werden die weiteren Bildungen

$$\Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial u_i}, \quad \Sigma \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial u_i}, \quad \Sigma \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial u_i}$$

vermöge gewisser Relationen zwischen Ω-Processen zurückgeführt.

Ein ähnliches Verfahren lässt sich einschlagen für einen gewissen Cyklus einfachster Bildungen, welche alle drei Arten von Variabeln zugleich enthalten.

Auf diese Weise gelangt man zu einem Stamme von Grundformen. Es genügt, aus einigen von diesen Potenzproducte zu bilden und auf die letzteren symbolische Potenzproducte vorgeschriebener Ω-Processe in der Art anzuwenden, dass die beiderseitigen Exponenten gewissen linearen diophantischen Gleichungen genügen. Es kommt dann darauf an, aus den Lösungen derselben die primitiven herauszusuchen, aus welchen sich alle übrigen mittels ganzzahliger Factoren zusammensetzen.

Der Verfasser gelangt auf diesem Wege nach langwieriger Rechnung zu einem Kreise von Formen, auf welche noch alle zulässigen Ω-Processe von einer gewissen ausgezeichneten Beschaffenheit anzuwenden sind, um ein volles Formensystem zu gewinnen.

Der Fortschritt, welchen die vorliegende Untersuchung aufweist, mag daraus erkannt werden, dass die analoge Aufgabe, „ein volles System der Collineation“ aufzustellen, bereits vor mehr als zwanzig Jahren von Clebsch und Gordan (mittels symbolischer Rechnung) gelöst worden ist (F. d. M. II. 1869/70. 62). My.

E. Waelsch. Zur Invariantentheorie der Liniengeometrie. Math. Ann. XXXVII. 141-152.

In der symbolischen Behandlung der auf die Liniengeometrie bezüglichen Invariantentheorie war man über den Standpunkt von Clebsch (F. d. M. II. 1869/70. 602, IV. 1872. 62) nicht wesentlich hinausgegangen. Der Verfasser zeigt, wie sich durch geeignete Verknüpfung mit Grassmann'schen Symbolen (äusseren

Producten) die Darstellung von Clebsch vereinfachen und zur Lösung complicirterer Aufgaben weiter ausbilden lässt.

Die Strahlen-Coordinaten $p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$ einer Geraden (x, y) werden durch Producte von Symbolen p_i, p_k ersetzt, sodass

$$p_{ik} = p_i p_k = -p_k p_i, \quad (p_i p_i = 0);$$

und entsprechend die Axencoordinaten

$$\pi_{ik} = \pi_i \pi_k = -\pi_k \pi_i, \quad (\pi_i \pi_i = 0).$$

Das Gleiche gilt von den allgemeineren Coordinaten $c_{ik} = c_i c_k$, resp. $\gamma_{ik} = \gamma_i \gamma_k$ eines linearen Complexes. Demnach schreibt sich die linke Seite der Gleichung eines linearen Complexes nunmehr in den beiden dualistischen Gestalten:

$$\begin{cases} \Sigma c_{ik} \pi_{ik} = \Sigma c_i c_k \pi_i \pi_k = \frac{1}{2}(c_1 \pi_1 + c_2 \pi_2 + c_3 \pi_3 + c_4 \pi_4)^2 = \frac{1}{2}(c\pi)^2, \\ \Sigma \gamma_{ik} p_{ik} = \Sigma \gamma_i \gamma_k p_i p_k = \frac{1}{2}(\gamma_1 p_1 + \gamma_2 p_2 + \gamma_3 p_3 + \gamma_4 p_4)^2 = \frac{1}{2}(\gamma p)^2. \end{cases}$$

Unterwirft man jetzt den Punktraum der (x) einer linearen Transformation, so erkennt man leicht die Richtigkeit des grundlegenden Satzes, dass die Symbole p, c den x cogredient sind, ebenso die π, γ cogredient den Ebenencoordinaten ξ, und demnach jedes der drei ersteren Symbole contragredient jedem der drei letzteren.

Man kann also unmittelbar eine Reihe „elementarer" (symbolischer) Invarianten angeben, wie $(p\pi)$, $(x\gamma)$ etc. Invariante Bildungen der Liniengeometrie setzen sich dann aus solchen Elementarfactoren zusammen.

Es liegt nunmehr nahe, auch höhere Complexe in dem angegebenen Sinne zu symbolisiren, das Verhalten der Symbole bei Collineationen zu untersuchen, wiederum invariante Elementarausdrücke zu bilden, und schliesslich aus diesen durch Aggregation alle invarianten Bildungen.

Bei linearen Complexen insbesondere ergiebt sich ein Parallelismus zu Formen zweiter Ordnung (Klasse). Denn ersetzt man den Complex $(c\pi)^2$ durch die Form zweiter Klasse $(c\xi)^2$, u. s. f., so bleibt der invariante Charakter der symbolischen Bildungen bestehen.

Die Gleichung eines Complexes n^{ten} Grades wird jetzt $(c\pi)^{2n} = 0$, resp. $(\gamma p)^{2n} = 0$, und dem Complexe entspricht wiederum eine Bildform $2n^{\text{ter}}$ Ordnung $(\gamma x)^{2n}$, resp. $2n^{\text{ter}}$ Klasse $(c\xi)^{2n}$.

Das mit einem linearen Complexe $(yp)^2 = 0$ verbundene Nullsystem ist einfach durch $yx.yy = 0$ dargestellt. Aus einer Reihe symbolischer Identitäten kann man unmittelbar die Relationen ableiten, welche zwischen den Coordinaten von vier Punkten und ihren Null-Ebenen bestehen u. s. w.

Sind drei lineare Complexe gegeben, so lässt sich sofort die Gleichung der Fläche 2. Grades bilden, welche von den gemeinsamen Complexstrahlen der Complexe erzeugt wird.

Endlich sei noch hervorgehoben, dass auch für die Liniengeometrie ein Uebertragungsprincip gilt, welches dem bekannten, von Clebsch herrührenden analog ist. Irgend eine Invariante J von k Punkten einer Ebene ist eine Form der Determinanten (ikl) der Coordinaten von je dreien dieser Punkte. Durch symbolische Ränderung von (ikl) mit zwei ξ erhält man eine covariante Fläche des Systems der linearen Complexe; jede Tangentialebene derselben besitzt bezüglich der Complexe k Nullpunkte, für welche $J = 0$ ist. Lässt man die linearen Complexe, welche von gleichwertigen ternären Symbolen herrühren, wieder zusammenfallen, so gelangt man entsprechend zu Covarianten von Complexen höherer Ordnung. My.

E. Study. Ueber quadratische Formen und Liniencomplexe. Leipz. Ber. XLII. 172-188.

Bezeichnet $\Gamma = (\Gamma U)^2$ eine quadratische Form der λ Veränderlichen $U_1, \dots, U_\lambda$ und $(GX)^m$ die Contravariante dieser Form Γ, so gilt der Satz: Ist $F = (AX)^m$ eine beliebige Form der λ Veränderlichen $X_1, \dots, X_\lambda$, so lässt sich dieselbe auf eine einzige Art in eine nach Potenzen der Form $(GX)^2$ fortschreitende Reihe entwickeln, sodass die Coefficienten eines jeden Gliedes dieser Reihe sämtlich zu der Form Γ apolar sind. Dabei besteht die Bedingung der Apolarität im identischen Verschwinden der lineo-linearen Covarianten. Im Falle $\lambda = 6$ lässt sich die gefundene Entwickelung auch in der Theorie der quaternären Formen verwerten, und zwar ergiebt sich der folgende Satz: Eine jede Form $f(p)$ im quaternären Gebiete, in welcher die Coordinaten eines linearen Com-

plexes $\widehat{pp'}$ im m^{ten} Grade vorkommen, lässt sich auf eine einzige Art nach Potenzen der identischen Covariante $P = (\widehat{pp'}\,\widehat{pp'})$ entwickeln, sodass die Coefficienten eines jeden Entwickelungsgliedes zu der identischen Covariante $Q = (\widehat{qq'}\,\widehat{qq'})$ apolar sind. Soweit sich dieser Satz auf das erste Glied der Entwickelung bezieht, stimmt derselbe mit einem bekannten Satze von Clebsch überein, wonach die Gleichung $f(p) = 0$ sich immer auf eine einzige Art durch Anwendung von $P = 0$ so modificiren lässt, dass man sie als symbolische Potenz eines speciellen linearen Complexes betrachten darf. Ht.

G. Frobenius. Theorie der biquadratischen Formen.
J. für Math. CVI. 175-188.

Unter einer „biquadratischen" Form F wird hier eine doppelt binär-quadratische verstanden, deren zwei Variabelnreihen x, x_1; y, y_1 unabhängigen linearen Substitutionen unterworfen werden.

Solche biquadratischen Formen resp. Gleichungen spielen in der Theorie der elliptischen Functionen eine wichtige Rolle: zwischen zwei elliptischen Functionen zweiten Grades mit denselben Perioden besteht eine biquadratische Relation. Es sind denn auch gewisse Fragen aus dieser letzteren Theorie gewesen, welche den Verf. veranlasst haben, die biquadratischen Formen invariantentheoretisch genauer zu untersuchen.

Ist $$F = (Ax^2 + 2Bxx_1 + Cx_1^2)y^2 + 2(A'x^2 + 2B'xx_1 + C'x_1^2)yy_1 + (A''x^2 + 2B''xx_1 + C''x_1^2)y_1^2,$$

und führt man vier quaternäre Variabeln ein:

$$xy = p, \quad x_1y = q, \quad xy_1 = r, \quad x_1y_1 = s,$$

so ist die quadratische Form:

$$G = (Ap + Bq + A'r + B's)p + (Bp + Cq + B'r + C's)q + (A'p + B'q + A''r + B''s)r + (B'p + C'q + B''r + C''s)s$$

als eine Covariante von F zu bezeichnen. Denn geht F vermöge zweier Substitutionen (S), (T) der (x), (y) in F_0 über, so geht auch G in die genau entsprechende Form G_0 über vermöge einer

linearen Substitution U der p, q, r, s, welche die Folge von $(S), (T)$ ist.

Eine zweite Covariante in den Variabeln p, q, r, s ist die Form $H = ps - qr$.

Der Kern der Theorie liegt nun in der Schar quadratischer Formen $G + \lambda H$ und deren Determinante $R_2(\lambda)$, welche die „charakteristische Function“ von F heisst.

Der Verf. reproducirt zunächst den Beweis des Cayley'schen Satzes, dass die Coefficienten s, t, u von $R_2(\lambda) = \lambda^4 - 6\lambda^2 s + 4\lambda t + u$ fundamentale Invarianten von f sind; weiter aber beweist er den ebenfalls von Cayley stammenden Satz, dass die bezüglich y resp. x gebildeten Discriminanten von F, $R(x)$ und $R_1(y)$ gleiche Invarianten g_2, g_3 haben, in der erweiterten Fassung, dass diese Invarianten g_2, g_3 auch diejenigen der Form $R_2(\lambda)$ sind.

Das Princip des Beweises ist nach Cayley, F mit Hülfe einer Wurzel der Gleichung $R_2(\lambda) = 0$ zu einer symmetrischen Form zu machen, für welche dann $R(x)$ und $R_1(y)$ gleiche Coefficienten erhalten.

Für die Gleichheit der Invarianten von $R(x)$ und $R_1(y)$ (vgl. auch die symbolischen Beweise von Zeuthen und Capelli, F. d. M. XI. 1879. 91-95) giebt der Verf. noch drei weitere Nachweise, zwei algebraische und einen letzten mittels der Theorie der elliptischen Functionen. Der erstere unter den zwei algebraischen ist in so fern bemerkenswert, als er nur rationale Operationen verlangt und darauf beruht, dass man einmal nur die x, das andere Mal nur die y für sich transformirt. Der zweite Beweis dagegen deckt noch weitere Beziehungen zwischen den Formen R und R_1 auf. Verschwindet nämlich R_1 identisch, ist also $g_2 = g_3 = 0$, so würde allein nur daraus folgen, dass R einen dreifachen Linearfactor besitzt; in Wirklichkeit ist aber R die vierte Potenz einer Linearfunction. Desgleichen bestehen noch nähere Beziehungen zwischen den drei Formen R, R_1, R_2, die ebenfalls durch blosses Gleichsetzen von Invarianten nicht ausdrückbar sind.

Der Verfasser wendet sich nunmehr zur Aufstellung der notwendigen und hinreichenden Bedingung dafür, dass $R(x)$ und $R_1(y)$

äquivalent sind, damit $F(x, y)$ in eine symmetrische Form transformirt werden kann.

Das Kriterium für die Aequivalenz von R und R_1 drückt sich indirect einfach dahin aus, dass R_2, als charakteristische Determinante einer Formenschar, einen linearen Elementarteiler hat.

Es werden aber auch directe Kriterien aufgestellt, die sich darauf stützen, dass zwei binäre Formen vierter Ordnung mit den Coefficienten a resp. b dann und nur dann äquivalent sind, wenn ihre charakteristischen Determinanten:

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2-2\lambda \\ a_1 & a_2+\lambda & a_3 \\ a_2-2\lambda & a_3 & a_4 \end{vmatrix}, \quad \psi(\lambda) = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2-2\lambda \\ b_1 & b_2+\lambda & b_3 \\ b_2-2\lambda & b_3 & b_4 \end{vmatrix}$$

in den Elementarteilern übereinstimmen.

Diese Kriterien bilden die Grundlage für den wesentlichsten Teil der Untersuchung. Es soll die Form F rückwärts aus ihren Covarianten $R(x)$, $R_1(y)$ bestimmt werden, oder genauer, man soll alle Formen F ermitteln, für welche $R(x)$ und $R_1(y)$ gegebene Functionen sind. Hierbei sind zugleich sämtliche Ausnahmefälle mit zu berücksichtigen. Um hier nur den „allgemeinen“ Fall zu erwähnen, wo R und R_1 keinen quadratischen Teiler gemein haben, so führt die Aufgabe auf zweifach unendlich viele Lösungen F; sind ausserdem noch die Werte der Invarianten s, t gegeben, auf vier Lösungen. Es wird nicht nur eine explicite Formel für sämtliche F gegeben, sondern auch gezeigt, wie sich aus einer Particularlösung alle übrigen ableiten lassen. Das Problem wird übrigens in einer gewissen Verallgemeinerung durchsichtiger; es soll eine triquadratisshe Function $f(x, y, z)$ derart gefunden werden, dass ihre Determinanten bezüglich x, y, z gleich den Producten R_1R_2, R_2R, RR_1 sind, wo $R(x)$, $R_1(y)$, $R_2(z)$ gegebene Functionen vierter Ordnung mit gleichen Invarianten sind.

Eine unmittelbare Folgerung hieraus ist die Feststellung des Aequivalenzkriteriums für zwei biquadratische Formen. Dasselbe erhält wiederum die einfachste Fassung mit Hülfe des Elementarteilerbegriffs: „Damit zwei biquadratische Formen äquivalent

seien, ist notwendig und hinreichend, dass ihre charakteristischen Determinanten in den Elementarteilern übereinstimmen."

Den symmetrischen Formen F wird noch eine specielle Untersuchung zu Teil. Es ist zu betonen, dass es Ausnahmefälle giebt, in denen die blosse Uebereinstimmung der Coefficienten von R und R_1 die Symmetrie von F nicht notwendig zur Folge hat. Eine symmetrische Form F besitzt eine lineare Invariante; ist dieselbe für zwei solche Formen F die nämliche, und sind die letzteren äquivalent hinsichtlich unabhängiger Substitutionen der (x), (y), so sind sie es auch hinsichtlich identischer Substitutionen der (x), (y). Zum Schlusse macht der Verfasser Anwendungen auf die Theorie der elliptischen Functionen. Beispielsweise kann man das allgemeine Integral der elliptischen Differentialgleichung in einer kanonischen Gestalt hinschreiben, wenn $F=0$ ein particuläres Integral ist. My.

A. Voss. Ueber die cogredienten Transformationen einer bilinearen Form in sich selbst. Münch. Abh. XVII$_2$. 122 S.

Frobenius (F. d. M. IX. 1877. 85) hatte das Problem der „cogredienten" (d. i. der für beide Variabelnreihen identischen) Transformation der bilinearen Formen in sich selbst für die besondern Fälle der symmetrischen und der alternirenden Formen zum Abschluss gebracht. Der Verfasser erledigt das Problem für den allgemeinsten Fall, indem er sich einmal auf die von Frobenius eingeführten Methoden stützt, andererseits eigene frühere Untersuchungen (F. d. M. X. 1878. 103) weiterführt.

Der Inhalt zerfällt in zwölf Paragraphen.

In § 1 werden die Definitionen und Bezeichnungen des von Frobenius entwickelten Algorithmus in einer für das Folgende geeigneten Art zusammengestellt. Um hier nur das Notdürftigste herauszuheben, so kann man eine bilineare Form $A=\Sigma a_{ik}x_iy_k$ repräsentiren durch die lineare Substitution A mit den nämlichen Coefficienten a_{ik}. Genau so, wie man solche Substitutionen zu (symbolischen) „Producten" zusammensetzt, kann man auch mit den entsprechenden Formen verfahren.

Die „conjugirte“ Form A^1 von A ist $\Sigma a_{ki} x_i y_k$. Die „Einheitsform“ $E = \Sigma x_i y_i$ ist mit jeder beliebigen Form A „vertauschbar“, d. h. man hat $AE = A = EA$. Die „lineare Gleichung“ $AX = B$ hat bei nicht verschwindender Determinante von A nur eine Lösung. Speciell heisst die Lösung Y von $AY = E$ die zu A „reciproke“ Form und wird mit A^{-1} bezeichnet. Wenn die Gleichung $B = PAP$ erfüllt ist, heisst P eine „conjugirte“ Transformation von A in B.

Unter der „charakteristischen Function“ von A versteht man die Determinante der Form $A - rE$ bei variablem r. Sind die „Elementarteiler“ der charakteristischen Functionen von A und B dieselben, so heissen A und B „ähnlich“.

Für das Weitere ist das wichtigste Hülfsmittel das von Frobenius behandelte „Problem der vertauschbaren Formen“, d. h. die Aufsuchung aller Lösungen P der Gleichung $PA = AP$, unter denen sich stets eine bestimmte Anzahl m linear unabhängiger befindet.

Der Verf. sieht darnach eine lineare Gleichung zwischen Formen als „gelöst“ an, sobald dieselbe auf das Problem der vertauschbaren Formen zurückgeführt ist.

Frobenius hatte bereits die allgemeinen Eigenschaften der charakteristischen Function der in Rede stehenden Substitutionen U, welche eine Form A cogredient in sich überführen, entwickelt, sowie auch die Relationen, denen die Coefficienten derselben genügen müssen. Der Verf. leitet dieselben Resultate mittels einer Methode ab, die er früher für orthogonale Substitutionen aufgestellt hatte, welche weitere fruchtbare Anwendungen zulässt. Eine wichtige Rolle spielen dabei diejenigen Substitutionen, welche eine Form in ihre „beigeordnete“, d. i. die conjugirte der reciproken, verwandeln; sie führen zu einer directen Verallgemeinerung der bekannten Eigenschaften der orthogonalen Substitutionen. Der Fortschritt gegenüber Frobenius liegt einmal darin, dass die Bestimmung der Coefficienten von U auf die Auflösung linearer Gleichungen zurückgeführt wird, welchen die Unterdeterminanten der charakteristischen Function von U genügen. Andererseits gelangt der Verf. zu einem merkwürdigen Reciprocitätsgesetze. Wird nämlich eine Form S durch

eine Substitution V in ihre beigeordnete Form transformirt, so wird umgekehrt durch die Substitution S die Form V in ihre beigeordnete transformirt.

Der Verf. wendet sich nunmehr (§ 3) zu einer anderen Erweiterung, indem er allgemein die reelle Substitution einer reellen symmetrischen definiten Form in sich untersucht, während sich Frobenius auf die orthogonalen Formen beschränkt hatte. Die charakteristische Function einer solchen Substitution besitzt einmal lauter Wurzeln vom absoluten Betrage Eins, andererseits lauter einfache Elementarteiler.

Der § 4 ist den irrationalen Eigenschaften der Substitutionen U gewidmet. Die bezüglichen Kronecker-Christoffel'schen Resultate werden hier auf den Fall ausgedehnt, wo die „charakteristische Resolvente" lauter einfache Elementarteiler besitzt.

Als grundlegend erscheint dabei der Satz, dass, wenn die charakteristische Function von U lauter verschiedene Wurzeln hat, die Function $|a_{ik}+\varrho a_{ki}|$ lauter einfache Elementarteiler haben muss, wo A die zu transformirende Form bedeutet.

Die Transformation U selbst ist eine „eigentliche" (d. i. von der Determinante Eins) mit $\frac{1}{2}n$ resp. $\frac{1}{2}(n-1)$ willkürlichen Parametern, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Hierauf wird (§ 5) als Excurs eine Reihe neuer Eigenschaften von Transformationen abgeleitet, welche Formen mit verschwindender Determinante in sich überführen.

Im Vorstehenden sind die wesentlichen Grundlagen der Untersuchung skizzirt.

Das Weitere concentrirt sich auf die directe Ermittelung der Coefficienten von U, die von einem in der Gestalt $ST+S'T'=0$ zusammenfassbaren System linearer Gleichungen abhängen. Die Formeln für die Coefficienten selbst erscheinen als eine unmittelbare Analogie der von Cayley-Hermite gegebenen; insbesondere wird es dabei deutlich, weshalb die symmetrischen und alternirenden Formen eine ausgezeichnete Rolle spielen.

Die Arbeit schliesst mit der Bestimmung (§ 12) der Anzahl der willkürlichen Parameter, von denen überhaupt die Coeffi-

cienten der Transformation einer Form in sich abhängen; dieselbe kann stets durch lineare Operationen gefunden werden.

Es giebt übrigens Ausnahmefälle, bei denen die Bestimmung jener Coefficienten die Auflösung eines Systems von quadratischen Gleichungen erfordert. My.

R. Lipschitz. Beiträge zu der Theorie der gleichzeitigen Transformation von zwei quadratischen oder bilinearen Formen. Berl. Ber. 1890. 485-523.

Die Abhandlung des Herrn Lipschitz zerfällt in zwei Abteilungen, von denen die erste sich auf die quadratischen, die zweite auf die bilinearen Formen bezieht. In der ersten Abteilung werden die Untersuchungen, welche in dem Aufsatze: „Beitrag zu der Theorie des Hauptaxenproblems" (Abhandlungen d. Berl. Akad. v. J. 1873) entwickelt sind, neu in Angriff genommen und weiter ausgeführt. Wenn man eine quadratische Form $\Sigma p_{ab} x_a x_b$ durch eine orthogonale Substitution in die Normalform $\Sigma A_k \xi_k^2$ überführt und hierbei die Grössen A_k als Functionen der Grössen p_{ab}, welche als unabhängige Variabeln betrachtet werden, behandelt, so sind nach Jacobi die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial A_k}{\partial p_{ab}}$ gleich Producten der Coefficienten der orthogonalen Substitution. Aus dieser Eigenschaft wird für die Grössen A_k ein System partieller Differentialgleichungen abgeleitet, und zwar wird dasselbe dann von besonderer Form, wenn die charakteristische Gleichung, welche die A_k als Wurzeln bestimmt, algebraisch auflösbar ist. Dieses System partieller Differentialgleichungen wird für $n = 2$ und $n = 3$ auf neuer Grundlage aufgestellt und hieran das der Anzahl Vier der Variabeln entsprechende System angeschlossen, welches in der früheren Abhandlung noch nicht behandelt war. In letzterem Falle bilden die partiellen Ableitungen der bei der Auflösung der charakteristischen Gleichung gebrauchten Wurzelfunctionen von der Form $A_1 + A_2 - A_3 - A_4$ ein System von 16 Grössen, welches zugleich orthogonal und symmetrisch ist. Aus diesem Grunde wird für

ein System von n^2 Grössen die Frage gestellt, von wieviel unabhängigen Elementen es noch abhängt, wenn es orthogonal und symmetrisch ist; die Lösung erfolgt mit Hülfe der Rechnung mit bicomplexen Ausdücken n^{ter} Ordnung, deren Grundsätze in der Schrift des Verfassers „Untersuchungen über die Summen von Quadraten" (Bonn 1886) niedergelegt sind (vgl. das folg. Referat).

Die zweite Abteilung beschäftigt sich mit der entsprechenden Aufgabe für den Fall, dass es sich um die gleichzeitige Transformation zweier bilinearen Formen handelt, von denen die eine gleich dem Aggregate der Producte von je zwei Variabeln, die andere alternirend ist. Wie die erste Transformation für das Hauptaxenproblem von grundlegender Bedeutung ist, so vermittelt die zweite die Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, welches in der Inauguraldissertation des Herrn Hovestadt: „Ueber eine mit dem Problem der kleinen Schwingungen verwandte Aufgabe" (Bonn 1873) behandelt worden ist, und welches als speciellen Fall das von Herrn Weierstrass im Monatsberichte vom 29. Mai 1879 untersuchte System enthält. Es wird nun unter der Voraussetzung, dass die charakteristische Gleichung ungleiche Wurzeln besitzt, das System der beiden bilinearen Formen durch congruente Transformation der beiden Reihen von Variabeln auf eine Normalform gebracht und für die Producte der Substitutionscoefficienten eine Gleichung hergeleitet, welche der Jacobi'schen, für quadratische Formen geltenden Gleichung entspricht. Hierauf wird in vollkommener Analogie mit dem entsprechenden Abschnitte der ersten Abteilung ein System von partiellen Differentialgleichungen gegründet, in welchem die Wurzeln der charakteristischen Gleichung die abhängigen, die Coefficienten der alternirenden bilinearen Form die unabhängigen Variabeln sind. Mit der Betrachtung der besonderen Fälle $n = 2$ bis $n = 9$, in welchen die charakteristische Gleichung algebraisch auflösbar wird, schliesst die Abhandlung. Lsg.

L. Kronecker. Ueber orthogonale Systeme. Berl. Ber. 1890. 525-541, 602-607, 691-699, 873-884, 1063-1080.

Anknüpfend an die vorangehende Abhandlung des Herrn Lipschitz, stellt sich der Verfasser zunächst die Aufgabe, alle orthogonalen symmetrischen Systeme zu finden, und giebt hiervon die folgende einfache Lösung: Man bilde die quadratische Form

$$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_m^2-y_{m+1}^2-y_{m+2}^2-\cdots-y_n^2,$$

wobei m eine der Zahlen $0,1,\ldots,n$ ist, und unterwerfe dieselbe einer orthogonalen Substitution: dann ist das Coefficientensystem der transformirten quadratischen Form zugleich orthogonal und symmetrisch; die Mannigfaltigkeit der so erhaltenen Systeme ist gleich $m(n-m)$, eine Anzahlbestimmung, die schon Herr Lipschitz gewonnen hatte. (I—IV). Nachdem diese Lösung für reelle und complexe Systeme begründet und discutirt worden ist, wird dargelegt, dass die symmetrischen orthogonalen Systeme sich der rationalen Darstellung orthogonaler Systeme, welche von Herrn Cayley (J. für Math. XXXII) gegeben worden ist, (bis auf das Einheitssystem sämtlich) entziehen. (V). Wohl aber kann man sich durch die Cayley'sche Darstellung den symmetrischen Systemen nähern. Es wird nämlich durch die Cayley'sche Darstellung jedem alternirenden Systeme (τ_{ik}) $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ ein orthogonales System zugeordnet, und wenn man nun die Grössen τ_{ik} so wählt, dass ihre Determinante verschwindet (wodurch nur für gerades n eine Beschränkung statuirt wird), und alsdann dieselben so ins Unendliche wachsen lässt, dass ihre Verhältnisse fest bleiben, so gelangt man beim Grenzübergange zu einem orthogonalen symmetrischen Systeme. (VI—VIII). Ein Teil dieser Betrachtungen verliert auch dann seine Gültigkeit nicht, wenn es sich um Systeme handelt, die in Bezug auf ein gewisses Modulsystem orthogonal sind. (IX—XI). Während sich der Cayley'schen Darstellung eine gewisse Mannigfaltigkeit orthogonaler Systeme entzieht, so kann man durch Zusammensetzung zweier nach Cayley'scher Methode erhaltenen Systeme jedes orthogonale System der Determinante $+1$ erhalten. (XII).

Eine von der Cayley'schen principiell verschiedene Darstellung orthogonaler Systeme erhält man, indem man die Substitution in „elementare“ orthogonale Substitutionen, d. h. in solche Sub-

stitutionen auflöst, welche immer nur je zwei der Variabeln transformiren und einen veränderlichen Parameter enthalten. (XIII). Betrachtet man zwei Formensysteme als „eigentlich aequivalent," wenn die Formen des einen Systems in die des anderen durch eine orthogonale Transformation der Determinante $+1$ übergeführt werden können, so genügen die „Invarianten" dieser Aequivalenz gewissen partiellen Differentialgleichungen. Die Zerlegung der orthogonalen Systeme in elementare gestattet in einfacher Weise, ein charakteristisches System von solchen partiellen Differentialgleichungen aufzustellen (XIV). Mit dem Hinweise auf die bemerkenswerte Beziehung dieser Differentialgleichungen zu denjenigen, welche für die Invarianten allgemeiner linearer Transformationen gelten, schliesst die umfangreiche Abhandlung. (XV). Lsg.

L. Kronecker. Ueber die Composition der Systeme von n^2 Grössen mit sich selbst. Berl. Ber. 1890. 1081-1088.

Ist $S^{(1)} = (z_{ik}^{(1)})$ ein System von n^2 unbestimmten Variabeln, und bezeichnet man das aus ihm durch r-malige Composition mit sich selbst hervorgehende System mit $S^{(r)} = (z_{ik}^{(r)})$, während $S^{(0)}$, wie gewöhnlich, dem sogenannten Einheitssystem gleich gesetzt wird, so lassen sich die Elemente jedes dieser Systeme $S^{(r)}$ als Entwicklungscoefficienten der einzelnen Elemente des zu $(z\delta_{ik} - z_{ik}^{(1)})$ reciproken Systems nach fallenden Potenzen der Variable z darstellen. Aus dieser genuinen Darstellung der Elemente componirter Systeme ergeben sich nun unmittelbar die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass in der Reihe $S^{(0)}$, $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, ... zwei einander für ein beliebiges Primmodulsystem $P = (M, M' \ldots)$ congruente Systeme vorkommen, unter der überall im folgenden festgehaltenen Voraussetzung, dass die Determinante von $S^{(1)}$ von Null verschieden ist.

Genau ebenso nämlich, wie bei der entsprechenden Frage der Zahlentheorie, wird hier bewiesen, dass jene Reihe dann und nur dann zwei einander congruente Systeme enthalten kann, wenn in ihr auch ein dem Einheitssystem congruentes System vorkommt. Ist ferner $S^{(\nu)}$ das erste derartige System, so ent-

hält jene Reihe überhaupt nur genau ν incongruente Systeme, nämlich die ν ersten $S^{(0)}, S^{(1)}, \ldots, S^{(\nu-1)}$. Man könnte $S^{(1)}$ in diesem Falle als ein modulo P zum Exponenten ν gehöriges System bezeichnen, und die Frage ist hierdurch auf die Aufgabe zurückgeführt, alle zu einem beliebigen Exponenten gehörigen Systeme aufzusuchen.

Diese letzte Aufgabe kann nun mit Hülfe der zuerst gegebenen Darstellung der Elemente des zu $(z\delta_{ik} - z_{ik}^{(1)})$ reciproken Systems durch die Elemente der componirten Systeme $S^{(r)}$ gelöst werden. Man findet so, dass $S^{(1)} = (z_{ik}^{(1)})$ dann, und nur dann, die geforderte Eigenschaft hat, wenn die Elemente des zu $(z\delta_{ik} - z_{ik}^{(1)})$ reciproken Systems für den Modul P ganzen Functionen von z mit dem Nenner $(z^\nu - 1)$ congruent sind.

Treten an die Stelle von Congruenzen für den Modul P Gleichungen, so ergiebt sich als specieller Fall, dass das ν^{te} System $S^{(\nu)}$ dann, und nur dann, dem Einheitssysteme gleich ist, wenn die Elemente des zu $(z\delta_{ik} - z_{ik}^{(1)})$ reciproken Systems sämtlich ganze Functionen von z mit dem Nenner $(z^\nu - 1)$ sind. Hieraus fliesst eine vollständige Darstellung aller Systeme $(z_{ik}^{(1)})$, welche in dem oben angegebenen Sinne zum Exponenten ν gehören. Sind nämlich $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ ν^{te} Wurzeln der Einheit, welche nicht sämtlich einer Gleichung $\varepsilon^{\nu_1} = 1$ von niederem als dem ν^{ten} Grade genügen, und sind (c_{ik}) und (c'_{ik}) zwei beliebige zu einander reciproke Systeme, so sind alle zum Exponenten ν gehörigen Systeme $z_{ik}^{(1)}$, und nur sie, in der Form:

$$z_{ik}^{(1)} = \sum_{h=1}^{n} c_{ih}\,\varepsilon_h\,c'_{hk}$$

dargestellt. Alle diese Resultate sind unmittelbare Folgerungen aus zwei Abhandlungen des Verfassers vom Jahre 1873 und 1874. Von den weiteren Ergebnissen der auf diese Frage bezüglichen Untersuchungen werden nur die folgenden kurz hervorgehoben.

Ist $F(z)$ eine ganze Function des m^{ten} Grades von z, in welcher der Coefficient von z^m gleich Eins ist, so kann jede Potenz z^n von z, modulo $F(z)$ betrachtet, als ganze Function des

$(m-1)^{\text{ten}}$ Grades von z dargestellt werden. Betrachtet man nun diese Darstellungen für irgend welche m aufeinander folgenden Potenzen $(z^\nu, z^{\nu+1}, \ldots, z^{\nu+m-1})$, so bilden ihre m^2 Coefficienten ein System, welches aus dem für $(1, z, \ldots, z^{m-1})$ gebildeten durch ν-malige Composition mit sich selbst entsteht. Dieses letztere System wird demnach dann, und nur dann, durch ν-malige Composition das Einheitssystem erzeugen, wenn die zu Grunde gelegte Function $F(z)$ ein Teiler von $z^\nu - 1$ ist, und zwar wird es zum Exponenten ν gehören, wenn ν die kleinste Zahl ist, für welche $z^\nu - 1$ durch $F(z)$ teilbar ist. Betrachtet man jetzt nur ganzzahlige Systeme und bezeichnet ein solches System als „ein uneigentliches zum Exponenten ν gehöriges Einheitssystem"; nennt man ferner speciell dasjenige System, für welches $F(z)$ genau der irreductible Teiler von $(z^\nu - 1)$ ist, „ein primitives Einheitssystem", so kann man das Hauptresultät der Untersuchung dahin formuliren, dass es diese primitiven Systeme sind, durch welche sich alle übrigen uneigentlichen Einheitssysteme in der einfachsten Weise darstellen lassen.

Wendet man diese Principien auf die Theorie der Substitutionen an, so ergiebt sich u. a. für die cyklischen Substitutionen eine bemerkenswerte Zerlegungsweise. Hn.

L. Kronecker. Algebraische Reduction der Scharen bilinearer Formen. Berl. Ber. 1890. 1225-1237.

Es sei

$$f = u\varphi + v\psi = \sum_{i=1,}^{r} \sum_{k=1}^{s} f_{ik} x_i y_k$$

eine Schar bilinearer Formen von $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ und $(y_1, y_2, \ldots, y_s)$. Dann sind alle Determinanten, welche man aus der rechteckigen Matrize

$$(f_{ik}) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, r \\ k = 1, \ldots, s \end{pmatrix}$$

der Coefficienten von f bilden kann, offenbar ganze homogene Formen der Unbestimmten u und v. Ist nun allgemein D_i der grösste gemeinsame Teiler aller Unterdeterminanten der i^{ten} Ord-

nung der Matrize (f_{ik}), so bilden die Teiler $D_1, D_2, D_3, \ldots$ eine Reihe homogener ganzer Formen, von denen jede ein Teiler der folgenden ist. Setzt man also allgemein $D_i = D_{i-1}\theta_i$, so erhält man auf rationalem Wege die folgende Zerlegung jener Formen D_i:

$$D_i = \theta_1 \theta_2 \ldots \theta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Ist nun die Matrize (f_{ik}) für unbestimmte u, v genau vom Range τ, d. h. ist θ_τ die letzte der Formen θ, welche nicht identisch verschwindet, so bleiben die τ ganzen homogenen Functionen von u, v

$$\theta_1(u, v), \ldots, \theta_\mu(u, v)$$

offenbar bei einer jeden linearen Transformation der Variabeln x_i, y_k ungeändert, sie bilden also für das Formenpaar $[\varphi, \psi]$ ein System von Invarianten.

Ist nun die Anzahl beider Variabeln dieselbe, etwa gleich r, und ist ferner die Determinante $|f_{ik}|$ der Formenschar nicht identisch Null, d. h. ist auch $\tau = r$, so ist, wie bereits in der Weierstrass'schen Abhandlung vom Jahre 1868 (Berl. Ber. 310-338, F. d. M. I. 54) nachgewiesen wurde, das oben aufgestellte Invariantensystem ein vollständiges, d. h. zwei Formenpaare $[\varphi, \psi]$ und $[\varphi', \psi']$ sind dann, und nur dann, simultan in einander transformirbar, wenn diese Invarianten für beide übereinstimmen.

Sind aber jene speciellen Voraussetzungen nicht erfüllt, so treten zu den oben aufgestellten Invarianten noch andere hinzu. Ist nämlich der Rang τ von (f_{ik}) kleiner als mindestens eine der Anzahlen r und s, so bestehen zwischen den r Ableitungen von f nach den Variabeln x_i genau $\varrho = r - \tau$ von einander unabhängige Relationen, und ebenso zwischen den s Ableitungen nach den y_k genau $\sigma = s - \tau$ von einander unabhängige lineare Relationen, deren Coefficienten ganze homogene Formen von (u, v) sind. Denkt man sich nun beide Arten von Relationen so gewählt, dass ihre Dimensionen in Bezug auf (u, v), welche beziehlich durch:

$$m_1, m_2, \ldots, m_\varrho \quad \text{und} \quad \overline{m}_1, \overline{m}_2, \ldots, \overline{m}_\sigma$$

bezeichnet werden sollen, möglichst klein sind, so bleiben offen-

bar auch diese $\varrho+\sigma$ ganzen Zahlen bei jeder simultanen Transformation des Formenpaares ungeändert.

Der grundlegende Nachweis dafür, dass die Gleichheit der hier gefundenen Invarianten

$$(J) \qquad \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\tau; \quad \begin{array}{c} m_1, m_2, \ldots, m_\varrho \\ \overline{m_1}, \overline{m_2}, \ldots, \overline{m_\sigma} \end{array}$$

für die Aequivalenz zweier Formenpaare nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist, wird nun dadurch geführt, dass ein beliebiges Formenpaar $[\varphi, \psi]$ in ein „reducirtes" Paar $[\Phi, \Psi]$ transformirt wird, welches durch die in dem Schema (J) enthaltenen Invarianten eindeutig bestimmt ist; denn hieraus folgt ja unmittelbar, dass die Reduction zweier Formensysteme $[\varphi, \psi]$ und $[\varphi', \psi']$, denen ein und dasselbe Invariantensystem (J) angehört, auf dasselbe reducirte Formenpaar $[\Phi, \Psi]$ führen muss.

Aus der in den beiden ersten Abschnitten dieser Arbeit durchgeführten Reduction der Formenschar $f = u\varphi + v\psi$ ergiebt sich nun, dass jede Formenschar f stets und nur auf eine Weise in eine „reducirte Schar" von der Form:

$$\sum_{\mu,\nu} \{(U + w^{(\nu)} V)\, \Phi_\mu^{(\nu)} + V \Psi_\mu^{(\nu)}\} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots)$$

transformirt werden kann, in der die elementaren Formen $\Phi_\mu^{(\nu)}$ und $\Psi_\mu^{(\nu)}$ durch die Gleichungen:

$$\Phi_\mu^{(\nu)} = \sum_{\varkappa,\lambda} X_{\varkappa\mu}^{(\nu)} Y_{\lambda\mu}^{(\nu)} \qquad (\varkappa + \lambda = e_\mu^{(\nu)} - 1,\ \varkappa = 0, 1, \ldots, e_\mu^{(\nu)} - 1),$$

$$\Psi_\mu^{(\nu)} = \sum_{\varkappa,\lambda} X_{\varkappa\mu}^{(\nu)} Y_{\lambda\mu}^{(\nu)} \qquad (\varkappa + \lambda = e_\mu^{(\nu)} - 2,\ \varkappa = 0, 1, \ldots, e_\mu^{(\nu)} - 2)$$

definirt sind, und $\Psi_\mu^{(\nu)}$ gleich Null zu setzen ist, sobald $e_\mu^{(\nu)}$ den Wert Eins hat.

Aus den Untersuchungen der folgenden Abschnitte ergiebt sich nun, dass die reducirte Schar durch die Invarianten (J) von f vollständig bestimmt ist. Ist nämlich $(uv^{(\nu)} - vu^{(\nu)})$ irgend einer der Linearfactoren der Functionen $\theta_1, \ldots, \theta_\tau$, und giebt die Zahl $n_\mu^{(\nu)}$ an, wie oft er in der Function θ_μ enthalten ist, so entsprechen diesem Factor genau τ von den oben angegebenen Elementarscharen $[\Phi_\mu^{(\nu)}, \Psi_\mu^{(\nu)}]$, deren Variabelnzahlen beziehlich gleich $n_\mu^{(\nu)}$ sind, und für die $w^{(\nu)}$ mit dem Verhältnis $\frac{u^{(\nu)}}{v^{(\nu)}}$ in sehr

einfacher Weise zusammenhängt. Zu diesen treten aber, entsprechend den Invarianten m bezw. $\overline{m}$, noch andere Elementarscharen hinzu, in denen sämtliche Variabeln X bezw. Y, deren erster unterer Index gleich $e_\mu^{(\nu)}-1$ ist, sowie auch das zugehörige $w^{(\nu)}$, gleich Null sind. Die Anzahl der in ihnen vorkommenden Variabeln X, Y ist gleich $(2m_\varkappa+1)$ oder $(2\overline{m}_\lambda+1)$, falls jene Invarianten von Null verschieden sind. Endlich entsprechen den verschwindenden Zahlen m und $\overline{m}$ überhaupt keine Elementarscharen. Damit ist der Beweis vollständig erbracht, dass die Functionen (J) in der That ein vollständiges Invariantensystem für das Formenpaar $[\varphi, \psi]$ bilden. Die Invarianten einer Formenschar $(u\varphi+v\psi)$ können, wie im letzten Abschnitt der Arbeit dargelegt wird, aus den in (J) aufgestellten Invarianten des Formenpaares $[\varphi, \psi]$ unmittelbar hergeleitet werden; denn dem Begriffe der Schar gemäss hat man nur noch von dem Unterschiede zweier Formenpaare

$$[\varphi, \psi] \quad \text{und} \quad [a\varphi+b\psi,\ c\varphi+d\psi]$$

zu abstrahiren, wenn (a, b, c, d) irgend welche Constanten bedeuten, für die $ad-bc$ nicht verschwindet.

Während somit die Frage, ob zwei Formenpaare $[\varphi, \psi]$ und $[\varphi', \psi']$ äquivalent sind, nur die Bildung der Invarianten (J) erfordert, also auf rationalem Wege gelöst werden kann, setzt die hier gegebene Zurückführung beider Paare auf dieselbe Reducirte, und die hieraus sich ergebende simultane Transformation des einen Paares in das andere mit Notwendigkeit die Kenntnis der Wurzeln von $\theta_\tau = 0$ voraus. Es ist nun L. Kronecker gelungen, auch diese Untersuchung auf rationalem Wege durchzuführen; jedoch war es ihm nicht mehr vergönnt, auch diese selbst zu veröffentlichen. Hn.

L. Kronecker. Algebraische Reduction der Scharen quadratischer Formen. Berl. Ber. 1890. 1375-1388; 1891. 9-17, 33-44.

Die Besprechung dieser Arbeit wird im nächsten Jahrgange erfolgen.

W. Weiss. Ueber eine algebraische Theorie der Scharen nicht adjungirter Berührungscurven. (Aus: Sitzungsber. d. Kais. Ak. d. Wiss. in Wien. Math.-nat. Cl. IC. Abt. 2a.) Diss. Erlangen. 34 S. 8°.

Capitel 3.

Elimination und Substitution, Determinanten, symmetrische Functionen.

G. Fouret. Démonstration et application d'un théorème de Liouville sur l'élimination. Nouv. Ann. (3) IX. 258-288.

„Eliminirt man aus 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten vom m^{ten} resp. n^{ten} Grade die eine der beiden Unbekannten, so ist in der Resultante vom $m.n^{ten}$ Grade der Coefficient der Glieder vom $(m.n-i)^{ten}$ Grade nur abhängig von den Coefficienten der Glieder m^{ten} bis $(m-i)^{ten}$ Grades in der ersten Gleichung und denen der Glieder n^{ten} bis $(n-i)^{ten}$ Grades in der zweiten Gleichung." Dieser von Liouville stammende Satz wird auf einfache Art bewiesen und sodann benutzt, um fast ohne Rechnung eine Reihe interessanter, allerdings zum Teil schon bekannter geometrischer Sätze herzuleiten, von denen wir nur zwei anführen wollen:

1) (Von Chasles zuerst ausgesprochen): „Legt man an eine ebene, algebraische Curve alle Tangenten, die einer bestimmten Richtung parallel sind, so ist das Centrum der mittleren Entfernungen der Berührungspunkte ein fester, von der gewählten Richtung unabhängiger Punkt."

2) (Von Humbert herrührend): „Wenn eine ebene algebraische Curve beliebigen Grades keinen parabolischen Zweig besitzt, so ist der geometrische Ort für einen Punkt derselben Ebene, welcher

die Eigenschaft hat, dass die Summe der Quadrate der von ihm an die Curve gezogenen Normalen constant ist, ein Kegelschnitt."

Der Liouville'sche Satz lässt sich ohne weiteres auf ein System von beliebig vielen algebraischen Gleichungen mit der gleichen Anzahl von Variabeln ausdehnen, und liefert somit die Möglichkeit, auch die analogen Sätze für Flächen zu erschliessen.

F.

W. Kretkowski. Beitrag zur Eliminationstheorie.

Prace mat.-fiz. II. 21-32. (Polnisch.)

Es seien

$$A_m = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m, \quad B_n = b_0 + b_1 z + \cdots b_n z^n$$

zwei gegebene ganze Functionen. Man schreibe ihre Sylvester'sche Determinante auf und bilde aus ihr n neue Determinanten, indem man die Elemente der p^{ten} Verticalreihe ($p=1, 2, \dots, n$) durch die Grössen

$$A_m z^{n-1}, \; A_m z^{n-2}, \; \dots, \; A_m z, \; A_m, \; B_n, \; \dots, \; B_n z^{m-2}, \; A_n z^m$$

ersetzt und dann die $p-1$ äusseren Ränder weglässt. Bezeichnet man diese Determinanten mit $S_{m+n-2(p-1)}$, ($p=1, 2, \dots, n$), so wird:

$$S_{m+n-2(p-1)} = A_m C_{m+n-2(p-1)} + B_n D_{m+n-2(p-1)} \quad (p=1, 2, 3, \dots, n),$$

wo C und D ganze Functionen von z resp. von Grade $n-p$ und $m-p$ sind. Es kann aber auch die Determinante $S_{m+n-2(p-1)}$ in der Form

$$S_{m+n-2(p-1)} = \sum_{r=0}^{r=p-1} E_{p,r} z^r$$

dargestellt werden, wo $E_{p,r}$ eine Determinante vom Grade $m+n-2(p-1)$ ist. Vergleicht man diese zwei Darstellungen mit einander, so gelangt man zu folgendem Resultat.

Die Bedingungen der Existenz eines grössten gemeinschaftlichen Teilers vom Grade s der gegebenen Functionen sind:

$$\begin{cases} 0 = E_{s,r}, & (r=0, 1, 2, \dots, s-1) \\ E_{s+1,s} \neq 0. \end{cases}$$

Die Gleichung

$$\sum_{r=0}^{r=s} E_{s+1} z^r = 0$$

giebt die s gemeinschaftlichen Wurzeln; die Gleichungen aber

$$D_{m+n-2(s-1)} = 0, \quad C_{m+n-2(s-1)} = 0$$

geben die übrigen Wurzeln der ersten und der zweiten Function.

Dn.

Fr. Meyer. Ueber Discriminanten und Resultanten von Singularitätengleichungen. II, III. Gött. Nachr. 366-375, 493-501.

„Unsere Kenntnisse von den Singularitäten auf Raumcurven reichen wohl so weit, dass wir, wenigstens in den einfacheren Fällen, die Art ihres Entstehens übersehen können. Insbesondere erlaubt die geometrische Anschauung, die verschiedenen Möglichkeiten des Zusammenrückens je zweier „einfacher" Singularitäten (d. i. solcher, die bei jeder Curve vorkommen) zu erschöpfen. — Indessen bleibt die innere Seite derartiger Vorgänge davon unberührt: erweist sich schon die geometrische Abzählung bei der Bestimmung der Anzahl von elementaren Singularitäten, welche in eine höhere eintreten, als unzureichend, so wird die verschiedenartige Geschwindigkeit, mit der die einzelnen singulären Punkte, Geraden, Ebenen coincidiren, gar nicht berücksichtigt.

Im folgenden wird ein erster Versuch in dieser Richtung gemacht, indem die einschlägigen Verhältnisse auf einer allgemeinen Ordnungscurve vom Geschlecht Null mit algebraischen Hülfsmitteln studirt werden".

In der ersten Arbeit werden die Singularitäten der Raumcurven R_n^3, in der zweiten die der allgemeinen Curven R_n^d behandelt, und zwar beschränkt sich der Verfasser auf die nächstliegende Erweiterung der bereits früher (Gött. N. 1888, F. d. M. XX. 155) von ihm untersuchten Singularitäten einer allgemeinen ebenen Ordnungscurve R_n^2 vom Geschlecht Null, nämlich auf die „Hyperosculationsebenen", die „Schmiegungsberührebenen" und die „Trefftangenten".

Wbg.

Fr. Meyer. Das Princip des Projicirens in der Eliminationstheorie. Naturf. Ges. Bremen. 9-11.

Askwith. On groups of substitutions that can be formed with eight letters. Quart. J. XXIV. 263-331.

Fortsetzung der F. d. M. XXI. 1889. 142 besprochenen Arbeit. Nach einigen Ergänzungen der dort mitgeteilten Resultate geht der Verfasser dazu über, die möglichen Gruppen der aus acht Buchstaben zu bildenden Substitutionen aufzustellen. Er findet 157 solcher Gruppen, deren jede Substitutionen enthält, welche alle Buchstaben versetzen. F.

A. Cayley. On the substitution groups for two, three, four, five, six, seven, and eight letters. Quart. J. XXV. 71-88.

Durch Einführung abkürzender Bezeichnungen gelingt es, die schon früher bekannten Substitutions-Gruppen aus 3, 4, 5 Buchstaben und die neuerdings von Herrn Askwith (vgl. F. d. M. XXI. 1889. 142 und das vorangehende Referat) gefundenen Gruppen von Substitutionen aus 6, 7, 8 Buchstaben in gedrängter Form darzustellen. Die Arbeit bricht bei den aus 7 Buchstaben zu bildenden Gruppen ab; hinsichtlich der aus 8 Buchstaben zusammengesetzten wird auf eine Fortsetzung verwiesen, aber schon bemerkt, dass die Anzahl der Gruppen nicht genau mit der von Herrn Askwith angegebenen übereinstimmt. F.

O. Bolza. On the theory of substitution-groups and its applications to algebraic equations. American J. XIII. 59-144.

Die Arbeit erhebt nicht den Anspruch, neue Resultate mitzuteilen; sie soll vielmehr eine Einführung in die Substitutionen-Theorie und die Galois'sche Theorie der algebraischen Gleichungen bilden und das Studium der grösseren Werke (Jordan, Netto, Serret) sowie der Originalabhandlungen (Abel, Galois, Kronecker, Klein) erleichtern. Die Darstellung ist klar und verständlich; die Sätze werden häufig nur an speciellen Fällen (Gleichungen dritten und vierten Grades) erläutert, während

bezüglich der allgemeinen und strengen Beweise auf die genannten Autoren verwiesen wird. Besonders schätzenswert sind die zahlreichen Litteraturangaben. F.

A. Del Re. Su alcuni gruppi completi contenuti nel gruppo Cremona ad un numero qualunque di variabili. Rom. Acc. L. Rend. (4) VI_2. 271-276.

Der Verfasser beschäftigt sich mit der Aufstellung einiger vollständiger n-facher Gruppen, welche in der Cremona'schen Gruppe mit $n+1$ homogenen Variabeln enthalten sind; diese Arbeit ist deshalb dankenswert, weil man noch nicht einmal für den Raum alle Cremona'schen Transformationen kennt.

Wbg.

Morrice. Note on a quaternary group of 51840 linear substitutions. Lond. M. S. Proc. XXI. 58-62.

Die Arbeit schliesst sich eng an die Abhandlungen von Witting (Diss. Dresden. 1887 und Math. Ann. XXIX) und Maschke (Math. Ann. XXXIII, F. d. M. XXI. 1889. 142) über diesen Gegenstand an. In dem ersten Teile giebt der Verfasser einige kurze Daten über die Transformation der hyperelliptischen Functionen vom Geschlecht 2 im Anschluss an die Resultate jener Abhandlungen. Im zweiten Teile betrachtet er drei bemerkenswerte Specialtransformationen, welche den Perioden einerseits und den Jacobi'schen Functionen andererseits gemeinsam sind. Wbg.

H. Burkhardt. Zur Theorie der Jacobi'schen Gleichungen 40. Grades, welche bei der Transformation 3. Ordnung der Thetafunctionen von zwei Veränderlichen auftreten. Gött. Nachr. 376-382.

Aus den 9 linear unabhängigen Jacobi'schen Functionen 3ter Ordnung von 2 Veränderlichen lassen sich 5 gerade Functionen Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 zusammensetzen; diese Functionen er-

fahren bei linearer Transformation der Perioden, welche die Charakteristik fest lässt, eine Gruppe G von 25920 linearen Substitutionen, welche aus folgenden 4 Substitutionen erzeugt werden kann:

$$\begin{aligned}
Y'_0 &= \delta(Y_0+2Y_1), & &= Y_0, = -Y_0, = Y_0,\\
Y'_1 &= \delta(Y_0-Y_1), & &= Y_1, = -Y_2, = \varepsilon Y_1,\\
Y'_2 &= \delta(Y_2+Y_3+Y_4), & &= Y_4, = -Y_1, = Y_2,\\
Y'_3 &= \delta(Y_2+\varepsilon Y_3+\varepsilon^2 Y_4), & &= Y_2, = -Y_3, = \varepsilon Y_3,\\
Y'_4 &= \delta(Y_2+\varepsilon^2 Y_3+\varepsilon Y_4), & &= Y_3, = -Y_4, = \varepsilon Y_4,
\end{aligned}$$

wo $\delta = -\frac{i}{\sqrt{3}}$ und $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ zu setzen ist. Der Verfasser untersucht zunächst gewisse Untergruppen dieser Gruppe G und deren Zusammensetzung und giebt dann das volle System der zugehörigen Invarianten an, d. h. die ganzen rationalen Functionen von Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, welche bei Anwendung aller Substitutionen der Gruppe ungeändert bleiben, und durch welche sich alle anderen solche Functionen in ganzer und rationaler Weise darstellen lassen. Dieses volle System besteht aus 6 Invarianten von den bezüglichen Graden 4, 6, 10, 12, 18, 45. Ht.

L. Bianchi. Sui gruppi di sostituzioni lineari a coefficienti interi complessi. Rom. Acc. L. Rend. (4) VI$_1$. 331-339.

Die Gruppen G der linearen Substitutionen einer Variable z

$$\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta},$$

mit der Determinante $\alpha\delta-\beta\gamma = 1$, in welcher die Coefficienten α, β, γ, δ alle ganzen, complexen, mit der vierten oder dritten Einheitswurzel i bez. ε gebildeten Zahlen durchlaufen, sind in der ganzen complexen z-Ebene uneigentlich discontinuirlich (Klein: Math. Ann. XXI. 141-182; Poincaré: Acta Math. III. 49-92). Der Verfasser untersucht die in diesen Gruppen enthaltenen Untergruppen mit endlichem Index, welche für das Studium der aus ihnen hervorgehenden Fuchs'schen Functionen und der für diese Functionen das Analogon der Modulargleichungen bildenden Gleichungen mit ihren Monodromie-Gruppen von Wichtigkeit sind.

Es wird zunächst gezeigt, dass jede Substitution der Gruppe G sich aus 3 Elementarsubstitutionen

$$T=\begin{pmatrix}0, & 1\\ -1, & 0\end{pmatrix},\quad S=\begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad V=\begin{pmatrix}1, & i\\ 0, & 1\end{pmatrix}\quad\text{bez.}\quad\begin{pmatrix}1, & \varepsilon\\ 0, & 1\end{pmatrix}$$

zusammensetzen lässt. Sodann wird auf geometrischem Wege bewiesen, dass jede „Hermite'sche Form“ (d. i. eine binäre quadratische Form mit conjugirten Variabeln)

$$a\xi\xi_0+b\xi\eta_0+b_0\xi_0\eta+c\eta\eta_0$$

mit negativer Determinante bb_0-ac einer „reducirten“ Form äquivalent ist. Endlich werden diejenigen Untergruppen Γ von G betrachtet, welche durch die Congruenz

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}\pmod{\mu}$$

definirt sind, wo μ eine Primzahl in der complexen Zahlenebene bedeutet, und es wird eine mit G isomorphe Gruppe Δ mit einer endlichen Anzahl von Substitutionen aufgestellt, deren identischer Substitution in G die Untergruppe Γ entspricht. Wenn μ eine complexe Zahl ist, so unterscheidet sich die Gruppe Δ nicht von der gewöhnlichen Modulargruppe; wenn μ eine reale Primzahl q von der Form $4n+3$ ist, so ist Δ eine einfache Gruppe vom Grade $\frac{q^2(q^4-1)}{2}$, zweifach transitiv über q^2+1 Elemente, welche in dem besonderen Falle $q=3$ holoedrisch isomorph mit der alternen Gruppe über 6 Elemente ist. Wbg.

L. Bianchi. Sopra una classe di gruppi Fuchsiani riducibili a gruppi modulari. Rom. Acc. L. Rend. (4) VI₁. 375-384.

Der Verfasser betrachtet die Gruppe derjenigen Substitutionen, welche die von Picard (Ann. de l'Éc. Norm. (3) I, F. d. M. XVI. 1884. 100) genauer untersuchte quadratische binäre Form mit conjugirten Veränderlichen und ganzen Coefficienten (die sogenannte Hermite'sche binäre Form)

$$axx_0+bxy_0+b_0x_0y+cyy_0$$

in sich selbst transformiren, für den Fall, dass die positive

Determinante der Form

$$\Delta = bb_0 - ac$$

sich in die Summe zweier Quadrate zerlegen lässt und keinen quadratischen Factor enthält. Die Klassenanzahl dieser Formen mit der Determinante Δ ist 2 oder 3, je nachdem Δ gerade oder ungerade ist, und die Gruppe der oben genannten „ähnlichen" Substitutionen der Form lässt sich in eine Modulargruppe (und zwar eine Untergruppe) transformiren. Die Untersuchung der Transformationsgruppe der „Hauptform"

$$xx_0 - \Delta yy_0$$

liefert gleichzeitig die Lösung der verallgemeinerten Pell'schen Gleichung (Picard, l. c. S. 53)

$$\alpha^2 + \beta^2 - \Delta(\gamma^2 + \delta^2) = 1$$

in ganzen Zahlen α, β, γ, δ. Wbg.

X. Stouff. Sur certains groupes fuchsiens formés avec les racines d'équations binômes. Toulouse Ann. IV P. 1-25.

Der Verfasser betrachtet Fuchs'sche Gruppen von Substitutionen, welche folgendermassen gebildet sind: Es sei j eine primitive Wurzel der Gleichung $x^p = 1$, wo p eine Primzahl bedeutet, S_j eine Substitution $\left(z, \frac{a_j z + b_j}{c_j z + d_j}\right)$; die Coefficienten haben folgende Zusammensetzung:

$$\begin{cases} a_j = \sum_{h=1}^{\frac{p-1}{2}} \alpha_h (j^h + j^{-h}), \\ b_j = \sum_{h=1}^{\frac{p-1}{2}} \beta_h (j^h + j^{-h}), \\ c_j = \sum_{h=1}^{\frac{p-1}{2}} \gamma_h (j^h + j^{-h}), \\ d_j = \sum_{h=1}^{\frac{p-1}{2}} \delta_h (j^h + j^{-h}); \end{cases}$$

darin sind α_h, β_h, γ_h, δ_h ganze Zahlen derart, dass die Determinante $a_j d_j - b_j c_j = 1$ ist. Zwischen den Coefficienten von S_j wer-

den noch einige weitere Relationen festgesetzt, um die Gruppe discontinuirlich zu machen. Diese Gruppen bieten insofern ein Interesse dar, als nur ein Teil derselben, wie der Verfasser im dritten Teile der Arbeit zeigt, sich auf Fuchs'sche Gruppen mit ganzen Coefficienten durch Transformation zurückführen lässt (vergl. Poincaré: Les fonctions fuchsiennes et l'arithmétique, Journ. de Math. (4) III. 1887), während unzählig viele andere durch keine Transformation in Gruppen mit ganzzahligen Substitutionen übergeführt werden können. Einem besonderen Studium werden die Gruppen

$$G_5:\quad p=5,\quad \Sigma_j=\left(z,-\frac{1}{z}\right)$$

und

$$G_7:\quad p=7,\quad \Sigma_j=\left(z,\frac{-1}{z+1}\right)$$

unterzogen.

Es mag noch bemerkt werden, dass, wenn die Substitutionen Σ_j rational, also von j unabhängig sein sollen, p nur die Werte 5, 7, 13 annehmen darf, weil die einzigen Perioden, welche eine Substitution mit ganzen Coefficienten besitzen kann, 2, 3, 4 und 6 sind. Wbg.

G. Torelli. Sulle sostituzioni lineari a coefficienti immaginarii. Annali del R. Ist. Tecnico di Napoli. VII. 14 S. (Sep.-Abdr.)

Das Referat darüber befindet sich in F. d. M. XXI. 1889. 145. Wbg.

H. Minkowski. Beweis, dass jede Discriminante eine von Eins verschiedene Zahl ist. Naturf. Ges. Bremen. 13.

A. J. N. Prange. Een en ander over nieuwere algebra naar aanleiding van een onlangs verschenen werk. Nieuw Archief. XVII. 158-175.

Zunächst wird auf J. Diekmann's Arbeit: „Anwendung der Determinanten und Elemente der neueren Algebra auf dem Ge-

biete der niedern Mathematik" hingewiesen und dabei bemerkt, dass es erwünscht wäre, die Determinantenrechnung bei Gymnasien und Realschulen einzuführen. Die weiter behandelten rein wissenschaftlichen Gegenstände sind: 1) die Lösung irrationaler Gleichungen, 2) das Verwandeln von algebraischen Ausdrücken in Determinantenform, 3) die Lösung der biquadratischen Gleichungen.

Schliesslich folgen einige Gedanken über die Natur der Anwendung der Determinanten in verschiedenen mathematischen Gebieten. G.

L. Kronecker. Reduction der Systeme von n^2 ganzzahligen Elementen. J. für Math. CVII. 135-136.

Jedes System von n^2 ganzzahligen Elementen kann durch eine Reihe elementarer Transformationen (d. h. Vertauschung zweier Parallelreihen mit Vorzeichenänderung der einen und Addition einer Reihe zu einer Parallelreihe) auf ein sogenanntes Diagonalsystem, d. h. ein solches reducirt werden, in welchem alle Glieder ausserhalb der Diagonale gleich Null sind, und in dem jedes Diagonalglied ein Teiler aller folgenden ist.

Der Beweis dieses für viele Anwendungen wichtigen Satzes beruht auf der Möglichkeit, das erste Element des Systems durch elementare Transformationen so lange zu verkleinern, bis es gleich dem grössten gemeinsamen Teiler aller n^2 Elemente geworden ist. Alsdann kann man alle übrigen Elemente der ersten Zeile und Colonne zu Null machen. Behandelt man nun das übrig gebliebene System von $(n-1)^2$ Elementen ebenso und fährt so fort, so gelangt man schliesslich zu dem gesuchten Elementarsystem.

Da die Producte der m ersten Diagonalglieder für jedes m gleich dem grössten gemeinsamen Teiler der Unterdeterminanten m^{ter} Ordnung sind, so sind sie und somit auch jene Glieder selbst Invarianten; für jedes ganzzahlige System existirt demnach ein und nur ein reducirtes. Hn.

E. GUBLER. Ueber eine Determinante, welche bei der Berechnung symmetrischer Functionen vorkommt. Wolf Z. XXXV. 79-82.

Als Beispiel für die Anwendung der Waring'schen Methode berechnet Serret in seinem Handbuch der höheren Algebra den Wert einer symmetrischen Function der Wurzeln einer algebraischen Gleichung für den Fall, dass jedes Glied der Function μ Wurzeln im Quadrat und ν in der ersten Potenz enthält. Die Rechnung erfordert die Bestimmung von μ Zahlen λ, welche linearen Gleichungen genügen. Serret verschafft sich durch eine recurrirende Darstellung lineare Gleichungen, deren jede nur zwei aufeinander folgende Unbekannte enthält, und aus welchen sich letztere leicht bestimmen lassen. Der Verfasser der vorliegenden Note löst die linearen Gleichungen direct durch Determinanten und zeigt, dass die einfachen Werte der auftretenden Determinanten μ^{ter} Ordnung durch gewisse Umformungen in eleganter Weise gefunden werden können. F.

E. D'OVIDIO. Altra addizione alla nota „Sui determinanti di determinanti". Torino Atti XXVI. 131-133.

Der Verfasser teilt zur Vervollständigung einiger Noten von Barbier über diesen Gegenstand (C. R. XCVI. 1845, XCVII. 82; F. d. M. XV. 1883. 122) mehrere teils bereits von Cauchy, teils von ihm selbst („Sui determinanti di determinanti", Torino Atti XI. 349-356) sowie von Spottiswoode („Elementary theorems relating to determinants," J. für Math. LI) und Franke (J. für Math. LXI. 350: „Ueber Determinanten aus Unterdeterminanten") bewiesene Theoreme mit, welche die von Barbier mitgeteilten „Beispiele" als Specialfälle enthalten. — Ebenso hat Picquet zwei Abhandlungen über diesen Gegenstand veröffentlicht: „Sur les déterminants dont les éléments sont tous les mineurs possibles d'ordre donné d'un déterminant donné" (C. R. LXXXVI. 310-312, 1878) und „Analyse combinatoire des déterminants" (J. de l'Éc. Pol. Cah. XLV. 201-244, 1878), ohne die

erwähnten Autoren anzuführen. Vergl. übrigens Baltzer, Determinanten (1881) § 7 S. 62-69. Wbg.

A. Tissot. Sur la multiplication des déterminants. J. de Math. spéc. (3) IV. 193-194.

Ein Verfahren zur Herleitung des Multiplicationssatzes, das an drei homogenen linearen Gleichungen erläutert wird.

Lp.

E. Pomey. Sur un théorème de déterminants. J. de Math. spéc. (3) IV. 3-4.

Zur Ableitung des Multiplicationssatzes. Lp.

Th. Muir. On some hitherto unproved theorems in determinants. Edinb. Proc. XVIII. 73-82.

Die meisten dieser Sätze stehen im Eingange eines Aufsatzes von Herrn Cayley: „Chapters on the analytical geometry of n dimensions“, Cambr. Math. Journ. IV (1845); Werke II. Sie bilden nämlich das Capitel I jener Schrift. Cly. (Lp.)

L. Bénezech. Application des déterminants à la géométrie. J. de Math. élém. (3) IV. 218-223.

Determinantenrelationen zwischen den Quadraten der Abstände von Punkten, von welchen eine Gruppe auf einer Kugelfläche liegt. Lp.

W. J. C. Sharp, S. Sircom. Solution of question 9776. Ed. Times LIII. 55-56.

Sind p, q, r die Lote aus den Ecken eines Dreiecks auf eine beliebige Tangente des Umkreises, so ist

$$\begin{vmatrix} 0 & p & q & r \\ p & 0 & c^2 & b^2 \\ q & c^2 & 0 & a^2 \\ r & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Eine ähnliche Relation gilt im Raume von n Dimensionen. Lp.

Helge von Koch. Bidrag till teorin för oändliga determinanter. Stockh. Öfv. 411-431.

Enthält Convergenzbedingungen für unendliche Determinanten und gewisse andere Sätze betreffs derselben, welche bekannten Sätzen in der Theorie der endlichen Determinanten entsprechen. Darauf folgt eine Anwendung auf lineare Gleichungssysteme.

Bdn.

W. J. C. Sharp. On simplicissima in space of n dimensions. (Third paper.) Lond. M. S. Proc. XXI. 316-350.

Fortsetzung zweier früheren Arbeiten über denselben Gegenstand: Siehe F. d. M. XIX. 1887. 837 und XX. 1888. 1290; vgl. auch XIX. 1887. 150. Wbg.

N. N. Volume du tétraèdre en axes obliques. J. de Math. spéc. (3) IV. 127-130.

H. W. Segar. Some inequalities. Mess. (2) XIX. 189-192, XX. 54-59.

Bezeichnen a, b, c solche positiven Zahlen, dass $a>b>c$, oder $b>c>a$, oder $c>a>b$, und sind m und n solche positiven Grössen, dass $m>n$, so ist

$$\text{(I)} \qquad a^m b^n + b^m c^n + c^m a^n > a^n b^m + b^n c^m + c^n a^m,$$

$$\text{(II)} \qquad \left(\frac{b}{a}\right)^{b^m a^n} \left(\frac{c}{b}\right)^{c^m b^n} \left(\frac{a}{c}\right)^{a^m c^n} > 1. \qquad (m \gtreqless n).$$

Die Ausdehnung der Formel I auf mehr als drei Zahlen bildet den Gegenstand der zweiten Note, in welcher die bezüglichen Determinanten-Relationen genauer untersucht werden. Lp.

F. Mertens. Ueber ganze Functionen eines Systems von mn Veränderlichen, welche m Zeilen und n Colonnen bilden. Krak. Denkschr. XVII. 143-165. (Polnisch.)

Der Verfasser betrachtet eine ganze homogene Function θ der Elemente des Systems

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n}, \end{matrix}$$

welche die Elemente der ι^{ten} Zeile in der Ordnung l_ι enthält. Die Function θ ist also charakterisirt durch die Reihe der Zahlen $l_1, l_2, \dots, l_m$. Die Summe

$$\sum_{a,b,\dots,e} a_{p'a}a_{q'b}\dots a_{r'e} \frac{\partial^k\theta}{\partial a_{p,a}\partial a_{q,b}\dots\partial a_{r,e}},$$

wo jeder der Indices $a, b, \dots, e$ die Werte $1, 2, \dots, n$ annehmen kann und die Reihen $p\,q\dots r$, $p'\,q'\dots r'$ zwei verschiedene Combinationen ohne Wiederholung zur k^{ten} Klasse der Zahlen $1, 2, \dots, m$ sind, bezeichnet er mit

$$\binom{p'\,q'\dots r'}{p\;q\;\dots r}\theta$$

und nennt den Ausdruck

$$\binom{p'}{p}\theta = a_{p',1}\frac{\partial\theta}{\partial a_{p,1}} + a_{p',2}\frac{\partial\theta}{\partial a_{p,2}} + \dots + a_{p',n}\frac{\partial\theta}{\partial a_{p,n}}$$

für $p' \lessgtr p$ die Polare der Function θ. Die Operation

$$\binom{p'}{p} = a_{p',1}\frac{\partial}{\partial a_{p,1}} + a_{p',2}\frac{\partial}{\partial a_{p,2}} + \dots + a_{p',n}\frac{\partial}{\partial a_{p,n}}$$

nennt er „Polarenbildung“, und zwar ist dieselbe von der „ersten“ Gattung, wenn $p' < p$, von der „zweiten“, wenn $p' > p$.

Der Verfasser untersucht die Eigenschaften dieser Operation und gelangt zu einer allgemeinen Relation, mit deren Hülfe die Grösse

$$\binom{\lambda\,\mu\dots\tau}{1\,2\dots m}\theta,$$

wo $\lambda, \mu, \dots, \tau$ irgend eine Anordnung von $1, 2, \dots, m$ ist, als eine

lineare und homogene Function von θ und ihren Polaren dargestellt werden kann. Aus dieser Relation erhält er eine allgemeine Formel

$$N\theta = \Sigma c\pi_1\theta + \sum_{a,b,..,e} A_{a,b,..,e} \frac{\partial^m\theta}{\partial a_{1,a}\partial a_{2,b} \ldots a_{m,e}}.$$

N ist eine ganze Zahl, die c sind Rationalzahlen, π_1 ist das Symbol mehrerer der Reihe nach ausgeführter Polarenbildungen. $A_{a,b,..,e}$ ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{1,a} & a_{1,b} & \ldots & a_{1,e} \\ a_{2,a} & a_{2,b} & \ldots & a_{2,e} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,a} & a_{m,b} & \ldots & a_{m,e} \end{vmatrix}.$$

Aus dem durch diese Formel ausgedrückten Satze folgt, dass jede ganze m-fach homogene Function des gegebenen Systems im Falle $m > n$ als Summe von Polaren von Functionen darstellbar ist, welche nur Variabeln der n ersten Zeilen des Systems enthalten, und im Falle $m \leqq n$ als Summe von Polaren von Functionen, welche die Variabeln der m^{ten} Zeile in Determinanten m^{ter} Ordnung des Systems enthalten.

Aus dieser Theorie ergeben sich für die Covariantentheorie wichtige Formeln, ferner die Bedingungen für die Teilbarkeit einer ganzen Function durch eine ganze positive Potenz einer Determinante und auch die Darstellung der Function θ (wenn $m < n$) in der Form

$$\theta = QP + Q'P' + \cdots,$$

wo P, P', ... Determinanten m^{ter} Ordnung des gegebenen Systems sind. Dn.

Auric. Formule de Waring. Nouv. Ann. (3) IX. 561-564.

Darstellung einer symmetrischen Function als ganze Function der Summen gleicher Potenzen. F.

P. A. MacMahon. Memoir on the symmetric functions of the roots of equations. Lond. Phil. Trans. CLXXXI. 481-536.

Der Verfasser bemerkt, dass die Theorie der symmetrischen

Functionen eines einzigen Systems von Grössen in einer sehr grossen Anzahl von Abhandlungen durchforscht worden sei; was aber die analoge Theorie für mehrere Systeme von Grössen betreffe, so seien nur die ersten Umrisse einer Theorie in den bezüglichen Abhandlungen von Schläfli und Cayley gegeben. In der Theorie der symmetrischen Functionen eines einzigen Systems von Grössen werden diese letzteren als die Wurzeln einer Gleichung angesehen, und da es bei einer allgemeinen Erörterung passend und vorteilhaft ist, ihre Anzahl unbeschränkt zu lassen, so wird die fundamentale Beziehung in der Gestalt angenommen:

$$(1+\alpha_1 x)(1+\alpha_2 x)\ldots = 1+a_1 x+a_2 x^2+\cdots$$
$$= 1+(1)x+(2)x^2+\cdots.$$

Statt jedoch ein Product binomischer linearer Functionen einer Veränderlichen, wie eben, anzunehmen, können wir bei m Systemen von Grössen ein Product nicht homogener linearer Functionen betrachten von der Gestalt $1+\alpha_{s1}x_1+\alpha_{s2}x_2+\cdots+\alpha_{sm}x_m$. Als bezeichnend für diesen allgemeinen Fall genügt es, bloss den Fall zweier Grössensysteme ins Auge zu fassen, und der Verfasser betrachtet demgemäss die beiden Grössensysteme:

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n,$$
$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_n,$$

in denen das n jedes Systems als unendlich betrachtet wird. Die fundamentale Relation ist demnach:

$$(1+\alpha_1 x+\beta_1 y)(1+\alpha_2 x+\beta_2 y)\ldots(1+\alpha_s x+\beta_s y)\ldots$$
$$= 1+a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{12}y^2+\cdots+a_{pq}x^p y^q+\cdots$$
$$= 1+\Sigma\alpha_1 x+\Sigma\beta_1 y+\Sigma\alpha_1\alpha_2 x^2+\Sigma\alpha_1\beta_2 xy+\Sigma\beta_1\beta_2 y^2+\cdots.$$

Die allgemeinste symmetrische zu betrachtende Function ist

$$\Sigma\alpha_1^{p_1}\beta_1^{q_1}\alpha_2^{p_2}\beta_2^{q_2}\alpha_3^{p_3}\beta_3^{q_3}\ldots,$$

symbolisch dargestellt als

$$(\overline{p_1q_1}\ \overline{p_2q_2}\ \overline{p_3q_3}\cdots),$$

wobei die Summation bezüglich der Ausdrücke durch Permutation der n Zeiger $1, 2, 3, \ldots, n$ bewirkt wird. Das Gewicht (weight) der Function muss als zweiteilig angesehen werden;

es besteht aus den beiden Zahlen

$$\Sigma p = p_1 + p_2 + \cdots, \quad \Sigma q = q_1 + q_2 + \cdots,$$

und der Verfasser spricht demgemäss von dem Zwiegewichte (biweight) Σp, Σq.

Die Summe $\Sigma p + \Sigma q$ ist das Gesamtgewicht oder kurz das Gewicht; mit einer beliebigen Zahl w ist ein Gewicht w und ein Zwiegewicht verknüpft, welches jeder Zusammensetzung von w mittels zweier Zahlen, mit Einschluss von Null als einer Zahl, entspricht. In einer solchen Zusammensetzung ist die Folge der Teile zu beachten; so sind 21 und 12 verschiedene Zusammensetzungen von 3.

Wir haben dann Teilungen der zweiteiligen Zahl, welche das Zwiegewicht bezeichnet. So ist $(\overline{p_1q_1}\ \overline{p_2q_2}\ \overline{p_3q_3}\ldots)$ eine Teilung des Zwiegewichts Σp, Σq, während die Teile, welche selber zweiteilig sind und welche daher Zwieteile (biparts) genannt werden, $\overline{p_1q_1}$, $\overline{p_2q_2}$, ... sind. Gemäss dem üblichen Gebrauche werden Wiederholungen von Zwieteilungen durch Potenzsymbole, wie $(\overline{p_1q_1}^2) \equiv (\overline{p_1q_1}\ \overline{p_1q_1})$, bezeichnet.

$$(1+\alpha_1 x+\beta_1 y)(1+\alpha_2 x+\beta_2 y)\ldots$$
$$= 1 + (\overline{10})x + (\overline{01})y + \cdots + (\overline{10}^2)x^2 + (\overline{10}^2, 01)x^2y + (\overline{10}, \overline{01}^2)xy^2 + (\overline{01}^3)y^3 + \cdots.$$

Hierbei bedeuten die Symbole der rechten Seite gewisse symmetrische Functionen von $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$, die „einfach-unitär" (single-unitary) genannt werden können. Dieselben sind fundamental, insofern als sie dazu dienen, alle andern rationalen ganzen Functionen auszudrücken, und das allgemeine Problem besteht darin, solche anderen rationalen ganzen symmetrischen Functionen oder aber die allgemeine Function $(\overline{p_1q_1}^{\pi_1}\ \overline{p_2q_2}^{\pi_2}\ \overline{p_3q_3}^{\pi_3}\ldots)$ in Gliedern mit diesen einfach-unitären symmetrischen Functionen auszudrücken. Die Arbeit enthält mannigfaltige interessante Untersuchungen und insbesondere Probetafeln symmetrischer Functionen für die Teilungen der einzelnen Zwiegewichte 11, 21, 31 und 22. Cly. (Lp.)

H. F. Baker. On Euler's Φ-function*). Lond. M. S. Proc. XXI. 30-32.

Der Verfasser beweist zunächst folgendes Theorem über die Umkehrung endlicher Reihen: Wenn $f(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ irgend eine symmetrische Function der in beliebiger Anzahl vorhandenen Argumente $a_1, a_2, \ldots, a_k$ und

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_k) = f(a_1, a_2, \ldots, a_k) + \sum_1 f(a_2, a_3, \ldots, a_k) + \sum_2 f(a_3, a_4, \ldots, a_k) + \cdots + \sum_{n-1} f(a_1) + f(0)$$

ist, worin $\sum$ eine auf jede Auswahl von $n-r$ der Argumente $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sich erstreckende Summation bedeutet, so ist umgekehrt

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_n) - \sum_1 F(a_2, \ldots, a_n) + \sum_2 F(a_3, \ldots, a_n) - \cdots + (-1)^{n-1} \sum_{n-1} F(a_1) + (-1)^n F(0) = f(a_1, a_2, \ldots, a_k).$$

Durch Specialisirung von $f(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ ergiebt sich hieraus erstens der von Herrn R. W. D. Christie (Lond. M. S. Proc. XX, F. d. M. XXI. 1889. 200) aufgestellte Satz:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^m - \sum_1 (a_2 + a_3 + \cdots + a_n)^m + \sum_2 (a_3 + a_4 + \cdots a_n)^m - \cdots + (-1)^{m-1} \cdot \sum_{n-1} a_1^m = 0, \text{ wenn } m < n$$

(diese Summe ist gleich $n! a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$, wenn $m = n$); zweitens die bekannte zahlentheoretische Formel $N = \sum \varphi(d)$ und damit der von Dedekind im J. für Math. LIV. 25 gegebene Wert für $\varphi(N)$. — In Betreff der letzteren vergl. Bachmann: „Die Lehre von der Kreisteilung und ihre Beziehungen zur Zahlentheorie" (1872), S. 10 u. 11. Wbg.

E. Catalan. Conséquence d'un théorème d'algèbre. Belg. Bull. (3) XIX. 742-746.

Sind $a, b, \ldots, l$ ungleiche Grössen, so ist die Summe

---

*) Euler gebraucht $\pi(n)$, nicht $\varphi(n)$. (Opera arithmetica, Fuss, Petropoli 1849, II. p. 128.)

$$\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a-c}+\cdots+\frac{1}{a-l}\right)\frac{1}{(a-b)^2(a-c)^2\ldots(a-l)^2}$$
$$+\left(\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}+\cdots+\frac{1}{b-l}\right)\frac{1}{(b-a)^2(b-c)^2\ldots(b-l)^2}$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{l-a}+\frac{1}{l-b}+\cdots+\frac{1}{l-k}\right)\frac{1}{(l-a)^2(l-b)^2\ldots(l-k)^2}$$

gleich Null. Mn.

H. Taber. On the theory of matrices. American J. XII. 337-396.

Der Verfasser giebt eine systematische Herleitung der von Cayley, Sylvester u. a. gefundenen Hauptsätze der Matrizentheorie. Eingehend werden dann die Wurzeln der Matrizen 0 und 1 behandelt. Zum Schluss werden einige Relationen abgeleitet, die eine Verallgemeinerung von Sätzen der Quaternionenlehre enthalten. Kü.

H. Taber. On certain identities in the theory of matrices. American J. XIII. 159-172.

Anknüpfend an eine Arbeit in Bd. XII desselben Journals (vgl. das vorangehende Referat) verallgemeinert Verfasser einige Sätze der Quaternionentheorie mit Hülfe der Matrizen. Die Betrachtung beschränkt sich auf Matrizen dritter Ordnung. Kü.

Dritter Abschnitt.

Niedere und höhere Arithmetik.

Capitel 1.

Niedere Arithmetik.

O. Reichel. Die Grundlagen der Arithmetik unter Einführung formaler Zahlbegriffe. Hülfsbuch für den Unterricht. Teil II. Die irrationalen Zahlen. **Berlin. Haude & Spener. 43 S. 8°.**

Der Teil I erschien im Jahre 1886 (siehe F. d. M. XVIII. 1886. 122). Das Büchlein schliesst sich den Capiteln VII und VIII des ersten Teiles von Stolz' Vorlesungen über allgemeine Arithmetik dem Wesen nach an. Es möge zur besseren Charakterisirung desselben die Definition der irrationalen Zahl (S. 17) angeführt werden: „Eine Irrationalzahl ist die äusserlich hergestellte Verbindung des Zeichens lim. mit dem Zeichen $f(n)$, wenn $f(n)$ eine Function bedeutet, und für jede natürliche Zahl k die Gleichung

$$\lim_{n=\infty}(f(n+k)-f(n))=0$$

erfüllt ist; wenn es aber dennoch keine ganze oder gebrochene Zahl giebt, der die Function bei wachsendem n sich näherte."

Vi.

L. Kambly. Die Elementar-Mathematik für den Schulunterricht bearbeitet. I. Arithmetik und Algebra. Für Realgymnasien etc. neu bearbeitet von H. Langguth. 32. Aufl. (Erste Auflage der Neubearbeitung.) Breslau. F. Hirt. 214 S. 8°.

Die ersten 7 Abschnitte geben den Inhalt der früheren Auflagen in erweiterter und verbesserter Form, sie sind für das Gymnasium bestimmt und ausreichend, nach den neuen Lehrplänen vielleicht schon zu weitgehend (Kettenbrüche u. a.). Von dem Bearbeiter neu hinzugefügt für die Zwecke der Realanstalten sind 3 Abschnitte über die figurirten Zahlen und arithmetische Reihen höherer Ordnung, die Gleichungen des 3ten und 4ten Grades, die unendlichen Reihen und die Lehre von dem Maximum und Minimum der Functionen. Uebungsaufgaben fehlen, werden aber als besondere Sammlung in Aussicht gestellt. Eine Zusammenstellung der behandelten Formeln am Schlusse soll Schülern und Lehrern den Gebrauch des Buches erleichtern.

Lg.

M. Focke und M. Krass. Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik nebst einer Aufgaben-Sammlung. Münster. Coppenrath. VI + 228 S. 8°.

Das Lehrbuch, welches in fünfter Auflage erscheint, umfasst die Algebra, so weit sie Gegenstand des Schulunterrichts ist. Die beigefügte Aufgabensammlung bietet Beispiele für alle Abschnitte des Lehrbuchs. Von dem Capitel über die Gleichungen an sind die Resultate mitgeteilt.

F.

Fry. Das algebraische Rechnen für Secunda. Pr. Gymn. Strehlen. 22 S. 8°.

Kurze Zusammenstellung der wichtigsten Sätze (ohne Beweise) aus der elementaren Algebra nebst sich anschliessenden Aufgaben zur schriftlichen Bearbeitung.

F.

J. Grass. Die Gruppen-Zahlbilder und ihre Herstellung durch die Münchener Rechenmaschine. München. Kellerer. 32 S. 8°.

Beim allerersten Rechenunterrichte kommt es vor allem darauf an, dass die Zahl sowie das Rechnen den Kindern durch die Anschauung vermittelt wird. Darauf beruhen die bekannten Rechenmaschinen. Eine solche Maschine ist um so vollkommener, je schneller an derselben die einzelnen Einheiten unterschieden werden, ihre Anzahl erkannt wird. Liegen die Einheiten in einer einzigen Reihe, so wird schon bei dem Bilde für 4 die Auffassung erschwert. Deshalb wendet der Verfasser bei Herstellung der Zahlbilder 2 Horizontalreihen an. Die natürlichste Gruppe für die 4 ist die „Doppelzweiergruppe im Rechtecke", d. h. die Einheiten gruppirt wie die Ecken eines Quadrates. Bei der 5, 6, 7 wird aus einer zweiten „Vierergruppe" die 1 (oben) oder 2 (eins oben, eins unten) oder 3 (oben noch eins dazu) genommen, u. s. f. bis zur Zehn, die aus zwei Vierergruppen und einer Zweiergruppe besteht. Für 11 bis 20 werden andersfarbige Einer gewählt. Der Verfasser stellt die Gruppen-Zahlbilder zusammen, bei denen für jede Zahl ein bestimmtes Bild von stets gleicher Form erhalten wird, hebt ihre Vorzüge vor den bisher angewandten Zahlbildern hervor und beschreibt die von ihm construirte Rechenmaschine, durch welche die angegebenen Gruppen-Zahlbilder leicht hergestellt werden können. M.

H. Schellen. Methodisch geordnete Materialien für den Unterricht im theoretischen und praktischen Rechnen. I. Teil. 11. Aufl. bearb. von H. Lemkes. Münster. Coppenrath. XIV u. 312 S. 8°.

Neue Auflage des bekannten Handbuches für Lehrer zum Gebrauche beim Rechenunterricht an höheren Lehranstalten.

F.

F. Roese. 5000 Aufgaben nebst Resultaten aus der Bruchrechnung. Wismar. Hinstorff. 48 S. 12°. (Auch unter dem Titel: Arithmetisches Quellsalz für Freunde des Rechnens. 176 S. Taschenformat.)

Die 5000 Aufgaben aus der formalen Bruchrechnung sind zu Gruppen derart zusammengestellt, dass alle Aufgaben einer Gruppe (50) dasselbe Resultat ergeben. F.

Ch. Méray et Ch. Riquier. Sur quelques perfectionnements dont serait susceptible l'exposition de la théorie des quantités négatives. Nouv. Ann. (3) IX. 50-59.

Die vorliegende (einem demnächst erscheinenden Lehrbuch über die Infinitesimalrechnung entnommene) Einführung in die Theorie der negativen Zahlen legt das Hauptgewicht darauf, die Verwirrung zu vermeiden, die entsteht, wenn man schon im ersten Anfange die Qualitätszeichen $+$, $-$ der positiven resp. negativen Zahlen mit den Operationszeichen $+$, $-$ der Addition resp. Subtraction verwechselt. Es wird deshalb die Qualität zunächst durch besondere Zeichen ausgedrückt und im Laufe der Entwickelungen die Berechtigung nachgewiesen, die positiven und negativen Grössen in jedem Rechnungsausdrucke durch die entsprechenden absoluten Zahlen mit den vorgesetzten Operationszeichen $+$, $-$ ersetzen zu dürfen. F.

T. Fuortes. Sul numero delle divisioni nella ricerca del massimo comune divisore di due numeri. Besso Per. mat. V. 9-12.

Ist n die Anzahl der Teilungen, R_n die kleinere von den zwei angegebenen Zahlen, so wird der Minimalwert von R_n durch das n^{te} Glied der Reihe $1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ gegeben, deren jedes Glied die Summe der zwei vorhergehenden ist. Die Betrachtung dieser Reihe erlaubt es, einige von S. Gatti in einem Aufsatze von gleichem Titel (Besso Per. mat. IV. 100-104; F. d. M. XXI. 1889. 164) aufgestellte Sätze aufs neue zu beweisen; daneben

noch den folgenden: Ist n (>3) die kleinste Zahl, für welche 2^n gleich oder grösser ist als die kleinere der zwei vorgegebenen Zahlen, so ist die Anzahl der Teilungen höchstens $2n-2$. Es ist aber bekannt (siehe die in dem oben angeführten Referate citirte Arbeit von Colombier), dass diese Anzahl höchstens n beträgt. Vi.

F. J. STUDNIČKA. Ueber Frolov's Zahlengruppen, welche eine zweigradige Gleichheit bieten. Casop. XIX. 124. (Böhmisch.)

Enthält eine Darstellung der Eigentümlichkeit, dass nicht nur

$$\Sigma a_k = \Sigma b_k = \Sigma c_k = \cdots,$$

sondern auch

$$\Sigma a_k^2 = \Sigma b_k^2 = \Sigma c_k^2 = \cdots$$

Geltung hat, was nach M. Frolov „une égalité à deux degrés" bietet und symbolisch mit $\perp$ gekennzeichnet wird, so dass z. B. geschrieben wird:

$$2, 11, 15, 10 \perp 5, 16, 12, 5.$$ Std.

L. DA COSTA E ALMEIDA. Nota sobre a doctrina da proporcionalidade. Coimbra Inst. XXXIX.

Elementare Darstellung der Theorie der Irrationalzahlen; der Verf. definirt dieselben mit Hülfe von Reihen von der Gestalt:

$$n = \frac{n'}{i'} + \frac{n''}{i'i''} + \frac{n'''}{i'i''i'''} + \cdots.$$

Tx. (Lp.)

Weitere Litteratur.

LE P. FATON. Traité d'arithmétique théorique et pratique, en rapport avec les nouveaux programmes d'enseignement, terminé par une petite table de logarithmes. 11e éd. Paris. Gauthier-Villars et Fils. 12°.

F. Verhelst. Cours d'algèbre élémentaire. T. I: Le calcul algébrique. Les équations du premier degré. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

G. Antinori. Lezioni d'algebra elementare. Torino. Paravia.

E. Bonetti. Trattato completo d'aritmetica ragionata. Messina.

A. Bossi. Elementi di aritmetica ragionata. Napoli. Ferrara.

F. del Chissa. Elementi di aritmetica teorico-pratica ad uso delle scuole preparatorie, normali, tecniche e ginnasiali. Venezia. Ferrari [Ref. in Lugli Per. VI. 76-79].

G. Frizzo. Trattato di aritmetica elementare. Verona. Drucker e Tedeschi. VIII u. 352 S.

G. Garbieri. Elementi di aritmetica con numerosi esercizi e problemi. Padova. Sacchetto.

G. Ingrami. L'aritmetica pel ginnasio superiore. Bologna. Gamberini e Parmeggiani.

V. Murer. Nozioni di aritmetica pratica per il 1º e 2º corso elementare. Spezia. Tip. Matuella.

A. del Poggetto. Aritmetica per la scuola tecnica. Firenzi. Nannini-Chiesi.

S. Pincherle. Algebra elementare. Milano. Hoepli.

Ricotti. Nozioni di aritmetica razionale e di calcolo letterale esposte ad uso delle scuole tecniche (3º corso) giusta i programmi 5 nov. 1888.

U. Taboni. Trattato di aritmetica ragionata. Parte I. Pinerolo. Ferrero.

A. Biffignandi. Le principali proprietà delle grandezze proporzionali, novamente esposte. Atti e Rendiconti dell'Accademia di Scienze, Lettere ed Arti degli Zelanti di Acireale. II. 62-84.

E. Tiberi. Teorema generale sulle condizioni di divisibilità dei numeri e nuova dimostrazione del teorema di Pappo e di Pitagora. Arezzo. Cagliani.

Olbricht. Etwas Neues zur Lehre der bürgerlichen Rechnungsarten. Hoffmann Z. XXI. 497-498.

M. Schlögel. Unfolgerichtige Stellung des Wurzelzeichens. Hoffmann Z. XXI. 181-182.

Kewitsch. Gegen das Wurzelzeichen. Hoffmann Z. XXI. 416-417.

C. Isenkrahe. Noch einmal das Wurzelzeichen. Hoffmann Z. XXI. 505.

P. Altmann. Zur mathematischen Zeichensprache. (Falsches Aehnlichkeitszeichen.) Hoffmann Z. XXI. 507-508.

W. Adam. Lehrbuch der Buchstabenrechnung und Algebra mit zahlreichen Uebungsaufgaben. 1. Teil. 4. Aufl. Gera. Hofmann. VIII u. 251 S. 8°.

E. Bardey. Arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik. 6. Aufl. Leipzig. Teubner. X + 269 S. 8°.

A. Blind. Lehrbuch der Gleichungen des II. Grades (quadratische Gleichungen) mit 1 Unbekannten. Bearbeitet nach System Kleyer. Stuttgart. Jul. Maier. VIII + 497 S. Mit 53 Fig. 8°.

A. Brenner. 300 algebraische Aufgaben zur Lösung mittels einfacher Schlüsse, zunächst für Lehrerbildungsanstalten bearbeitet. 4. Aufl. Freising. Dr. Datterer. 48 S. 8°.

J. H. Kühl. Leitfaden der Arithmetik und Algebra. Für den Schul- und Selbstunterricht. I. Teil. Hamburg. Kriebel. VI + 305 S. 12°.

A. Pfenninger. Die Elemente der Arithmetik und Algebra für höhere Volksschulen, Seminarien, sowie zum Selbstunterricht. 2. Aufl. Zürich. Schulthess. VII + 132 S. 8°.

J. Schumacher. Zur Theorie der algebraischen Gleichungen. Leipzig. Deichert'sche Verlagsbuchhdlg. Nachf. XII + 137 S. 8°.

F. X. Steck und J. Bielmayr. Sammlung von arithmetischen Aufgaben in systematischer Ordnung. 10. Aufl. Kempten. Kösel'sche Buchhdlg. III + 136 S. 8°.

H. STAUDACHER. Lehrbuch der Grundrechnungsarten mit Buchstabengrössen (Elemente der Buchstabenrechnung), der Verhältnisse und Proportionen. Bearbeitet nach System Kleyer. Stuttgart. Jul. Maier. VIII + 252 S. 8°.

F. VILLICUS. Lehr- und Uebungsbuch der Arithmetik für Unter-Realschulen. 3. Teil für die III. Klasse. 3. Aufl. Wien. Pichler's Wittwe u. Sohn. IV + 146 S. 8°.

Capitel 2.

Zahlentheorie.

A. Allgemeines.

T.-J. STIELTJES. Sur la théorie des nombres. Toulouse Ann. IV. 1-103.

Behandelt in drei Capiteln die Teilbarkeit der Zahlen, die Congruenzen (S. 18-49) und die unbestimmten linearen Gleichungen. Das letzte Capitel bringt wesentlich Sätze von J. S. Smith.

Tn.

P. A. MACMAHON. The theory of perfect partitions of numbers and the compositions of multipartite numbers. Mess. (2) XX. 103-119.

Eine „vollkommene" Teilung (partition) einer Zahl ist eine solche, welche eine, und zwar nur eine, Teilung jeder kleineren Zahl enthält; so ist (4111) eine der vollkommenen Teilungen von 7. Des Verfassers Absicht in dem vorliegenden Aufsatze ist die Ermittelung des Gesetzes, nach welchem diese Teilungen in allen Fällen abgezählt werden können. Vor der Angriffnahme

des allgemeinen Falles der Abzählung löst er die Aufgabe für die besonderen Zahlen von der Form a^a-1, wenn a eine Primzahl ist. Es wird gezeigt, dass diese Aufgabe mit derjenigen der Abzählung der Zusammensetzungen (composition) von Zahlen zusammenfällt (Teilungen, bei denen auch die Ordnung des Vorkommens der Teile berücksichtigt wird, werden Zusammensetzungen genannt), und dass a^a-1 dieselbe Anzahl vollkommener Teilungen besitzt, wie die Zahl a Zusammensetzungen, nämlich 2^{a-1}. In dem allgemeinen Falle führt der Verfasser den Begriff der „vielteiligen" (multipartite) Zahlen ein und zeigt, dass die Zahl $a^a b^\beta c^\gamma \cdots - 1$ (wo a, b, c, ... Primzahlen sind) ebenso viele vollständige Teilungen besitzt, wie die vielteilige Zahl $(a\beta\gamma\ldots)$ Zusammensetzungen. Die Anzahl vollkommener Teilungen der Zahl $a^a b^\beta c^\gamma \cdots - 1$ hängt von der Auflösung des Ausdrucks

$$\frac{1-x^{a^a b^\beta c^\gamma\ldots}}{1-x}$$

in Factoren von der Form $\frac{1-x^q}{1-x^p}$ ab, wo p ein Divisor von q ist.

Glr. (Lp.)

A. Lugli. Un problema d'aritmetica. Besso. Per. mat. V. 15-17, 35-40.

Ist N das Product von n verschiedenen Primzahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, so fragt es sich, auf wie viele Weisen N in m Factoren aufgelöst werden kann. Die gesuchte Zahl ist:

$$\frac{1}{(m-1)!}\left\{ m^{n-1} - \binom{m-1}{1}(m-1)^{n-1} + \binom{m-1}{2}(m-2)^{n-1} - \cdots \right.$$
$$\left. \cdots - (-1)^{m-1}\binom{m-1}{m-2}2^{n-1} + \binom{m-1}{m-1}(-1)^{m-1}.1^{n-1} \right\}.$$

Ist dagegen $N = a_1^{a_1}.a_2^{a_2}\ldots a_n^{a_n}$, so giebt dieser Ausdruck die Anzahl der Zerlegungen von N in zwei relativ prime Factoren an.

Vi.

A. Martin, D. Biddle. Solution of question 3276. Ed. Times LII. 61.

Herr Martin hatte alle neunzifferigen Quadratzahlen verlangt, welche die Ziffern von 1 bis 9 je einmal enthalten. Hr. Biddle giebt ohne irgend welchen Text eine Tafel mit 29 solchen Zahlen.

Lp.

Éd. Lucas. Sur les différents systèmes de numération. Mathesis X. 243-244.

Auszug aus der Zahlentheorie des Verfassers. Mn.

A. Schwidtal. Die Darstellung aller Zahlen durch die Zahl 3. Pr. Gymn. Königshütte. 22 S.

Jede Zahl lässt sich als eine Summe von positiven und negativen Potenzen von 3 darstellen, so dass die einzelnen Glieder keine höheren Coefficienten als ± 1 haben sollen. — Elementare Behandlung für das Verständnis von Schülern.

Sn.

Th. Pépin. Sur la décomposition des grands nombres en facteurs premiers. Rom. Acc. P. d. N. L. XLIII. 163-191.

Es wird gezeigt, wie die Tafeln von Gauss, welche die Lösung diophantischer Gleichungen von der Form:

$$fx^2 + gy^2 = A$$

erleichtern sollen, auch auf die Form

$$(2nx + \alpha)(2ny + \beta) = N$$

anzuwenden sind. Da nun die Primfactoren von

$$\frac{a^n - 1}{a - 1}$$

nur Zerlegungen obiger Art erlauben, so wird hieraus eine Methode abgeleitet, diese Primfactoren zu bestimmen. Erleichterungen gewähren nicht nur Jacobi's Canon arithmeticus, sondern auch die „neuen zahlentheoretischen Tabellen" von Reuschle (1856). Auch die Beispiele sind im Anschluss an Reuschle ge-

wählt. Es werden

$a = 79$,	$n = 5$	$a = 43$,	$n = 5$
$a = 7$,	$n = 11$	$a = 5$,	$n = 13$
$a = 3$,	$n = 23$	$a = 7$,	$n = 13$

behandelt. Sn.

A. Cunningham. On finding factors. Mess. (2) XX. 37-45.

Darstellung und Vereinfachung des Verfahrens, über welches F. d. M. XXI. 1889. 169 berichtet ist. Lp.

L. Saint-Loup. Sur la représentation graphique des diviseurs des nombres. Ann. de l'Éc. Norm. (3) VII. 89-100.

Der Verfasser setzt seine Versuche fort, das Sieb des Eratosthenes graphisch darzustellen. Vgl. C. R. CVII. 24. (1888.) Sn.

C. Hossfeld. Bemerkung über eine zahlentheoretische Formel. Schlömilch Z. XXXV. 382-384.

Eine Erleichterung der Rechnung, wenn die Anzahl der in einem bestimmten Gebiete enthaltenen Zahlen, die durch keine der n ersten Primzahlen teilbar sind, gefunden werden soll. Sn.

Éd. Lucas. Sur les nombres parfaits. Mathesis X. 74-76.

Verschiedene Eigenschaften, unter denen wir die folgende hervorheben: Jede vollkommene Zahl, ausgenommen 6 und 496, endigt mit 16, 28, 36, 56 oder 76. Mn. (Lp.)

R. E. Allardice. On some theorems in the theory of numbers. Edinb. M. S. Proc. VIII. 16-19.

Beweis folgender Sätze: Ist n eine Primzahl, so ist

1) $(2n-1)(2n-2)\dots(n+1)-(n-1)(n-2)\dots 1$

durch n^2 teilbar;

2) $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)(n-1)!$ durch n^2 teilbar.

Der zweite Satz wird auf die Summe der m^{ten} Potenzen ausgedehnt:

$$\left(1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^m}\right)\{(n-1)!\}^m.$$

Gbs. (Lp.)

F. Rogel. Zur Bestimmung der Anzahl Primzahlen unter gegebenen Grenzen. Math. Ann. XXXVI. 304-315.

Weitere Vervollkommnung einer in Hoppe Arch. (2) VII. 381-388 gegebenen Methode. Sn.

J. W. L. Glaisher. On the function which denotes the excess of the number of divisors of a number which $\equiv 1$ (mod. 3), over the number which $\equiv 2$ (mod. 3). Lond. M. S. Proc. XXI. 395-402.

Man teile die Divisoren der Zahl n in zwei Klassen, je nachdem sie $\equiv 1$ (mod. 4) oder $\equiv 3$ (mod. 4). Der Ueberschuss der in der ersten Klasse enthaltenen Anzahl sei $E(n)$. Analog bestimme man den Ueberschuss $H(n)$ der Anzahl von Divisoren $\equiv 1$ (mod. 3) über die Anzahl von Divisoren $\equiv 2$ (mod. 3). Die beiden zahlentheoretischen Functionen $E(n)$ und $H(n)$ treten als Coefficienten vieler Reihen auf, welche zur Theorie der elliptischen Functionen in Beziehung stehen. Z. B.

$$\frac{1-3q^2+5q^6-7q^{18}+9q^{20}-\cdots}{1-q-q^2+q^5+q^7-\cdots}$$
$$= H(1)+H(4)q+H(7)q^2+H(10)q^3+\cdots,$$

$$\frac{1-3q^2+5q^6-7q^{12}+\cdots}{1-2q+2q^4-2q^7+\cdots} = E(1)+E(5)q+E(9)q^2+E(13)q^3+\cdots.$$

Speciell bei den Reihen, welche sich auf die Dreiteilung der Perioden beziehen, sind die Functionen $H(n)$ von Nutzen.

Sn.

J. A. Gmeiner. Beweis eines arithmetischen Satzes. Monatsh. f. M. I. 159-162.

Es handelt sich um folgenden Satz des Herrn Gegenbauer. Das Product

$$m(m+1k)(m+2k)\cdots(m+(n-1)k)\,k^{n-r},$$

wo

$$n = \sum_{r=1}^{r} a_{r,1}a_{r,2}\ldots a_{r,s},$$

ist stets durch

$$P = \prod_{\varkappa=1}^{r}\prod_{\nu=1}^{s}(a_{\varkappa,\nu}!)^{a_{\varkappa,\nu+1}\cdots a_{\varkappa,s}}$$

teilbar. Alle Symbole bedeuten ganze Zahlen. Specialisirungen.

Sn.

A. Andreini. Osservazione ad una nota del dott. Gambioli. Batt. G. XXVIII. 43.

Reclamation wegen eines irrtümlich vorgeworfenen Versehens. Es handelt sich um Perioden von Decimalbrüchen.

Sn.

L. Gegenbauer. Zur Theorie der Congruenzen mit mehreren Unbekannten. Wien. Ber. XCIX. 790-813.

Lebesgue hat (Journ. de Math. (2) IV. 366) die Anzahl der Wurzelsysteme der allgemeinen Congruenz ersten Grades

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+b\equiv 0 \pmod{p}$$

bestimmt und für dieselbe elegante Ausdrücke mit Hülfe der $\frac{1}{2}(p-1)$-gliedrigen Perioden der p^{ten} Einheitswurzeln gegeben. Hier wird die Anzahl der Wurzelsysteme der Congruenz

$$a_1x_1^2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_n^2+b\equiv 0 \pmod{p}$$

untersucht, und für die Congruenzen

$$a_1x_1^{\frac{p-1}{2}}+\cdots+a_sx_s^{\frac{p-1}{2}}+a_{s+1}x_{s+1}+\cdots+a_{s+n}x_{s+n}+b\equiv 0,$$
$$a_1x_1^{\frac{p-1}{2}}+\cdots+a_sx_s^{\frac{p-1}{2}}+a_{s+1}x_{s+1}^2+\cdots+a_{s+n}x_{s+n}^2+b\equiv 0$$

werden analoge Fragen discutirt. Zur Erledigung allgemeinerer Aufgaben werden sehr verwickelte Beziehungen zwischen Determi-

nanten aufgestellt, und für die Anzahl von gewissen Lösungssystemen wird eine obere Grenze erhalten. Sn.

Éd. Lucas. Critérium pour la formule de Paoli. Mathesis X. 129-132.

E. Catalan. Remarque sur une note de M. Lucas. Mathesis X. 197-199.

E. Catalan. Sur l'analyse indéterminée du premier degré. Mathesis X. 220-222, 241-243, 275-276.

Hr. Catalan vereinfacht und vervollständigt ein von Hrn. Lucas angegebenes neues Verfahren zur Auffindung der genauen Anzahl nicht negativer Lösungen der unbestimmten Gleichung $ax+by=c$. Mn. (Lp.)

L. Kronecker. Ueber die Dirichlet'sche Methode der Wertbestimmung der Gauss'schen Reihen. Hamb. Mitt. II. 32-36.

Der Summe

$$\tfrac{1}{2}f(0)+f(1)+\cdots+f(r-1)+\tfrac{1}{2}f(r)$$

wird unter anderen die für die Summirung der Gauss'schen Reihen sehr bequeme Form gegeben:

$$\lim_{t=\infty}\sum_{h,k}\int_{kr}^{(k+1)r} f(x-kr)\,e^{2(2k\lambda+h)x\pi i}\,dx \quad \begin{pmatrix} h=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2\lambda-1 \\ k=0,\pm 1,\pm 2,\ \ldots,\ \pm t \end{pmatrix},$$

worin λ eine beliebige ganze Zahl bedeutet; hieraus wird die (für $\lambda=2$ von Dirichlet bewiesene) fundamentale Relation:

$$\sum_{k=0}^{2\mu-1} e^{\frac{\lambda i}{\mu}k^2\pi} = \left|\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\right| \sum_{h=0}^{2\lambda-1} e^{\frac{\mu}{\lambda i}h^2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{y^2\pi i}\,dy$$

abgeleitet, welche unmittelbar zur Wertbestimmung der allgemeinen Gauss'schen Reihen führt. Setzt man

$$G\left(\frac{\lambda i}{\mu}\right) = \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{2\mu-1} e^{-\frac{\lambda i}{\mu}k^2\pi}, \quad \left(\sqrt{re^{2vi}}\right) = \left|\sqrt{r}\right| e^{vi},$$

so ergiebt sich hieraus

$$\left(\sqrt{\frac{\lambda i}{\mu}}\right) G\left(\frac{\lambda i}{\mu}\right) = G\left(\frac{\mu}{\lambda i}\right).$$

Setzt man

$$G\left(\frac{2\lambda i}{\mu}\right) = (\sqrt{\mu})\left(\frac{\lambda}{\mu}\right), \quad G\left(\frac{\mu}{2\lambda i}\right) = (\sqrt{2\lambda i})\left(\frac{\mu}{\lambda}\right),$$

so stimmen $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$, $\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)$ mit den Legendre-Jacobi'schen Zeichen überein, welche auf diese Weise analytisch dargestellt sind.

Wz.

A. Tafelmacher. Zu dem dritten Gauss'schen Beweise des Reciprocitäts-Satzes für die quadratischen Reste gehörende Untersuchungen. Pr. Gymn. Osnabrück. 1-24.

Es wird an eine Abhandlung des Herrn M. A. Stern (Gött. Nachr. 1870. 237-253; F. d. M. II. 1869/70. 93-94) angeknüpft; sodann an eine Arbeit des Herrn Schering (Berl. Ber. 1885. 113-117).

Sn.

M. Mandl. Ueber die Verallgemeinerung eines Gauss'schen Algorithmus. Monatsh. f. M. I. 465-472.

Die zuerst von Herrn Schering gegebene und von Kronecker commentirte Verallgemeinerung des Kriteriums für den quadratischen Restcharakter (Berl. Ber. 1876. 330-341, F. d. M. VIII. 1876. 93-95) wird hier neu bewiesen.

Sn.

Th. Pépin. Nouvelle démonstration de la loi de réciprocité de Legendre. Rom. Acc. P. d. N. L. XLIII. 192-198.

Der Beweis knüpft an den zweiten von Gauss an, ohne indes eine vollständige Theorie der Genera zu erfordern. Es werden nur die einfachsten Sätze aus der Theorie der Composition quadratischer Formen benutzt. Am Schlusse finden sich historische Bemerkungen.

Sn.

F. Franklin. A proof of the theorem of reciprocity for quadratic residues. Mess. (2) XIX. 176-177.

Ein neuer und kurzer Beweis dieses Satzes. Glr.

J. C. Fields. A simple statement of proof of reciprocal-theorem. American J. XIII. 189-190.

Beweis des Gauss'schen Kriteriums mit Hülfe einer neuen Gruppirung der Reste und Nichtreste. Sn.

E. Busche. Beweis des quadratischen Reciprocitätsgesetzes in der Theorie der aus den vierten Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen. Hamb. Mitt. II. 80-92.

Im Anschluss an das Princip des dritten der Beweise von Gauss werden hier für die Decidenten Ausdrücke durch die Legendre'sche Function $E(x)$ mit reellem Argument aufgestellt und von deren Summe sodann bewiesen, dass sie gerade sei. Von den benutzten Formeln für $E(x)$ seien erwähnt:

$$\sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)}\left[\frac{(2x-1)m}{2n}\right]=\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2},$$

$$\sum_{1}^{\frac{1}{2}g}\left[\frac{(2x-1)m}{2g}\right]=\left[\frac{m}{4}\right]+\frac{m-1}{2}\left(\frac{g}{2}+1\right),$$

wo m, n, k positive ungerade, g eine positive gerade Zahl bezeichnet; je zwei dieser Zahlen seien teilerfremd.

Der Verfasser macht darauf aufmerksam, dass einer der benutzten Ausdrücke zu verwickelt sei, um den hier gefundenen Beweis als eine Vorbereitung zum Beweise des biquadratischen Gesetzes ansehen zu dürfen, so dass die Reconstruction des von Gauss gefundenen, aber nicht veröffentlichten Beweises noch zu wünschen bleibe. Sn.

J. Tatarinoff. Die Methoden zur Berechnung der Summe $E\frac{2q}{p}+E\frac{4q}{p}+\cdots+E\frac{(p-1)q}{p}$ mit Hülfe der Kettenbrüche. Mosk. Math. Samml. XIV. 668-682. (Russisch.)

Die Summe $E\frac{2q}{p}+E\frac{4q}{p}+\cdots+E\frac{(p-1)q}{p}$, auf welche die Berechnung des Symbols $\left(\frac{p}{q}\right)$ zurückkommt, wird mit Hülfe der Kettenbrüche gefunden. Wi.

E. Busche. Ueber die Function $\sum_{x=1}^{x=\frac{q-1}{2}}\left[\frac{px}{q}\right]$. J. für Math. CVI. 65-80.

Mit Hülfe des Euklidischen Algorithmus lässt sich leicht der folgende allgemeine Satz beweisen: Zwei Functionen $F(p,q)$ und $F_1(p,q)$ stimmen für alle ganzzahligen Werte ihrer Argumente überein, wenn 1) $F(p,p)=F_1(p,p)$ für jeden ganzzahligen Wert von p und 2) für beliebige ganzzahlige p, q, λ die Gleichungen

$$F(p+\lambda q,q)-F(p,q)=F_1(p+\lambda q,q)-F_1(p,q),$$
$$F(p,q+\lambda p)-F(p,q)=F_1(p,q+\lambda p)-F_1(p,q)$$

gültig sind. Dieser Satz lässt sich benutzen zur Auswertung der beiden Functionen $\psi(p,q)\pm\psi(q,p)$, wo die Function $\psi(p,q)$ für ungerade positive Werte von p und q durch die im Titel angegebene Summe dargestellt wird, und zur Definition der Function für negative q die Formel $\psi(p,-q)=-\psi(p,q)$ gelten soll. Für die erstere Function ergiebt sich auf diese Weise die Formel

$$\psi(p,q)+\psi(q,p)=\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}-\frac{\varepsilon-1}{2}\frac{\delta-1}{2},$$

wo ε und δ beziehungsweise die Vorzeichen von p und q bedeuten. Diese Formel enthält, wie man sieht, das Reciprocitätsgesetz für quadratische Reste. Ht.

M. A. Stern. Zur Theorie der Function Ex. J. für Math. CVI. 337-345.

Der Verfasser leitet in elementarer Weise eine grosse Reihe von Formeln für die bekannte Function $Ex = [x]$ ab, welche als die grösste in x enthaltene ganze Zahl definirt ist. Die Gestalt dieser Formeln ersieht man aus den Beispielen

$$\sum_{1}^{\frac{1}{2}(m-1)} E\left(\frac{km}{n} + \frac{1}{2}\right) + \sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} E\left(\frac{km}{n} - \frac{m}{2n}\right) = \frac{(m-1)(n-1)}{2.2}$$

und

$$\sum_{1}^{\frac{1}{2}(m-1)} E\left(\frac{kn}{m} + \frac{1}{2}\right) = \sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} E\left(\frac{km}{n} + \frac{1}{2}\right).$$

Ht.

L. Kronecker. Bemerkungen über die von Gauss mit $[x]$ bezeichnete arithmetische Function einer reellen Grösse x. J. für Math. CVI. 346-348.

Bezeichnet r irgend eine ganze, die Zahl x übersteigende Zahl, so gilt offenbar die Formel

$$E(x) = [x] = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{h=r-1} (1 + s(x-h)),$$

wo $s(x)$ das Vorzeichen von x bezeichnet. Mit Hülfe dieses Ausdruckes für $[x]$ lassen sich leicht die Formeln von Busche und Stern (vergl. die beiden vorigen Referate) verificiren. So wird beispielsweise infolge der angegebenen Formel

$$\sum_{k}\left[\frac{km}{n}\right] = \frac{1}{2}(m-1)(n-1) - \frac{1}{2}\sum_{h,k} s\left(\frac{k}{n} - \frac{h}{m}\right)\binom{h = 1, 2, \dots, m-1}{k = 1, 2, \dots, n-1},$$

und hieraus folgt leicht die bekannte Formel

$$\sum_{k=1}^{k=n-1}\left[\frac{km}{n}\right] = \frac{1}{2}(m-1)(n-1),$$

wo überall m und n ungerade Zahlen bedeuten. Insbesondere werden auch die beiden im vorigen Referate angegebenen Formeln auf dem bezeichneten Wege abgeleitet. Ht.

H. Laurent. Mémoire sur les fonctions entières.
J. de l'Éc. Pol. LX. 107-136.

Sind φ und χ zwei rationale Functionen der Veränderlichen x, so bestehen, wenn man $\chi(x)$ als Modul nimmt, n Congruenzen von der Gestalt:

$$(\chi)\left\{\begin{array}{l} \varphi(x)\equiv c_{11}+c_{12}x+\cdots+c_{1n}x^{n-1}, \\ x\varphi(x)\equiv c_{21}+c_{22}x+\cdots+c_{2n}x^{n-1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^{n-1}\varphi(x)\equiv c_{n1}+c_{n2}x+\cdots+c_{nn}x^{n-1}, \end{array}\right.$$

wo n der Grad von $\chi(x)$ und $c_{11}, c_{12}, \dots, c_{nn}$ bestimmte Constanten sind. Die Determinante $\Sigma\pm c_{11}c_{22}\dots c_{nn}$ ist gleich der Resultante von χ; denn bezeichnet man mit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ die Wurzeln der Gleichung $\chi=0$, so erkennt man leicht, dass jene Determinante gleich dem Producte $\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\dots\varphi(\alpha_n)$ wird. Auch die weiteren Sätze über die Resultante zweier ganzen rationalen Functionen folgen leicht aus der eben gegebenen Definition. Indem der Verfasser nun die Coefficienten der beiden Formen φ und χ als Functionen einer zweiten unabhängigen Veränderlichen y annimmt, gelangt er zu den entsprechenden Sätzen über die Resultante dreier Functionen von zwei Veränderlichen, wobei auch die Frage nach den Kriterien für die Vielfachheit gemeinsamer Lösungen berührt wird. Endlich betrachtet der Verfasser den Fall von r Functionen $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ mit r Veränderlichen $x_1, \dots, x_r$; hierbei wird jedoch die Einschränkung gemacht, dass die Gleichungen $\varphi_1=0, \dots, \varphi_r=0$ genau μ endliche und von einander verschiedene Lösungssysteme besitzen, wo μ gleich dem Producte der Grade der Functionen $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ ist. Bei dieser einschränkenden Annahme gilt das folgende Theorem: Irgend zwei ganze rationale Functionen von $x_1, \dots, x_r$, welche für jene μ Lösungen die nämlichen Werte annehmen, sind einander congruent bezüglich des Modulsystems $(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$. Nun bestimme man eine ganze rationale Function j der Veränderlichen $x_1, \dots, x_r$, welche bezüglich für jene μ Lösungssysteme den μ verschiedenen μ^{ten} Einheitswurzeln gleich wird. Diese Function j genügt der Congruenz $j^\mu\equiv 1$ bezüglich des Modulsystems $(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$,

und da ferner keine lineare Combination der Potenzen 1, j, j^2, ..., $j^{\mu-1}$ der Null congruent ist, so ist offenbar, dass eine jede rationale ganze Function von $x_1, \ldots, x_r$ bezüglich des Modulsystems $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ einem Ausdrucke von der Gestalt $c+c_1j+c_2j^2+\cdots+c_{\mu-1}j^{\mu-1}$ congruent ist. Auf diese Weise folgt, dass die Theorie der Functionen von $x_1, \ldots, x_r$ in Bezug auf das Modulsystem $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ im wesentlichen identisch ist mit der Theorie einer Veränderlichen j in Bezug auf den Modul $j^\mu-1$. Die hauptsächlichsten der in dieser Arbeit abgeleiteten Resultate finden sich in § 20 der Kronecker'schen „Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen" (Vgl. F. d. M. XIV. 1882. 38). Ht.

A. Matrot. Sur la décomposition d'un entier quelconque en une somme de carrés. Assoc. Franç. Limoges XIX. 79-81.

A. Matrot. Sur les résidus quadratiques. Ibid. 82-88.

Die erste Notiz giebt eine einfache und kurze Methode für den Beweis des Satzes, dass jede Primzahl Teiler einer Summe a^2+b^2+1 ist; daraus fliesst ein elementarer Beweis des Fermat'schen Satzes, dass jede ganze Zahl höchstens in vier Quadrate zerlegbar ist. Die zweite Mitteilung enthält neue Ansichten über die quadratischen Reste und vornehmlich eine graphische Darstellung des Reciprocitätsgesetzes nebst einem neuen Beweise des Satzes bezüglich des quadratischen Charakters von 2. (Selbstanzeige des Verfassers in Assoc. Franç. XIX$_1$. 147).

Lp.

Éd. Lucas. Nouvelle démonstration de la loi de réciprocité. Assoc. Franç. Limoges XIX$_1$. 147.

L. Gegenbauer. Ueber einen arithmetischen Satz des Herrn Charles Hermite. Wien. Ber. XCIX. 387-403.

Die Arbeit von Hermite „Sur les valeurs asymptotiques de

quelques fonctions numériques" findet sich J. für Math. IC. 324-328 (vgl. F. d. M. XVIII. 1886. 143-144). Die dort gegebenen Beziehungen der Anzahl $f(n)$ der Darstellungen einer ganzen Zahl n als Summe von zwei Quadraten zu der Theorie der elliptischen Functionen werden hier als Specialfälle von allgemeineren Relationen bezeichnet; die Verallgemeinerungen ergeben dann schliesslich wieder eine asymptotische Bestimmung für die Anzahl der Darstellungen einer ganzen Zahl durch das System der quadratischen Formen einer gegebenen Discriminante. Sn.

O. Landsberg. Lettera al Redattore. Batt. G. XXVIII. 52.

Genauer Nachweis eines von Herrn Varisco bei dem Versuch eines Beweises des Fermat'schen Satzes begangenen Versehens (vgl. Batt. G. XXVII. 371-380, F. d. M. XXI. 1889. 182).

Sn.

Pépin. Démonstration d'un théorème de Liouville. Rom. Acc. P. d. N. L. Mem. V. 131-151.

Das Theorem findet sich Journ. de Math. (2) XIV. 1-8 (F. d. M. II. 1870. 286-287). Herr Pépin findet Beziehungen zwischen der Anzahl der Darstellungen einer beliebigen Zahl durch die beiden quadratischen Formen (1, 0, 8) und (1, 0, 16) einerseits und den beiden Kriterien, welche Gauss für die Bestimmung des biquadratischen Charakters der Zahl 2 gegeben hat, andererseits.

Sn.

F. Tano. Sur quelques points de la théorie des nombres. Darboux Bull. (2) XIV. 215-218.

Die Kettenbruchentwickelungen für $\sqrt{a^2+4}$ und $\sqrt{a^2-4}$ werden mit einander verglichen, und zur Bestimmung der Möglichkeit von diophantischen Gleichungen angewandt; z. B. wird gezeigt, dass unendlich viele Lösungen von

$$x^2+y^2+z^2=u^2+v^2+w^2+N$$

für jedes ganzzahlige N existiren. Zum Schluss werden zwei

Sätze von Sophie Germain bewiesen, welche sich auf biquadratische Reste beziehen. Sn.

Ch. Berdellé. De l'incommensurabilité des angles des triangles rectangles en nombres entiers. Assoc. Franç. Limoges XIX. 186-191.

Hr. Berdellé nimmt zwei irreducible Brüche an, welche den Cosinus und den Sinus eines und desselben Winkels darstellen, nämlich c/d und s/d. Berechnet man sodann den Ausdruck $\left(\pm\frac{c}{d}\pm\frac{s}{d}i\right)^k$, in welchem k eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, so erhält man stets einen Ausdruck von der Form $\pm\frac{a}{d^k}\pm\frac{b}{d^k}i$, in welchem die beiden Brüche, die den Cosinus und den Sinus des k-fachen Winkels darstellen, ebenfalls sich als irreducibel erweisen. Dieses Ergebnis beweist, dass ein rationales Dreieck, mithin also ein rechtwinkliges Dreieck mit ganzzahligen Seiten drei incommensurable Winkel besitzt. Durch Herrn Catalan ist der Verfasser auf eine denselben Gegenstand behandelnde Arbeit im Liouville'schen Journale aufmerksam gemacht worden.

Lp.

L. Gegenbauer. Einige arithmetische Sätze. Monatsh. f. M. I. 39-46.

Relationen zwischen Anzahlbestimmungen im Gebiete allgemeiner complexer Zahlen. Verallgemeinerung der Formel von Tschebyscheff für die Summe der natürlichen Logarithmen aller Primzahlen unter einer gegebenen Grenze. Eine Wahrscheinlichkeitsbestimmung in Bezug auf die Exponenten bei der Darstellung der aus vierten Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen durch Primzahlpotenzen. Sn.

F. Rogel. Zahlentheoretische Eigentümlichkeiten gewisser Reihen. Hoppe Arch. (2) IX. 210-212.

Aus dem Maclaurin'schen Satze folgt die (auf ihre Conver-

genz zu prüfende) Reihe:

$$\frac{d}{dx}\left[xf(x)\right] = f(0) + \frac{2x}{1!}f'(0) + \cdots + \frac{n}{(n-1)!}x^{n-1}f^{(n-1)}(0) + \cdots.$$

Die Coefficienten der Entwickelung werden mit Hülfe des Wilson'schen Satzes umgeformt. Sn.

J. AMALDI. Dimostrazione della periodicità nella espressione in serie infinite delle grandezze razionali. Besso Per. mat. V. 102-106.

Ableitung des im Titel angegebenen Theorems aus dem verallgemeinerten Fermat'schen Satze. Vi.

R. LIPSCHITZ. Bemerkung zu dem Aufsatze: Untersuchung der Eigenschaften einer Gattung von unendlichen Reihen. J. für Math. CVI. 27-29.

Der Verfasser berichtigt eine in dem früheren Aufsatze (vergl. F. d. M. XXI. 1889. 176-177) gegebene Zahl und zeigt, dass die Anzahl der Klassen, in welche er die Primzahlen eingeteilt hat, unendlich gross ist. Wz.

B. Theorie der Formen.

G. B. MATHEWS. Irregular determinants and subtriplicate forms. Mess. (2) XX. 70-74.

Im Art. 306 der Disquisitiones arithmeticae stellt Gauss ohne Beweis den Satz auf, dass alle negativen Determinanten von den Formen $-(216k+27)$, $-(1000k+75)$ mit Ausnahme von -27 und -75 irregulär sind, und dass es unendlich viele ähnliche Fälle giebt. Der Verfasser liefert einen Beweis für diese Behauptungen und deckt das allgemeine Princip auf, aus

welchem sie wahrscheinlich erschlossen wurden. Er erörtert mit Hülfe der Gauss'schen Methode der Composition auch die Theorie der von ihm „subtriplicate" genannten Formen (Formen einer Klasse K, für welche $K^3=1$). Glr. (Lp.)

L. Lachtine. Einige Vereinfachungen in der Auflösung der unbestimmten Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbekannten. Mosk. Math. Samml. XIV. 487-526. (Russisch.)

P. W. Preobraschensky. Bemerkungen zur vorhergehenden Abhandlung. Mosk. Math. Samml. XV. 118-121. (Russisch.)

Nach Hrn. Lachtine ist bei den Formen mit positiver Determinante die reducirte Form diejenige, deren positive Wurzel in einen reinen Kettenbruch mit nur positiven Elementen entwickelbar ist, und zwar nur auf eine einzige Weise. Auf diese Definition und die Eigenschaften der Kettenbrüche gestützt, giebt der Verfasser eine neue Methode zur Ermittelung aller Transformationen, welche die reducirte Form in sich selbst überführen. Diese Methode gestattet es, die Pell'sche Gleichung zu umgehen.

Hr. Preobraschensky zeigt, dass Hrn. Lachtine's Darstellung sich dadurch von der Dirichlet'schen unterscheidet, dass er die uneigentliche Aequivalenz nicht ausschliesst und dadurch den Begriff der Klasse verändert. Wi.

P. W. Preobraschensky. Theorie der binären quadratischen Formen. Mosk. Physik. Abt. III. 62-83. (Russisch.)

Die Darstellung unterscheidet sich von der gewöhnlichen dadurch, dass nicht nur der Teiler und der Rest, sondern auch der Quotient berücksichtigt wird. Mit Hülfe dieses „Princips der Uebergänge" werden alle Grundaufgaben der Theorie der binären Formen nach einer für positive und negative Determinanten gemeinsamen Methode gelöst und verschiedene Vereinfachungen eingeführt; so werden z. B. die Nenner der Näherungs-

werte des Kettenbruchs von $\sqrt{D}$ nicht einzeln berechnet, sondern direct durch einen Process gegeben.

Der Verfasser zeigt weiter, dass die Klassen der Formen jeder Determinante sich gemäss vielen Beziehungen in zwei verschiedene Arten einteilen lassen. Die Klassen erster Art (vollkommene) haben die Eigenschaft: wenn eine Primzahl durch eine solche Form darstellbar ist, so kann sie auf vier Weisen im Falle einer negativen Determinante, oder durch vier Wertereihen im Falle der positiven Determinante mittels dieser Form darstellbar werden. Wenn die Klasse unvollkommen ist, so ist die Primzahl nur auf zwei Weisen oder durch zwei Wertereihen darstellbar. So z. B. hat die Determinante -11 drei Klassen: zwei vollkommene und eine unvollkommene.

Am Ende der Abhandlung ist das Theorem gegeben, welches die Erweiterung des Princips der Uebergänge auf complexe Zahlen zeigt. Wi.

H. Minkowski. Ueber die Bedingungen, unter welchen zwei quadratische Formen mit rationalen Coefficienten in einander rational transformirt werden können. J. für Math. CVI. 5-26.

In der vorliegenden Arbeit werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufgestellt, dass eine gegebene quadratische Form f von n homogenen Veränderlichen und mit rationalen Zahlencoefficienten sich vermöge einer linearen Substitution mit rationalen Zahlencoefficienten in eine andere eben solche quadratische Form g oder in ein rationales Vielfaches einer solchen Form g transformiren lässt. Dieses Problem ist offenbar gleichbedeutend mit der Aufgabe, für eine vorgelegte quadratische Form f ein vollständiges System von solchen Grössen anzugeben, welche gegenüber den Transformationen der genannten Art invariant sind. Der für die Lösung dieser Aufgabe wesentliche Gedanke besteht nun darin, dass man die Bedingungen für die Transformirbarkeit zunächst in Bezug auf irgend einen Primzahlmodul p prüft, ein Gedanke, welcher

auf den fundamentalen Begriff des Geschlechtes führt (F. d. M. XVII. 1885. 159). Die Invarianten des Geschlechtes sind der Trägheitsindex J, sodann die Determinante Δ der nunmehr ganzzahlig angenommenen Form f, sowie gewisse grösste gemeinsame Teiler ihrer Unterdeterminanten und endlich die sogenannten Charaktere der Form (vergleiche die folgenden Abhandlungen des Verfassers: „Sur la théorie des formes quadratiques à coefficients entiers“, art. VI-XI; „Untersuchungen über quadratische Formen“, Acta Math. VII. 201-258; „Ueber positive quadratische Formen“, J. für Math. IC. 1-9). Diese Charaktere treten auf in Gestalt Legendre'scher Symbole; sie können vollständig erschlossen werden aus den Werten der verschiedenen Summen $\Sigma e^{\frac{2\pi i a f}{N}}$, wo N und a zu einander prime ganze Zahlen bedeuten und die Veränderlichen in der Form f Restsysteme nach dem Modul N zu durchlaufen haben. Wenn alle Invarianten des Geschlechtes bei zwei Formen übereinstimmen, d. h. wenn die beiden Formen demselben Geschlechte angehören, so lassen sich dieselben nach einem fundamentalen Satze von St. Smith mittels rationaler Transformationen von der Determinante 1 in einander überführen, und zwar derart, dass die in den Nennern der Substitutionscoefficienten auftretenden ganzen Zahlen prim zu 2Δ sind. Es handelt sich nun wesentlich darum, aus den eben aufgezählten Invarianten des Geschlechtes diejenigen auszusondern, welche überhaupt bei allen rationalen Transformationen ungeändert bleiben. Zu dem Zwecke bestimme man zunächst alle diejenigen Primzahlen, welche in der Determinante Δ der Form in ungeraden Potenzen aufgehen. Das Product aller dieser Primzahlen, mit dem Vorzeichen $(-1)^{\nu}$ genommen, heisse A; es ist offenbar, dass diese Grösse A bei allen linearen Transformationen mit rationalen Coefficienten ungeändert bleibt. Ferner lässt sich immer aus den Resten der Form f für genügend hohe Potenzen von p als Modul je eine Grösse C_p bilden, welche nur der Werte $+1$ und -1 fähig ist, und welche diesen Wert bei keiner rationalen umkehrbaren Transformation ändert. Für alle diejenigen ungeraden Primzahlen, welche weder in der Determinante noch

in dem Generalnenner der Coefficienten von f wirklich vorkommen, findet sich diese Einheit C_p von vorn herein gleich $+1$, so dass sie überhaupt nur für eine endliche Anzahl von Primzahlen gleich -1 sein kann. Der Beweis für die Invarianz von C_p beruht auf einer merkwürdigen Relation, welche aussagt, dass das Product sämtlicher C_p lediglich schon durch J und A bestimmt ist. Andrerseits bestimmen die Grössen C_p und A auch umgekehrt alle Reste der Form f für genügend hohe Potenzen eines Primzahlmoduls p. Bezeichnet B das Product aller ungeraden Primzahlen, für welche C_p gleich -1 ist, so ist dem Gesagten zufolge B eine Invariante der Form f gegenüber irgend einer rationalen Transformation, und es gilt nun das wichtige Theorem: Zwei rationale quadratische Formen mit n Variabeln können dann, und nur dann, rational in einander transformirt werden, wenn sie gleiche Invarianten J, A und B haben. Der Trägheitsindex J ist eine Zahl zwischen 0 und n; $(-1)^J A$ und B sind positive, aus lauter verschiedenen Primfactoren gebildete Zahlen; B ist eine ungerade Zahl. Der Verfasser zeigt, dass es auch umgekehrt zu jedem mit diesen Bedingungen verträglichen Systeme von Zahlen J, A, B wirklich quadratische Formen von n Veränderlichen giebt. Zugleich findet man auch den Wert der niedrigsten durch die in Rede stehende Transformation zu erzielenden Determinante Δ; derselbe ist nämlich gleich AC^2, wo C den Quotienten aus B und dem grössten gemeinsamen Teiler von A und B bedeutet.

Um die zweite Frage zu lösen, nämlich die Frage nach den Bedingungen dafür, dass f mittels rationaler Transformation in ein rationales Vielfaches dieser Form f selbst transformirt werden kann, ist nun noch zu untersuchen, in welchen Hinsichten die Zahlen J, A, B der verschiedenen rationalen Vielfachen einer und derselben Form f sämtlich mit einander übereinstimmen, und in welchen nicht. Um diese Frage für die Einheiten C_p zu entscheiden, müssen wir zusehen, wie sich die Einheit C_p einer Form f von der entsprechenden Einheit der Form Mf unterscheidet, wo M irgend eine ganze Zahl bedeutet. Ist dies geschehen, so lassen sich die Invarianten der quadratischen Form

f in dem jetzt betrachteten Sinne, d. h. die Invarianten der diophantischen Gleichung 2. Grades $f=0$, wirklich aufstellen; es zeigt sich, dass dabei die Fälle einer geraden und einer ungeraden Zahl n von Veränderlichen zu unterscheiden sind. In beiden Fällen lässt sich eine einzige Invariante D derart definiren, dass dann das Theorem gilt: Wenn 2 quadratische Formen von n Veränderlichen in den absoluten Werten ihrer Zahlen $n-2J$ und in ihren Invarianten D übereinstimmen, so kann jede von ihnen rational in ein rationales Vielfaches der anderen transformirt werden.

Die gewonnenen Theoreme gestatten eine grosse Zahl von Anwendungen, von denen hier nur folgende erwähnt sein mögen: Eine Form f ist dann, und nur dann, in $-f$ rational transformirbar, wenn ihre Variabelnzahl n gerade, ihr Trägheitsindex gleich $\frac{1}{2}n$ ist und ihre Determinante keine Primzahl von der Form $4l+3$ in ungerader Potenz enthält. Und ferner: Die homogene diophantische Gleichung 2. Grades $f=0$ ist in rationalen Zahlen lösbar: 1) wenn f eine indefinite Form mit 5 oder mehr Variabeln ist; 2) wenn f eine quaternäre indefinite Form ist, deren Invariante D nur erste Potenzen von Primzahlen enthält; 3) wenn f eine ternäre indefinite Form mit der Invariante $D=1$, und 4) wenn f eine binäre Form mit der Invariante $D=-1$ ist.

Ht.

Pépin. Sur quelques formes quadratiques quaternaires. Journ. de Math. (4) VI. 5-67.

Nach dem Vorgange von Liouville wird eine grosse Anzahl von Sätzen abgeleitet über die Anzahl der Darstellungen einer ganzen rationalen Zahl durch eine quadratische Form von der Gestalt $ax^2+by^2+cz^2+dt^2$, wo a, b, c, d gewisse gegebene und x, y, z, t zu bestimmende ganze rationale Zahlen sind. Die gefundenen Sätze beziehen sich sämtlich auf besondere quadratische Formen. Zur Charakterisirung derselben sei etwa der folgende Satz erwähnt: Die Zahl der Darstellungen des Doppelten einer ungeraden Zahl m durch die Form $x^2+y^2+3z^2+3t^2$ ist gleich

der vierfachen Summe derjenigen Teiler von m, welche nicht durch 3 teilbar sind. Ht.

G. B. Mathews. On the arithmetical theory of the form $x^3+ny^3+n^2z^3-3nxyz$. Lond. M. S. Proc. XXI. 280-287.

Die im Titel genannte Form gestattet die Zerlegung

$$F(x, y, z) = (x+yt+zt^2)(x+y\theta t+z\theta^2t^2)(x+y\theta^2t+\theta t^2),$$

wo t die reelle kubische Wurzel aus n und θ eine complexe kubische Einheitswurzel bedeutet. Der Verfasser beweist auf dem allgemeinen von Dirichlet eingeschlagenen Wege, dass die Gleichung $F(x, y, z) = 1$ auf unendlich viele Weisen durch ganze Zahlen x, y, z befriedigt werden kann, und dass alle diese Lösungen aus einer einzigen Fundamentallösung sich ableiten lassen. Auch die bekannten Sätze über die Darstellungen einer ganzen Zahl m durch jene Form $F(x, y, z)$ werden kurz auseinandergesetzt. Ht.

Capitel 3.

Kettenbrüche.

J. Sleschinsky. Ueber die Convergenz der Kettenbrüche. Odessa Ges. X. 201-256.

Eine eingehende Untersuchung der Frage nach der Convergenz der Kettenbrüche. Zu den Resultaten, welche schon früher von dem Verfasser publicirt wurden (F. d. M. XXI. 1889. 186), wird jetzt die Untersuchung der Convergenz der Kettenbrüche von der Form

$$\cfrac{c_1x^{\nu}}{1+\cfrac{c_2x^{\nu_2}}{1+\cdots}} \quad \text{und} \quad \cfrac{K_1}{a_1x+b_1+\cfrac{K_2}{a_2x+b_2+\cdots}}$$

hinzugefügt. Wi.

T. N. Thiele. Et Stykke Arvegods fra Professor Oppermann. Nyt Tidss. for Math. I. 33-39.

Der im Jahre 1883 gestorbene Professor Oppermann (Professor der deutschen Sprache an der Universität Kopenhagen) hat für die Entwickelung des mathematischen Unterrichtes in Dänemark eine grosse Bedeutung gehabt. Leider hat er jedoch sehr wenig niedergeschrieben, und Herr Thiele veröffentlicht in diesem kleinen Aufsatze eine wörtliche Mitteilung Oppermann's in dem Kopenhagener mathematischen Verein vom Jahre 1874, in welcher er eine bequeme Methode zur Ausziehung einer Wurzel beliebigen Grades gegeben hat. Das Resultat erscheint in der Form eines Productes.

Wenn $\sqrt[n]{\frac{b+\beta}{b-\beta}}$ die gegebene Wurzel ist, wo b, β, ebenso wie alle folgenden Grössen, ganze Zahlen sind, und wenn $\frac{\beta}{b}$ ein echter Bruch ist, so kann man

$$\sqrt[n]{\frac{b+\beta}{b-\beta}} = \frac{a+\alpha}{a-\alpha}$$

setzen. Nimmt man den natürlichen Logarithmus auf beiden Seiten und entwickelt in Reihen, so findet man als erste Annäherung

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{nb},$$

also:

$$\sqrt[n]{\frac{b+\beta}{b-\beta}} = \frac{nb+\beta}{nb-\beta}.$$

Wenn diese Annäherung nicht ausreicht, kann man

$$\sqrt[n]{\frac{b+\beta}{b-\beta}} = \frac{nb+\beta}{nb-\beta} \cdot \frac{1+x}{1-x}$$

setzen, wo

$$\frac{1+x}{1-x} = \sqrt[n]{\frac{b_1+\beta_1}{b_1-\beta_1}}, \quad \frac{\beta_1}{b_1} = \frac{(b+\beta)(nb-\beta)^n-(b-\beta)(nb+\beta)^n}{(b+\beta)(nb-\beta)^n+(b-\beta)(nb+\beta)^n},$$

und x auf dieselbe Weise bestimmen, wie vorher $\frac{\alpha}{a}$. Fährt man

auf diese Weise fort, so wird man bald eine gute Annäherung an die gesuchte Wurzel finden. Bei wiederholter Anwendung der Annäherungsformel convergirt das Product beinahe wie die Reihe

$$z+z^3+z^9+z^{27}+\cdots,$$

wo

$$z=\frac{\beta}{b}\sqrt{\frac{n^2-1}{3n^2}}.$$

Oppermann's Methode giebt das Resultat unter der Form eines Bruches. Im allgemeinen gehört dieser nicht zu den Näherungswerten des Kettenbruches, welcher die Wurzel darstellt. In speciellen Fällen gehören aber alle jene Werte zu den Näherungsbrüchen, z. B. wenn die Wurzel eine Quadratwurzel $\sqrt{t}$ ist und eine Oppermann'sche Annäherung $\frac{p}{q}$ die Eigenschaft hat, dass

$$p^2=q^2t\pm1.$$

V.

B. Carrara. Extraction de la racine carrée par la méthode des deux moyennes. Mathesis X. 15-16.

E. Catalan. Sur le développement, en fraction continue, de $\sqrt{N}$. Mathesis X. 17.

Ist $N=a_0b_0=a_1b_1=a_2b_2=\cdots$, $2a_1=a_0+b_0$, $2a_2=a_1+b_1$, ..., so folgt $\lim a_n=\lim b_n=\sqrt{N}$ für $n=\infty$. Ist a_0 ein Näherungswert p^{ter} Ordnung des Kettenbruchs für $\sqrt{N}$, so sind a_1, a_2, a_3, ... die Näherungswerte von den Ordnungen $2p$, $4p$, $8p$, ...; hierbei ist p als ein Vielfaches von der Anzahl der unvollständigen Quotienten der Periode des Kettenbruchs vorausgesetzt. Mn. (Lp.)

S. Pincherle. Sulla rappresentazione approssimata di una funzione mediante irrazionali quadratici. Lomb. Ist. Rend. (2) XXIII. 373-376.

Die in einer früheren Note (Di un' estensione dell'algoritmo delle frazioni continue, Lomb. Ist. Rend. (2) XXII. 555-558; F. d. M. XXI. 1889. 191) behandelte Verallgemeinerung des Kettenbruchalgorithmus wird hier auf einen besonderen Fall an-

gewandt, woraus sich eine Darstellung einer beliebigen Function unter der Form $\frac{P+\sqrt{Q}}{R}$ ergiebt, welche die grösste, für gegebene Ordnungen der Polynome P, Q, R erreichbare Annäherung darbietet. Vi.

S. Pincherle. Saggio di una generalizzazione delle frazioni continue algebriche. Bologna Mem. (4) X. 513-538.

Die Grundlage der in dieser Abhandlung besprochenen Verallgemeinerung des Kettenbruchalgorithmus (vgl. Pincherle, Di un'estensione dell'algoritmo delle frazioni continue, Lomb. Ist. Rend. (2) XXII. 555-558; F. d. M. XXI. 1889. 191) bildet der folgende Satz:

Sind p absteigende Potenzreihen $\sigma_0(x)$, $\sigma_1(x)$, $\sigma_2(x)$, ..., $\sigma_{p-1}(x)$ gegeben, und sind ihre Ordnungen bezw. 0, $-r_1$, $-(r_1+r_2)$, ..., $-(r_1+r_2+\cdots+r_{p-1})$, wo r_1, r_2, ..., r_{p-1} positive ganze Zahlen bezeichnen, so kann man stets $p-1$ Polynome $a_1, a_2, a_3, \ldots$, a_{p-1} von den Ordnungen r_1, r_2-1, r_3-1, ..., $r_{p-1}-1$ derart bestimmen, dass:

$$\sigma_0+a_1\sigma_1+a_2\sigma_2+\cdots+a_{p-1}\sigma_{p-1}=\sigma_p$$

eine absteigende Potenzreihe bildet, deren Ordnung

$$\leqq -(r_1+r_2+\cdots+r_{p-1}+1)$$

ist. Durch wiederholte Anwendung dieses Satzes und unter der Voraussetzung, dass $r_1=r_2=\cdots=r_{p-1}=1$ ist, dass also die Ordnung jeder der Potenzreihen σ_0, σ_1, ..., σ_{p-1} durch ihren mit negativem Zeichen genommenen Index dargestellt wird (in welchem Falle das Functionensystem „normal" heisst), erhält man eine unendliche Reihe von absteigenden Potenzreihen σ_p, σ_{p+1}, ..., von solcher Beschaffenheit, dass die Ordnung von σ_r nicht grösser als $-r$ und zugleich kleiner als die Ordnung von $\sigma_{r'}$, für jedes $r'>r$ ist. Es besteht ferner zwischen je $p+1$ auf einander folgenden Functionen σ eine recurrente Gleichung:

$$\sigma_n+a_{1,n}\sigma_{n+1}+a_{2,n}\sigma_{n+2}+\cdots+a_{p-1,n}\sigma_{n+p-1}=\sigma_{n+p};$$

mit anderen Worten, σ_n genügt der Differenzengleichung:

$$f(n+p)=a_{p-1,n}f(n+p-1)+\cdots+a_{2,n}f(n+2)+a_{1,n}f(n+1)+f(n).$$

Man kann dadurch jede Function σ durch $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ ausdrücken; es ergiebt sich nämlich:

$$A_{0,n+p}\sigma_0 + A_{1,n+p}\sigma_1 + A_{2,n+p}\sigma_2 + \cdots + A_{p-1,n+p}\sigma_{p-1} = \sigma_{n+p},$$

wo die A leicht bestimmbare Polynome sind. Die Determinante: $|A_{h,k}|$ $(h = 0, 1, 2, \ldots, p-1;\; k = n, n+1, n+2, \ldots, n+p-1)$ hat den Wert $(-1)^{n(p-1)}$. Bezeichnet man durch $B_{0,n}, B_{1,n}, \ldots, B_{p-1,n}$ die den Elementen $A_{0,n+p-1}, A_{1,n+p-1}, \ldots, A_{p-1,n+p-1}$ entsprechenden Subdeterminanten von $|A_{h,k}|$, so genügen

$$(-1)^{n(p-1)}B_{0,n},\; (-1)^{n(p-1)}B_{1,n},\; \ldots,\; (-1)^{n(p-1)}B_{p-1,n}$$

der Differenzengleichung:

$$f(n-p) = a_{p-1,n-p+1}f(n-p+1) + a_{p-2,n-p+1}f(n-p+2) + \cdots + a_{1,n-1}f(n-1) + f(n).$$

Es kann sich ereignen, dass die wiederholte Anwendung des besprochenen Algorithmus zu einer Function σ führt, welche identisch Null ist; man sagt dann, der Algorithmus sei „begrenzt" („limitato"). Das Auftreten dieser Eigentümlichkeit bildet, wenn $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ ein normales System ist, die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwischen $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ eine lineare homogene Relation stattfindet, deren Coefficienten ganze rationale Functionen von x sind.

Das Hauptproblem der vorliegenden Abhandlung lässt eine Umkehrung zu; man kann nämlich die Polynome a als gegeben voraussetzen und die Functionen σ aufsuchen. Dieses Problem wird hier nur formal, d. h. ohne Berücksichtigung der Convergenz oder Divergenz der ermittelten Reihen, behandelt.

Setzt man:

$$B_{p-1,n} = (-1)^{n(p-1)}P_n(x), \quad a_{1,n} = c_n x + c'_n,$$

so gilt die folgende merkwürdige Entwickelung:

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{P_1(x)\sigma_0(z)}\sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}P_n(x)\sigma_n(z).$$

Unter den vielen Anwendungen, welche die aufgestellte Theorie zulässt, erwähnt der Verfasser die folgenden:

1. Ist σ eine Wurzel einer irreductibeln Gleichung $(p-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, deren Coefficienten von x abhängig sind, und hat σ in $x = \infty$ einen einfachen Nullpunkt, so gehört eine andere Function σ_1 stets, und nur dann, dem durch σ bestimmten Rationa-

itätsbereich an, wenn der verallgemeinerte Kettenbruchalgorithmus, auf die Functionen:

$$1, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{p-2}, \sigma_1$$

angewandt, begrenzt ist.

2. Ist σ eine durch eine lineare Differentialgleichung $(p-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit rationalen Coefficienten definirte absteigende Potenzreihe von der Ordnung -1, so kann eine Function σ_1 stets, und nur dann, auf die Form:

$$A_0\sigma + A_1\frac{d\sigma}{dx} + \cdots + A_{p-2}\frac{d^{p-2}\sigma}{dx^{p-2}}$$

gebracht werden (wo $A_0, A_1, \ldots, A_{p-2}$ rationale Functionen von x bezeichnen), wenn unser Algorithmus, auf $\sigma, \frac{d\sigma}{dx}, \frac{d^2\sigma}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{p-2}\sigma}{dx^{p-2}}, \sigma_1$ angewandt, begrenzt ist.

3. Ist σ eine absteigende Potenzreihe von der Ordnung -1, so ergiebt sich durch wiederholte Anwendung des obigen Algorithmus auf $1, \sigma, \sigma^2, \cdots, \sigma^{p-1}$ für jeden beliebigen Wert von n eine Relation von der Form:

$$A_{0,n+p} + A_{1,n+p}\sigma + A_{2,n+p}\sigma^2 + \cdots + A_{p-1,n+p}\sigma^{p-1} = \sigma_{n+p},$$

wo die Ordnung von σ_{n+p} nicht grösser als $-(n+p)$ ist. Diese Gleichung ist also bis auf die $(n+p)^{\text{te}}$ Potenz von $\frac{1}{x}$ angenähert; und die Ordnung der Polynome A ist die kleinstmögliche bei der angegebenen Annäherungsstufe. (Man vergleiche für den besonderen Fall $p = 3$: Pincherle, Sulla rappresentazione approssimata di una funzione mediante irrazionali quadratici, Lomb. Ist. Rend. (2) XXIII. 373-76; s. den vorangehenden Bericht).

4. Man kann ganz analog eine angenäherte Differentialgleichung durch Anwendung des besprochenen Algorithmus auf $\sigma, \frac{d\sigma}{dx}, \frac{d^2\sigma}{dx^2}, \cdots, \frac{d^{p-1}\sigma}{dx^{p-1}}$ erhalten.

Die ausführliche Darlegung der Theorie des verallgemeinerten Kettenbruchalgorithmus für $p = 3$ bildet den Inhalt einer späteren Arbeit von Hrn. Pincherle mit dem Titel: Sulla generalizzazione delle frazioni continue algebriche (Annali di Mat. (2) XIX. 1891. 75-95). Vi.

D. Gambioli. **Sulle frazioni continue.** Bologna Rend. 1889-90. 33-55.

Setzt man:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} q_1 & p_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & q_2 & p_2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -1 & q_3 & p_3 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & q_{n-1} & p_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & -1 & q_n \end{vmatrix},$$

so können die Näherungsbrüche R_i des Kettenbruches:

$$\cfrac{p_1}{q_1 + \cfrac{p_2}{q_2 + \cdots}}$$

durch Δ_n und dessen Ableitungen nach den q_i ausgedrückt werden. Ist insbesondere $p_1 = p_2 = \cdots = 1$, so ist:

$$R_n = \frac{\dfrac{\partial|\Delta_n|}{\partial q_1}}{|\Delta_n|},\quad R_{n-1} = \frac{\dfrac{\partial^2|\Delta_n|}{\partial q_1 \partial q_n}}{\dfrac{\partial|\Delta_n|}{\partial q_n}},\ \ldots,\ R_{n-} = \frac{\dfrac{\partial^{(s+1)}|\Delta_n|}{\partial q_1 \partial q_n \partial q_{n-1} \cdots \partial q_{n-s+1}}}{\dfrac{\partial^{(s)}|\Delta_n|}{\partial q_n \partial q_{n-1} \cdots \partial q_{n-s+1}}},\ \ldots.$$

Durch diese Formeln kann man leicht viele, grösstenteils bekannte Eigenschaften der Näherungsbrüche beweisen, unter welchen die folgende angeführt werden möge:

Die Summe $\sum_{i=1}^{n} |\Delta_i|^2 \dfrac{\partial R_i}{\partial q_i}$ ist gleich 1 oder 0, je nachdem n ungerade oder gerade ist. Vi.

W. Zimmermann. **Ueber die Kettenbruch-Entwickelung einer Function, welche durch die Differentialgleichung $M\frac{dy}{dx} + Ny + Py^2 + Q = 0$, wo M, N, P, Q ganze rationale Functionen sind, definirt ist.** Odessa Ges. X. 1-140.

S. Differentialgleichungen.

Vierter Abschnitt.

Combinationslehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

R. E. ALLARDICE. On a problem in permutations. Edinb. M. S. Proc. VIII. 64-69.

Die gelöste Aufgabe lautet: „Wie viele Halsbänder kann man aus *p* Perlen, *r* Rubinen und *d* Diamanten anfertigen?“ Die Eigentümlichkeit der Aufgabe besteht darin, dass eine allgemeine Lösung in *p*, *r* und *d* allein nicht gegeben werden kann. Die Form der Lösung hängt von der Natur dieser Zahlen ab, ob sie ein gemeinschaftliches Mass besitzen, und wie viele von ihnen gerade und ungerade sind. Alle möglichen Fälle sind nicht erledigt worden, doch sind mannigfache Formen betrachtet.

Gbs. (Lp.)

T. B. SPRAGUE. On the different possible non-linear arrangements of eight men on a chess-board. Edinb. M. S. Proc. VIII. 30-43.

Die zu lösende Aufgabe ist die bekannte Aufgabe der acht Königinnen. Zwölf wesentlich verschiedene Lösungen werden mehr durch den Versuch als durch mathematische Schlüsse ermittelt. (Bekanntlich ist die gesamte Anzahl der Lösungen 92. Lp.)

Gbs. (Lp.)

M. Frolov. Sur les permutations carrées. J. de Math. spéc. (3) IV. 8-11, 25-30.

Der Verfasser versteht unter „quadratischen" Permutationen von n Elementen einen Satz solcher n Permutationen, bei denen kein Element eine Stelle einnimmt, die es schon einmal besetzt hatte. Ordnet man daher diese Permutationen in Quadratform unter einander, so sind ausser den Horizontalreihen auch die Verticalcolonnen Permutationen der gegebenen n Elemente. Für die Anzahl der verschiedenen Typen aller quadratischen Permutationen von n Elementen hat der Verf. durch Induction bis $n=7$ eine Recursionsformel gefunden, die er dann für ein allgemeines n aufstellt, ohne aber einen Beweis für sie liefern zu können. (Vergl. das folgende Referat.) Lp.

A. Cayley. On latin squares. Mess. (2) XIX. 135-137.

Wenn in jeder Zeile eines Quadrates mit n^2 Zellen dieselben n Buchstaben $a, b, c, \dots$ so angeordnet werden, dass kein Buchstabe zweimal in derselben Colonne vorkommt, so erhalten wir ein lateinisches Quadrat nach einer Benennung von Euler. In ein solches Quadrat können wir die Substitutionen einschreiben, durch welche wir von der Grundlinie zu sich selbst (natürlich also die Substitution 1) und zu jeder der anderen Zeilen bezw. übergehen. Somit erhalten wir einen Satz von n Substitutionen, die eine „Gruppe" bilden können, und wenn dem so ist, können wir umgekehrt aus der Gruppe das lateinische Quadrat construiren. Aber nicht jedes lateinische Quadrat hängt so mit einer Gruppe von n Substitutionen zusammen. In dem vorliegenden Aufsatze werden die Fälle $n=2, 3, 4, 5$ betrachtet. (Vergl. das vorangehende Referat.) Glr. (Lp.)

F. Herrmann. Ueber die Theorie der magischen Systeme. Ber. d. Freien deutsch. Hochstifts. 117-129.

Um die Sonderstellung der Eck- und Randfelder eines magischen Quadrates mit der Seitenzahl n zu beseitigen, bildet

der Verf. dasselbe auf einer cyklidischen Fläche ab, welche durch n Meridian- und n Parallelschnitte in n^2 Zellen geteilt wird. Alsdann bilden immer n in derselben Fortschreitungsrichtung (z. B. orthogonal oder diagonal) liegende Zellen eine geschlossene Kette. Um die Problemstellung zu verallgemeinern, wird zunächst die Forderung erhoben, alle Zellen mit den n^2 Combinationen zweier Reihen von je n Elementen so auszufüllen, dass in allen Ketten von einer oder mehreren Arten durch Auffassung der Combinationen als Summen oder Producte dieselben Summen erzielt werden. Erschöpfen die Combinationen im ersten Falle alle Zahlen von 1 bis n^2, so stellt die Abbildung ein gewöhnliches magisches Quadrat vor. Der Verf. giebt Regeln über Bildung und Anzahl solcher Ketten und bespricht u. a. die verschiedenen Grade und Bedingungen der Vollkommenheit in den magischen Quadraten. Gelegentlich einer Schlussbetrachtung des Verfassers über die Ausdehnung des Problems auf Würfel mittels einer analogen Abbildung derselben im vierdimensionalen Raume sei bemerkt, dass Ref. das Problem der Herstellung und ebenen Abbildung magischer Würfel von beliebiger Dimensionenzahl schon vor längerer Zeit gelöst hat, worüber Jahrgang 1892 der F. d. M. Näheres berichten wird.

Schg.

Th. Parmentier. Sur les carrés magiques. Assoc. Franç. Limoges XIX. 88-99.

I. Eine neue allgemeine Methode zur Bildung magischer Quadrate aus einer ungeraden Anzahl von Elementen. (Man schreibt die Zahlen 1 bis n^2 in ihrer natürlichen Folge auf die Quadrate und dreht die ganze Figur um ihren Mittelpunkt um einen Winkel von 45°, wobei ein leicht zu findendes Gesetz zu befolgen ist.) II. Magische Quadrate aus discontinuirlichen Zahlen (die dadurch entstehen, dass n von den n^2 Zahlen eines gewöhnlichen magischen Quadrates um eine und dieselbe Zahl vergrössert werden). III. Magische Quadrate nach Producten oder logarithmische magische Quadrate (aus den Gliedern einer geometrischen Progression).

Lp.

ÉD. LUCAS. Sur les carrés magiques et leurs applications à l'arithmétique. Assoc. Franç. Limoges XIX_1. 148.

NASH. Solution of question 10144. Ed. Times LIII. 36-38.

Die von Hrn. Nash gestellte und gelöste Aufgabe lautet: „Unter der Annahme, dass der Weg eines Springers vollständig bestimmt ist, wenn das erste und das letzte Quadrat gegeben sind, soll gezeigt werden, dass 136 verschiedene Wege bestehen, unter denen keiner das Spiegelbild eines anderen ist oder aus einem anderen durch Drehung des Schachbrettes abgeleitet werden kann. Bei 21 von diesen Wegen stehen die Endquadrate um einen Springerzug von einander ab. Verbindet man diese Quadrate, so kann ein Weg beschrieben werden, von welchem die übrigen zwanzig zurücklaufenden Wege entweder durch Drehung des Bretts oder durch Spiegelung hergeleitet werden können. Somit kommen die 136 auf 116 zurück". Lp.

S. RINDI. Una osservazione relativa ad alcune quistioni di probabilità. Besso Per. mat. V. 41-42.

Zu den von Herrn Bertrand (Calcul des probabilités, Paris 1889) angeführten Beispielen von der Unbestimmtheit des Wahrscheinlichkeitsbegriffes bei einer unendlich grossen Anzahl von möglichen Fällen fügt der Verfasser ein neues hinzu. Es folgt dann eine auf ein von Herrn Murer behandeltes Problem sich beziehende Angabe, worüber man Giudice, Sopra una quistione di probabilità etc. vergleiche (Besso Per. mat. V. 73-80, F. d. M. XXI. 1889. 205). Vi.

SEYDLER. Sur le problème de Saint-Pétersbourg. C. R. CX. 326-328.

Peter und Paul spielen unter den bekannten Bedingungen. Der Verfasser fügt noch die neue Bedingung hinzu, dass die Münze n-mal, nicht mehr und nicht weniger, geworfen werden

muss. Der Einsatz von Paul wird dann zu

$$f(n) = \frac{n(n+3)}{8}$$

ermittelt. Ferner ist die wahrscheinliche Anzahl von Partien bei der Hypothese von n Würfen:

$$\varphi(n) = \frac{n+1}{2}.$$

Daher muss der mittlere Einsatz des Paul für eine Partie

$$N = \frac{f(n)}{\varphi(n)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)}$$

sein. Beim Petersburger Problem ist nun das Spiel nur dann beendigt, wenn zum ersten Mal Kopf fällt; dieses führt aber auf die Hypothese eines unendlichen n, so dass hier

$$N = \lim_{n=\infty} \frac{n(n+3)}{4(n+1)} = \infty$$

wird. Bö.

Sydney Lupton. The St. Petersburg problem. Nature XLI. 165-166.

F. Y. Edgeworth. Problems in probability. No. 2. Competitive examinations. Phil. Mag. (5) XXX. 171-188.

Hinsichtlich der ersten Aufgabe vergleiche man F. d. M. XVIII. 1886. 176. In einem Aufsatze über die Statistik der Prüfungen (Journ. of the Royal Statistical Society) hat der Verf. eine Abschätzung der Tragweite vorgenommen, bis zu welcher die Ergebnisse der Rangprüfungen von der Zufälligkeit abhängen, dass von zwei gleich befähigten Prüfern der eine oder der andere die Leistungen der Prüflinge censirt. Gegenwärtig werden die mathematischen Schlüsse erläutert. Das fundamentale Axiom liegt in dem Satze, dass die derselben Leistung von verschiedenen Prüfern erteilten Censuren sich gemäss irgend einem Fehlergesetz oder einer Leichtigkeitscurve anordnen lassen, wobei für dieselbe Klasse von Prüfern und Leistungen eine Constanz eintritt. Doch ist es nicht möglich, in einem Auszuge von mässiger Länge die An-

wendung dieses Axioms hinreichend zu erläutern; es muss daher auf die Abhandlung selbst verwiesen werden. Gbs. (Lp.)

H. Delannoy. Problèmes divers concernant le jeu. Assoc. Franç. Limoges XIX. 29-35.

Der Verf. giebt im ersten Teile der Assoc. Franç. S. 144-145 als Inhalt seines Vortrags folgende Sätze an:

I. Die Differenz zwischen den Gewinnen und den Verlusten eines Spielers nähert sich, abgesehen vom Vorzeichen, dem Werte $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\sqrt{n}$, wenn die Anzahl n der Partien unbegrenzt wächst. (Experimentell hatte jemand den Wert $0{,}8\sqrt{n}$ gefunden, während $\sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0{,}7978$ ist.) II. Die Mittelzahl der Gleichgewichte während des Austrags von $A = 2n$ oder $2n+1$ Partien ist

$$\frac{1}{2^{2n}}\sum k2^k C_{2n-k}^{n-k} \qquad (k=1, 2, \ldots, n).$$

Unter „Gleichgewicht" ist der Fall verstanden, bei welchem die Anzahl der verlorenen Partien gleich derjenigen der gewonnenen ist. III. Wenn ein Spieler a Partien verloren hat, so ist die Wahrscheinlichkeit für ihn, mindestens a Partien beim Eingehen von A neuen zu gewinnen:

$$\frac{1}{2^A}(C_A^0 + C_A^1 + C_A^2 + \cdots + C_A^{\frac{1}{2}(A-a)}),$$

wenn man für $\frac{1}{2}(A-a)$ das grösste darin enthaltene Ganze nimmt. IV. Die Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen, in einem gut gemischten Spiele von 32 Karten eine Folge von 8, 7, ..., 1 Karten derselben Farbe zu haben. Eine Tabelle dieser Wahrscheinlichkeiten macht den Schluss. Lp.

L. Lorenz. Valgkredssystemer og Minoritäten. Nyt Tidss. for Math. I. 40-47.

T. N. Thiele. Om Kredsvalgproblemet. Nyt Tidss. for Math. I. 56-63.

Beide Arbeiten beschäftigen sich mit dem Problem: Durch wie viele Stimmen wird eine Partei auf dem Reichstage repräsentirt, wenn angenommen wird, dass nur zwei Parteien vorhanden sind, und dass man die verhältnismässige Grösse der Parteien kennt? Beide Abhandlungen zeigen, dass das Verhältnis der Repräsentation der Majorität zu der Repräsentation der Minorität immer grösser wird als das Verhältnis der Parteien. Die erste Abhandlung nimmt aber an, dass der Ausfall der Wahl nur von der Grösse der Partei und der Anzahl der Wahlkreise abhängt. Das Resultat besagt hier, dass, wenn die Minorität nicht unter 30 Procent und die Anzahl der Kreise nicht unter 10 ist, die Repräsentation von der Anzahl der Kreise unabhängig wird.

Die andere Abhandlung wendet dagegen ein, dass der Ausfall der Wahl vielmehr von der Anzahl der unabhängigen oder leitenden Stimmen in jedem Kreise abhängt, und kommt zu dem Resultate, dass der Vorteil der Majorität abnimmt, wenn die Anzahl der Kreise wächst. V.

J. Curie. Étude des meilleurs moyens de réaliser la représentation proportionnelle des différentes opinions dans les élections. Assoc. Franç. XVIII. Paris. 993-1016.

Zur Lösung der Frage, welche Wahleinrichtungen getroffen werden müssen, damit die Anzahl der Gewählten einer Partei proportional der Anzahl der Wähler derselben Partei sei, wird unter Kritik der gebräuchlichen Verfahrungsarten ein Vorschlag gemacht, der nach Ansicht des Verfassers die „proportionale Vertretung“ verbürgt. Lp.

J. J. Sylvester. On a funicular solution of Buffon's „problem of the needle“ in its most general form. Acta Math. XIV. 185-205.

Nach einem kurzen historischen Ueberblick über das Buffon'sche Nadelproblem verallgemeinert der Verfasser die Aufgabe,

um der Theorie „the finishing stroke" zu geben, indem er die Nadel durch eine beliebige Anzahl mit einander fest verbundener Figuren in einer Ebene ersetzt. Er führt den Begriff der conjunctiven Wahrscheinlichkeit für den Fall ein, dass alle Figuren ein und dieselbe Linie schneiden, und den Begriff der disjunctiven Wahrscheinlichkeit für den Fall, dass eine oder mehrere Figuren dieselbe Linie schneiden. Sind n Figuren gegeben, und bezeichnet p_i die Summe der conjunctiven, ω_i die der disjunctiven Wahrscheinlichkeiten, so ist „by a universal theorem of logic":

$$\omega_{n+1} = \sum_{i=1}^{i=n+1} (-1)^{i+1} p_i$$

und

$$p_{n+1} = \sum_{i=1}^{i=n+1} (-1)^{i+} \omega_i.$$

Die Methode des Verfassers besteht nun darin, dass er die gegebenen Figuren der Reihe nach ordnet und sie dann derart mit einem Bande umzieht, dass einmal das Band sich zwischen je zwei aufeinander folgenden Figuren kreuzt, und dann so, dass es sich nicht kreuzt. Aus der Länge dieser Bandteile werden dann unter Anwendung des Barbier'schen Princips die gesuchten Wahrscheinlichkeiten bestimmt. Der Verfasser discutirt sein Verfahren ausführlich für den Fall $n = 3$. Zum Schlusse wird der Fall betrachtet, dass die gegebenen Figuren aus zwei begrenzten geraden Strecken bestehen. Ueber den Fall von drei geraden Strecken sagt Herr Sylvester: „Die Gesamtheit der Fälle für 3 gerade Linien ist derartig, dass allein schon ihre vollständige Aufzählung ein besonderes Studium erfordern würde; deshalb überlasse ich es anderen, sowohl hinsichtlich der Principien, als auch der Einzelheiten den Gegenstand weiter zu verfolgen."

Bö.

G. Frattini. Intorno al significato di alcune questioni di probabilità. Besso Per. mat. V. 72-73.

F. Giudice. Sopra una questione di probabilità trattata recentemente dal Prof. Murer. Besso Per. mat. V. 72-73.

Bericht im vorhergehenden Jahrgange S. 205.

F. GALTON. Dice for statistical experiments. Nature XLII. 13-14.

Aufgaben über geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte von J. J. SYLVESTER, D. BIDDLE, A. W. ROBINSON, WOLSTENHOLME, P. H. SCHOUTE, A. MARTIN, S. MUKHOPADHYAY stehen in Ed. Times LII. 30-31, 34-35, 47, 65, 97-103; LIII. 80-81, 116.

P. A. NEKRASSOFF. Die Umkehrung des Bernoulli'schen Theorems. Mosk. Physik. Abt. III. 45-47. (Russisch.)

Enthält den Beweis der Umkehrung des Bernoulli'schen Theorems, ohne die gleiche apriorische Wahrscheinlichkeit aller Hypothesen vorauszusetzen. Wi.

W. GOSIEWSKI. Beweis des Gauss'schen Fehlergesetzes. Prace mat.-fiz. II. 223-227. (Polnisch.)

Auf zwei Voraussetzungen gründet der Verfasser diesen neuen Beweis der Gauss'schen Formel, nämlich: dass die Wahrscheinlichkeit des zufälligen Fehlers $x-x_\mu$ eine continuirliche, nach x differentiirbare Function von $x-x_\mu$ ist, und dass die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens des Systems $x-x_1$, $x-x_2$, ... $x-x_\mu$ dieselbe ist wie die der Erlangung der Summe $u\varepsilon=(x-x_1)+(x-x_2)+\cdots(x-x_\mu)$. Diese Voraussetzungen und namentlich die zweite führen aber nicht zum Ziele, was Herr Rusjan in einem, im nächsten Bande zu besprechenden Artikel gezeigt hat. Dn.

M. A. BARANIECKI. Ueber eine analytische Beweisführung im I. Bande der „Prace mat.-fiz.“. Prace mat.-fiz. II. 220-222. (Polnisch.)

Kritik des von Herrn Gosiewski in dem Aufsatze „Ueber die Wahrscheinlichkeit zufälliger Fehler“ (F. d. M.

XX. 1888. 227) für das Gauss'sche Fehlergesetz gegebenen Beweises. Dn.

E. Czuber. Zur Theorie der Beobachtungsfehler. Monatsh. f. M. I. 457-464.

Es wird folgender Satz bewiesen: Befolgen die wahren Fehler $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ von n Beobachtungen einer Grösse X das Gauss'sche Fehlergesetz $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2}$, so sind die Verbesserungen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ der Beobachtungen auf das arithmetische Mittel einem Gesetz von derselben Form, jedoch mit einem in dem Verhältnisse $\sqrt{n} : \sqrt{n-1}$ grösseren Präcisionsmass unterworfen.

Hieraus ergeben sich sofort die Ausdrücke für den mittleren und den durchschnittlichen Fehler. Jedes mögliche System $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ hat nun der Bedingung $[\lambda] = 0$ zu genügen. Mit Rücksicht hierauf wird die Wahrscheinlichkeit eines solchen Systems durch

$$\sqrt{n}\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^{n-1} e^{-h^2[\lambda\lambda]} d\lambda_1 \ldots d\lambda_{i-1}\, d\lambda_{i+1} \ldots d\lambda_n$$

ausgedrückt, wo $[\lambda\lambda]$ sich auf alle λ bezieht und i ein beliebiger der n Zeiger ist. Sowohl dieser Ausdruck, als auch derjenige, der entsteht, wenn man von der Bedingung $[\lambda] = 0$ absieht, führen beide wieder auf die bekannten Formeln für den mittleren und den durchschnittlichen Fehler. Bö.

E. Czuber. Bemerkung über die wahrscheinlichsten Werte beobachteter Grössen. Hoppe Arch. (2) IX. 97-101.

Ist $\varphi(x)$ das Fehlergesetz, und sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die zu n Beobachtungen gehörigen Beobachtungsfehler, so wird das wahrscheinlichste Wertsystem der gesuchten Grössen $p, q, r, \ldots$ aus der Bedingung, dass

$$\Omega = \varphi(x_1)\varphi(x_2) \ldots \varphi(x_n)$$

ein Maximum sein soll, erhalten. Ist x ein zufälliger Fehler im gewöhnlichen Sinne, so ist die Möglichkeit eines Maximums aus

den Eigenschaften von $\varphi(x)$, wie sie aus der Erfahrung sich ergeben, unmittelbar einleuchtend. Anders verhält es sich aber, wenn der Fehler x, ohne dass er aufhört, dem Zufall unterworfen zu sein, einem besonderen Gesetze folgt. Unter dieser Voraussetzung zeigt der Verfasser im Anschluss an die Bessel'sche „Untersuchung über die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler", die aus einer einzigen Fehlerursache entspringen, an drei einfachen Beispielen für directe Beobachtungen, dass dann die Eigenschaften von φ solcher Art sein können, dass Ω überhaupt keinen ausgezeichneten Wert annimmt, oder auch nur ein Minimum werden kann, oder endlich einen grössten Wert erreicht, ohne eigentlich ein Maximum zu werden. Im ersten Fall wird die Bestimmung von p illusorisch, im zweiten ist der dem Minimum von Ω entsprechende Wert der vorzugsweise zu wählende, im dritten Falle endlich kann es vorkommen, dass der grösste oder kleinste Beobachtungswert der wahrscheinlichste Wert der gesuchten Grösse wird. Bö.

P. Pizzetti. Sur la théorie des observations arrondies. Astr. Nachr. CXXIV. No. 2955. 33-38.

Im Anschluss an eine Abhandlung des Herrn Lehmann-Filhés (Astr. Nachr. CXX. No. 2876. 305-312, F. d. M. XXI. 1889. 224-225) bemerkt der Verfasser, dass der Mittelwert der Beobachtungsfehler für eine abgerundete Beobachtung nicht mehr Null ist, wie es doch die Zulässigkeit der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate erfordert. Herr Lehmann-Filhés hatte deshalb auch eine besondere Annahme über den Mittelwert der Beobachtung innerhalb der Abrundungsgrenzen machen müssen, um dieser Bedingung zu genügen. Der Verfasser zeigt nun, dass der Mittelwert der Beobachtungsfehler abgerundeter Beobachtungen so schnell mit der Amplitude 2ε der Abrundungsgrenzen abnimmt, dass er selbst unter der Annahme, dass dieses Intervall den doppelten Betrag des mittleren Fehlers der Beobachtungen erreicht, zu vernachlässigen ist, wenigstens im Hinblick

auf den Grad von Annäherung, den die Methode der kleinsten Quadrate überhaupt zulässt. Bö.

R. Lipschitz. Sur la combinaison des observations.

C. R. CXI. 163-166.

In der Abhandlung: „Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen" (1816) hat Gauss, indem er mehrere Probleme von Laplace verallgemeinerte, ohne Beweis Formeln für die Wahrscheinlichkeit gegeben, dass die Summe der n^{ten} Potenzen von m wahren Beobachtungsfehlern $v, v', \dots, v^{(m-1)}$ zwischen bestimmten Grenzen liege, wenn dabei für ein ungerades n jedes v vorher mit der seinem Vorzeichen entsprechenden Einheit ε multiplicirt worden ist. Gauss betont, dass diese Formeln für jedes Fehlergesetz, das der Bedingung $\varphi(x)=\varphi(-x)$ genügt und für wachsende x nicht wächst, gelten. Der Verfasser giebt nun, ebenfalls unter dieser Voraussetzung, einen Beweis der Gauss'schen Formeln, indem er den Dirichlet'schen Discontinuitätsfactor in einer entsprechend geänderten Form heranzieht und bei den auftretenden Reihenentwickelungen noch die Glieder zweiter Ordnung beibehält. Die Resultate werden in folgender Form gegeben:

Es sei

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)x^n dx = L^{(n)} \quad (n \text{ gerade}),$$

$$2\int_{0}^{\infty} \varphi(x)x^n dx = K^{(n)} \quad (n \text{ ungerade}).$$

Die Wahrscheinlichkeiten, dass

1. $$\frac{v^n + v'^n + \dots + (v^{(m-1)})^n}{m} \quad (n \text{ ungerade}),$$

2. $$\frac{v^n + v'^n + \dots + (v^{(m-1)})^n}{m} - L^{(n)} \quad (n \text{ gerade}),$$

3. $$\frac{\varepsilon v^n + \varepsilon' v'^n + \dots + \varepsilon^{(m-1)}(v^{(m-1)})^n}{m} - K^{(n)} \quad (n \text{ ungerade})$$

zwischen $-g$ und $+g$ liegen, sind dann

$$\Omega_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \sqrt{\frac{m}{2L^{(2n)}}}\, g e^{-\frac{m}{2L^{(2n)}} g^2 y^2}\, dy,$$

$$\Omega_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \sqrt{\frac{m}{2(L^{(2n)} - L^{(n)}L^{(n)})}}\, g e^{-\frac{m}{2(L^{(2n)} - L^{(n)}L^{(n)})} g^2 y^2}\, dy,$$

$$\Omega_3 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \sqrt{\frac{m}{2(K^{(2n)} - K^{(n)}K^{(n)})}}\, g e^{-\frac{m}{2(K^{(2n)} - K^{(n)}K^{(n)})} g^2 y^2}\, dy.$$

Die zwei letzten Formeln enthalten die Gauss'schen Resultate, die erste ist für $n = 1$ bereits von Dirichlet abgeleitet worden.

Bö.

W. J. Loudon. A formula in the „theory of least squares“. Nature XLI. 394.

Die Formel, welche der Verf. in den Lehrbüchern vermisst, ist:

$$\Sigma(x^2) = \Sigma(v^2) + \frac{\{\Sigma(x)\}^2}{n}.$$

Lp.

J. A. Kleiber. Empirische Formeln.

J. A. Kleiber. Ueber die beste Ordinate bei der Interpolation nach der Methode der kleinsten Quadrate. Kasan Ges. VIII. 232-245. (Russisch.)

Die beiden Artikel des leider früh verstorbenen Mathematikers bilden die Fortsetzung und die weitere Entwickelung der Resultate, welche in einer Abhandlung „Theorie der Ausgleichung der Beobachtungen“ (Kasan, 1888; vgl. F. d. M. XX. 1888. 220) erzielt wurden.

Wi.

A. Quiquet. Essai d'une théorie concernant une classe nombreuse d'annuités viagères sur plusieurs têtes et exposition d'une méthode propre à les formuler rapidement. C. R. CXI. 337-340.

Für gewisse lebenslängliche Leibrenten, die sich auf meh-

rere Köpfe erstrecken, und die der Verfasser rentes de simple survivance nennt, wird der folgende einfache Satz entwickelt:

Jede solche Rente ist eine lineare und homogene Function der verschiedenen lebenslänglichen Leibrenten von je 1 Fr., die zur Lebenszeit aller in Betracht kommenden einzelnen Köpfe, und während ihrer Lebenszeit in Gruppen zu zwei, zu drei u. s. w. zahlbar sind.

Eine einfache Regel erlaubt dann, für jeden gegebenen bestimmten Fall die Coefficienten dieser linearen Function schnell zu berechnen. Bö.

W. Lazarus. Die sociale Gesetzgebung und die Mathematik. Hamb. Mitt. II. 158-162.

Schon seit 50 Jahren finden sich Anwendungen der Mathematik auf alle Gebiete der statistischen Forschung, der Volkswirtschaft, der Versicherung sowie der Gesellschaftswissenschaft. Die Methode auf diesen Gebieten wird immer mehr mathematisch. Trotzdem konnte es den Verfasser noch freudig überraschen, dass der Begründung des Gesetzentwurfs betreffs der Alters- und Invalidenversicherung eine „mathematische Anlage“ von 12 Folioseiten für die Mitglieder des Reichstags beigefügt war. Obwohl nun der Gesetzentwurf im Reichstag so wesentlich umgewandelt ist, dass die meisten Entwickelungen dieser Anlage hinfällig geworden sind, macht der Verfasser dennoch gegen die daselbst gegebene Berechnung des Kapitalwertes einer Invalidenrente Bedenken geltend, weil diese Formeln immer als Grundlage von weiteren Entwickelungen anzusehen seien. Die „Anlage“ bezeichnet nämlich die Wahrscheinlichkeit für einen Invaliden vom Alter x, vor Erreichung des Alters $x+1$ zu sterben, durch ${}^{i}s_x$, ohne dabei zu unterscheiden, seit wie lange die Invalidität bestanden hat; diese Unterscheidung muss aber gemacht werden. Die mit Rücksicht hierauf verbesserte Formel wird kurz abgeleitet. Bö.

· Weitere Litteratur.

E. von Böhm-Bawerk. Capital and interest; a critical history of economic theory. Translated by W. Smart. London. Macmillan and Co. [Nature XLII. 462-463.]

R. Giffen. The growth of capital. London. G. Bell and Sons. (1889.) [Nature XLI. 553-556.]

A. Marshall. Principles of economics. Vol. I. London. Macmillan and Co. [Nature XLII. 362-364.]

L. Marie. Traité mathématique et pratique des opérations financières. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

A. P. Violeine. Nouvelles tables pour les calculs d'intérêts composés, d'annuités et d'amortissement. 5e éd., revue et augmentée par Laass d'Aguen. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

G. Gardenghi. Delle pensioni vitalizie nel caso che le somme versate dagli assicurati siano da restituirsi, senza interessi, agli eredi. Besso Per. mat. V. 97-101.

P. de Lafitte. Essai d'une théorie rationnelle des sociétés de secours mutuels. 2e éd. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

M. Mack. Das Risico bei Lebensversicherungen. (Aus A. Ehrenzweig's „Assecuranz-Jahrb. XII"). Selbstverl. d. Verf, Druck v. Plaut & Co., Wien. Diss. München. 62 S. 8°.

Fünfter Abschnitt.

Reihen.

Capitel 1.

Allgemeines.

E. Cesáro. Sur une question de limites. Mathesis X. 25-28.

Beweis der Regel von l'Hospital für die Functionen einer ganzzahligen Variable und Anwendungen. Folgendes ist die Fassung dieser Regel, welche besser „Cesáro'sche Regel" heissen sollte: „Wenn für ein ganzes, unendlich wachsendes n die Grössen a_n und b_n der Null zustreben, während b_n ohne Ende abnimmt, so ist

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}},$$

falls die zweite Grenze vorhanden ist. Mn. (Lp.)

A. La Maestra. Sulle successioni. Batt. G. XXVIII. 241-244.

Eine beliebige Folge ist immer zerlegbar in eine endliche oder unendliche Anzahl anderer Folgen, welche gegen eine Grenze convergiren. Die Grenzen dieser Folgen sind gleich, und die Anzahl dieser Folgen ist unendlich, wenn die ursprüngliche Folge gegen eine Grenze convergirt; diese Grenze kann $+\infty$, 0, $-\infty$ sein, wenn die ursprüngliche Folge bezüglich gegen

$+\infty, 0, -\infty$ convergirt. Die Grenzen sind verschieden, und die Anzahl der Folgen, in welche die ursprüngliche zerlegbar ist, ist endlich oder unendlich, wenn die Glieder der Folge nicht beständig wachsen oder abnehmen. Alle Glieder der ursprünglichen Folge bilden einen Teil der partiellen Folgen, und ein beliebiges, aus der ursprünglichen Folge willkürlich herausgenommenes Glied gehört einer (und auch nur einer) Folge an.

Wz.

A. La Maestra. Sopra un teorema di Cauchy. Batt. G. XXVIII. 36-37.

Bezieht sich auf die von einer Folge von Gliedern $a_1, a_2, a_3, \dots$ zu erfüllende Bedingung, wenn dieselbe gegen eine endliche, bestimmte Grenze convergiren soll.

Schg.

A. La Maestra. Généralisation d'un théorème d'Abel. C. R. CXI. 782-784.

Eine Reihe $u_1+u_2+u_3+\cdots$ hört nicht auf zu convergiren, wenn ihre Glieder mit Zahlen $a_1, a_2, a_3, \dots$ multiplicirt werden, welche gegen Null convergiren, und von denen jede beständig kleiner oder grösser als das arithmetische Mittel aller vorhergehenden ist, vorausgesetzt, dass $\lim nu_n$ für $n=\infty$ in einem endlichen Intervalle schwankt. Dasselbe gilt, wenn die Zahlen b_n:

$$b_n=\frac{a_1\mu_1+a_2\mu_2+\cdots+a_n\mu_n}{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n}$$

beständig wachsen oder abnehmen und endlich bleiben, und wenn die Coefficienten μ so beschaffen sind, dass für $n=\infty$ die Grenze von

$$\varrho_n=(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n)\frac{u_{n+1}}{\mu_{n+1}}$$

existirt, wenn b_n nicht gegen Null convergirt, oder dass ϱ_n in einem endlichen Intervall schwankt, wenn $\lim b_n=0$ ist.

Wz.

A. DE SAINT-GERMAIN. Généralisation de la règle de convergence de Gauss. Darboux Bull. (2) XIV. 212-215.

Es sei U eine Reihe positiver Glieder $u_0, u_1, u_2, \dots$ von der Art, dass

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^\lambda + An^{\lambda-\alpha} + Bn^{\lambda-\beta} + Cn^{\lambda-\gamma} + \cdots + Fn^{\lambda-\varphi}}{n^\lambda + an^{\lambda-\alpha} + bn^{\lambda-\beta} + cn^{\lambda-\gamma} + \cdots + fn^{\lambda-\varphi}}$$

ist; $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ seien ganze Zahlen, $\alpha < \beta < \gamma < \dots$, ferner sei $B-b$ die erste der Differenzen $A-a$, $B-b$, $C-c$, ..., welche nicht verschwindet; dann gilt Folgendes:

Je nachdem $B-b>0$ oder <0 ist, nehmen die Glieder der Reihe U von einer gewissen Stelle an beständig zu oder ab.

Ist $\beta > 1$, so convergiren diese Glieder gegen eine endliche Grenze; wenn β nicht grösser als 1 ist, so nähern sie sich ∞ oder 0.

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Convergenz der Reihe U ist $\beta < 1$ und $B-b<0$, oder $\beta = 1$ und $B-b<-1$. Wz.

G. FOURET. Remarque sur les cas douteux à certains caractères de convergence des séries. Nouv. Ann. (3) IX. 222-226.

F. GIUDICE. Osservazioni sulle serie. Un nuovo criterio di convergenza per le serie a termini positivi. Per un recente articolo del sig. Fouret. Palermo Rend. IV. 278-285.

Der Satz des Herrn Fouret beschäftigt sich mit dem Verhältnis der auf $u_n : u_{n+1}$ und $\sqrt[n]{u_n}$ beruhenden Convergenzkriterien und lautet: Wenn $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ eine Reihe positiver Glieder und für hinreichend grosse Werte von n das Verhältnis $u_{n+1} : u_n$ kleiner als eine gewisse Zahl $\lambda < 1$ (resp. grösser als $\lambda > 1$) ist, so kann man eine Zahl $\mu < 1$ (resp. $\mu > 1$) von der Beschaffenheit finden, dass für hinreichend grosse Werte von n der Ausdruck $\sqrt[n]{u_n}$ kleiner (resp. grösser) als μ ist.

Dagegen kann nach Herrn Giudice das Verhältnis $u_{n+1}:u_n$ beliebige Unregelmässigkeiten darbieten; als Beispiel wird eine einfache convergente Reihe angegeben, für welche es wenig wahrscheinlich ist, dass dies Verhältnis kleiner als eine ganz beliebig gegebene grosse Zahl ist. Ausserdem wird für eine aus der Reihe $u_1+u_2+u_3+\cdots$ in gewisser Weise hergeleitete Reihe $v_1+v_2+v_3+\cdots$ eine angenäherte Restberechnung durchgeführt, wenn die Summe und der Rest der ersten Reihe bekannt ist. — Endlich wird gezeigt: Damit die Reihe positiver Glieder $u_1+u_2+u_3+\cdots$ convergent sei, ist notwendig und hinreichend, dass eine Function a_n von der Art bestimmt werden kann, dass für alle Werte von n

$$a_n>0,\ \frac{u_n}{u_{n+1}}\gtreqless a_n\left(1+\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

ist. Wz.

F. Giudice. Sulle serie a termini positivi. Batt. G. XXVIII. 283-304.

Aus der grossen Anzahl von Sätzen führe ich folgende an: Ist $u_1+u_2+u_3+\cdots$ eine Reihe positiver, beständig abnehmender Glieder und convergirt nu_n nicht gegen Null, so divergirt die Reihe.

Wenn die Reihe $u_1+u_2+u_3+\cdots$ $(u_n>0)$ convergent ist und

$$\frac{v_n}{v_{n+1}}=\theta_{n+1}\frac{u_n}{u_{n+1}},\quad \theta_n\gtreqless 1$$

ist, so ist auch $v_1+v_2+v_3+\cdots$ convergent.

Wenn $u_1+u_2+u_3+\cdots$ eine divergente Reihe positiver Glieder und

$$v_n>0,\quad \frac{v_n}{v_{n+1}}=\theta_n\frac{u_n}{u_{n+1}},\quad \theta_n\lesseqgtr 1$$

ist, so ist auch $v_1+v_2+v_3+\cdots$ divergent.

Wenn $\alpha_n>\alpha_{n-1}$, $\lim\alpha_n=\infty$, $\varrho=0$ ist, und wenn p hinlänglich gross angenommen wird, so dass $l_{k-1}p>1$ ist, so ist die Reihe

$$\sum_{n=p}^{\infty}\frac{\alpha_n-\alpha_{n-1}}{\alpha_{n-1}l\alpha_{n-1}\cdots l_k\alpha_{n-1}}$$

convergent und hat die Summe

$$C = \lim(\tau_n - \log \sigma_n);$$

für $a_n = 1$ ist C die Euler'sche Constante.

Ersetzt man in der für das Kummer'sche Convergenzkriterium massgebenden Function a_n durch $a_n\sigma_n$ und untersucht der Reihe nach die Ausdrücke

$$A_n = \left(a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}\right)\sigma_n; \quad A'_n = (A_n - 1)\log\sigma_n, \ \ldots,$$
$$A''_n = (A'_n - 1)\log\log\sigma_n, \ldots,$$

so ist die Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ convergent oder divergent, je nachdem einer dieser Ausdrücke eine Grenze hat, die >1 oder <1 ist. Ist die Convergenz der Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ durch $\lim A_n = \lambda\,(\lambda > 1)$ nachgewiesen, so ist $\lim a_n u_n = 0$, und das Product aus $a_n u_n$ und jeder Potenz von σ_n, deren Exponent $<\lambda$ ist, hat λ zur Grenze.

Ausserdem beschäftigt sich der Verfasser noch mit einer Function $G(1+x)$, die eine Verallgemeinerung der Weierstrass'schen Function Γ darstellt, und mit der Grenze der Ausdrücke $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n):n$, $[\lambda(1) + \lambda(2) + \cdots + \lambda(n)]:n$, wo $\lambda(n)$ die Liouville'sche Function bezeichnet, die gleich $+1$ oder -1 ist, je nachdem n aus einer geraden oder ungeraden Zahl von Primfactoren zusammengesetzt ist. Wz.

E. Cesàro. Sur la multiplication des séries. Darboux Bull. (2) XIV. 114-120.

Mit Hülfe des Satzes: „Wenn a_n und b_n für $n = \infty$ gegen a und b convergiren, so ist:

$$\lim \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = ab,\text{“}$$

wird der schon von Abel bewiesene Satz begründet: Wenn die Reihen $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$, $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$ convergiren, so ist, wenn $w_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \cdots + u_n v_1$ gesetzt wird, $w_1 + w_2 + w_3 + \cdots = (u_1 + u_2 + u_3 + \cdots)(v_1 + v_2 + v_3 + \cdots)$.

Mit Hülfe des Satzes: „Wenn für $n = \infty$

$$\lim \frac{a_n}{r^{n-1}} = a, \quad \lim \frac{b_n}{r^{n-1}} = b$$

ist, so ist

$$\lim \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n^{r+s-1}} = \frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)} ab\text{“},$$

erweitert der Verfasser den Abel'schen Satz auf diejenigen Fälle, in denen die drei Reihen mittlere Werte U, V, W besitzen, d. h. wenn

$$\lim \frac{U_1 + U_2 + \cdots + U_n}{n} = U, \quad \lim \frac{V_1 + V_2 + \cdots + V_n}{n} = V,$$

$$\lim \frac{W_1 + W_2 + \cdots + W_n}{n} = W$$

ist, wo

$$U_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \; V_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n, \; W_n = w_1 + w_2 + \cdots + w_n$$

gesetzt ist, dann ist gleichfalls $W = UV$.

Der Verfasser nennt auch dann, wenn U_n, ohne sich einer Grenze zu nähern, einen mittleren Wert U besitzt, die Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ „einfach unbestimmt“ und U ihre Summe. Ist dies nicht der Fall, so setzt er:

$$C_{r+n-1,n-1} U_n^r = u_n + C_{r+1,1} u_{n-1} + C_{r+2,2} u_{n-2} + \cdots + C_{r+n-1,n-1} u_1$$

und nennt dann, wenn U_n^r die erste der Functionen U_n, U_n^1, U_n^2, $\cdots$ ist, welche eine Grenze U besitzt, die Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ „r-fach unbestimmt“ und U ihre Summe. Dann gilt der Satz: Multiplicirt man eine r-fach unbestimmte Reihe mit einer s-fach unbestimmten, so erhält man eine Reihe, die nicht mehr als $(r+s+1)$-fach unbestimmt ist. Wz.

M. Lerch. Bemerkungen zur Reihentheorie. Prag. Ber. 1890. 219-221.

Die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log 2 \log 3 \ldots \log n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots 10^{(n)}},$$

worin (n) die Anzahl der Ziffern von n bedeutet, ist convergent;

trotzdem ist der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ im allgemeinen $\log(n+1)$, wird jedoch für Zahlen von der Form $n = 10^\nu - 1$ beliebig klein für hinreichend grosse Werte von ν.

Der Verfasser verteidigt eine von ihm angegebene Reihe (vergl. F. d. M. XVII. 1885. 207) gegen einen von Herrn Pringsheim (Math. Ann. XXXV. 308) erhobenen Vorwurf.

Wz.

F. Giudice. Prodotti infiniti. Batt. G. XXVIII. 305-313.

F. Giudice. Osservazione alla nota sui prodotti infiniti. Batt. G. XXVIII. 380.

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Convergenz (resp. Divergenz) des unendlichen Productes $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots$, dessen Factoren grösser als 1 sind, besteht in der Existenz einer Function φ_n, deren Wert beständig grösser als 1 ist, und welche die Eigenschaft hat, dass für alle Werte von n

$$\varphi_n : \varphi_{n+1} \overline{\overline{>}} \alpha_{n+1},$$

$$(\text{resp. } (\varphi_n : \varphi_{n+1})^{\frac{1}{\varphi_n - 1}} \overline{\overline{<}} \alpha_{n+1}, \quad \lim_{n=\infty} \varphi_n = 1)$$

ist.

Ausserdem wird eine Methode für die Berechnung eines numerischen unendlichen Productes angegeben und $\Gamma^2(\frac{1}{2}) = \pi$ berechnet.

Wz.

D. André. Sur les produits de facteurs variables. Soc. Philom. Bull. (8) II. 151-153.

Einige Bemerkungen über Folgerungen, welche aus einer Eigenschaft eines Productes einer endlichen Zahl veränderlicher Factoren betreffs der einzelnen Factoren abgeleitet resp. nicht abgeleitet werden können; z. B. wenn das Product während einer gewissen Zeit sich stetig ändert, so darf daraus nicht die stetige Aenderung einzelner Factoren geschlossen werden.

Wz.

O. Ježek. Ueber die Reihenumkehrung. Wien. Ber. XCIX. 191-203.

Es sei die Function $y = f(x)$, welche in der Umgebung der Stelle 0 regulär ist, durch ihr Element:

$$y = \sum_1^\infty \frac{y_k(0)}{k!} x^k$$

gegeben; dann ist die zur Function y umgekehrte und ebenfalls in der Umgebung der Stelle Null reguläre Function durch ihr Element

$$x = \sum_1^\infty \frac{x_n(0)}{n!} y^n, \quad x_n(0) = \frac{\Sigma[n^{\lambda_n} \dots 2^{\lambda_2} 1^{\lambda_1}]\, y_1^{\lambda_1}(0) y_2^{\lambda_2}(0) \dots y_n^{\lambda_n}(0)}{y_1^{2n-1}(0)}$$

definirt, wobei die Zahlen λ_k die sämtlichen, ganzzahligen positiven Lösungen der beiden Gleichungen

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_n = n-1; \quad \lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + n\lambda_n = 2(n-1)$$

darstellen und die Zahlencoefficienten $[n^{\lambda_n} \dots 2^{\lambda_2} 1^{\lambda_1}]$ durch die Recursionsformel

$$[n^{\lambda_n} \dots 2^{\lambda_2} 1^{\lambda_1}] = \Sigma(\lambda_k + 1)\,[(n-1)^{\lambda_n - 1} \dots (k+1)^{\lambda_{k+1} - 1} k^{\lambda_k + 1} \dots 1^{\lambda_1}]$$
$$-(2n-3)\,[(n-1)^{\lambda_n - 1} \dots 2^{\lambda_2 - 1} 1^{\lambda_1}]$$

und durch $[3^1 1^1] = -1$, $[2^2] = 3$ gegeben sind.

Es wird sodann ein Ausdruck für den Quotienten $x_n : x_{n-1}$ abgeleitet, und die Resultate werden auf die Exponentialfunction angewandt. Für die Function $y = W(a, b, x)$, welche durch

$$\frac{y_n(0)}{y_{n-1}(0)} = a - b(n-1), \quad y_1(0) = 1$$

definirt ist, ist die umgekehrte Function $x = W(b, a, y)$.

Endlich wird für y eine ganze rationale Function gesetzt; für $y = 0$ ergiebt sich die Newton'sche Näherungsformel; mit der Anwendung auf die trinomische Gleichung $y = q + px + x^n$ schliesst die Arbeit. Wz.

M. d'Ocagne. Sur les séries récurrentes. Nouv. Ann. (3) IX. 93-97.

Das allgemeine Glied $U_n = a_1 U_{n-1} + a_2 U_{n-2} + \dots + a_p U_{n-p}$ der Reihe U_0, U_1, U_2, ... soll durch die p ersten Glieder U_0, U_1, ..., U_{p-1} und durch die Glieder der entsprechenden Fun-

damentalreihen $u_0, u_1, u_2, \ldots$ ($u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_p u_{n-p}$, $u_0 = u_1 = \cdots = u_{p-2} = 0$, $u_{p-1} = 1$), ferner soll die Summe der Reihe $S = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots$ durch $U_0, U_1, \ldots, U_{p-1}$ und die Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_p$ ausgedrückt werden. Es geschieht in der Form:

$$U_n = U_0 u_{n+p-1} + (U_1 - a_1 U_0) u_{n+p-2} + \cdots + (U_{p-1} - a_1 U_{p-2} - \cdots - a_{p-1} U_0) u_n;$$

$$S = \frac{b_{p-1} U_0 + b_{p-2} U_1 + \cdots + b_1 U_{p-2} + U_{p-1}}{b_p},$$

wo

$$b_1 = 1 - a_1,\ b_2 = 1 - (a_1 + a_2),\ \ldots,\ b_p = 1 - (a_1 + a_2 + \cdots + a_p)$$

ist. Wz.

A. Pringsheim. Zur Theorie der bestimmten Integrale und der unendlichen Reihen. Math. Ann. XXXVII. 591-604.

Der Verfasser beweist den Satz:

Wird $f(x)$ für $x = 0$ ohne Maxima und Minima unendlich, so ist für die Convergenz von $\int_0 f(x)dx$ unter allen Umständen notwendig, dass

$$\lim x f(x) = 0.$$

Dagegen giebt es keine mit verschwindendem x noch so langsam ins Unendliche wachsende Function $\psi\left(\frac{1}{x}\right)$ von der Beschaffenheit, dass auch

$$\lim x \psi\left(\frac{1}{x}\right) f(x) = 0$$

werden müsste. Vielmehr lassen sich zu jeder solchen Function $\psi\left(\frac{1}{x}\right)$ Functionen $f(x)$ angeben, für welche das betreffende Integral convergirt, während die obere Unbestimmtheitsgrenze des obigen Ausdrucks einen beliebig (d. h. auch unendlich) grossen Wert besitzt. Wz.

J. B. de Cabedo. Sobre o resto da formula de Taylor. Teixeira J. X. 13-17.

Der Verfasser betrachtet die von Herrn Peano in Mathesis IX. 182 (F. d. M. XXI. 1889. 234) angegebene Restform der Taylor'schen Reihe:

$$R = \frac{(x-a)^n}{n!}\left[\frac{f^{(n-1)}(x_1)-f^{(n-1)}(a)}{x_1-a} - f^{(n)}(a)\right],$$

giebt einen neuen Beweis für dieselbe und betrachtet auch den Fall der imaginären Variabeln. Tx. (Lp.)

A. Pringsheim. Zur Theorie der Dirichlet'schen Reihen. Math. Ann. XXXVII. 38-60.

Wenn die M_ν positive, mit ν niemals abnehmende Grössen mit dem Grenzwerte ∞, die a_ν dagegen ganz beliebige reelle oder complexe Grössen bedeuten, so beweist der Verfasser betreffs der Convergenz der Reihen

$$(1) \qquad A^{(-\varrho)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu M_\nu^{-\varrho}$$

den Satz: Die Reihe (1) convergirt für ein bestimmtes positives ϱ in der durch die Indices vorgeschriebenen Anordnung, also zum mindesten bedingt, und ihre Summe ist gleich derjenigen der unbedingt convergirenden Reihe:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^{(\sigma)} \{M_\nu^{-(\varrho+\sigma)} - M_{\nu+1}^{-(\varrho+\sigma)}\},$$

wenn für $\sigma > -\varrho$, $\varepsilon < 1$, $p < \infty$ der Ausdruck

$$\lim_{n=\infty} \frac{A_n^{(\sigma)}}{M_n^{\varepsilon\varrho+\sigma} \log^p M_n}$$

nicht ∞ wird. Die Reihe divergirt, wenn

$$\lim \frac{A_n^{(\sigma)}}{M_n^{\varrho+\sigma}}$$

nicht Null wird.

Diesem (wegen der grossen Willkürlichkeit der Grössen ϱ, σ, ε, p) ganz allgemeinen Kriterium werden speciellere Formen gegeben und sodann für den Grenzwert des Ausdrucks

$A_n^{(\sigma)} M_n^{-\sigma}$ für $n = \infty$ zwei Sätze bewiesen, von denen der zweite lautet: Ist

$$\lim \frac{M_{n+1}}{M_n} = c, \quad \text{wo zunächst } c > 1,$$

und für irgend ein bestimmtes $s > 0$:

$$\lim A_n^{(s)} M_n^{-s} = G^{(s)},$$

so hat man für jedes $\sigma > 0$:

$$\lim A_n^{(\sigma)} M^{-\sigma} = G^{(\sigma)} = \frac{1-c^{-s}}{1-c^{-\sigma}} G^{(s)},$$

und es tritt im Falle $\sigma = 0$ an die Stelle dieser Relation die folgende:

$$\lim \frac{A_n}{\lg M_n} = \frac{1-c^{-s}}{\lg c} G^{(s)} = \frac{1-c^{-1}}{\lg c} G^{(1)}.$$

Für den Grenzfall $c = 1$ reduciren sich diese Beziehungen auf

$$\lim A_n^{(\sigma)} M_n^{-\sigma} = G^{(\sigma)} = \frac{s}{\sigma} G^{(s)}, \quad \lim \frac{A_n}{\lg M_n} = sG^{(s)} = G^{(1)}$$

und für den andern Grenzfall $c = \infty$:

$$\lim A_n^{(\sigma)} M_n^{-\sigma} = G^{(\sigma)} = G^{(s)}, \quad \lim \frac{A_n}{\lg M_n} = 0.$$

In Bezug auf den Grenzwert von $\varrho \Sigma a_\nu M_\nu^{-\varrho}$ für $\varrho = +0$ zeigt der Verfasser die vier Sätze: 1) Setzt man

$$\frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}} = d_\nu,$$

so dass also Σd_ν divergirt, $\Sigma d_\nu M_\nu^{-\varrho}$ convergirt, so ist:

$$\lim_{\varrho=+0} \varrho \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu M_\nu^{-\varrho} \begin{cases} = 1, \text{ wenn } M_{n+1} \cong M_n, \\ = \dfrac{1-c^{-1}}{\lg c}, \text{ wenn } M_{n+1} \cong cM_n \ (c > 1), \\ = 0, \text{ wenn } M_{n+1} > M_n. \end{cases}$$

2) Ist $\lim g_n = g$, so hat man

$$\lim_{\varrho=+0} \varrho \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu d_\nu M_\nu^{-\varrho} = \lim_{\varrho=+0} \varrho g \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu M_\nu^{-\varrho},$$

und zwar auch dann, wenn $g_\nu = g_{\nu,\varrho}$ irgend wie von ϱ abhängt, sofern nur $g_{\nu,\varrho}$ mit wachsendem ν für alle positiven Werte ϱ, die unter einer gewissen endlichen Grenze r liegen, gleichmässig gegen den Wert g convergirt.

3) Ist

$$\lim \frac{A_n}{\lg M_n} = G,$$

so wird auch:

$$\lim_{\varrho=+0} \varrho \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu M_\nu^{-\varrho} = G, \quad \text{falls} \quad M_{n+1} \backsim M_n.$$

4) Besitzt

$$\frac{A_n}{M_n} = \frac{\sum_0^n a_\nu}{M_n}$$

für $n = \infty$ einen bestimmten Grenzwert G, so ist auch

$$\lim_{\varrho=+0} \varrho \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu M_\nu^{-(1+\varrho)} = G, \quad \text{falls} \quad M_{n+1} \backsimeq M_n.$$

Dabei bedeutet

$f_1(n) \backsimeq af_2(n)$, dass $\lim_{n=\infty} \frac{f_1(n)}{f_2(n)} = a$,

$f_1(n) > f_2(n)$, " " $= \infty$,

$f_1(n) < f_2(n)$, " " $= 0$,

$f_1(n) \backsim f_2(n)$, " " $\gtrless 0$ (endlich aber nicht notwendig bestimmt). Wz.

Dirichlet. On the series whose general term involves two angles and which serves to represent an arbitrary function between given limits. Translated from French into English by R. Fujisawa. Tokio Math. Ges. IV. 9-32.

Uebersetzung der bekannten Abhandlung Dirichlet's, welche im XVII. Bande des Crelle'schen Journals veröffentlicht wurde. E.

Capitel 2.
Besondere Reihen.

F. H. Loud. A rigorous elementary proof of the binomial theorem. Colorado Studies. I. 7-15.

Da die Behandlung der einfacheren Reihen in den meisten amerikanischen Lehrbüchern nach der Ansicht des Verfassers unzureichend, die Abel'sche Abhandlung über die binomische Reihe für den Anfänger zu schwierig ist, so will er auf elementarem Wege streng beweisen, dass die binomische Reihe

$$1+\frac{n}{1}x+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3+\cdots$$

für positive oder negative, ganze oder gebrochene Werte von n gleich $(1+x)^n$ ist. Er geht dabei von der Definition des Productes zweier unendlichen Reihen aus und zeigt, dass dasselbe gleich dem Producte der Factoren ist, falls diese absolut convergent sind. Wz.

N. H. Abel. Researches on the series

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3+\cdots$$

Translated from French into English by K. Miwa. Tokio Math. Ges. IV. 52-86.

Uebersetzung der epochemachenden Abhandlung Abel's über die Binomialreihe, welche im I. Bande des Crelle'schen Journals publicirt wurde. E.

J. Mendizabol Tamborrel. Nueva formula del binomio de Newton. Mexico Soc. Alzate. IV.

Der Verf. trennt die Entwickelung von $(x+a)^m$ in zwei Teile. Der eine ist geordnet nach den steigenden Potenzen von x, den fallenden von a; der andere nach den steigenden von a, den fallenden von x. Tx. (Lp.)

J. TANO. Quelques théorèmes sur les coefficients binomiaux. Nouv. Ann. (3) IX. 564-567.

Bezeichnet $\left(\frac{3}{m}\right)$ das Jacobi'sche Zeichen, m_q den bekannten Binomialcoefficienten, so ist

$$(1) \qquad m_0 - m_3 + m_6 - m_9 + \cdots + (-1)^\mu m_{3\mu} = \left(\frac{3}{m}\right) 3^{\frac{m-1}{2}}.$$

Diese Formel wird specialisirt, je nachdem $m \equiv 0 \pmod{6}$ ist oder nicht.

Für $m \equiv 2 \pmod{4}$ ergiebt sich:

$$(2) \qquad m_0 + m_4 + m_8 + m_{12} + \cdots + m_{4\mu} = 4^{\frac{m-2}{2}}.$$

Aus (1) folgt der Richelot'sche Satz, dass 3 primitive Wurzel der Primzahlen von der Form 2^k+1 ist. Wz.

C. A. LAISANT. Expression du produit des coefficients du binôme. S. M. F. Bull. XVIII. 140-141.

Bezeichnet man das Product aller Coefficienten der Entwickelung von $(1+x)^n$ durch P_n, so ist

$$P_n = \left(\frac{n}{1}\right)^{n-1} \left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-3} \left(\frac{n-2}{3}\right)^{n-5} \cdots.$$

Wenn n ungerade ist, so ist P_n ein Quadrat. Ferner ist:

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{(n+1)^n}{n!}.$$

Wz.

H. DELANNOY. Formules relatives aux coefficients du binôme. Assoc. Franç. Limoges XIX. 35-37.

$$\Sigma(p-2k)C_p^k = qC_p^q, \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ q-1),$$

$$\Sigma(-1)^k(p-2k)C_p^k = (-1)^{q-1}\frac{q(p-2q+1)}{p-1}C_p^q,$$

$$\Sigma(-1)^k(a+kr)C_p^k = (-1)^{q-1}\frac{q}{p(p-1)}[pr(q-1)+a(p-1)]C_p^q.$$

$$\Sigma(p-2k)^2 C_p^k = p\,.\,2^p \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p),$$

$$\Sigma(p-2k)(p-2k\pm 1)C_p^k = p\,.\,2^p.$$

Lp.

A. C. Dixon. On the sum of the cubes of the coefficients in a certain expansion by the binomial theorem. Mess. (2) XX. 79-80.

Setzt man $(1+x)^{2n} = \Sigma a_k x^k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, 2n)$, so gilt, wie hier bewiesen wird, die Beziehung

$$a_0^3 - a_1^3 + a_2^3 - \cdots + a_{2n}^3 = (-1)^n + \frac{(3n)!}{(n!)^3}.$$

Glr. (Lp.)

M. Hamy. Sur le théorème de la moyenne. Darboux Bull. (2) XIV. 103-104.

Ist $a_1 . a_2 \ldots a_p$ das Product, welches einer der $C_{n,p}$ Combinationen von n Buchstaben zu je p entspricht, so ist:

$$\frac{\sum\limits_q \sqrt[q]{a_1 a_2 \ldots a_q}}{C_{n,q}} > \frac{\sum\limits_{q+1} \sqrt[q+1]{a_1 a_2 \ldots a_{q+1}}}{C_{n,q+1}},$$

wo $\sum\limits_q$ und $\sum\limits_{q+1}$ sich auf alle Combinationen q^{ten}, bezüglich $(q+1)^{\text{ten}}$ Grades beziehen.

Wz.

A. Hurwitz. Ueber einige Verallgemeinerungen der Leibniz'schen Differentiationsformel und des polynomischen Lehrsatzes. Schlömilch Z. XXXV. 56-58.

Der Verfasser giebt einen Beweis der Leibniz'schen Formel für die n^{te} Ableitung eines Productes von k Functionen und drei Relationen, welche diese als besonderen Fall in sich enthalten, wendet seinen Satz auf Exponentialfunctionen an und erhält ausser zwei anderen Sätzen den folgenden:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k + na)^n$$
$$= a_2 \ldots a_k \Sigma \frac{n!}{r_1! r_2! \ldots r_k!} (a_1 + r_1 a)^{r_1} (a_2 + r_2 a)^{r_2 - 1} \ldots (a_k + r_k a)^{r_k - 1},$$

worin $a, a_1, a_2, \ldots, a_k$ irgend $k+1$ Grössen bedeuten und die Summe der rechten Seite sich auf alle Systeme nicht negativer ganzer Zahlen $r_1, r_2, \ldots, r_k$ erstreckt, welche der Bedingung $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$ genügen. Diese Formel geht für $k = 2$ in

eine von Abel (Oeuvres complètes, nouvelle édition Bd. I. S. 102) herrührende Verallgemeinerung des binomischen Lehrsatzes über.

Wz.

U. Wellmann. Einige wichtigere Reihen und ihre Anwendung. Pr. Gymn. u. Realgymn. (Nr. 126) Colberg. 11 S. 4°.

Es werden die Formeln der Zinseszins- und Rentenrechnung und die Zahlen der Permutationen, Combinationen und Variationen abgeleitet.

Wz.

P. J. Breuer. Die Lehre von den Logarithmen nach vorwiegend suchendem Lehrverfahren behandelt. Pr. Progymn. (Nr. 459) Wipperfürth. 50 S. 4°.

Die Behandlung der Logarithmen auf den höheren Schulen leidet häufig an gewissen Mängeln: Für die Begründung der Regel, dass die Differenzen der Logarithmen sich annähernd wie die Differenzen der Numeri verhalten, falls die letzteren im Verhältnis zu den Numeris hinlänglich klein sind, wird der Schüler auf die höhere Analysis verwiesen. Ebenso wird nicht genügend erklärt, warum die Logarithmen für die Basis e als die natürlichen zu betrachten sind. Drittens wird auf die Herstellung der Logarithmentafeln zu wenig eingegangen. Ausserdem müssen für das Logarithmiren und die Umkehrung desselben, das sogenannte Numeriren, besondere Zeichen eingeführt werden. Die Arbeit soll diesen Uebelständen abhelfen; sie wendet sich nicht nur an die Lehrer, sondern auch an Freunde der Mathematik, welche nur als Gymnasiasten Gelegenheit hatten, sich mit derselben zu beschäftigen.

Wz.

Ch. Méray. Théorie analytique du logarithme népérien et de la fonction exponentielle. Toulouse Ann. IV Q. 1-35.

Während in vielen Büchern, selbst in klassischen Werken, die Eigenschaften des Logarithmus und der Exponentialfunction häufig mit Hülfe der Geometrie des Kreises begründet werden, behandelt der Verfasser diese Functionen rein analytisch,

indem er sich auf die Theorie der Potenzreihen stützt. Er definirt den natürlichen Logarithmus durch das Integral

$$u = l(x) = \int_1^x \frac{dx}{x}$$

und die Exponentialfunction als die Umkehrung desselben und behandelt die wichtigsten Eigenschaften dieser Functionen, namentlich die Darstellbarkeit durch eine Potenzreihe, den Convergenzbezirk, die (um $2k\pi i$ verschiedenen) Werte von $l(x)$, die Periodicität von e^x, den Satz, dass die Werte $\dots\, x_{i-1},\, x_i,\, x_{i+1},\, \dots$ eine geometrische Reihe bilden, wenn die Werte des Logarithmus eine arithmetische bilden, u. s. w. Zum Schlusse wendet sich der Verfasser zu den Logarithmen für die Basis 10.

Wz.

J. Sochocki. Entwickelung einiger Functionen und Reihen. Prace mat.-fiz. II. 1-20. (Polnisch.)

Die unendliche Reihe

$$S = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots$$

kann durch die bekannte Euler'sche Transformation in der Form

$$S = u_0 + u_1 \frac{x}{1-x} + \Delta u_1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 + \cdots$$

dargestellt werden. Der Verfasser wendet diese Transformation auf die Reihe

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \log \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} = 1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{7} + \cdots$$

an und erhält daraus rasch convergirende Entwickelungen für die Function $\operatorname{arctg} \frac{1}{x}$, sowie für

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^m (x+1)^m}, \quad \sum_m = \frac{1}{x^m (x+1)^m} + \frac{1}{(x+1)^m (x+2)^m} + \cdots,$$

$$F(x) = \frac{1}{2a_1 x} - \frac{1}{2a_2} \sum_2 + \frac{1}{2a_3} \sum_3 + \cdots$$

$$\left(a_m = 4(2m-1)(2m+1) \frac{m(m+1)\dots(2m-3)}{1.2\dots(m-2)}\right).$$

Aus diesen Entwickelungen ergeben sich auf sehr einfachem Wege die bekannten Formeln von Stirling und Gudermann, sowie die Formel für den Logarithmus der Function $\Gamma(x)$.

Dn.

R. CHARTRES. Gregory's series. Nature XLII. 341.

Elementare Herleitung der Reihe für arctg x. Lp.

F. GIUDICE. Sviluppo di arcsen x. Una formula di trasformazione per arctg x. Besso Per. mat. V. 33-35.

Elementarer Beweis der bekannten Reihenentwickelung von arcsin x und Aufstellung der folgenden Formel:

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{a+(a^2+1)k} = \sum_{\lambda=k+1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{(a^2+1)\lambda^2-(a-1)^2\lambda-(a-1)}.$$

Vi.

F. J. STUDNIČKA. Ueber eine schnell zum Ziele führende Ableitungsart einiger trigonometrischen Reihen. Casop. XIX. 113. (Böhmisch.)

Verwendet die beiden Ausdrücke

$$\frac{e^{i\alpha}}{1-xe^{i\alpha}} \quad \text{und} \quad \int_0^x \frac{e^{i\alpha}\,dx}{1-xe^{i\alpha}},$$

um die bekannten Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}\cos k\alpha, \qquad \sum x^{k-1}\sin k\alpha,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}\cos k\alpha, \qquad \sum \frac{x^k}{k}\sin k\alpha$$

rasch abzuleiten. Std.

A. STRNAD. Ueber einen paradoxen Ausdruck der Ludolfine. Casop. XIX. 144. (Böhmisch.)

Bespricht Nicholson's Formel

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{(1-1)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-1)^{\frac{1}{2}}},$$

welche in der amerikanischen Zeitschrift „The Analyst“ vom Jahre 1882 enthalten war.

Std.

C. A. SWIFT, T. R. TERRY. Solution of question 10136. Ed. Times LII. 75.

$$\operatorname{tg}\operatorname{tg}\operatorname{tg}\ldots\operatorname{tg}x = x+2n\frac{x^3}{3!}+4n(5n-1)\frac{x^5}{5!}$$
$$+\frac{8n}{3}(175n^2-84n+11)\frac{x^7}{7!}+\cdots,$$

wenn das Functionszeichen tg auf der linken Seite n-mal steht.

Lp.

E. C. HUDSON. On the expansion of a series. Quart. J. XXIV. 233-245.

Es ist (vgl. auch Greenhill's Differential and Integral Calculus, 2nd ed. 1891 p. 234):

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e\{1-\tfrac{1}{2}x+\tfrac{11}{24}x^2-\tfrac{7}{16}x^3+\tfrac{2447}{5760}x^4-\tfrac{959}{2304}x^5+\cdots\};$$

das allgemeine Glied ist:

$$e.(-x)^t\sum_{k=1,2,\ldots,t}\frac{C_k^t}{2^{t-k+1}(t-k)!}.$$

Darin ist:

$$C_k^t = \frac{\delta_1^k}{3k-3}(2t+k-3)(2t+k-5)\ldots(2t-k+3)$$
$$+\frac{\delta_2^k}{3k-5}(2t+k-5)\ldots(2t-k+3)+\cdots+\frac{\delta_{k-2}^k}{k+3}(2t-k+3)+\frac{\delta_{k-1}^k}{k+1};$$

$$\delta_1^k = \frac{2}{3^{k-2}(k-2)!},\quad \delta_2^k = -\frac{3k-5}{6.3^{k-3}(k-3)!},$$

$$\delta_3^k = \frac{(3k-7)(15k-52)}{80.3^{k-2}(k-4)!},$$

$$\delta_4^k = -\frac{(3k-9)(45k^2-423k+958)}{320.3^{k-1}.(k-5)!}.$$

Wz.

L. SAALSCHÜTZ. Eine Summationsformel. Schlömilch Z XXXV. 186-188.

Bedeutet n eine ganze positive Zahl, x, y, v beliebige Zahlen,

so ist:

$$\frac{(x+v+n-1)(x+v+n-2)\dots(x+v)}{(x+n-1)(x+n-2)\dots x}$$
$$-(n)_1\frac{(x+v+n-1)\dots(x+v+1)}{(x+n-1)\dots(x+1)}\cdot\frac{y+v+n-1}{y}+\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}(n)_{n-1}\frac{x+v+n-1}{x+n-1}\frac{(y+v+n-1)\dots(y+v+2n-3)}{y\dots(y+n-2)}$$
$$+(-1)^n\frac{(y+v+n-1)\dots(y+v+2n-2)}{y\dots(y+n-1)}$$
$$=\frac{v(v+1)\dots(v+n-1)(y-x)(y-x+1)\dots(y-x+n-1)}{x(x+1)\dots(x+n-1)y(y+1)\dots(y+n-1)}.$$

Wz.

A. Brill. Summation einer gewissen endlichen Reihe. Math. Ann. XXXVI. 361-370.

Es seien m, $n(<m)$, $q(>n)$ ganze positive Zahlen,

$$(m,\ n,\ q)=\sum_0^{\varrho}(-1)^{\nu}\binom{m-2\nu}{n}\binom{q}{\nu}$$

die endliche Reihe derjenigen Glieder, die vor dem ersten verschwindenden abbricht. Dann ist $(m,\ n,\ q)=0$:

1) für $m\geqq n$, $q \overline{\gtrless} \frac{1}{2}(m-n)$ und

2) für $q>\frac{m-n}{2}$, $m\geqq 2q$. Für $q>\frac{m-n}{2}$, $m<2q-1$ ist

$$(m,\ n,\ q)+(-1)^{n+q}(2q+n-1-m,\ n,\ q)=0.$$

Es wird sodann m specialisirt, eine Recursionsformel aufgestellt und die Formel

$$\left(q+\frac{n-1}{2},\ n-1,\ q\right)$$
$$=(-1)^{\frac{q-n}{2}}\frac{q!\,(q-n)!}{\left(q-\frac{n-1}{2}\right)!\left(\frac{q-1}{2}-\frac{n-1}{2}\right)!\left(\frac{q-1}{2}\right)}$$

abgeleitet, worin n, $q(>n)$ ungerade positive Zahlen sind.

Wz.

J. W. L. Glaisher. On the square of Euler's series. Lond. M. S. Proc. XXI. 182-215.

Das Quadrat der Summe $1-q-q^2+q^5+q^7-\cdots$, deren all-

gemeines Glied $(-1)^n q^{\frac{1}{2}n(3n+1)}$ heisst, ist die Summe (Jacobi, Fundamenta Nova p. 185) $1-3q+5q^3-7q^6+9q^{10}-\cdots$, deren allgemeines Glied $(-1)^n(2n+1)q^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ ist. Die Eigenschaften, welche die Coefficienten P_n dieser letzteren Reihe besitzen, bilden den Gegenstand dieser Arbeit. Es wird zunächst gezeigt, dass P_n (d. i. der Coefficient von q^n) eine Function von $12n+1$ ist: $P_n = G(12n+1)$. Bedeuten p und r relative Primzahlen, so befriedigt G die Gleichung:

$$(1) \qquad G(pr) = G(p)G(r).$$

Der numerische Wert von $G(12n+1)$ kann mit Hülfe der reellen Teiler von $12n+1$ berechnet werden.

Bezeichnet $E(n)$ die Differenz zwischen der Anzahl derjenigen Factoren von n, welche $\equiv 1 \pmod{4}$ sind, und der Anzahl derjenigen Factoren von n, welche $\equiv 3 \pmod{4}$ sind, ebenso $H(n)$ die Differenz zwischen der Anzahl derjenigen Factoren von n, welche $\equiv 1 \pmod{3}$ sind, und der Anzahl derjenigen Factoren von n, welche $\equiv 2 \pmod{3}$ sind, so ergiebt sich, dass diese Functionen E und H die Gleichung (1) befriedigen und mit G zusammenhängen.

Es werden recurrirende Formeln für P_n aufgestellt und der Wert der Functionen $G(12n+1)$ und $E(12n+1)$ für die Werte von $n = 1, 2, 3, \ldots, 100$ berechnet. Wz.

J. W. L. Glaisher. On the series in which the exponents of the powers are the pentagonal numbers. Cambr. Proc. VII. 69.

Die Mitteilung erhält nur folgenden Satz: Es ist das Quadrat der Reihe

$$1+q+q^2+q^5+q^7+q^{12}+q^{15}+q^{22}+q^{26}+\cdots,$$

welche bekanntlich gleich dem Product

$$(1+q)(1+q^2)(1-q^3)(1+q^4)(1+q^5)(1-q^6)(1+q^7)\ldots$$

ist, gleich der Reihe

$$1+E(13)q+E(25)q^2+E(37)q^3+E(49)q^4+\cdots,$$

worin $E(n)$ den Ueberschuss der Anzahl der Divisoren von n,

welche $\equiv 1 \pmod{4}$ sind, über die Anzahl derjenigen bezeichnet, welche $\equiv 3 \pmod{4}$ sind. (Vergl. S. 203 dieses Bandes der F. d. M.) Gz.

M. d'Ocagne. Quelques propriétés des nombres K_m^p. American J. XIII. 145-152.

Der Verfasser giebt der Function

$$F(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

die Form

$$F(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x(x-1) + \cdots + b_n x(x-1)\dots(x-n+1)$$

und gewinnt durch Vergleichung der Coefficienten beider Ausdrücke für die von ihm bereits 1887 (vergl. F. d. M. XIX. 241) auf andere Weise definirten Zahlen K_m^p die Formel:

$$b_p = K_p^p a_p + K_{p+1}^p a_{p+1} + \cdots + K_n^p a_n.$$

Indem er sodann für $F(x)$ der Reihe nach $1+x^n$, $(1+x)^n$ und $x(x-1)\dots(x-n)$ nimmt, setzt er diese Zahlen in Beziehung zu den Binomialcoefficienten und den Zahlen S_n^m, welche die Summen der aus je m der Zahlen $1, 2, \dots, n$ gebildeten Producte darstellen, und berechnet die Zahlen K_m^p für m, $p = 1, 2, \dots, 12$.

Wz.

E. Rouché. Sur la formule de Stirling. C. R. CX. 513-515.

Für

$$(1) \qquad \varphi(n) = \frac{1.2.3\dots n}{e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}}$$

gilt die Formel

$$(2) \qquad \frac{\varphi(n)}{\varphi(n+p)} = e^{\frac{\theta p}{12n(n+p)}},$$

wo θ zwischen 0 und 1 liegt. Nun nähert sich dieser Quotient, wenn $n = p$ gesetzt wird und p ins Unendliche wächst, der Einheit. Andererseits hat man nach dem Satze von Wallis

$$\lim \varphi(p) = \lim \frac{\varphi(p)^2}{\varphi(2p)} = \sqrt{2\pi}.$$

Lässt man in (2) bei festem n die Zahl p ins Unendliche wach-

sen, so erhält man

$$\frac{\varphi(n)}{\sqrt{2\pi}} = e^{\frac{\theta}{12n}}$$

und nach (1) die Stirling'sche Formel:

$$1.2.3\ldots n = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} e^{\frac{\theta}{12n}},$$

welches Resultat für $1.2.3\ldots n$ die beiden Grenzen $\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$, $\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} n^{\frac{1}{12n}}$ liefert. Wz.

H. Plamenewsky. Question 208. Généralisation et développements. J. de Math. spéc. (3) IV. 179-186.

M. d'Ocagne. Sur les moyennes limites de deux nombres. J. de Math. spéc. (3) IV. 195-198.

Die vorgelegte Aufgabe war, zu beweisen, dass

$$\lim \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \tfrac{2}{3} \quad (\text{für } n = \infty).$$

Herr Plamenewsky zeigt den Zusammenhang dieser Aufgabe mit der Quadratur der Parabel und giebt die Verallgemeinerung für die Parabel $x = y^m$, bei welcher m^{te} Wurzeln an die Stelle der Quadratwurzeln treten (Grenzwert $= m/(m+1)$). Indem nun dieser Gedanke auf den Kreis angewandt wird, erhält der Verf. verschiedene Reihen für π und auch die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels (bei unendlich kleinem Ausschlage).

Hr. d'Ocagne weist darauf hin, dass durch ihn und Hrn. Cesáro Fragen von dieser Art in mehreren Artikeln des Teixeira'-schen Journals (VII, vgl. F. d. M. XVII. 1885. 227 ff.) behandelt und auf allgemeine Sätze zurückgeführt worden seien. Lp.

J. C. Fields. Related expressions for Bernoulli's and Euler's numbers. American J. XIII. 191-192.

Für die Euler'schen Zahlen E_n gelten, je nachdem n ungerade oder gerade ist, die Formeln:

$$E_n = (-1)^{\left[\frac{n}{4}\right]+(-1)^{\frac{n+1}{2}}} 2^{-\frac{n+1}{2}} \sum_{s=2}^{n+1} \binom{n+1}{s} \{(1-(-1)^{\frac{n+1}{2}})v_{s-1} - (1+(-1)^{\frac{n+1}{2}})v_{s-2}\},$$

$$E_n = (-1)^{\left[\frac{n}{4}\right]} 2^{-\frac{n}{2}} \sum_{s=2}^{n+1} \binom{n+1}{s} \{v_{s-1} + (-1)^{\frac{n}{2}} v_{s-2}\},$$

wo

$$(-1)^s v_s = s^n - (s-2)^n + (s-4)^n - \cdots.$$

Ferner ist für ein ungerades n:

$$B_{\frac{n+1}{2}} = \frac{(n+1)E_n}{2^{n+1}(2^{n+1}-1)}.$$

Wz.

E. Duporcq. Sur la somme des puissances semblables des x premiers nombres. Nouv. Ann. (3) IX. 594-595.

Die Summe $1^n+2^n+\cdots+x^n$ der n^{ten} Potenzen der x ersten Zahlen kann in die Form gebracht werden:

$$x^n + \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x^2 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x^n & 1 & n & \dots & n \\ x^{n+1} & 1 & n+1 & \dots & C_{n+1}^2 \end{vmatrix}.$$

Wz.

E. Cesáro. Sur les démonstrations du théorème de Staudt et de Clausen. Belg. Bull. (3) XX. 280-289.

Der Verfasser stellt in seinem Aufsatze, über den Hr. Mansion S. 233-236 berichtet, die wesentliche Uebereinstimmung der Beweise von Catalan, Radicke und Lucas fest und giebt eine Deutung gewisser Determinanten, die bei dem Letzteren auftreten. Dies ist im Grunde gleichbedeutend mit einem teilweise neuen Beweise. Mn. (Lp.)

√G. T. Woronoi. Ueber die Bernoulli'schen Zahlen. Charkow Ges. (Russisch.)

Wenn die m^{te} Bernoulli'sche Zahl gleich dem irreducibeln Bruche $\frac{P_m}{Q_m}$ ist, so hat man die Congruenz

$$(-1)^{m-1}(a^{2m}-1)P_m \equiv 2ma^{2m-1}Q_m\Big[1^{2m-1}E\frac{a}{N}+2^{2m-1}E\frac{2a}{N}+\cdots$$
$$+(N-1)^{2m-1}E\frac{(N-1)a}{N}\Big] (\text{mod. } N),$$

falls a und N beliebige relative Primzahlen sind. Aus diesem Theorem folgt das andere: „Wenn m, der Index der m^{ten} Bernoulli'schen Zahl, durch die Zahl $k=p_1^\alpha p_2^\beta \dots p_e^\lambda$ teilbar ist, wo $p_1, p_2, \dots, p_e$ Primzahlen sind, welche in dem Nenner der m^{ten} Bernoulli'schen Zahl nicht aufgehen, so ist auch der Zähler der Bernoulli'schen Zahl durch k teilbar". Die Beweise dieser Sätze stützen sich auf das Theorem von v. Staudt. Wi.

F. J. van den Berg. Quelques formules pour le calcul des nombres de Bernoulli et des coefficients des tangentes. Arch. Néerl. XXIV. 99-141.

Siehe F. d. M. XX. 1888. 265. G.

E. Lampe, J. D. H. Dickson, J. J. Barniville. Solution of question 9977. Ed. Times LII. 41-44.

Aus Veranlassung verschiedener Einzelaufgaben über Relationen zwischen den Summen

$$S_k(x) = 1^k+2^k+3^k+\cdots+x^k$$

verweist der Ref. in der Mitteilung auf seinen kleinen Aufsatz im Journ. für Math. LXXXIV. 270-272 (F. d. M. IX. 1877. 176), wo diese Fragen in grösster Allgemeinheit beantwortet sind, und leitet aus den dortigen Formeln eine Menge einzelner Relationen ab, z. B.

$$\tfrac{1}{2}.6^n S_3^n = 2^{n-1}.3\binom{n}{1}S_{3n-1} + 2^{n-3}\left\{(2^3+1)\binom{n}{3} + (2^2+2)\binom{n}{2}\binom{n}{1}\right\} S_{3n-3}$$

$$+2^{n-5}\left\{(2^5+1)\binom{n}{5} + (2^4+2)\binom{n}{4}\binom{n}{1} + (2^3+2^2)\binom{n}{3}\binom{n}{2}\right\} S_{3n-5} + \cdots,$$

$$S_i S_k = \left(\frac{1}{i+1} + \frac{1}{k+1}\right) S_{i+k+1} + \tfrac{1}{2}B_1 \left\{\binom{i}{1} + \binom{k}{1}\right\} S_{i+k-1}$$

$$-\tfrac{1}{4}B_2 \left\{\binom{i}{3} + \binom{k}{3}\right\} S_{i+k-3} + \tfrac{1}{6}B_3 \left\{\binom{i}{5} + \binom{k}{5}\right\} S_{i+k-5} - \cdots,$$

$$\tfrac{1}{2}S_i^2 = \frac{1}{i+1} S_{2i+1} + \tfrac{1}{2}B_1\binom{i}{1}S_{2i-1} - \tfrac{1}{4}B_2\binom{i}{3}S_{2i-3} + \tfrac{1}{6}B_3\binom{i}{5}S_{2i-5} \mp \cdots,$$

worin B_μ die μ^{te} Bernoulli'sche Zahl bedeutet. Lp.

J. W. L. GLAISHER. Theorem relating to sums of even powers of the natural numbers. Mess. (2) XX. 120-128.

Setzt man S_r gleich $1^r+2^r+3^r+\cdots+i^r$, so ist

$$\frac{S_{2n}}{S_1} = A_2 S_{2n-2} + A_4 S_{2n-4} + \cdots + A_{2n-2} S_2 + A_{2n}(i+\tfrac{1}{2}),$$

wo

$$\tfrac{1}{2}A_2 = \frac{2n-1}{2n+1},$$

$$\tfrac{1}{2}A_4 = \frac{2n-1}{2n+1} - 2nB_1,$$

$$\tfrac{1}{2}A_6 = \frac{2n-1}{2n+1} - 2nB_1 + \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{3!}\,\frac{B_2}{2},$$

$$\tfrac{1}{2}A_8 = \frac{2n-1}{2n+1} - 2nB_1 + \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{3!}\,\frac{B_2}{2} + \frac{2n(2n-1)\ldots(2n-4)}{5!}\,\frac{B_3}{3},$$

. . . .

und $B_1, B_2, B_3, \ldots$ die Bernoulli'schen Zahlen sind.

Glr. (Lp.)

J. W. L. GLAISHER. Note on series whose coefficients involve powers of the Bernoullian numbers. Mess. (2) XIX. 138-146.

Die Hauptergebnisse lauten:

$$\Sigma_1^\infty \left\{\frac{B_n}{(2n)!}\right\}^2 (8\pi x)^{2n} = 2x\Sigma_1^\infty \frac{\theta_0(n)}{n} \operatorname{tang} \frac{x}{n},$$

$$\Sigma_1^\infty \left\{\frac{B_n}{(2n)!}\right\}^3 (16\pi^2 x)^{2n} = 4x\Sigma_1^\infty \frac{\theta_1(n)}{n} \operatorname{tang} \frac{x}{n},$$

$$\Sigma_1^\infty \left\{\frac{B_n}{(2n)!}\right\}^4 (32\pi^3 x)^{2n} = 8x\Sigma_1^\infty \frac{\theta_2(n)}{n} \operatorname{tang} \frac{x}{n},$$

. . . .

Hierin bedeutet B_n die n^{te} Bernoulli'sche Zahl, und wenn $n = 2^s a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots$ ($a, b, c, \dots$ ungerade Primzahlen), so ist gesetzt

$$\theta_0(n) = s+1,$$

$$\theta_1(n) = \tfrac{1}{2}(s+1)(s+2)(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\dots,$$

$$\theta_2(n) = \frac{(s+1)(s+2)(s+3)}{6} \cdot \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2} \cdot \frac{(\beta+1)(\beta+2)}{2} \dots,$$

. . . .

Glr. (Lp.)

E. Schröder. Neueres über Bernoulli'sche Functionen von natürlicher Ordnungszahl. Naturf. Ges. Bremen. 5-6.

F. Diestel. Beiträge zu der Interpolationsrechnung. Diss. Göttingen, auch separat: Göttingen. Vandenhoeck und Ruprecht. 47 S. 8°.

Nach einigen historischen Bemerkungen über die Behandlung der Interpolation durch Waring, Newton, Lagrange, Gauss, Schering giebt der Verfasser zunächst eine Darstellung der allgemeinen Newton'schen Interpolationsformel durch einen Quotienten von zwei Determinanten und leitet sodann eine Interpolationsformel für die trigonometrischen Functionen ab. Es sei $\varphi(u)$ eine einwertige analytische Function des Arguments u, sie verhalte sich im Endlichen überall regulär und sei einfach periodisch mit der Periode 2π. Es seien $u_1, u_2, \dots, u_\lambda$ λ Werte des Arguments u, welche sämtlich nach dem Modul 2π incongruent sind, ferner ausser der Endlichkeit keiner Beschränkung unterliegen. Es seien nun an den Stellen $u_1, u_2, u_3, \dots, u_\lambda$ die

Werte der Function sowie ihrer Ableitungen, beziehlich bis zu den Ordnungen $n_1, n_2, \ldots, n_\lambda$ gegeben, wo $n_1, n_2, \ldots, n_\lambda$ beliebige endliche positive ganze Zahlen mit Einschluss der Null sein können. Wird $\varphi(u)$ in der Form angenommen

$$\varphi(u) = a_0 + a_1 \cos u + a_2 \cos 2u + \cdots + a_{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{n-1}{2} u$$

$$+ b_1 \sin u + b_2 \sin 2u + \cdots + b_{\frac{n-1}{2}} \sin \frac{n-1}{2} u$$

und ist

$$n = (1+n_1) + (1+n_2) + \cdots + (1+n_\lambda)$$

eine ungerade Zahl, so ergiebt sich die Darstellung:

$$\varphi(u) = \Sigma \frac{\sin\frac{1}{2}(u-u_2)^{1+n_2} \ldots \sin\frac{1}{2}(u-u_\lambda)^{1+n_\lambda}}{\sin\frac{1}{2}(u_1-u_2)^{1+n_2} \ldots \sin\frac{1}{2}(u_1-u_\lambda)^{1+n_\lambda}}$$

$$\times \sum_{r=0}^{n_1} A_{1n} \cos\tfrac{1}{2}(u-u_1)^{n_1-r} \sin\tfrac{1}{2}(u-u_1)^r.$$

Die A sind so zu bestimmen, dass für $u = u_1, u_2, \ldots, u_\lambda$ die Function $\varphi(u)$ nebst ihren Ableitungen bis zu der angegebenen Ordnung die vorgeschriebenen Werte annimmt; die Summation ist über alle Combinationen der ganzen Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_\lambda$ von derselben Ordnung zu erstrecken.

Auch für die elliptische Function

$$a_0 + a_1 \wp(u) + a_2 \wp'(u) + \cdots + a_{n-1} \wp^{n-2}(u)$$

wird eine Interpolationsformel angegeben, deren Herleitung besonders veröffentlicht werden soll. Wz.

V. Williot. Sur une généralisation de la formule d'interpolation de Lagrange. Darboux Bull (2) XIV. 218-224.

Das erste Glied der Hermite'schen Verallgemeinerung der Interpolationsformel (vergl. J. für Math. LXXXIV. 70) ist

$$(x-b)^\beta (x-c)^\gamma \ldots (x-l)^\lambda [A X_{\alpha-1} + A_1 X_{\alpha-2}(x-a)$$

$$+ A_2 X_{\alpha-3}(x-a)^2 + \cdots + A_{\alpha-1} X_0 (x-a)^{\alpha-1}].$$

Um die A_ν und X_ν zu bestimmen, setzt der Verfasser

$$A(x) = (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \ldots (x-l)^\lambda$$

und zeigt, dass

$$A_{\alpha-1} = \frac{1}{1.2\ldots(\alpha-1)}\left(\frac{1}{A(x)}\right)_a^{\alpha-1},$$

$$X_{\alpha-1} = \Big[\overset{\alpha-1}{f(x)}\Big]_{x=a} = f(a)+f'(a)\frac{x-a}{1}+\cdots+f^{(\alpha-1)}(a)\frac{(x-a)^{\alpha-1}}{1.2\ldots(\alpha-1)},$$

wo $\left(\varphi(x)\right)_a^{\alpha-1}$ die $(\alpha-1)^{\text{te}}$ Ableitung von $\varphi(x)$ für $x=a$ bedeutet. Dann erhält das erste Glied der Entwickelung die Form:

$$A(x)\left[\overset{\alpha-1}{\frac{f(x)}{A(x)}}\right]_{x=a}.$$

Bei dieser Herleitung ist $A(x)$ nur den Bedingungen unterworfen: 1) für $x=a$ nicht zu verschwinden, 2) für $x=b, c, \ldots, l$ zu verschwinden. — Mit einer Anwendung schliesst der Verfasser. Wz.

C. A. Laisant. Interpolation cinématique. Assoc. Franç. Limoges XIX. 70-73.

Anwendung der bekannten Interpolationsformeln auf das folgende Problem: Ein Massenpunkt nimmt zu den Zeitpunkten $t_1, t_2, \ldots, t_n$ die Lagen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ ein; sein Bewegungsgesetz zu finden. Die, wie alle Aufgaben ähnlicher Natur, unbestimmte Frage führt zur Bildung einer geometrischen Function, welche sowohl auf den Raum als die Ebene anwendbar ist. Lp.

E. Selling. Ueber eine Formel für empirische Zahlenreihen, insbesondere zum Ersatz der Sterbe- und Invaliditätstafeln. J. für Math. CVI. 193-198.

Die Elimination von a, b, c aus den 6 Gleichungen

$$y_k = au^k + bv^k + cw^k \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

liefert zur Bestimmung von a und (u resp.) $\alpha = u-1$ die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ y_0 & \Delta_0 & \Delta_0^{II} & \Delta_0^{III} \\ \Delta_0 & \Delta_0^{II} & \Delta_0^{III} & \Delta_0^{IV} \\ \Delta_0^{II} & \Delta_0^{III} & \Delta_0^{IV} & \Delta_0^{V} \end{vmatrix} = 0; \quad a = \frac{\Delta_0^{II} - (\beta+\gamma)\Delta_0 + \beta\gamma y_0}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}.$$

Dabei ist $\Delta_k = y_{k+1} - y_k$, $\Delta_k^{II} = \Delta_{k+1} - \Delta_k$, $\Delta_k^{III} = \Delta_{k+1}^{II} - \Delta_k^{II}$, ..., $\beta = v - 1$, $\gamma = w - 1$. Analoge Formeln gelten für b, β und c, γ.

Diese Formel erweist sich als zweckmässig zum Ersatz für die Sterbe- und Invaliditätstafeln, bei den ersteren namentlich für die Lebensalter zwischen 20 und 66 Jahren. Wz.

Sechster Abschnitt.
Differential- und Integralrechnung.

Capitel 1.
Allgemeines (Lehrbücher etc.).

H. LAURENT. Traité d'analyse. Paris. Gauthier-Villars et Fils.
Tome V. Calcul intégral. Équations différentielles ordinaires. IV + 417 S.
Tome VI. Calcul intégral. Équations différentielles partielles. IV + 339 S.

Wie in der Anzeige des IV. Bandes bemerkt wurde (F. d. M. XXI. 1889. 256), so zeigt sich auch in den beiden vorliegenden Bänden über die Theorie der Differentialgleichungen das Bestreben des Verfassers, ausser den zum Thema gehörigen Dingen noch andere abzuhandeln, die nur in losem Zusammenhange mit ihm stehen, wenn dieselben interessant erscheinen oder auch in einem der früheren Bände eigentlich hätten erledigt werden sollen, aber erst nach dem Erscheinen derselben der Aufmerksamkeit des Verfassers teilhaftig geworden sind. Da nun ein übersichtliches Register dem Werke nicht beigegeben ist, so ist es zufolge dieser Art der Behandlung mühsam, alle die Stellen zusammen zu finden, welche einen und denselben Gegenstand betreffen. In der Anzeige des ersten Bandes (F. d. M. XVII. 1885. 237) hatte Ref. bereits auf einige Mängel hingewiesen, welche aus der Eigenart des Verfassers entspringen und denen

zum Teil durch die angedeuteten Wiederholungen abgeholfen ist. Eine Kritik von Einzelheiten, welche wegen des grossen Umfanges des Werks unterbleiben musste, ist neuerdings in der Rivista des Herrn Peano unternommen worden, auf welche hier hingewiesen werden möge.

Der Band V, welcher den gewöhnlichen Differentialgleichungen gewidmet ist, zerfällt in acht Capitel. Nach den einleitenden allgemeinen Sätzen über die Differentialgleichungen (I) folgt die Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung (II) nebst der Behandlung der wichtigeren geometrischen Probleme, welche zu ihnen führen, wie die Theorie der Charakteristiken von Hrn. Fouret, das Problem der Trajectorien und die Grundlehren über die Connexe. Die linearen Differentialgleichungen (III) werden zuerst nach den älteren Methoden integrirt, dann wird aber auch ein Abriss der Fuchs'schen Untersuchungen beigegeben. Den wichtigeren besonderen linearen Differentialgleichungen ist ein eigenes Capitel (IV) gewidmet, in welchem man die Kugelfunctionen, die Gauss'sche mechanische Quadratur, die Bessel'schen Functionen, die hypergeometrische Reihe, die Kummer'sche Differentialgleichung u. a. m. vorfindet. Die Integration der nicht linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung und der simultanen Differentialgleichungen sind die Titel zweier verhältnismässig kurzen Capitel (V u. VI), in denen auch die bekannten bezüglichen Aufgaben aus der Geometrie gleichzeitig vorgeführt werden.

Die Theorie der Kettenbrüche und die Variationsrechnung bei einfachen Integralen, welche in den beiden letzten Capiteln des Bandes (VII u. VIII) vorgetragen werden, dürfte man schwerlich zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen rechnen. Die Digression über die Zahlen π und e, welche zwischen der Kettenbruchentwickelung der hypergeometrischen Reihe und der Wurzeln einer quadratischen Gleichung steht, ist niedergeschrieben worden, ehe die Herren Hermite und Lindemann ihre berühmten Untersuchungen hierüber veröffentlicht hatten; bezüglich ihrer verweist der Verfasser auf die letzte Ausgabe der Geometrie Rouché's.

Der Band VI des Werkes enthält 9 Capitel, deren Titel lauten: I. Lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer Unbekannten. II. Theorie beliebiger partieller Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer Unbekannten. III. Totale Differentialgleichungen und simultane partielle Differentialgleichungen. IV. Partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung und simultane Differentialgleichungen. V. Gleichungen mit endlichen Differenzen. VI. Functionalgleichungen. VII. Harmonische Functionen. VIII. Variationen der vielfachen Integrale. IX. Transformation der räumlichen Gebilde. Im allgemeinen hält der Verf., wie er es in der Vorrede zum ersten Bande erklärt hat, den älteren Standpunkt von Cauchy fest; allerdings hat er auch die Untersuchungen Jacobi's gebührend berücksichtigt. Wenn neuere Untersuchungen aufgenommen sind, so werden sie entweder nur erwähnt oder in ganz kurzem Auszuge besprochen, sind aber nicht organisch mit dem Ganzen verschmolzen. Die litterarischen Verweisungen geben nur eine willkürliche Auswahl und sind besonders in Bezug auf die neueren Veröffentlichungen sehr lückenhaft. So sind z. B. zum Pfaff'schen Problem (S. 144) nur angeführt: Pfaff (1814), Gauss (bloss Oeuvres complètes, ohne sonstige Angabe), Jacobi (Crelle J. II, Liouville J. III), Cayley (J. für Math. LVII), Darboux (Bull. 1882). Die wenigen Seiten über das Dirichlet'sche Princip (274—276) geben von der Schwierigkeit der Frage nur eine unvollständige Vorstellung und dürften die Herren Schwarz und C. Neumann wenig befriedigen.

Wie in den früheren Bänden, so sind auch in den beiden vorliegenden wieder Aufgaben und Noten den einzelnen Capiteln zugegeben (mit Ausnahme der Cap. V, VI, VII von Bd. VI).

Lp.

J. Boussinesq. Cours élémentaire d'analyse infinitésimale, à l'usage des personnes qui étudient cette science en vue de ses applications mécaniques et physiques. 2e éd. T. II. Calcul intégral. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

Selbstanzeige in C. R. CXI. 133 - 135.

F. G. Teixeira. Curso de analyse infinitesimal. Calcolo differencial. 2. ediçao. Porto. 359 S. 8°.

Anzeige in Darboux Bull. (2) XV. 12.

A. S. Hardy. Elements of the differential and integral calculus. Boston. XI + 239 S.

H. Fleury. Théorie rationnelle de l'infini mathématique et du calcul infinitésimal. Paris.

A. Fuhrmann. Naturwissenschaftliche Anwendungen der Integralrechnung. Lehrbuch und Aufgabensammlung. Berlin. Ernst & Korn. XII u. 268 S. 8°.

Das Buch bildet den zweiten Teil der „Anwendungen der Infinitesimalrechnung in den Naturwissenschaften, im Hochbau und in der Technik. Lehrbuch und Aufgabensammlung. In sechs Teilen, von denen jeder ein selbständiges Ganzes bildet.“ Der erste Teil ist F. d. M. XX. 1888. 272 angezeigt worden. Der vorliegende zweite Teil behandelt in Capitel I einfache Integrationen, in II mehrfache Integrationen, in III Differentialgleichungen erster Ordnung, in IV Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Es ist von vorn herein klar, dass die Anwendungen der Integralrechnung mannigfachere und interessantere Beispiele aus den Naturwissenschaften liefern als die der Differentialrechnung, und von dem Verfasser der „Aufgaben aus der analytischen Mechanik“ war eine reiche Auswahl von Beispielen aus der Mechanik zu erwarten. Eigentümlich sind dem Buche die Anwendungen auf die Betrachtung des Verlaufes chemischer Vorgänge, ein Feld, das von dem Verf. in mehreren Originalabhandlungen besonders bearbeitet worden ist. Es ist den jüngeren Chemikern sehr anzuempfehlen, sich mit dem Gedanken zu befreunden, dass auch in der Chemie die mathematische Betrachtungsweise eine nicht zu unterschätzende Bedeutung erlangt hat. Wie im ersten Teile sind auch diesmal sehr viele Litteratur-

n^{ten} Differentialquotienten von $f(z)$ übergeht, ist vielfach behandelt worden. Sie ist, wie ähnliche Interpolationsaufgaben, keine völlig bestimmte und muss erst durch neue Bedingungen, die man der zu bestimmenden Function auferlegt, zu einer solchen gemacht werden. Der Verfasser wählt als derartige Bedingungen die folgenden, wobei er die Derivation $D^n f(z)$ auch mit $F(z, n)$ bezeichnet:

$$(1)\quad \frac{\partial F(z, n)}{\partial z} = F(z, n+1), \qquad (2)\quad F(z, -\nu) = \int_a^{z(\nu)} f(z)\, dz^\nu,$$

$$(3)\quad D^m D^n f(z) = D^{m+n} f(z).$$

Hier bedeutet ν eine positive ganze Zahl und a eine willkürliche, aber fest bleibende Constante. Da die Derivation von dieser Constante abhängig ist, so wird an Stelle von $D^n f(z)$ auch die genauere Bezeichnung $\overset{z}{\underset{a}{D^n}} f(z)$ angewandt. Die drei Bedingungen für $F(z, n)$ führen nun zu den folgenden analytischen Darstellungen der Derivation:

$$\overset{z}{\underset{a}{D^n}} f(z) = \frac{\Gamma(n+1)}{2\pi i} \int \frac{f(t)\, dt}{(t-z)^{n+1}},$$

wo der Integrationsweg eine von a ausgehende, z umkreisende Schleife ist, und

$$\overset{z}{\underset{a}{D^{n+\nu}}} f(z) = \frac{1}{\Gamma(-n)} \frac{\partial^\nu}{\partial z^\nu} \int_a^z \frac{f(t)\, dt}{(z-t)^{n+1}},$$

wo ν eine positive ganze Zahl und der reelle Teil von n negativ ist. Nachdem der Verfasser die Gesetze für die Derivation von Summen und Producten abgeleitet hat, untersucht er die analytische Natur der Derivationen specieller Functionsklassen, wie der rationalen ganzen und gebrochenen Functionen, der algebraischen Functionen und der transcendenten ganzen Functionen. Specielle Beispiele und einige Anwendungen der entwickelten Theorie auf die Integration linearer Differentialgleichungen beschliessen die Abhandlung. Hz.

P. Lindner. Ueber begrenzte Ableitungen mit complexem Zeiger. Pr. Gymn. Cöslin.

Bezeichnet $f_a(x)$ eine Function, die von der Form $(x-a)^a.f(x)$ ist, unter $f(x)$ eine in der Umgebung von $x=a$ einändrige Function verstanden, so definirt der Verfasser die „zwischen a und x genommene Ableitung“ von $f_a(x)$ mit dem „Zeiger“ ϱ durch die Gleichung

$$\left[\partial_x^\varrho f_a(x)\right]_a^x = \frac{\Pi(a)}{2\pi i}\cdot\frac{(x-a)^{a-\varrho}}{\Pi(a-\varrho)}\int\frac{f(z)}{z-a}F\left(a+1,1,a+1-\varrho,\frac{x-a}{z-a}\right)dz,$$

wo das Integral durch eine x und a einschliessende geschlossene Linie zu erstrecken ist. Die Zeichen Π und F haben die von Gauss eingeführte Bedeutung. Zu dieser Definition wird der Verfasser durch die Betrachtung des speciellen Falles $f(x)=1$, also $f_a(x)=(x-a)^a$, hingeleitet. Setzt man für F die hypergeometrische Reihe und integrirt sodann gliedweise, so erhält man die Ableitung dargestellt in Form einer nach Potenzen von $x-a$ fortschreitenden Reihe. Aus der Definitionsgleichung selber entwickelt der Verfasser die hauptsächlichsten für die Ableitungen geltenden Gesetze. Als interessante Beispiele werden die Ableitungen der Functionen, $x^a(1-x)^\beta$, $(x^2-1)^a$, $\lg x$, $x^a e^x$, u. s. w. bestimmt. Den Schluss der Arbeit bildet der folgende allgemeine Satz: „Genügt die abzuleitende Function einer Fuchs'schen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung mit k singulären Punkten, so befriedigt jede, zwischen einem dieser Punkte und der unabhängigen Variable genommene Ableitung eine ebensolche Differentialgleichung höchstens von der Ordnung mk mit denselben singulären Punkten“. Hz.

H. W. Lloyd Tanner. Note on Arbogast's method of derivations. Mess. (2) XX. 81-82.

Kurzer Beweis der Arbogast'schen Regel. Lp.

P. T. Foldberg. Integration af exakte Differentialqvotienter af Formen $\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}\right)$. Nyt Tidss. for Math. I. 23-27.

Es wird auf sehr elementare Weise die bekannte not-

wendige und hinreichende Bedingung dafür hergeleitet, dass $\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right)$ ein exacter Differentialquotient sei.

V.

F. MERTENS. Einführung neuer Variabeln in den Differentialausdrücken. Krak. Ber. XX. 267-271. (Polnisch.)

Es sei $V(u)$ ein Differentialausdruck, in welchem Differentialquotienten der Function u nach den unabhängigen Variabeln $x, y, z, \dots$ vorkommen. Führt man neue Variabeln $\xi, \eta, \zeta, \dots$ ein, so erhält man einen Ausdruck von der Form

$$V(u) = \omega U + \omega' U' + \cdots,$$

wo $U, U', \dots$ Differentialquotienten in Bezug auf die neuen Variabeln enthalten und die Coefficienten $\omega, \omega', \dots$ von der speciellen Form der Function u unabhängig sind. Giebt man also dieser Function irgend eine für die Rechnung bequeme Form, so gelangt man leicht zu einer Reihe linearer Gleichungen, aus welchen man die gesuchten Coefficienten ermitteln kann.

Als Beispiel folgt die Transformation des bekannten Ausdruckes

$$V(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

in reelle Polarcoordinaten.

Dn.

F. FRANKLIN. On the Hessian of a product of linear functions. Annals of Math. V. 103-105.

In Erweiterung eines Satzes von J. McMahon (Annals V. 17, F. d. M. XXI. 1889. 106) wird bewiesen, dass die Determinante der zweiten Ableitungen des Products

$$u = L_1 L_2 \dots L_n,$$

$L_i = a_i x + b_i y + c_i z + \cdots$ (für k Variabeln), nach $x, y, z, \dots$ den Wert hat:

$$H = -(n-1)(-u)^{k-2} \Sigma(\Delta_{12\dots k} L_{k+1} L_{k+2} \dots L_n)^2,$$

wo $\Delta_{12\dots k}$ die Determinante der Coefficienten der k Factoren $L_1, L_2, \dots, L_k$ bezeichnet. Specielle Folgerungen auf ein System

von $n(>k)$ reellen linearen Gebilden von $k-2$ Dimensionen im Raume von $k-1$ Dimensionen sind: 1. Die Hesse'sche Determinante des Systems verschwindet stets und nur, wenn alle jene Gebilde durch einen Punkt gehen. 2. Gilt dies von weniger als k Gebilden, so besteht sie aus dem ursprünglichen System, $(k-2)$-mal gezählt, und einem imaginären Gebilde. 3. Treffen sich k oder mehr, so geht das letztere durch alle solche Schnittpunkte. H.

M. Fouché. **Sur une simplification à un calcul de Lamé relatif à un changement de variable.** S. M. F. Bull. XVIII. 149-152.

Die cartesischen Coordinaten eines Punktes x, y, z seien in 3 orthogonalen Parametern $\varrho, \varrho_1, \varrho_2$ dargestellt durch die 3 Gleichungen $f(x,y,z)=\varrho$, etc. Lamé verlangt, die Grösse

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

in Derivirten der 3 Grössen h, h_1, h_2, definirt durch die 3 Gleichungen

$$h^2 = \left(\frac{\partial \varrho}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho}{\partial z}\right)^2 \text{ etc.},$$

auszudrücken. Er gewinnt und verwendet dazu die Relation:

$$h^2 \frac{\partial \frac{\partial \varrho_1}{\partial x}}{\partial \varrho} = - h_1^2 \frac{\partial \frac{\partial \varrho}{\partial x}}{\partial \varrho_1}.$$

Der Verfasser kommt kürzer zum Ziele, indem er gleich anfangs $\Delta\varrho$, $\Delta\varrho_1$, $\Delta\varrho_2$ mit Anwendung derselben Relation darstellt.

H.

L. Bianchi. **Sulle forme differenziali quadratiche indefinite.** Rom. Acc. L. Mem. (1889). 68 S. 4°.

A. A. Markoff. **Ueber eine Mendeleieff'sche Frage.** Petersb. Abhandl. LXII. 1-24. (Russisch.)

Die Abhandlung ist der Lösung der folgenden Frage ge-

widmet: „Es ist gegeben die Gesamtheit der ganzen Functionen $p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + p_2 z^{n-2} + \cdots + p_n$, deren Grad die Zahl n nicht übersteigt, und deren Zahlenwerte für alle Werte der Veränderlichen z zwischen a und b den Wert L nicht übertreffen. Es fragt sich, was für eine Grenze der Zahlwert der Derivirten nicht übersteigt. Einer ähnlichen Frage ist Herr Mendeleieff in seinen Untersuchungen über das specifische Gewicht verschiedener Wasserlösungen begegnet. Wi.

C.-A. Laisant. Limite de l'expression

$$\left(\frac{p_1 a_1^{\frac{1}{m}} + p_2 a_2^{\frac{1}{m}} + \cdots + p_n a_n^{\frac{1}{m}}}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}\right)^m$$

lorsque m croît indéfiniment. J. de Math. spéc. (3) IV. 4-6.

Von dem leicht bestimmten Grenzwerte werden einige besondere Anwendungen gemacht. Lp.

Ch. Galopin-Schaub. Questions de maxima et de minima. Théorie et exercices. Genève. H. Georg; Paris. Gauthier-Villars. 91 S. 8°.

Der Verfasser, welcher in demselben Verlage eine „Théorie des approximations numériques" 1884 veröffentlicht hat, giebt auf den ersten 26 Seiten des Büchelchens eine Uebersicht über die analytischen Methoden zur Aufsuchung grösster und kleinster Werte von Functionen einer und mehrerer Veränderlichen. Die dann folgenden Aufgaben betreffen I. Functionen einer Variable (Nr. 1-59), II. Functionen mehrerer Variabeln (Nr. 60-77), III. implicite Functionen (Nr. 78-96), IV. geometrische Aufgaben, und zwar 1) absolute Maxima oder Minima (Nr. 97-152), 2) relative Maxima oder Minima (Nr. 153-173), 3) besondere Fälle (174-185). Die Lösungen sind beigefügt. Als ungenau, bezw. unvollständig erwiesen sich bei Stichproben die Lösungen zu Nr. 40 und 49. Für die Aufgaben, welche übrigens nicht den Anspruch erheben, Neues zu bieten, nennt der Verfasser als Quellen: Vieille, Sohncke, Todhunter, Vacquant, Frenet. Lp.

L. Maleyx. Méthode élémentaire pour étudier les variations des fonctions continues, maximums et minimums. Nouv. Ann. (3) IX. 502-508.

Für rationale Functionen $f(x)$ stellt man die Differenz zweier Functionswerte leicht in der Form dar:

$$f(x)-f(x_1)=(x-x_1)F(x, x_1).$$

Für irrationale $f(x)$ wird vorgeschlagen zu setzen

$$F(x, x_1) = F(x_1, x_1)+\varepsilon,$$

wo ε mit $x-x_1$ verschwindet, und bewiesen, dass das Maximum oder Minimum vom positiven oder negativen $F(x_1, x_1)$ abhängt.

H.

J. Koch. Darstellung und Anwendung von Schellbach's Verfahren, Maxima oder Minima der Functionen einer Veränderlichen zu bestimmen. Casop. XIX. 129. (Böhmisch.)

Enthält eine ausführliche, für Mittelschulen berechnete Begründung des Schellbach'schen (Fermat'schen, Lp.) Verfahrens samt zahlreichen Anwendungen. Std.

O. Stolz. Die Maxima und Minima der Functionen von mehreren Veränderlichen. Wien. Ber. XCIX. 495-510.

Um zu entscheiden, ob die Function $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ an der Stelle $x_1=a_1, x_2=a_2, \dots, x_m=a_m$ ein Extremum besitzt, entwickelt man bekanntlich $f(a_1+\xi_1, a_2+\xi_2, \dots, a_m+\xi_m)-f(a_1, a_2, \dots, a_m)$ nach steigenden Potenzen von $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$. Beginnt die Entwickelung mit Gliedern n^{ter} Dimension, so findet ein Extremum statt oder nicht, je nachdem die Glieder n^{ter} Dimension eine definite oder indefinite Form bilden. Dieses Kriterium versagt, wenn die Glieder n^{ter} Dimension eine semi-definite Form bilden, d. h. eine Form, die ausser für $\xi_1=\xi_2=\dots=\xi_m=0$ auch noch für andere Stellen verschwindet, übrigens aber nur Werte eines Vorzeichens besitzt. Für diesen Fall hat nun Scheeffer in einer hinterlassenen Abhandlung eine Methode gegeben, um zu entscheiden, ob ein Extremum eintritt, oder nicht. Doch bezieht

sich diese Methode nur auf Functionen von zwei Veränderlichen. (Vgl. F. d. M. XVIII. 1886. 245.) Herr Stolz dehnt nun die Methode von Scheeffer auf den Fall von Functionen mehrerer Veränderlichen aus. Ist die Zahl der Veränderlichen drei, so lassen sich nach den von Herrn Stolz gegebenen Vorschriften die Extreme stets ermitteln, während für den Fall von mehr als drei Veränderlichen — wie Herr Stolz selbst hervorhebt — gewisse Schwierigkeiten sich einstellen können. Die Note enthält überdies noch die Durchführung eines verwickelteren Beispiels für den Fall von zwei Veränderlichen, sowie einige Bemerkungen, die sich an ein anderes Kriterium anknüpfen, dem zufolge $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ an der Stelle $a_1, a_2, \dots, a_m$ dann und nur dann ein Extrem besitzt, wenn die Stelle einen isolirten Punkt der Fläche $f(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$ darstellt. Hz.

K. A. Posse. Zur Frage von den grössten und kleinsten Werten einer Function von zwei unabhängigen Veränderlichen. Mosk. Math. Samml. XIV. 591-600. (Russisch.)

Herr Peano hat auf Grund des Beispiels $u=(y-ax^2)(y-bx^2)$ $(a>b>0)$ gezeigt, dass die gewöhnlich angenommenen Kriterien für die Existenz eines Maximums oder Minimums für den Fall unzureichend sind, wenn d^2u für ein System von $h, k, l, \dots$ Null werden kann. Herr Posse untersucht in der vorliegenden Notiz das Peano'sche Beispiel. Wi.

L. Scheeffer. Theorie der Maxima und Minima einer Function von zwei Variabeln. Math. Ann. XXXV. 541-576.

Abdruck a. d. Leipz. Ber. 1886; Ref. F. d. M. XVIII.

Tsuruda. An example of maxima and minima. Tokio Math. Ges. IV. 6.

Elementare Lösung des Problems: Welcher Punkt ist so

bemessen, dass die Summe der Quadrate seiner Abstände von den drei Ecken eines Dreiecks ein Minimum ist? E.

E. HOFFMANN. Ueber das kürzeste Verbindungssystem zwischen vier Punkten der Ebene. Pr. Gymn. Wetzlar.

Zwischen 4 festen Punkten A bis D sollen 2 Punkte N und N_1 so gewählt werden, dass die Summe der Strecken AN, BN, NN_1, CN_1, DN_1 ein Minimum wird. Die Aufgabe wird auf analytischem Wege gelöst; die Resultate sind schon früher von Herrn Bopp in einer gleichlautenden Arbeit (Diss. Gött. 1879) erhalten worden. Als Lösung erhält man ein System von 5 geraden Linien, die je 120° mit einander bilden und bei welchen die Strecken, die von gegenüber liegenden Ecken ausgehen, zu einander parallel sind. Um die beiden Punkte N, N_1 hiernach zu finden, hat man über 2 gegenüber liegenden Seiten des Vierecks, z. B. AB und CD, gleichseitige Dreiecke ABE und CDF nach aussen zu zeichnen und um dieselben die umbeschriebenen Kreise, so sind die Schnittpunkte der Linie EF mit den Kreisen die verlangten Punkte N, N_1, und die Länge EF ist die Länge des Verbindungssystems. Diese Lösung ist für besondere Fälle, die genau untersucht sind, zu modificiren; es ist ferner angedeutet, wie sich dieses Problem auf n Punkte erweitern lässt.

Sh.

CLARKE, D. EDWARDES. Solution of question 8395. Ed. Times LII. 54-56.

ASPARAGUS, T. GALLIERS, G. G. STORR. Solution of question 8815. Ed. Times LII. 114-115.

Die erste Aufgabe betrifft die kleinste Ellipse durch vier gegebene Punkte; ihre Lösung führt auf eine kubische Gleichung, deren einzige positive Wurzel der Bedingung der Aufgabe genügt. Die zweite Aufgabe fordert die Bestimmung desjenigen Krümmungskreises einer Ellipse, welcher in seinem zweiten Schnittpunkte mit der letzteren den grössten Winkel bildet.

Lp.

V. v. Dantscher. Ueber die Ellipse vom kleinsten Umfange durch drei gegebene Punkte. Wien. Ber. XCIX. 10-58.

Bei directem analytischen Angriff der Frage ergiebt sich zunächst, dass der Mittelpunkt der gesuchten Ellipse auf einer bestimmten Curve dritter Ordnung liegen muss. Heissen die gegebenen Punkte A, B, C, so muss ferner der Mittelpunkt der gesuchten Ellipse so liegen, dass die aus ihm dem Dreiecke ABC um- und eingeschriebene Ellipse zusammenfallende Axenrichtungen haben. Nach diesen vorläufigen Resultaten schlägt der Verfasser einen umgekehrten Weg ein, nämlich auf einer gegebenen Ellipse E sämtliche Dreiecke $P'P''P'''$ zu bestimmen, für welche E die Ellipse vom kleinsten Umfange ist.

Heisst

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \quad (a>b)$$

die Gleichung von E, und setzt man

$$K=\frac{a^2-b^2}{a^2}; \quad c_\lambda=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2\lambda-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2\lambda},$$

ferner

$$J=\pi\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{c_\lambda^2}{4(\lambda+1)}K^{\lambda+1}; \quad J'=\pi\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(\lambda+1)c_{\lambda+1}^2}{2\lambda+1}K^{\lambda+1};$$

nennt man endlich $\mathfrak{E}$ die Ellipse mit den Halbaxen

$$\mathfrak{a}=\frac{a^2J}{a^2J+b^2J'}, \quad \mathfrak{b}=\frac{b^2J'}{a^2J+b^2J'},$$

so erhält man den Satz:

Die sämtlichen Dreiecke $P'P''P'''$ auf E, für welche der Umfang von E ein Minimum ist, sind diejenigen, welche zugleich der Ellipse $\mathfrak{E}$ umgeschrieben sind. Unter der Annahme des später noch zu beweisenden Satzes, dass das Verhältnis der Quadrate der Halbaxen einer durch die 3 Punkte P', P'', P''' hindurchgehenden Ellipse durch die Forderung, dass ihr Umfang ein Minimum sein soll, eindeutig bestimmt ist, wird schliesslich gezeigt, dass der Umfang der Ellipse E das einzige Minimum ist, dass also E in der That die Ellipse vom kleinsten Umfange durch P', P'', P''' ist. Sh.

R. E. Allardice. On a property of odd and even polygons. Edinb. M. S. Proc. VIII. 22-26.

Die betreffende Eigenschaft tritt hervor bei der Betrachtung der Aufgabe, einem gegebenen n-Eck das n-Eck von kleinstem Umfange einzuschreiben, und kann wie folgt dargethan werden. Einem Polygone mit ungerader Seitenanzahl kann ein Vieleck von derselben Seitenzahl, dessen Umfang ein Kleinstes ist, eingeschrieben werden, und dieses eingeschriebene Vieleck ist eindeutig bestimmt. In dem Falle eines Polygons mit gerader Seitenzahl lässt sich ein Vieleck mit kleinstem Umfange nicht einschreiben, es sei denn, dass zwischen den Winkeln A, B, C, ... des gegebenen Polygons die Beziehung stattfindet $A-B+C-D+\cdots=0$. Ist dies der Fall, so lassen sich unendlich viele Vielecke kleinsten Umfangs einschreiben, und je zwei von ihnen haben gleiche Umfänge und parallele entsprechende Seiten. [Die bezüglichen Sätze stehen schon bei Steiner, Gesammelte Werke II, Nr. 63, S. 232 ff. Vgl. auch die genaueren Bestimmungen bei R. Sturm, J. für Math. XCVI. 53 ff. Lp.]

Gbs. (Lp.)

R. Höhne. Analytische Untersuchungen Steiner'scher Maxima- und Minimaprobleme, welche Beziehungen zwischen Umfang und Inhalt ebener Figuren enthalten. Diss. Leipzig. 51 S. 8°.

Capitel 3.

Integralrechnung.

V. Dantscher von Kollesberg. Bemerkung zur Integralrechnung. Monatsh. f. Math. I. 92-94.

Es wird der Satz bewiesen: „Sind $f(t)$ und $\varphi(t)$ im reellen

Intervalle $t_0 < t < t_1$ eindeutige, reelle, endliche und stetige Functionen von t, so ist

$$\int_{t_0}^{t_1} |f(t)+i\varphi(t)|\,dt > \left|\int_{t_0}^{t_1} (f(t)+i\varphi(t))\,dt\right|,$$

wenn der Quotient $f(t):\varphi(t)$ nicht im ganzen Integrationsintervalle einen und denselben Wert hat." Die Einschliessung einer Complexen zwischen Verticalstriche bedeutet den Modul.

H.

G. Macloskie. Formulae for integration. Annals of Math. V. 106-108.

Statt der vier Formeln, welche man gewöhnlich für das Integral

$$\int_0 x^m(a+bx^n)^p\,dx$$

giebt, entwickelt der Verfasser einfacher zwei Formeln, zuerst zwei Reductionsformeln, welche m auf $m\pm 1$ und p auf $p\pm 1$ zurückführen, dann die Endresultate, wenn m, n, p ganze Zahlen, m, p positiv oder negativ sind. H.

M. Ciemniewski. Aus dem Gebiete der Integralrechnung. Prace mat.-fiz. II. 228-242. (Polnisch.)

Im ersten Teile dieses Artikels behandelt der Verfasser eine gewisse Reductionsart vielfacher Integrale. Ist nämlich

$$\iint\cdots\int (x_1^{m} + x_2^{m} + \cdots + x_n^{m_n})\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_n$$

das gegebene Integral mit den folgenden Bedingungen für die Grenzen:

$$x_1^{m_1} + x_2^{m_2} + \cdots + x_n^{m_n} \leqq 1,\quad x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ \ldots,\ x_n \geqq 0,$$

so geschieht die Transformation mit Hülfe der Substitutionen:

$$x_1^{m_1} + x_2^{m_2} + \cdots + x_n^{m_n} = \xi_1,$$

$$x_2^{m_2} = \xi_2,\quad x_3^{m_3} = \xi_3,\quad \ldots,\quad x_n^{m_n} = \xi_n.$$

Im zweiten Teile behandelt der Verfasser das bestimmte Integral

$$\omega = \int_a^b f(x)\,dx,$$

welchem er unter Anwendung der Mac-Laurin'schen Reihe die folgende Form erteilt:

$$\omega = \sum_{\iota=0}^{\iota=\infty} \frac{b^{\iota+1} - a^{\iota+1}}{(\iota+1)!} f^{\iota}(0),$$

und wendet diese Methode auf die Entwickelung der Integrale

$$\int_{-1}^{+1} xe^x\,dx, \quad \int_{\mu-\nu}^{\mu+\nu} xe^x\,dx$$

an. Dn.

Ph. Gilbert. Sur quelques formules d'un usage général dans la physique mathématique. Brux. S. sc. XIV B. 1-28.

Eine sehr einfache, von Ostrogradsky herrührende Formel gestattet die Transformation eines auf alle Volumenelemente eines Körpers ausgedehnten Integrals in ein anderes, das sich auf alle Oberflächenelemente dieses Körpers erstreckt, und umgekehrt. Die Anwendung dieser Formel ist in manchen Fragen der mathematischen Physik und der Mechanik sehr förderlich. — Die entsprechende, von Hrn. Gilbert ermittelte Formel in krummlinigen Coordinaten besitzt in ihrer Allgemeinheit eine grössere Tragweite und führt meistens zu leichten und eleganten Lösungen. Hr. Gilbert wendet sie besonders auf die in krummlinigen Coordinaten bewirkte Lösung des Problems der variabeln Temperaturen in einem isotropen Mittel an, auf den Beweis des Green'schen Satzes, auf die Bestimmung der partiellen Differentialgleichungen für die Bewegung der Flüssigkeiten und auf die der Gleichungen des inneren Gleichgewichts und der Bewegung elastischer Mittel, immer bei demselben Coordinatensystem. Mehrere wichtige Formeln, vornehmlich zwei Formeln, die Gauss in der Theorie der Capillarerscheinungen zur Zurückführung der sechsfachen Integrale auf vierfache benutzt, fliessen ebenfalls aus der von Hrn. Gilbert verallgemeinerten Ostrogradsky'schen Formel. Hr. de Salvert hat im ersten Capitel seines „Mémoire

sur la recherche la plus générale d'un système orthogonal triplement isotherme" (Brux. S. sc. XIIIB. 117-260, F. d. M. XXI. 1889. 756) vor Hrn. Gilbert direct die Gleichung der Wärmebewegung in beliebigen Coordinaten gegeben. Mn. (Lp.)

E. Carvallo. Formules de quaternions pour la réduction des intégrales multiples les unes dans les autres. S. M. F. Bull. XVIII. 80-90.

Es werden zwei Formeln aufgestellt, welche den Uebergang von den in der mathematischen Physik vorkommenden typischen Formen einfacher und doppelter Integrale zu bezw. doppelten und dreifachen vermitteln. Dies gelingt durch Einführung der für die Quaternionen-Theorie charakteristischen Einheiten (J_1, J_2, J_3) und Functionen. Durch ein Beispiel erläutert wird einer der besonders zu behandelnden Fälle, in denen die vermittelnde Function

$$\varphi(\nabla) = \varphi\left(J_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + J_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + J_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$$

nicht einen eindeutigen bestimmten Wert hat. Ausserdem zeigt der Verfasser, dass das Symbol ∇ analoge Eigenschaften besitzt wie das gewöhnliche Zeichen der Ableitung, und dass bekannte Formeln von Green und Ampère, die in der Theorie der Elektricität vorkommen, als Specialfälle in den oben genannten beiden Hauptformeln enthalten sind. Schg.

N. J. Sonine. Ueber die Reduction eines mehrfachen Integrals. Mosk. Math. Samml. XIV. 527-537.

Reproduction eines früheren Artikels desselben Verfassers mit einigen Vervollständigungen. (S. F. d. M. XXI. 1889. 287.) Wi.

N. Zinine. Zur Aufgabe von der Reduction des mehrfachen Integrals. Mosk. Math. Samml. XIV. 549-553.

Das Integral:

$$\int \varphi_1(x_1) \cdot \varphi_2(x_2) \dots \varphi_n(x_n) F(x_1 + x_2 + \dots + x_n)\, dx_1 \dots dx_n,$$

welches auf alle positiven Werte der Veränderlichen $x_1, x_2, \dots, x_n$ sich erstreckt, die der Bedingung $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leqq h (h > 0$ genügen, wird durch die Anwendung des discontinuirlichen Factors von Cauchy reducirt:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\sigma(x+\vartheta i)}}{x+\vartheta i}\, d\vartheta.$$

Wi.

Capitel 4.

Bestimmte Integrale.

C. F. Lindmann. Några formler hos Mr. Bierens de Haan. Stockh. Öfv. 353-362.

Berichtigungen und Vereinfachungen einiger Bierens de Haan'schen Formeln zur Berechnung bestimmter Integrale. Voran geht eine Herleitung von Reihenentwickelungen für vier trigonometrische Ausdrücke. Bdn.

U. Bigler. Auswertung einiger bestimmten Integrale durch Anwendung des freien Integrationsweges. Hoppe Arch. (2) IX. 60-94.

Den Aufsatz bestimmt der Verfasser zu einem Beitrag, die Scheu vor der Anwendung der Methode des freien Integrationsweges, welche sich in der Litteratur zu erkennen gebe, zu überwinden. Als Nachteil ihrer Meidung wird hervorgehoben, dass öfters die Identität von Integralen nicht erkannt werde. Im Vorliegenden werden 14 Beispiele von Integrationen gegeben, die meisten aus Dienger's Lehrbuch entnommen, welche derselbe

durch Doppelintegrale berechnet, die jedoch nach jener Methode als einfache Integrale behandelt werden können. H.

S. Pincherle. Sulla trasformazione di Heine. Palermo Rend. IV. 143-145.

Die Heine'sche Transformation

$$f(x) = \int_a^b \frac{\varphi(t)\,dt}{x-t}$$

(siehe die Abhandlungen von Heine im J. für Math. LX u. ff.) gilt bekanntlich nur in dem Falle, wo $\varphi(t)$ längs des ganzen Integrationsweges, die Grenzpunkte eingeschlossen, entweder durchaus endlich bleibt, oder nur Unendlichkeitspunkte besitzt, deren Ordnung kleiner als 1 ist. Wird aber $\varphi(t)$ in a unendlich von einer Ordnung, welche $\geqq 1$, aber $< h+1$ ist, so kann man die Heine'sche Transformation durch die folgende ersetzen:

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^h}\int_a^b \frac{\varphi(t)(t-a)^h}{x-t}\,dt.$$

Vi.

R. Mildner. Ueber eine Anwendung der Taylor'schen Reihe und einige bestimmte Integrale. Hoppe Arch (2) IX. 285-296.

Unter der Voraussetzung, dass $f(h+z)$ sich nach Potenzen von z in eine Reihe, convergent im Umfang $-\lambda < z < \lambda$, entwickeln lässt, wird die Formel hergeleitet:

$$\int^{\infty} [f(h+re^{-ax})-f(h+re^{-bx})]\frac{dx}{x} = [f(h+r)-f(h)]\log\frac{b}{a}$$

$$(a>0;\ b>0;\ -\lambda<r<\lambda).$$

Sie ist die Quelle vieler Formeln; zu nennen sind:

$$\int_0^{\infty}[f(re^{-ax+bxi})-f(re^{-ax-bxi})]\frac{dx}{x} = 2i[f(r)-f(0)]\operatorname{arctg}\frac{b}{a},$$

$$\int_0^{2\pi} f(re^{-ax+bxi})dx = \frac{a+bi}{a^2+b^2}\int_{re^{-2ax}}^{r}\frac{f(x)}{x}dx,$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin\lambda x}{x}\log(1+2r\cos x+r^2)dx = \frac{\pi}{2}\left[r-\frac{r^2}{2}+\frac{r^3}{3}-\cdots\pm\frac{r^g}{g}\right]$$
$$(g+1>\lambda>g),$$
$$\tfrac{1}{4}\int_0^\pi [f(re^{2xi})+f(re^{-2xi})]\log(1-2q\cos 2x+q^2)dx = -\pi\int_0^{rq}\frac{f(x)}{x}dx$$
$$(\text{wenn } f(0)=0).$$
H.

T. J. Stieltjes. Note sur l'intégrale $\int_0^\infty e^{-u^2}du$. Nouv. Ann. (3) IX. 479-480.

Der Wert des Integrals wird, ausgehend vom Integral $\int_0^\infty u^n e^{-u^2}du = J_n$ gefunden, indem J_n auf J_0 reducirt, J_{2k} zwischen zwei Grenzen eingeschlossen wird, die für $k=\infty$ in den Wallis'schen Ausdruck von π zusammenfallen. H.

J. Rajewski. Ueber einige bestimmte Integrale. Krak. Ber. XX. 272-281. (Polnisch.)

Für

$$\varphi_n = 1+\frac{-n}{1.\gamma}x+\frac{-n(-n+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2+\frac{-n(-n+1)(-n+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\cdots,$$
$$\psi_n = 1-\frac{n(\gamma-n)}{1}x+\frac{n(n-1)(\gamma-n)(\gamma-n-1)}{1.2}x^2$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(\gamma-n)(\gamma-n-1)(\gamma-n-2)}{1.2.3}x^3-\cdots,$$

ist:

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{\gamma-1}\varphi_m\varphi_n dx = \begin{cases} 0, \text{ wenn } m \gtrless n,\ \gamma>0, \\ \dfrac{\Gamma(1+n)\Gamma^2(\gamma)}{\Gamma(\gamma+n)}, \text{ wenn } m=n,\ \gamma>0,\end{cases}$$

und

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{x}}x^{-(\gamma+1)}\psi_m\psi_n dx = \begin{cases} 0, \text{ wenn } m\gtrless n,\ \gamma>m+n, \\ \dfrac{\Gamma(1+n)\Gamma(1+\gamma-n)}{\gamma-2n}, \text{ wenn } m=n,\ \gamma>2n.\end{cases}$$

Dn.

M. Lerch. Mitteilungen aus der Integralrechnung. Monatsh. f. Math. I. 105-112.

Zuerst wird aus bekannten Eigenschaften der Bessel'schen Function $J(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{ix\cos a}da$ und der Formel von Lipschitz

$$\int_0^\infty e^{-ar}J(\beta r)dr = \frac{1}{\sqrt{a^2+\beta^2}}$$

die Formel von Weber

$$\int_0^\infty J(z)\log z dz = \Gamma'(1)-\log 2$$

hergeleitet; dann als Consequenz der erstern gefunden:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(z+u)}{z+u}J(z)dz = \frac{\pi}{2}J(u),$$

dann die Transformation

$$\int_0^\infty \frac{da}{\Gamma(a)} = e+\int_0^\infty \frac{e^{-x}dx}{\pi^2+(\log x)^2}$$

ausgeführt; zuletzt (wenn $E(x)$ die grösste ganze Zahl unter x bezeichnet) die Darstellung

$$\sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(m-1)} E\left(\frac{kn}{m}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(m-1)(n-1)$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(m+n-1)z\sin(m-1)nz\sin(n-1)mz dz}{\sin z\sin 2mz\sin 2nz}$$

gewonnen. H.

E. Schröder. Ueber bestimmte Integrale, die sich rational durch π und $\log 2$ ausdrücken. Naturf. Ges. Bremen. 8-9.

B. Lorenz. En diskontinuert Faktor. Nyt Tidss. for Math. I. 76-79.

In den Untersuchungen über die Menge der Primzahlen braucht Hr. Gram einen discontinuirlichen Factor

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\left(\frac{x}{p}\right)^r\frac{dr}{r}$$

(unter dieser Form von Herrn J. Petersen gegeben), welcher die Werte 2 und 3 für $x > p$, 0 für $x < p$, endlich πi für $x = p$ hat. Statt dessen untersucht Hr. Lorenz eine Function, welche er $\left(\frac{x^r}{r}\right)$ nennt, wo die Parenthese als Functionszeichen steht. Diese Function wird 0 für $x < 1$, 1 für $x > 1$ und ist endlich für $x = 1$, wobei x reell und positiv ist. Die Function befriedigt die Fundamentalgleichung

$$\chi(x^r R) + \chi_1(x_1^r R_1) \cdots = (\chi x^r R + \chi_1 x_1^r R_1 + \cdots),$$

wo χ, χ_1, ..., R, R_1, ... willkürliche Functionen beziehungsweise von x, x_1, ... und r sind. V.

G. G. Stokes. Note on the determination of arbitrary constants which appear as multipliers of semi-convergent series. Cambr. Proc. VI. 362-366. (1889.)

Diese Notiz bezieht sich auf drei vor langer Zeit erschienene Arbeiten des Verfassers („On the numerical calculation of a class of definite integrals and infinite series“, „On the discontinuity of arbitrary constants which appear in divergent developments“, „Supplement to a paper on the discontinuity of arbitrary constants which appear in divergent developments“. Cambr. Trans. IX. 166; X. 105; XI. 412). Das Problem, um welches es sich handelt, ist F. d. M. II. 1869/70. 163 angegeben worden. In der vorliegenden Arbeit wird eine einfachere Methode zur Bestimmung der in den genannten Untersuchungen auftretenden willkürlichen Constanten dargelegt, doch lässt sich dieselbe hier nicht ohne Weitschweifigkeit wiedergeben.

Gz.

T.-J. Stieltjes. Sur quelques intégrales définies et leur développement en fractions continues. Quart. J. XXIV. 370-382.

Die behandelten Integrale sind alle von der Form

$$\int_0^\infty \Phi(u) e^{-xu} du,$$

und zwar handelt es sich um die fünf Beispiele:

$$\Phi(u) = (\cos u + a\sin u)^m \sin^n u,$$
$$\Phi(u) = (\cosh u + a\sinh u)^m \sinh^n u,$$
$$\Phi(u) = \frac{\sinh(au)\cosh(bu)}{\sinh(cu)},$$
$$\Phi(u) = (\sinh u \cosh u)^k F(\alpha, \beta, \gamma, -\sinh^2 u),$$
$$\Phi(u) = \sinh^{\gamma-1} u \cosh^{\alpha+\beta-\gamma} u F(\alpha, \beta, \gamma, -\sinh^2 u).$$

Die nötigen Convergenzbetrachtungen sollen später mitgeteilt werden. R. M.

P. Mansion. Généralisation de la formule approximative de W. Snell et Ozanam. Brux. S. sc. XIV A. 45.

Mit einem immer in gleichem Sinne abweichenden Fehler ist

$$\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-k^2t^2)(1-l^2t^2)(1-m^2t^2)}} = \frac{3t}{\sqrt{1-k^2t^2}+\sqrt{1-l^2t^2}+\sqrt{1-m^2t^2}}.$$

Mn. (Lp.)

R. Hoppe. Ueber die von Humbert untersuchten Kugelflächenstücke. Hoppe Arch. (2) IX. 53-59.

Wird eine Kugel durch eine geschlossene konische Fläche geschnitten, so entstehen zwei geschlossene Kugelflächenstücke; Humbert hat (Journ. de Math. (4) IV. 313-345, F. d. M. XX. 1888. 813), je nachdem der Kegelmittelpunkt innerhalb oder ausserhalb der Kugel liegt, über deren Summe oder Differenz ω bemerkenswerte Sätze aufgestellt, welche der Verfasser zunächst auf directem analytischen Wege ableitet. Alsdann wird untersucht, wie sich ω mit der Richtung der Axe, d. h. der Verbindungslinie von Kegelspitze und Mittelpunkt, ändert. Nennt man h den Abstand der Spitze vom Mittelpunkt, r den Kugelradius und ε den Winkel, welchen eine zweite Axe mit der ursprünglichen bildet, so erhält man den Hauptsatz: Teilt eine durch die Spitze gehende Ebene den Kegel in zwei congruente Hälften, so variirt ω bei beliebig veränderter Lage des Kegels relativ zur Kugel nur mit dem Factor $hr\cos\varepsilon$. Teilt sie ihn in zwei symmetrische Hälften, so kann der Kugelmittelpunkt noch längs der Symmetrieebene

beliebig verschoben werden, während ω proportional $hr\cos\varepsilon$ bleibt. Anwendungen auf ebenflächige Kegel, d. h. Pyramiden, bilden den Schluss. Sh.

P. MANSION. Paradoxe. Mathesis X. 222-224.

Einem geraden Cylinder mit Kreisbasis kann man ein Polyeder mit endlos abnehmenden Seitenflächen einbeschreiben, dessen Oberfläche jede vorgegebene Grenze erreicht, oder keine Grenze hat. (Vgl. Peano „Sulla definizione dell'area d'una superficie" in Rom. Acc. L. Rend. (4) V_1. 54-57 und Schwarz in Ges. Math. Abhandlungen II. 309-311, 369-370.) Mn. (Lp.)

E. GELIN. Surface et volume du tore. Mathesis X. 190-197.

W. G. IMSCHENETZKY. Ueber die geometrische Deutung der Euler'schen Formel für die angenäherte Berechnung der Quadraturen. Petersb. Abhandl. LXII. 45-52.

Es werden die Bedingungen abgeleitet, unter welchen man auf geometrischem Wege mit Hülfe der Parabeln höherer Ordnung die Euler'sche Formel beweisen kann. Wi.

P. APPELL. Sur une classe de polynômes à deux variables et le calcul approché des intégrales doubles. Toulouse Ann. IV. H. 1-20.

Wenn wir für alle folgenden Doppelintegrale ein bestimmtes Integrationsgebiet festsetzen und dann unter $K(x,y)$ eine integrirbare Function verstehen, welche in diesem Gebiet ihr Zeichen nicht wechselt, so kann man das allgemeinste Polynom $P(x,y)$ vom Grade p bestimmen, welches die $\frac{1}{2}p(p+1)$ Gleichungen: $\iint Kx^iy^jPdxdy=0$ $(i+j<p)$ befriedigt. Dieses P findet man in der Form: $P=\sum_{\lambda=0}^{p}\alpha_{p-\lambda,\lambda}V_{p-\lambda,\lambda}$, wo die α beliebige Constanten,

die V linear unabhängige Polynome sind, deren jedes nur ein Glied p^{ter} Dimension enthält. Nun ist offenbar $\iint K V_{m,n} V_{\mu,\nu}\, dx dy = 0$, sobald $m+n \lesseqgtr \mu+\nu$. Man kann aber aus diesen V neue Polynome U herstellen, für welche $\iint K U_{m,n} U_{\mu,\nu}\, dx dy = 0$, sobald nicht gleichzeitig $m=\mu$, $n=\nu$ ist. Zu diesem Zwecke braucht man nur (und dies ist ein Fortschritt gegenüber früheren Arbeiten von Hermite und Didon) die quadratische Form:

$$\iint K\left(x_0 V_{p,0} + x_1 V_{p-1,1} + \cdots + x_p V_{0,p}\right)^2 dx dy = 0$$

in Quadrate zu zerlegen.

Der eigentliche Zweck der vorliegenden Note ist nun, zu zeigen, dass die definirten Polynome $V(x, y)$ bei der mechanischen Quadratur von Doppelintegralen eine ähnliche Rolle spielen, wie die Legendre'schen Polynome bei der Gauss'schen Berechnung der einfachen Integrale. Wenn man in dem zu berechnenden Integral $I = \iint K f(x,y) dx dy$ voraussetzt, dass $f(x,y)$ nach Potenzen entwickelt werden kann: $f(x,y) = \sum_{\mu+\nu=0}^{\infty} a_{\mu,\nu} x^\mu y^\nu$, und dass man die Teilintegrale $I_{\mu,\nu} = \iint K x^\mu y^\nu dx dy$ direct findet, so kann man ein angenähertes Integral J finden, wenn man $f(x,y)$ durch ein Polynom $\varphi(x,y)$ vom Grade p ersetzt; dasselbe enthält $n = \frac{1}{2}(p+1)(p+2)$ Coefficienten, welche so gewählt werden, dass φ und f an n Stellen $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ denselben Wert haben. Diese Stellen, welche im Integrationsgebiet liegen müssen und nicht einer Curve p^{ter} Ordnung angehören dürfen, kann man nun noch so bestimmen, dass in den Entwickelungen von I und J weitere $2n$ Glieder identisch werden. Aber man trifft hier auf grosse Schwierigkeiten; die betreffenden Gleichungen können unvereinbar sein oder Punkte ergeben, die nicht im Integrationsgebiet liegen. Der Verf. erläutert diese Schwierigkeiten an 3 Beispielen, ohne dieselben zu erledigen; andere Schwierigkeiten, welche sich aus der notwendigen Fehlerbetrachtung ergeben würden, sind nicht berührt worden. R. M.

L. LACHTINE. Der Ausdruck der Wurzeln einer dreigliedrigen algebraischen Gleichung durch bestimmte Integrale. Mosk. Math. Samml. XV. 61-83.

Die Methode, welche Boole für die Ableitung des Ausdrucks der Wurzel einer dreigliedrigen algebraischen Gleichung in der Abhandlung: „On the differential equations which determine the form of the roots of algebraic equations" entwickelt hatte, wird durch den Verf. vervollständigt, und die Ausdrücke selbst werden als Functionen einer complexen Veränderlichen untersucht.

Wi.

Capitel 5.

Gewöhnliche Differentialgleichungen.

O. v. LICHTENFELS. Ueber den Fundamentalsatz der Theorie der Differentialgleichungen. Monatsh. f. Math. I. 275-282.

Die Note enthält einen neuen Beweis für die Existenz eines regulären Integrals der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = c_0 + \mathfrak{P}_0(x, y) = \mathfrak{P}(x, y),$$

wo $\mathfrak{P}_0(x, y)$ eine nach ganzen positiven Potenzen fortschreitende Reihe bedeutet, die für $x = 0$, $y = 0$ verschwindet und in der Umgebung dieses Wertepaars convergirt. Als bekannt wird vorausgesetzt, dass der Gleichung $\frac{dy}{dx} = \mathfrak{P}'(x)$ durch $y = \text{const.} + \mathfrak{P}(x)$ genügt wird, wo $\mathfrak{P}(x)$ denselben Convergenzbereich besitzt, wie $\mathfrak{P}'(x)$, und das folgende Gleichungssystem gebildet:

$$\frac{dy_1}{dx} = c_0, \; y_1 = c_0 x; \;\; \frac{dy_2}{dx} = \mathfrak{P}(x, y_1) = \mathfrak{P}_2'(x), \; y_2 = \mathfrak{P}_2(x);$$
$$\frac{dy_3}{dx} = \mathfrak{P}(x, y_2) = \mathfrak{P}_3'(x), \; y_3 = \mathfrak{P}_3(x); \ldots; \; \frac{dy_n}{dx} = \mathfrak{P}(x, y_{n-1})$$
$$= \mathfrak{P}_n'(x), \; y_n = \mathfrak{P}_n(x),$$

in welchem alle $\mathfrak{P}_n(x)$ für $x = 0$ verschwinden. Von den so erhaltenen Reihen $\mathfrak{P}'_n(x)$ und $\mathfrak{P}_n(x)$ wird gezeigt, dass sie alle in einem bestimmten Bereich convergiren und sich mit wachsendem n bezüglich den Grenzreihen $\mathfrak{P}'(x)$ und $\mathfrak{P}(x)$ nähern, derart, dass $\mathfrak{P}'(x)$ mit $\mathfrak{P}'_n(x)$ und $\mathfrak{P}(x)$ mit $\mathfrak{P}_n(x)$ in den n ersten Gliedern übereinstimmen, und dass endlich

$$\mathfrak{P}'(x) = \lim \mathfrak{P}'_n(x) = \frac{d}{dx} \lim \mathfrak{P}_n(x) = \frac{d}{dx} \mathfrak{P}(x)$$

ist. Da nun

$$\mathfrak{P}'(x) = \lim \mathfrak{P}(x, \mathfrak{P}_{n-1}(x)) = \mathfrak{P}(x, \mathfrak{P}(x))$$

ist, so folgt der zu beweisende Satz. Hr.

G. Peano. Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires. Math. Ann. XXXVII. 182-228.

Der hier gegebene Beweis für die Existenz von n Integralen eines Systems n gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung mit beliebig gegebenen Anfangswerten ist allein auf die Voraussetzung gestützt, dass in der Umgebung der Anfangswerte die Coefficienten des Differentialgleichungssystems continuirlich sind. Der Beweis wird in den Bezeichnungen des logischen Calculs geführt und lässt sich hier nicht im Auszuge wiedergeben. Hr.

H. B. Fine. Singular solutions of ordinary differential equations. American J. XII. 295-322.

Die Theorie der singulären Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung wird unmittelbar aus dieser selbst abgeleitet auf Grund der Darstellung der Integrale in Reihen, welche Briot und Bouquet in ihrer klassischen Abhandlung J. de l'Éc. Pol. Cah. XXXVI entwickelt haben. So wird jede directe oder indirecte Bezugnahme auf den Begriff einer vollständigen Lösung vermieden und damit auch die Schwierigkeiten, die in der älteren Theorie der singulären Lösungen von Herrn Darboux zuerst aufgedeckt worden sind. Im ersten Abschnitt wird die Differential-

gleichung erster Ordnung

$$f(x, y, p) = 0, \quad p = \frac{dy}{dx}$$

betrachtet, worin f eine rationale, in Bezug auf p irreductible Function von x, y, p bedeutet. Durch eine passende Transformation können nach Briot und Bouquet alle gewöhnlichen Lösungen von $f = 0$, welche durch einen gegebenen Punkt $x = 0$ $y = 0$ gehen, auf die Form $y = Vvx^m$ reducirt werden, wo V durch eine algebraische Gleichung als Function von v und x gegeben ist, und v mit x durch eine Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{dv}{dx} x = \varphi(v, x)$$

verbunden ist, in der φ für $x = 0$, $v = 0$ verschwindet. Unter den verschiedenen möglichen Entwickelungen von V nach Potenzen von v und x existirt, falls $f(x, y, p) = 0$ eine singuläre Lösung hat, d. h. wenn die Discriminante von f nach p, gleich Null gesetzt, die Gleichung $f = 0$ befriedigt, stets eine Entwickelung von V, für welche die Gleichung (1) zwischen v und x in die Form

$$\frac{dv}{dx} x = \frac{\psi(v, x)}{\psi(v, x)} \chi(v, x)$$

degenerirt, und daher durch $\psi(v, x) = 0$ befriedigt wird. Dies ist die singuläre Lösung, welche die Differentialgleichung also nicht als solche, sondern durch das Verschwinden eines gemeinschaftlichen Factors befriedigt. Der zweite Abschnitt enthält die Ausdehnung der entwickelten Theorie auf Differentialgleichungen höherer Ordnung.

Im dritten Abschnitt werden die singulären Lösungen derjenigen Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung discutirt, deren allgemeine Lösung in der Form

$$\varphi(x, y, c_1, \ldots, c_m) = 0$$

darstellbar ist, wo φ in Bezug auf x, y eindeutig ist in einem gewissen Bereiche und rational in Beziehung auf die Parameter $c_1, \ldots, c_m$, während zwischen den letzteren $m-n$ algebraische Gleichungen bestehen. Hr.

J. Möller. Ueber die singulären Punkte der gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichungen. Stockh. Vetensk. Bihang. XV. Abt. I. No. 2. 31 S.

Durch Arbeiten der Herren Poincaré und Björling angeregt, stellt der Verf. Untersuchungen an über das Verhalten der Integralcurven einer gewöhnlichen Differentialgleichung in den singulären Punkten. Hierbei werden zuerst Gleichungen erster Ordnung und ersten Grades betrachtet. Um das Verhalten der Integralcurve in der Nähe eines Punktes (x_0, y_0) zu ermitteln, legt der Verf. durch diesen Punkt eine bewegliche Gerade $y-y_0 = m(x-x_0)$ und untersucht den Wert von dy/dx in einem Punkte (x, y) auf einer solchen Geraden. Vor allem geht hieraus eine Regel hervor, durch welche man entscheiden kann, ob ein singulärer Punkt „generell" oder „individuell" ist, d. h. ob alle Integralcurven durch den Punkt gehen, oder nur eine einzige (resp. eine endliche Anzahl) von ihnen. Hierauf folgen der Reihe nach ähnliche Untersuchungen über Gleichungen von den Formen:

$$\varphi(x,y,y')+\psi(x,y,y')y''=0,$$
$$\varphi(x,y,y')=0,$$
$$\varphi(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})+\psi(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})=0,$$

(wo φ, ψ rationale ganze Functionen beliebigen Grades bezeichnen), endlich Beispiele. Bdn.

E. Picard. Sur une classe d'équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme. C. R. CX. 877-880.

Die in Rede stehende Klasse ist durch die Gleichung $f(y, y', \dots, y^{(m)}) = 0$ repräsentirt, in welcher die unabhängige Variable x nicht vorkommt und f ein Polynom bedeutet. Voraussetzung ist, dass das allgemeine Integral eine eindeutige Function von x ist, deren einziger wesentlich singulärer Punkt im Unendlichen liegt. Die Gleichung $f=0$ ist alsdann durch eine eindeutige umkehrbare Substitution, die einen willkürlichen Parameter enthält, in sich transformirbar. Ist nämlich y irgend ein Integral, und sind $y_1, y_1', \dots, y_1^{(m)}$ die Werte, die y annimmt,

wenn x durch $x+h$ ersetzt wird, dann ist

$$y_1^{(k)} = F_k(h, y, y', \dots, y^{(m)}) \quad (k = 0, 1, \dots, m),$$

wo die F_k eindeutige Functionen des „analytischen Punktes auf der f-Fläche“ sind. Diese Transformation ist umkehrbar. Besonderes Interesse bietet der Fall, dass diese „biuniforme“ Transformation „birational“ ist. Es wird bewiesen, dass dann das allgemeine Integral sich mit Hülfe der Abel'schen Transcendenten oder derjenigen, in die sie degeneriren können, ausdrücken lässt. Eine Folge der Ueberlegungen, aus denen der Satz hervorgeht, ist noch, dass eine solche Darstellung des allgemeinen Integrals Y stets möglich ist, wenn es mit Hülfe eines particulären Integrals y in der Form

$$Y = R(y, y', \dots, y^{(m)}, a_1, \dots, a_m),$$

wo R eine rationale Function und $a_1, \dots, a_m$ willkürliche Constanten bedeuten, ausgedrückt werden kann. Hr.

L. Fuchs. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. (Schluss.) Berl. Ber. 1890. 21-38.

Die in der letzten Mitteilung (Berl. Ber. 1889. 713-726; F. d. M. XXI. 305) betrachtete Function H, die als rational erkannt wurde, wird näher bestimmt und dadurch für die Functional-Determinante

$$\varDelta = \Sigma \pm \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial k_1} \frac{\partial \zeta}{\partial k_2}$$

der Ausdruck $\varDelta = \lambda : a^2\pi$ hergeleitet, wo λ eine von x, k_1, k_2 unabhängige Grösse ist und

$$\pi = (x-k_1)(x-k_2)(x-k_3)(x-k_4)(k_1-k_2)(k_1-k_3)(k_1-k_4)(k_2-k_3)(k_2-k_4).$$

Hieraus folgt, dass die einzigen Singularitäten der Grössen x, k_1, k_2 als Functionen von ξ, η, ζ durch das Zusammenfallen zweier der Grössen x, k_1, k_2, k_3, k_4 oder das Unendlichwerden derselben erhalten werden. Der gesamte Wertvorrat V der Mannigfaltigkeit ξ, η, ζ, wenn die Variabeln x, k_1, k_2 beliebige Wege beschreiben, ist so beschaffen, dass $I(\eta)$, $I(-\zeta)$, $I(\xi)^2 - I(\eta)I(-\zeta)$, wo $I(z)$ den Coefficienten von i in der complexen Grösse z bezeichnet, negativ bleiben. Die oben bezeichneten singulären Stellen von

x, k_1, k_2 als Functionen von ξ, η, ζ, sowie diejenigen Werte, welche durch unzählig viele Umläufe von x, k_1, k_2 erhalten werden, derart, dass einige der Grössen ξ, η, ζ von einigen der Grössen x, k_1, k_2 unabhängig werden, liegen auf der Begrenzung von V. Hieraus folgt, dass die Variabeln x, k_1, k_2 eindeutige Functionen des Wertvorrates V der Mannigfaltigkeit ξ, η, ζ sind. Die Darstellung kann, wie bemerkt wird, mittels der Thetafunction bewirkt werden. Hr.

L. Fuchs. Ueber algebraisch integrirbare lineare Differentialgleichungen. Berl. Ber. 1890. 469-483.

Besteht zwischen den Elementen eines Fundamentalsystems von Integralen y_1, y_2, y_3 einer linearen homogenen Differentialgleichung dritter Ordnung eine homogene Relation n^{ten} Grades mit constanten Coefficienten, so besteht, wie der Verf. in früheren Arbeiten (Berl. Ber. 1882 und Acta Math. I, F. d. M. XIV. 1882. 242) nachgewiesen hat, für $n>2$ zwischen der unabhängigen Variable z und $\eta=\frac{y_2}{y_1}$ eine algebraische Differentialgleichung erster Ordnung, in der die Variabeln separirt sind. Aus dieser wird dann die algebraische Natur der Integrale der Differentialgleichung dritter Ordnung gefolgert. Der Nachweis findet sich jedoch am angeführten Orte nur angedeutet; hier wird er auf zwei Arten geführt, die auf verschiedenen Principien beruhen. Hr.

L. Heffter. Ueber Recursionsformeln der Integrale linearer homogener Differentialgleichungen. J. für Math. CVI. 269-282.

L. Fuchs. Bemerkung zu vorstehender Abhandlung des Herrn Heffter. J. für Math. CVI. 283-284.

Die Untersuchungen des Herrn Heffter beziehen sich auf solche linearen homogenen Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung, deren sämtliche Integrale regulär sind. Sie werden in der

Form

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{n} g_k(x) y^{(n-k)} = 0$$

betrachtet, wo g_k ganze Functionen bedeuten, die keinen gemeinsamen Factor haben. Der erste Abschnitt enthält die Ableitung einer Recursionsformel, die für die Coefficienten jeder der Differentialgleichung genügenden Reihe gültig ist. Mit ihrer Hülfe wird zunächst folgender Satz bewiesen. Wenn der Coefficient von $y^{(m)}$ in (1) den Factor $x-a_i$ nur in der n_i^{ten} Potenz enthält, wo $n_i < n$, und die zu a_i gehörige determinirende Gleichung keine ganzzahlige Wurzel besitzt, die $> n-n_i-1$, so besitzt die Gleichung (1) $n-n_i$ in der Umgebung von $x-a_i$ eindeutige Integrale. Darauf wird die Frage behandelt, wann der Gleichung (1) eine ganze rationale Function vom Grade r als particuläres Integral genügt. Zu der offenbar notwendigen Bedingung, dass die zu $x=\infty$ gehörige determinirende Gleichung die Wurzel $-r$ besitze, tritt, falls der Coefficient von $y^{(n)}$ vom Grade n ist, noch hinzu, dass zu dieser Wurzel wenigstens ein von Logarithmen freies Integral gehöre. Derjenigen Wurzel $-r$, die unter den negativen ganzzahligen Wurzeln den kleinsten absoluten Betrag hat, entspricht daher stets die Existenz einer ganzen rationalen Function r^{ten} Grades als Integral. Die Bemerkung des Herrn Fuchs bezieht sich auf diesen letzteren Satz, für den ein anderer Beweis gegeben wird, beruhend auf der Bildung derjenigen Differentialgleichung niederster Ordnung, der die r^{ten} Ableitungen der Integrale der gegebenen Differentialgleichung genügen. Herr Heffter behandelt noch die Frage nach der Existenz von Integralen der Form $(x-a)^r g_\lambda(x)$, wo r beliebig ist und g_λ eine ganze Function λ^{ten} Grades bedeutet, und erledigt sie für zwei besondere Fälle. Die letzten beiden Abschnitte enthalten Anwendungen der vorher abgeleiteten Sätze auf specielle Klassen von Differentialgleichungen. Hr.

P. Schafheitlin. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten. J. für Math. CVI. 285-314.

Vorliegende Arbeit bezweckt, die Resultate, die Herr Fuchs betreffs der Reihenentwickelungen der Integrale der linearen Differentialgleichungen durch analytische Methoden abgeleitet hat, auf algebraischem Wege zu gewinnen. Hierzu dient die Einführung einer gewissen „Normalform“ für die linearen Differentialgleichungen. In anderer Darstellung und Bezeichnungsweise findet sie sich bereits in der Dissertation des Verfassers „Ueber eine gewisse Klasse linearer Differentialgleichungen“ (Halle 1885). Hinsichtlich ihrer Beschaffenheit verweisen wir auf den bezüglichen Bericht in diesem Jahrbuch (XVIII. 1886. 294). Hinzugefügt ist hier der Nachweis, dass jede Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten auf die gedachte Normalform gebracht werden kann, und eine eingehendere Untersuchung der Eigenschaften der Normalform, sowie namentlich der Bedingungen, unter denen sie sich auf eine Differentialgleichung niedrigerer Ordnung reduciren lässt. Während ferner in der Dissertation nur die Frage nach der Existenz und Darstellung eindeutiger Integrale behandelt ist, wird hier auch das Verhalten der nicht eindeutigen Integrale in der Umgebung der singulären Stellen in Betracht gezogen. Hr.

P. Günther. Ueber eine Methode, die zu einem singulären Punkte einer linearen homogenen Differentialgleichung gehörige Fundamentalgleichung zu bestimmen. J. für Math. CVI. 330-336.

Die Coefficienten der in Rede stehenden Gleichung für den Umlauf um den in $x=0$ verlegten singulären Punkt hatte Ref. in unendlichen Reihen von der Form

$$a_{i\lambda}=\sum_{k=0}^{k=\infty}\varphi_i^{k+\lambda-1}(x_0)\frac{(2\pi i)^k}{k!}\binom{i=1,2,\dots,n}{\lambda=1,2,\dots,n}$$

gegeben, wo

$$\varphi_i^k(x_0)=\left[\frac{d^k y_i}{(d\log x)^k}\right]_{x=x_0},$$

x_0 ein nicht singulärer Punkt in der Nähe von $x=0$ ist und $y_1,\dots,y_n$ ein Fundamentalsystem von Integralen mit bestimmten

Anfangswerten für $x = x_0$ bilden. Der Verf. giebt für die Grössen $\varphi_i^k(x_0)$ explicite Ausdrücke durch die Coefficienten der Differentialgleichung mit Hülfe der Reihenentwickelung, die Herr Fuchs (Annali di Mat. IV. 36 ff., s. F. d. M. II. 1870. 175) für die Integrale linearer Differentialgleichungen gegeben hat. Der Uebersichtlichkeit wegen wird das Verfahren an der Differentialgleichung zweiter Ordnung durchgeführt. Bei der Anwendung der gewonnenen Ausdrücke auf die von Herrn Cayley (J. für Math. C. 293, s. F. d. M. XVIII. 1886. 279) behandelte Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{\alpha}{x^4} + \frac{\beta}{x^3} + \frac{\gamma}{x^2} + \frac{\delta}{x} + \varepsilon\right)y$$

wird gezeigt, dass die von Herrn Cayley aufgestellte Form für ein Fundamentalsystem von Integralen nur unter gewissen, von den Coefficienten $\alpha, \beta, \ldots$ zu erfüllenden Bedingungen gültig sein kann. Für den Fall, dass $\delta = \varepsilon = 0$, hatte dies bereits Ref. nachgewiesen und die Bedingungen der Gültigkeit entwickelt.

Hr.

J. Cels. Sur les équations différentielles linéaires ordinaires. C. R. CXI. 98-100.

J. Cels. Sur une classe d'équations différentielles linéaires ordinaires. C. R. CXI. 879-881.

Bilden $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ein Fundamentalsystem von Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung (ξ), so genügen die Coefficienten der Elemente der p^{ten} Zeile der Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} z_1 & \ldots & z_n \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ z_1^{(n-1)} & \ldots & z_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

dividirt durch Δ, ebenfalls einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung. Für $p = n$ erhält man so die Adjungirte Lagrange's. Der Verfasser bildet nun eine Reihe von Differentialgleichungen

$$E_1, E_2, \ldots, E_{2n},$$

worin E_1 die der letzten Zeile der Fundamentaldeterminante von

E entsprechende Differentialgleichung, E_2 die der ersten Zeile der Fundamentaldeterminante von E_1 entsprechende Gleichung ist, E_3 so aus E_2, wie E_2 aus E_1 entsteht u. s. f. Man kann dann aus einer Lösung der Gleichung E_{2n} eine Lösung von E ableiten. Interessante Eigenschaften ergeben sich, wenn in der obigen Reihe eine Gleichung identisch mit der ursprünglichen Gleichung E wird. Ist insbesondere E_{2n} diese Gleichung, so ist die Reihe periodisch, und man kann die Gleichung E durch Quadraturen integriren. Das Kriterium hierfür wird für die zweite Ordnung angegeben.

Die zweite Note enthält die Anwendung dieser Betrachtungsweise auf die Gleichung von der Form

$$a\frac{d^n z}{dx^n}+b\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}+\cdots+l=0,$$

wo $a, b, \dots, l$ Polynome in x bezüglich vom n^{ten}, $(n-1)^{\text{ten}}$, ..., 0ten Grade sind. Hier haben alle Gleichungen obiger Reihe die nämliche Form wie E. Der Verf. deutet ferner an, wie seine Methode ein Mittel liefert, zu entscheiden, ob das allgemeine Integral der Gleichung in der ganzen Ebene der x eindeutig sei, und zugleich dasselbe zu finden. Für die von Herrn Goursat studirte Gleichung

$$(x^n-x^{n-1})\frac{d^n z}{dx^n}+(Ax^{n-1}-Bx^{n-2})\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}+\cdots+(Lx-M)\frac{dz}{dx}+Nz=0$$

wird die betreffende Bedingung explicite angegeben. Hr.

J. Rajewski. Ueber einige Integrale linearer Differentialgleichungen. Krak. Denkschr. XVII. 166-180. (Polnisch.)

Poincaré hat in der Abhandlung „Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires" (Acta Math. VII, F. d. M. XVII. 1885. 290) die von ihm so genannten Normalreihen von der Form

$$e^Q x^\alpha\left(A_0+\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\cdots\right),$$

(Q ist eine ganze Function n^{ten} Grades) eingeführt, um mit deren Hülfe Integrale linearer Differentialgleichungen auszudrücken. Diesem Beispiele folgend, führt der Verfasser zu demselben Zwecke

Normalreihen von der Form

$$F(x) = e^{g\left(\frac{1}{x-a}\right)}[a_0(x-a)^r + a_1(x-a)^{r+1} + \cdots)$$

ein, die eine Function $F(x)$ definiren, welche, nachdem sie durch $e^{g\left(\frac{1}{x-a}\right)}$ dividirt worden ist, sich in dem wesentlich singulären Punkte $x = a$ regulär verhält. Es bedeutet hier g eine ganze Function n^{ten} Grades, und von der Function $F(x)$ sagt der Verfasser, dass sie „in dem wesentlich singulären Punkte $x = a$ zu der rationalen Function g gehört".

Im ersten Abschnitte beweist der Verfasser: wenn die Integrale der Differentialgleichung

$$\frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y = 0$$

im Punkte $x = a$ sich mittels der Normalreihen, deren Ordnungen $n_1 \geqq n_2 \geqq \cdots \geqq n_m$, darstellen lassen, dann werden die Coefficienten p_k der Differentialgleichung in diesem Punkte unendlich, und zwar von der Ordnung, die nicht grösser ist als $k + n_1 + n_2 + \cdots + n_k$. Im zweiten Abschnitte bestimmt er die Form der Coefficienten p_n unter der Voraussetzung, dass die Anzahl der singulären Punkte eine beschränkte ist und die Coefficienten eindeutige Functionen sind. Im dritten Abschnitte untersucht er die Form der Integrale der Differentialgleichung

$$\frac{d^m y}{dx^m} + \frac{P_1(x)}{x^{s_1}} \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \frac{P_2(x)}{x^{s_2}} \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \cdots + \frac{P_m(x)}{x^{s_m}} y = 0,$$

wo $P_1, P_2, \ldots, P_m$ in der Umgebung von $x = 0$ eindeutige, continuirliche unendliche Functionen, die $s_1, s_2, \ldots, s_m$ ganze positive Zahlen oder gleich Null sind. Er stellt die Integrale in der Umgebung von $x = 0$ unter der Form $e^{g\left(\frac{1}{x}\right)}\varphi(x)$ auf und zeigt, wie man die Functionen g bestimmen kann. Dn.

A. M. Johanson. **Integralernas form vid lineära differentialekvationer.** Stockholm Öfv. 283-287.

Einige Bemerkungen über die Coefficienten der n Reihen, welche in der Umgebung von $x = 0$ die Integrale der Gleichung

$$p_0(x).x^n \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x).x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n(x).y = 0$$

darstellen, wenn $p_0(x)$, $p_1(x)$, ..., $p_n(x)$ Potenzreihen sind und wenigstens $p_0(x)$ unter ihnen für $x = 0$ nicht verschwindet.

Bdn.

C. Bigiavi. Sulle equazioni differenziali lineari. Rom. Acc. L. Rend. (4) VI_1. 85-90.

Die linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit doppeltperiodischen Coefficienten von der Art, dass ihre Integrale im Periodenparallelogramm, abgesehen von Polen, nur einen singulären Punkt besitzen, haben zum particulären Integral eine in der ganzen Ebene eindeutige doppeltperiodische Function der zweiten Art, wofern die zum singulären Punkt der determinirenden Gleichung gehörigen Wurzeln ganze Zahlen sind. Die Differentialgleichungen dieser Art sind demnach als integrabel zu betrachten.

Hr.

C. Bigiavi. Sulle equazioni differenziali lineari a coefficienti doppiamente periodici. Rom. Acc. L. Rend. (4) VI_1. 339-346.

Gegenstand der Arbeit ist der Beweis des folgenden Satzes: Die linearen homogenen Differentialgleichungen mit periodischen Coefficienten besitzen eine Gruppe von in der ganzen Ebene eindeutigen Integralen, wenn 1) die Wurzeln der zu den singulären Punkten der Integrale gehörigen determinirenden Gleichungen ganze Zahlen sind, 2) ein Fundamentalparallelogramm der Perioden bestimmt werden kann, in welchem $n-1$ verschiedene eindeutige Integrale existiren, und 3) das letzte Integral, welches darin nicht eindeutig ist, bei einem Umlauf um alle singulären Punkte des Parallelogramms nicht wieder denselben Wert annimmt. Ein Integral wenigstens ist von der zweiten Art. In dem Falle, dass nur ein singulärer Punkt im Parallelogramm vorhanden ist, ist nur nötig, dass in seiner Umgebung $n-1$ eindeutige Integrale existiren. Das particuläre eindeutige Integral von der zweiten Art lässt sich dann immer nach allgemeinen Regeln bestimmen.

Hiernach kann die Differentialgleichung in bekannter Weise reducirt werden auf eine Gleichung von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, die wieder zu der betrachteten Art gehört oder eine Picard'sche ist. Hieraus erhellt, dass die Gleichungen der bezeichneten Beschaffenheit mit nur einem singulären Punkte für die Integrale als vollständig integrirbar zu betrachten sind. Hr.

F. Bremer. Ueber lineare homogene Differentialgleichungen mit doppelt-periodischen Coefficienten. Diss. Giessen. 30 S.

Nach Ableitung einiger allgemeinen Sätze über Differentialgleichungen der bezeichneten Art, die ohne nähere Ausführung bleiben, im übrigen, wie hier bemerkt sei, in erschöpfender Vollständigkeit bereits von Herrn Floquet in einer Arbeit unter gleichem Titel (Ann. de l'Éc. Norm. (3) I, F. d. M. XVI. 1884. 279) entwickelt sind, geht der Verf. zum speciellen Fall der Differentialgleichungen zweiter Ordnung über, die er in der reducirten Form $y''+P(x)y=0$ betrachtet. Unter der Voraussetzung, dass $P(x)$ eine doppelt-periodische Function mit den Perioden $2K$ und $2K'i$ ist und in dem Periodenparallelogramm nur den einen Pol $x=K'i$ besitzt, führt, wie der Verf. zeigt, die Forderung, dass die Differentialgleichung ein eindeutiges Integral haben solle, zu der Lamé'schen Gleichung. Diese sowie die der Picard'schen Differentialgleichung analoge Gleichung

$$y''-n\frac{\operatorname{cn}x\operatorname{dn}x}{\operatorname{sn}x}y'+ay=0$$

werden nach einer einheitlichen Methode integrirt. Sie beruht darauf, dass $y':y=u$ eine doppelt-periodische Function erster Art sein muss und daher die Form hat

$$u=\varphi(z)+\psi(z)\sqrt{R(z)},$$

wo $z=\operatorname{sn}x$, $R(z)=(1-z^2)(1-k^2z^2)$ und $\varphi(z)$ eine gerade, $\psi(z)$ eine ungerade rationale Function von z ist. Zur Bestimmung von φ und ψ dienen zwei Differentialgleichungen, denen sie genügen müssen. Sind diese Functionen ermittelt, so erhält man

das Integral y in der Form $y = e^{\int \frac{u' dz}{\sqrt{R(z)}}}$. Die Substitution $z = \operatorname{sn} x$ muss y als doppelt-periodische Function zweiter Art von x ergeben. Die wirkliche Darstellung dieser Functionen geschieht nach der Methode des Herrn Hermite, die mit Ausführung aller nötigen Rechnungen entwickelt wird. Im allgemeinen erhält man auf diesem Wege zwei particuläre Integrale der gedachten Art. In besonderen Fällen, wo nur ein solches existirt, erhält man das zweite Integral in der bekannten Weise mit Hülfe des ersten durch Quadratur, und der Verf. beweist, dass auch dieses eindeutig ist. Der Integration jeder der behandelten Gleichungen geht eine kurze Angabe der einschlägigen Litteratur voraus.

Hr.

L. W. Thomé. Ueber eine Anwendung der Theorie der linearen Differentialgleichungen auf nichthomogene lineare Differentialgleichungen. J. für Math. CVII. 50-79.

Die Differentialgleichungen, die hier untersucht werden, sind von der Form

$$\mathfrak{F}_m(y, x) \equiv \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + p_m y = q$$

mit folgenden Festsetzungen:

Die Coefficienten p sind rationale Functionen. $\mathfrak{F}_m(y, x)$ ist ein Differentialausdruck, der durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar ist, z. B. ein regulärer Differentialausdruck oder ein solcher mit constanten Coefficienten.

q ist eine Summe von Producten $R(x)F(x)Q(x)$ von folgender Beschaffenheit:

$R(x)$ ist eine rationale Function, $F(x)$ eine allenthalben eindeutige analytische Function, die einer bekannten homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten genügt, deren singuläre Punkte, abgesehen von einem Punkte, solche sind, bei denen nur reguläre Integrale vorkommen.

Q ist eine Function, die einer homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten genügt, deren Diffe-

rentialausdruck durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar ist. Unter Hinweis auf die Hülfsmethoden, die in früheren Abhandlungen des Verf. (vgl. die Uebersicht derselben im J. für Math. XCVI, s. F. d. M. XVI. 1884. 257) entwickelt sind, wird behandelt: Die Darstellung der Integrale in der Umgebung singulärer Punkte mittels Anwendung von bestimmten Integralen, die Berechnung der dargestellten Integrale mit vorgeschriebener Annäherung, die Fortsetzung der Integrale und endlich die Frage nach dem Vorkommen des Logarithmus in den Entwickelungen der Integrale in der Umgebung der singulären Punkte. Hr.

S. Pincherle. Su alcuni integrali particolari delle equazioni differenziali lineari non omogenee. Rom. Acc. L. Rend. (4) VI_1. 199-202.

Bezeichnen wir als eine „auf a bezügliche einfache Function“ einen Zweig einer analytischen Function, welcher die einzigen Unstetigkeitspunkte a und ∞ besitzt und in der längs $a\dot{\infty}$ geschnittenen Ebene eindeutig ist, dann gelten die folgenden zwei Sätze:

Sind $Q(x)$, $Q_1(x)$, ..., $Q_p(x)$ gegebene Polynome, und ist $P(x)$ ein willkürliches Polynom von der $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, wo m die Ordnung von $Q(x)$ bezeichnet, so kann man für jeden Nullwert a_k von $Q(x)$ die Coefficienten von $P(x)$ derart bestimmen, dass die Differentialgleichung:

$$\varDelta\varphi \equiv x^p Q(x)\frac{d^p\varphi}{dx^p} + x^{p-1}Q_1(x)\frac{d^{p-1}\varphi}{dx^{p-1}} + \cdots + Q_p(x)\varphi = P(x)$$

(vorausgesetzt nur, dass die Integrale von $\varDelta\varphi = 0$ sämtlich regulär sind) eine auf a_k bezügliche einfache Function als Integral hat.

Eine reguläre lineare homogene Differentialgleichung:

$$x^\mu a_p\frac{d^p\varphi}{dx^p} + x^{\mu-1}a_{p-1}\frac{d^{p-1}\varphi}{dx^{p-1}} + \cdots + a_0\varphi = 0,$$

wo das Polynom a_p von der $(p-\mu)^{\text{ten}}$ Ordnung ist, besitzt $p-\mu$ Integrale, welche auf die Nullwerte von a_p bezügliche einfache Functionen sind. Vi.

H. von Koch. Om användningen af oändliga determinanter inom teorin för lineära homogena differentialekvationer. Stockholm Öfv. 225-236, 499-525.

Eine lineare, homogene Differentialgleichung mit eindeutigen Coefficienten, welche in der Umgebung von $x=0$ durch Laurent'sche Reihen darstellbar sind, hat (nach Fuchs) wenigstens ein Integral, dem man in der Nähe von $x=0$ die Form

$$y = x^{\varrho}\left\{ P(x) + P_1\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$$

geben kann, wo ϱ eine Constante und P, P_1 Potenzreihen sind. Wenn die Zahl der Glieder in P_1 nicht endlich ist, erfordert die Bestimmung der Coefficienten von P und P_1 die Behandlung eines unendlichen, linearen Gleichungssystems. Eine specielle Differentialgleichung zweiter Ordnung hatte G. W. Hill zu dem Studium einer für das entsprechende Gleichungssystem charakteristischen Determinante veranlasst. Der Verf. sucht nun zu zeigen, wie man auch den allgemeinen Fall mit Hülfe von Untersuchungen über unendliche Determinanten behandeln kann.

Bdn.

H. G. Zeuthen. Om Omdannelse af Differentialligninger med to Variable ved Indförelse af Liniekoordinater. Nyt Tidss. for Math. I. 1-10.

Eine Gleichung mit zwei Unbekannten kann immer als die Gleichung einer ebenen Curve aufgefasst werden. Die Gleichung einer ebenen Curve kann aber entweder in Punktcoordinaten oder in Liniencoordinaten gegeben sein. Wird nun eine Differentialgleichung mit zwei Variabeln als die Gleichung einer ebenen Curve in Punktcoordinaten angesehen, so ist es oft leichter, die Gleichung zu integriren, wenn statt Punktcoordinaten Liniencoordinaten eingeführt werden. Als Liniencoordinaten der Geraden $y=px-q$ werden p und q benutzt. Dieses wird durch Beispiele erläutert.

V.

G. Torelli. Sopra una formola data da Halphen relativa alle trasformazioni delle equazioni differenziali lineari. Nap. Rend. (2) IV. 233-238.

Halphen hat in seiner preisgekrönten Schrift „Sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables" in den Mém. Sav. Étr. (2) XXVIII. 117 ohne Beweis eine allgemeine Formel mitgeteilt, die das Resultat des Ueberganges einer linearen Differentialgleichung q^{ter} Ordnung in die transformirte durch die Substitution $\frac{dx}{dX} = \mu(X)$, $Y = yu(X)$ explicite angiebt. Der Verfasser fügt einen sehr einfachen Beweis der Formel hinzu, wobei sich ergiebt, dass der Ausdruck für die in ihr auftretenden Zahlencoefficienten $B_r(s, k_1, k_2)$ zu modificiren ist. Statt des dort angegebenen Wertes

$$\frac{s!\,(q-s)!}{(s-k_1-k_2-\cdots)!\,(q-s-r)!\,k_1!\,k_2!}$$

ist zu setzen

$$\frac{r!\,s!}{(s-k_1-k_2\cdots-k_r)!\,k_1!\ldots k_r!}$$

Hr.

L. Pochhammer. Ueber die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten. Math. Ann. XXXVI. 84-96.

Eine Differentialgleichung dieser Art lässt sich auf die Normalform (1) $xy'' = (x-\varrho)y' + ay$ (a und ϱ Constanten) bringen; sie hat, falls ϱ nicht ganzzahlig ist, eine transcendente ganze Function von x und das Product aus $x^{1-\varrho}$ und einer transcendenten ganzen Function zu particulären Integralen. Die Auflösung der Gleichung (1) kann bekanntlich durch bestimmte Integrale geschehen. Diese Integrale, wie sie gewöhnlich angegeben werden, haben jedoch nur beschränkte Gültigkeit, da sie nur für gewisse Wertgebiete der Constanten a und ϱ convergiren. Der Verf. gelangt zu einer allgemein gültigen Lösung mittels bestimmter Integrale, indem er geschlossene Integrationscurven

für die letzteren anwendet. Lässt man in der u-Ebene die Variable u die reelle Axe von $u = -\infty$ bis $u = -k$, wo $k > \operatorname{mod} x$, dann den um $u = 0$ mit dem Radius k beschriebenen Kreis im positiven Sinne und endlich die reelle Axe von $u = -k$ bis $u = -\infty$ zurück durchlaufen, so befriedigt das so definirte geschlossene Integral

$$\int_{-\infty}^{\overline{\bullet}} e^u (u-x)^{-a} u^{a-\varrho} du$$

die Gleichung (1) und stellt für jedes α und jedes nicht ganzzahlige ϱ die eindeutige Lösung dar. Für die andere nicht eindeutige Lösung dient ein über dieselbe Function erstrecktes geschlossenes Integral mit folgendem Umlauf: Auf der Verbindungslinie zwischen $u = 0$ und $u = x$ nimmt man einen beliebigen Punkt c an, zieht dann durch diesen 2 Kreise $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ um resp. $u = 0$ und $u = x$, so dass sie sich in c berühren. Der Integrationsweg beginnt in c, durchläuft nach einander $\mathfrak{Q}^+ \mathfrak{P}^+ \mathfrak{Q}^- \mathfrak{P}^-$ ($\mathfrak{Q}^+$ bedeutet einen Umlauf längs $\mathfrak{Q}$ im positiven Sinne u.s.w.) und endigt in c. Die Modificationen, die für ein ganzzahliges ϱ eintreten, werden ebenfalls erörtert. Hr.

L. Pochhammer. Ueber die Tissot'sche Differentialgleichung. Math. Ann. XXXVII. 512-543.

Die von Herrn Tissot im Journ. de Math. (1) XVII. aufgestellte lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung wird durch Integrale von der Form

$$(1) \qquad \int_{a_k}^{a_l} e^u (u-a_1)^{b_1-1} (u-a_2)^{b_2-1} \dots (u-a_{n-1})^{b_{n-1}-1} (u-x)^{\lambda-1} dx$$

befriedigt. Nimmt man ausser $a_1, \dots, a_{n-1}$ noch die Werte $-\infty$ und x als Integrationsgrenzen, so liefern diese Ausdrücke das vollständige Integral der Tissot'schen Differentialgleichung. Ihre singulären Punkte sind $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \infty$. Zweck der vorliegenden Arbeit ist, diejenigen Integrale in der Umgebung der singulären Punkte, welche bei einem Umlauf um dieselben ihren anfänglichen Wert, multiplicirt mit einem constanten Factor, wieder

annehmen (von Herrn Pochhammer Hauptintegrale genannt), durch bestimmte Integrale darzustellen, mit Ausschliessung der logarithmischen Fälle. In den bestimmten Integralen, die hierzu dienen, ist die zu integrirende Function die gleiche wie in (1). Als Integrationswege kommen aber neben geraden Strecken auch geschlossene Curven, resp. Doppelumläufe vor (s. das vorstehende Referat). In der Umgebung der endlichen singulären Punkte sind sämtliche Integrale der Differentialgleichung regulär; $n-1$ von einander unabhängige sind eindeutig, eines ist mehrdeutig. Ein particuläres Integral existirt, welches eine ganze transcendente Function von x ist und daher in der Umgebung aller singulären Punkte als eindeutiges Hauptintegral auftritt. In der Umgebung des Unendlichkeitspunktes verhalten sich dagegen nicht alle regulär, wie die zu $x=\infty$ gehörige determinirende Gleichung zeigt, deren Grad nicht n, sondern $n-1$ ist. Auch hier lassen sich die Hauptintegrale durch bestimmte Integrale darstellen. Der Versuch, aus ihnen Reihen nach fallenden Potenzen von x abzuleiten, ergiebt, dass $n-2$ reguläre und zwar mehrdeutige Integrale existiren und 2 irreguläre, von denen das eine eindeutig ist, nämlich die schon erwähnte transcendente ganze Function, das andere mehrdeutig. Bemerkenswert ist, dass die formal genügende Potenzreihe nach fallenden Potenzen von x, die man aus der Differentialgleichung selbst entwickeln kann, zwar im allgemeinen divergirt, d. h. so lange die $n-1$ darin auftretenden willkürlichen Coefficienten, von denen die übrigen linear abhängen, beliebig gelassen werden, aber die Eigenschaft besitzen muss, durch eine geeignete Beziehung, die man zwischen den willkürlichen Coefficienten einführt, convergent zu werden, da, wie bemerkt, $n-2$ von einander unabhängige reguläre Integrale in der Umgebung von $x=\infty$ existiren. Diese Beziehung wird für $n=3$ angegeben, sie ist transcendent. Zum Schluss wird noch das System der Integrale dargestellt, die bei einer Umkreisung mehrerer singulären Punkte ihren anfänglichen Wert, multiplicirt mit einem constanten Factor, erhalten. Sie werden als Hauptintegrale einer ringförmigen Fläche bezeichnet. Hr.

P. A. Nekrassoff. Lineare Differentialgleichungen, welche durch bestimmte Integrale integrirt werden. Mosk. Math. Samml. XV. 277-395.

Es werden die Methoden gegeben, um eine sehr allgemeine lineare Differentialgleichung zu bilden, welche durch Integrale von der Form

$$y = \int z e^{\varphi(x,u)}\, \theta(x,u)\, du$$

integrirbar ist, wo

$$z = (u-a_1)^{b_1-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}(u-u_1)^{\lambda_1-1}\dots(u-u_p)^{\lambda_p-1}$$

ist. Ferner bedeuten hierin $a_1, a_2, \dots, a_n$ constante Grössen, $u_1, u_2, \dots, u_p$ Functionen der Veränderlichen x; $\theta(x,u)$ ist eine ganze Function von u und $\varphi(x,u)$ eine rationale Function. Die Differentialgleichungen des Verfassers enthalten als einen speciellen Fall die Gleichungen, welche von Hrn. Goursat („Sur une classe de fonctions représentées par des intégrales définies." Acta Math. II, F. d. M. XV. 1885. 243) untersucht worden sind.

Wi.

E. Tschopp. Die symbolische Methode zur Auflösung von Differentialgleichungen. Pr. Gewerbesch. Mülhausen. 20 S.

Die von Boole in die Analysis eingeführte, vornehmlich von englischen und amerikanischen Mathematikern gepflegte Methode der Trennung der Operationszeichen bei der Behandlung von linearen Differentialgleichungen hat in deutschen Arbeiten noch wenig Eingang gefunden. Im Hinblick auf die wesentlichen Dienste, welche die symbolische Methode bei der praktischen Durchführung der Integration und auch zur Auffindung neuer Resultate leistet, ist die in vorliegender Schrift gelieferte lichtvolle Darlegung der Grundzüge der Boole'schen Theorie mit Anwendung auf Beispiele als ein dankenswerter Beitrag zur weiteren Verbreitung der in Rede stehenden Methode zu begrüssen. Zu dem in neuerer Zeit erschienenen rühmlichst bekannten Lehrbuch der Differentialgleichungen von Herrn Forsyth, worin von dieser Methode mehrfach Gebrauch gemacht

wird, dürfte diese Schrift eine besonders willkommene Ergänzung darin bieten, dass sie für die Uebertragung der Transformationen von algebraischen Grössen auf die an ihre Stelle gesetzten Operationszeichen den strengen Nachweis ihrer Zulässigkeit liefert.

Der erste Abschnitt enthält die symbolische Behandlung der linearen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten, auf deren rechter Seite eine beliebige Function X der unabhängigen Variable x steht. Die Lösung erscheint in der Form

$$u = (D-\alpha_1)^{-1}(D-\alpha_2)^{-1}\dots(D-\alpha_n)^{-1}X, \quad D = \frac{d}{dx},$$

$$(D-\alpha)^{-1}X = e^{\alpha x}\int e^{-\alpha x}X\,dx$$

und wird auf 3 Arten ausgeführt: 1) als ein n-faches Integral, indem man die im Symbol angezeigten Operationen hinter einander bewerkstelligt, 2) als Summe von Integralen, durch Zerlegung des symbolischen Bruchs in Partialbrüche, 3) ohne Integrationsverfahren für gewisse Beschaffenheiten von X in endlicher Form, durch Entwickelung nach aufsteigenden Potenzen von D, die zu einem particulären Integrale führt. Zur Behandlung der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen rationalen Coefficienten, dem Gegenstande des folgenden Abschnitts, wird $x = e^\theta$ gesetzt und gezeigt, dass jede Gleichung auf die symbolische Form

$$u + \varphi_1(D)e^{\theta}u + \varphi_2(D)e^{2\theta}u + \dots + \varphi_n(D)e^{n\theta}u = U$$

gebracht werden kann, wo $D = \dfrac{d}{d\theta}$ und $\varphi(D)$ eine rationale Function von D bedeutet. Hat $\varphi_k(D)$ die Form

$$\varphi_k(D) = a_k\varphi(D)\varphi(D-1)\dots\varphi(D-k+1),$$

so lässt die Gleichung sich stets auf n binomische Gleichungen von der Form

$$u_k - q_k\varphi(D)e^{\theta}u_k = U$$

zurückführen. Für die etwas allgemeinere binomische Gleichung

$$u + \varphi(D)e^{r\theta}u = U$$

wird nun eine wichtige Transformation angegeben, die gestattet, an Stelle von φ eine beliebige andere Function ψ zu setzen, und

zwar mittels der Substitution

$$u = \frac{\varphi(D)\varphi(D-r)\varphi(D-2r)\dots}{\psi(D)\psi(D-r)\psi(D-2r)\dots} v,$$

in der das Product auf der rechten Seite im allgemeinen unendlich ist. Bedingung der Anwendbarkeit ist, dass für das gewählte ψ das Product endlich wird und zugleich die transformirte Gleichung zu den integrabeln gehört. Diese Transformation wird dann auf beliebige lineare Differentialgleichungen erweitert. Es ist noch zu bemerken, dass die Verwendbarkeit der symbolischen Rechnungsweise auch bei partiellen linearen Differentialgleichungen an einzelnen Beispielen dargethan wird. Ein sinnstörender Druckfehler ist uns in S. 16 Z. 13 aufgefallen: $(m+2)\theta = \theta'$, statt $(m+2)\theta = 2\theta'$ und $d\theta'$ statt $\frac{d}{d\theta'}$. Zur Litteratur über diesen Gegenstand sei noch auf eine Arbeit von Grelle in Schlömilch Z. XV hingewiesen: Die Integration der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen durch die Methode der Trennung der operativen Symbole (S. F. d. M. II. 1870. 160). Hr.

A. Starkoff. Théorie des équations générales. Odessa Ges. X. 143-200.

Die Abhandlung betrifft die Darstellung der Eigenschaften der alternirenden Determinanten (Alternanten) und ihrer Anwendungen auf die algebraischen Gleichungen, die Differentialgleichungen und die Differenzengleichungen. Wi.

P. Rivereau. Sur les invariants de certaines classes d'équations différentielles homogènes par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées. Thèse. Paris. Gauthier-Villars et Fils. 133 S. 4°.

A. Mayer. Zur Theorie der vollständigen Lösungen der Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen zwei Variabeln. Math. Ann. XXXVII. 399-403.

Ist $y = \varphi(x,c)$ das vollständige Integral der Differentialgleichung $f(x,y,y') = 0$, so weiss man, dass der Wert von c als Function von x, der durch die Enveloppe $\frac{\partial\varphi}{\partial c} = 0$ bestimmt wird, $y = \varphi(x,c)$ wiederum in eine und zwar singuläre Lösung von $f = 0$ überführt. Nach der Art aber, wie man die singulären Lösungen abzuleiten pflegt, erscheint es als selbstverständlich, dass jede Lösung, die durch einen von x abhängigen Wert der Integrationsconstanten herbeigeführt wird, eine Enveloppe darstellen müsse. Dies ist nun, wie der Verf. nachweist, keineswegs der Fall. Vielmehr giebt es im allgemeinen unendlich viele Functionen c von x, die eine vollständige Lösung der Differentialgleichung $f = 0$ in eine andere vollständige Lösung derselben transformiren, und zwar erhält man sie alle durch Integration der Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\frac{\partial\varphi}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x} + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial y'^n}\frac{\partial\varphi}{\partial c}\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)^{n-1} = 0,$$

worin $y = \varphi$, $y' = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$ zu setzen ist. f ist dabei als vom n^{ten} Grade in y' vorausgesetzt. Hr.

A. Mayer. Allgemeine integrirbare Formen von Differentialgleichungen erster Ordnung und ihre Kriterien. Leipz. Ber. XLII. 491-524.

Einem Satze des Herrn Maximowitsch zufolge, dessen Beweis bisher nur in russischer Sprache veröffentlicht ist (Kasan-Ges. 1885; C. R. CI. 809, s. F. d. M. XVII. 1885. 305), muss jede Differentialgleichung erster Ordnung, die sich durch eine endliche Anzahl von Quadraturen integriren lässt, in eine lineare Differentialgleichung transformirbar sein. Der Verf. stellt sich nun die Frage, wann eine Differentialgleichung von der Form

$$(1) \qquad Z = \varphi(X),$$

worin X und Z gegebene Functionen von x, y sind, $p = dy/dx$ ist und φ eine willkürliche Function bezeichnet, in eine lineare Differentialgleichung zurückführbar ist. Dies kann nur durch

eine Transformation von der Form

$$(2)\qquad x' = X(x,y,p),\ y' = Y(x,y,p),\ p' = P(x,y,p)$$

erreichbar sein von der Beschaffenheit, dass durch sie $p' = dy'/dx'$ eine Folge von $p = dy/dx$ wird. Ist X gegeben und U eine von X verschiedene Function von der Eigenschaft, dass $X = \text{const.} = a$, $U = \text{const.} = b$ eine gemeinsame Lösung y zulassen, dann ist $Y = F(X,U)$, wo F eine willkürliche Function bezeichnet. Die Auffindung von U erfordert im allgemeinen die Integration von $X = a$. P ist dann bestimmt durch $P = \frac{\partial Y}{\partial p} : \frac{\partial X}{\partial p}$. Dies gilt, wenn X und dadurch auch Y die Variable P enthält. Ist X frei von p, dann kann für Y jede beliebige Function von x,y genommen werden, und es ist dann $P = \left(\frac{\partial Y}{\partial x} + p\frac{\partial Y}{\partial y}\right) : \left(\frac{\partial X}{\partial x} + p\frac{\partial X}{\partial y}\right)$. Es möge nun durch die Transformation (2) sich $Z(x,y,p) = Z'(x',y',p')$ ergeben, so geht (1) über in $Z'(x',y',p') = \varphi(x')$, und die Auflösung dieser Gleichung nach p' muss der Annahme nach die Form besitzen

$$(3)\qquad p' = y'\Phi(x',\varphi(x')) + \Psi(x',\varphi(x')).$$

Für die Möglichkeit der Zurückführung von (1) auf eine lineare Gleichung für jede willkürliche Function φ ist also notwendig und hinreichend, dass eine Transformation von der Form

$$x' = X,\quad y' = Y,\quad p' = Y\Phi(X,Z) + \Psi(X,Z)$$

existire. Die Kriterien hierfür werden vollständig entwickelt. Die Bestimmung der Functionen F, Φ und Ψ im Falle der Erfüllung der Bedingungen geschieht durch zwei successive Quadraturen. In dem Integrale der linearen Differentialgleichung (3) hat man nur für x', y' zu setzen X und $Y = F(X,U)$, um das Integral von (1) zu erhalten. Für einen besonderen Fall werden die Kriterien in zwei verschiedenen Formen gegeben und eine derselben benutzt, um sie mit den Bedingungen zu vergleichen, welche Herr Maximowitsch für die Integrirbarkeit der Differentialgleichungen einer gewissen Form in den C. R. mitgeteilt hat.

Hr.

P. S. NASIMOFF. Ueber die Convergenz der Reihen, welche als Integrale der Differentialgleichungen erster Ordnung dienen. Kasan Ges. VIII. 162-167. (Russisch.)

Abänderung des Picard'schen Beweises der Existenz der Integrale der Differentialgleichungen erster Ordnung. (Darboux Bull. (2) XII, F. d. M. XX. 1888. 250). Wi.

ZIMMERMANN. Ueber die Kettenbruchentwickelung einer Function, welche durch eine Differentialgleichung von der Form $M\frac{dy}{dx}+Ny+Py^2+Q=0$ bestimmt ist, wo M, N, P und Q ganze rationale Functionen sind. Odessa Ges. X. 1-139. (Russisch.)

Die Untersuchungen von Laguerre über die Kettenbruchentwickelung einer Function, welche einer linearen Differentialgleichung $M\frac{dy}{dx}+Py+Q=0$ genügt (F. d. M. XVII. 1885. 304), werden verallgemeinert, die Beweise vervollständigt und die Methoden durch zahlreiche Beispiele erläutert. Wi.

R. LIOUVILLE. Sur les développements en série des intégrales de certaines équations différentielles. C. R. CXI. 597-600.

Die betrachteten Differentialgleichungen sind von der Form

$$(1)\qquad \frac{dy}{dx}+a_1y^3+3a_2y^2+3a_3y+a_4+a_5y^{-1}+a_6y^{-2}+\cdots=0,$$

wo a_1, a_2, ... beliebige Functionen von x in begrenzter Anzahl sind. Es handelt sich um die Reihenentwickelung der Integrale, die in der Umgebung eines Punktes x_0 unendlich werden, während die Coefficienten a_1, a_2, ... an dieser Stelle keine Singularität darbieten. Die Darstellung ist:

$$ht^{-1}+h_1+h_2t+h_3t^2+\cdots\qquad (t=(x-x_0)^{\frac{1}{2}}).$$

Je nach der Bestimmung von t erhält man hierdurch zwei Integrale y und v. Die Coefficienten h, h_1, ... sind von x_0 abhängig.

Multiplicirt man die Reihe mit einer andern λ, die nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0$ fortschreitet und in der Umgebung von $x=x_0$ convergirt, so genügt das Product $y^{(1)}$ in einem gewissen Gebiete der x-Ebene einer Gleichung von derselben Form wie (1), doch mit einer unbegrenzten Anzahl von Coefficienten. λ hängt im allgemeinen von x_0 und x ab. Es werden Ausdrücke angegeben, die sich invariant verhalten bei der Transformation $y^{(1)}=\lambda y$ und der Aenderung der unabhängigen Variabeln. In dem einfachsten Falle

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx}+a_1y^3+3a_2y^2+3a_3y+a_4=0$$

ergeben sich, wenn eine zweite Potenzreihe von $x-x_0$ mit ϱ bezeichnet wird und λ und ϱ so gewählt werden, dass die beiden Functionen

$$y^{(1)}=\lambda y+\varrho v, \quad v^{(1)}=\lambda v+\varrho y$$

eine Differentialgleichung von demselben Typus wie (2) befriedigen, für die Functionen $\lambda+\varrho$ und $\lambda\varrho$ merkwürdige Eigenschaften, falls die Gleichung (2) integrabel ist. Ein näheres Eingehen auf diesen Gegenstand behält der Verf. einer späteren Mitteilung vor.

Hr.

A. Winckler. Ueber den Multiplicator der Differentialgleichungen erster Ordnung. Wien. Ber. XCIX. 457-479, 875-898.

Das von Euler in seinen Inst. calc. int. (Bd. I art. 493-527) angewandte Verfahren zur Lösung der Aufgabe, Differentialgleichungen zu finden, die durch Multiplicatoren von gegebener Form integrabel werden, beruht teilweise auf willkürlichen Annahmen, die entweder zu Widersprüchen oder zu unnötigen Beschränkungen für die Beschaffenheit der resultirenden Differentialgleichungen führen. Der Verfasser nimmt das Euler'sche Problem in neuer Fassung wieder auf, die von stets zulässigen Voraussetzungen ausgeht und einer ausgedehnteren Anwendung fähig ist. Die Differentialgleichung wird in der Form

$$\frac{dy}{dx}=z$$

angenommen, wobei z eine noch unbekannte Function von x und y bedeutet. Der Multiplicator ϱ dieser Gleichung muss dann der Bedingung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x} + \frac{\partial \varrho z}{\partial y} = 0$$

genügen. Damit die beiden unbekannten Functionen ϱ und z bestimmt seien, wird die stets zulässige Voraussetzung gemacht, dass zwischen denselben eine Relation $\varrho = F(x,y,z)$ bestehe. Hieraus ergiebt sich für z die lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \left(F + \frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial x} + z\frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

die, wenn F näher bestimmt ist, in zahlreichen Fällen integrirt werden kann. Da das Integral eine willkürliche Function enthält, so wird auf diesem Wege eine grössere Allgemeinheit als durch das Euler'sche Verfahren erreicht. Bei den folgenden Anwendungen werden die Fälle unterschieden, ob für ϱ eine Function bloss von z oder von z und einer oder beider Veränderlichen x und y gewählt ist. Der erste Fall führt zu einem trivialen Resultat. Die Beispiele sind zumeist so gewählt, dass in ihnen bereits bekannte Resultate in grösserer Allgemeinheit erscheinen. Hr.

G. Wallenberg. Beitrag zum Studium der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen, insbesondere derjenigen, welche die Ableitung bis zum dritten Grade enthalten. Schlömilch Z. XXXV. 193-218, 257-271, 321-353; Diss. Halle 1890, jedoch ohne die Abschnitte IV-VI.

Die Differentialgleichungen der genannten Klasse sind bekanntlich zuerst von Herrn Fuchs in einer fundamentalen Abhandlung über diesen Gegenstand (Berl. Ber. 1884. 699-710, F. d. M. XVI. 248) betrachtet und in ihren Eigenschaften vollständig charakterisirt worden. Diesen Untersuchungen hat dann Herr Poincaré in der Arbeit „Sur un théorème de M. Fuchs“ (Acta Math. VII. 1-32, F. d. M. XVII. 1885. 279) wichtige Be-

merkungen über die Natur der Integrale hinzugefügt. Nach einer kurzen Darstellung der von diesen Autoren erhaltenen Resultate behandelt der Verf. zunächst die irreductiblen binomischen Differentialgleichungen $y'^m = R(z, y)$, die den Fuchs'schen Bedingungen genügen. (Solche werden „Fuchs'sche“ genannt). Die Untersuchung ergiebt, dass, wenn $m > 2$ ist, sie die Form $y'^m = \lambda(z) R(y)$ haben müssen. Alle möglichen Formen der Gleichungen werden in einer Tabelle aufgeführt, die 7 wesentlich verschiedene Typen enthält. Auf die binomischen lässt sich eine allgemeinere Klasse von Fuchs'schen Gleichungen von der Form

$$(y' - P(z, y))^m - R(z, y) = 0$$

zurückführen mittels einer linear gebrochenen Substitution in y, deren Bestimmung die Lösung einer Riccati'schen Gleichung erfordert. Im zweiten Abschnitt wird auf die trinomischen Fuchs'schen Differentialgleichungen eingegangen, unter der Voraussetzung, dass die Discriminantengleichung, in Bezug auf y' genommen, nur einfache Wurzeln in y besitzt. Der Grad der Differentialgleichung in y' kann 3 nicht übersteigen, und das Geschlecht p der Gleichung zwischen y und y', z dabei als constant betrachtet, ist $\leqq 1$. Die typische Form derselben wird explicite aufgestellt und ihre Integration, die in jedem Falle algebraisch ist, geleistet. Der dritte Abschnitt beschäftigt sich mit den vollständigen Fuchs'schen Differentialgleichungen dritten Grades. Nach einer ebenfalls die Auflösung einer Riccati'schen Gleichung erfordernden Transformation wird sie auf die Form

$$(1) \qquad (y' - P)^3 - 3Q(y' - P) - 2R = 0$$

gebracht. Die Fuchs'sche Bedingung 2) (s. das citirte Referat) wird unter der Voraussetzung, dass die Discriminante nur einfache Factoren enthält, in Bedingungsgleichungen für die Coefficienten umgesetzt und ergiebt $p \leqq 3$ für das Geschlecht der algebraischen Function y' von y. Hierbei wird eine wichtige Relation gewonnen, die der Poincaré'schen Bedingung

$$\frac{\partial F(z, y, y')}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = KF + (L + My') \frac{\partial F}{\partial y}$$

(K, L, M ganze rationale Funct. von x, deren Coefficienten ratio-

nale Functionen von z) für die Fuchs'schen Gleichungen entspricht. Infolge derselben erhält man durch Differentiation von (1)

$$(2) \qquad \frac{d(y'-P)}{dx} = \tfrac{1}{6}(A+By)(y'-P) + \frac{\partial Q}{\partial y} \text{ (} A \text{ und } B \text{ Funct. von } z\text{)}.$$

Dieser Ausdruck liefert zugleich ein Mittel zur Integration. Ist $p > 1$, so muss das Integral nach einem Satze des Herrn Poincaré algebraisch sein. Zur Herstellung des Integrals wäre die birationale Transformation der beiden durch $F(z_0, y, y') = 0$, $F(z_1, y, y') = 0$ dargestellten Riemann'schen Flächen aufzufinden, was im allgemeinen mit grossen Schwierigkeiten verknüpft ist. Diese werden in bemerkenswerter Weise umgangen durch die geschickte Verwendung eines von Herrn Fuchs gefundenen Theorems über die Form des algebraischen Integrals (Berl. Ber. 1884. 1171, F. d. M. XVI. 263), wonach das Integral von (1) in der Form

$$\Gamma = \frac{\varphi_0 + \varphi_1(y'-P)}{\psi_0 + \psi_1(y'-P)} \text{ (} \Gamma \text{ constant; } \varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1 \text{ Functionen von } x\text{)}$$

dargestellt werden kann. Durch Differentiirung derselben mit Benutzung von (2) erhält man eine Gleichung zweiten Grades in $y'-P$, die identisch sein muss. Indem man in den so erhaltenen 3 Gleichungen die Coefficienten der Potenzen von y gleich Null setzt, ergiebt sich die Bestimmung der Functionen φ_0, φ_1, ψ_0, ψ_1. Ist $p \leqq 1$, so muss P vom ersten Grade in y, $B = 0$ sein, und die Gleichung (2) stellt eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung in y dar. Ihr allgemeines Integral lautet also

$$(3) \qquad y = c_1\varphi + c_2\psi + \chi.$$

Die Elimination von y und y' aus der Gleichung (3), ihrer Ableitung und (1) liefert die zwischen den Integrationsconstanten c_1, c_2 bestehende Relation, mit deren Berücksichtigung (3) das allgemeine Integral von (1) darstellt. — Im Anschluss an diese allgemeinen Ausführungen wird im vierten Abschnitt die Differentialgleichung dritten Grades, in der das Glied mit y'^2 fehlt, eingehend behandelt und ihre Integration, die hier stets algebraisch ist, nach verschiedenen Methoden durchgeführt. — Der fünfte Abschnitt enthält wichtige allgemeine Bemerkungen, aus denen wir hervorheben: 1) Die Maximalzahl des Geschlechts einer Fuchs'schen Gleichung vom Grade m in y' ist $(m-1)^2$.

2) Wenn die Relation $\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial y}y' = \lambda(z)y'\frac{\partial F}{\partial y'}$ besteht, dann ist das Integral von $F=0$ stets algebraisch. 3) Ist $\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial y}y'$ $=K(z)F+\lambda(z)y'+\mu(z)y+\nu(z)$, so reducirt sich die Integration von $F=0$ auf die der linearen Gleichung $y''+\lambda y'+\mu y+\nu=0$, und die zwischen den beiden Integrationsconstanten bestehende Relation dient zugleich zur Herstellung der Poincaré'schen birationalen Transformation, die hier bilinear ist. — Der Abschnitt VI enthält Beispiele. Hr.

E. Jahnke. Ueber die algebraischen Integrale algebraischer Differentialgleichungen. Schlömilch Z. XXXV. 148-154.

Es handelt sich um die Ermittelung der Bedingungen dafür, dass der Differentialgleichung erster Ordnung

$$(1)\quad U^m+f_{\varrho 1}(u)U^{m-\varrho_1}+\cdots+f_{\varrho i}(u)U^{m-\varrho_i}+f_m(u)=0\ \left(U=\frac{du}{dz}\right),$$

in welcher die Coefficienten f ganze rationale Functionen sind, durch eine rationale Function genügt werde. Die Untersuchung wird durch die Annahme specialisirt, dass eine rationale Function y existire, die durch die Differentialgleichung

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = R(y) = g_0y^4+g_1y^3+\cdots+g_4$$

definirt wird und mit u in der Beziehung steht:

$$(2)\qquad U = V(u)+yW(u),$$

wo V und W rationale Functionen sind. Der Nachweis, dass es solche Differentialgleichungen giebt, wird unter Bezugnahme auf eine frühere Arbeit des Verfassers (Diss. Halle, F. d. M. XXI. 1889. 324) so geführt, dass die Zulässigkeit der Voraussetzung (2) zunächst für den Fall erwiesen wird, dass der Gleichung (1) eine doppeltperiodische Function genügt, womit zugleich eine Lücke in der erwähnten Dissertation ausgefüllt wird. Soll das Integral rational sein, so tritt noch die Bedingung hinzu, dass $R(y)$ einen dreifachen linearen Factor habe. Für $m=3$ und $m=4$ werden die Rechnungen ausgeführt. Es zeigt sich, dass die allgemeinste Differentialgleichung dritten Grades der

Form (1), der eine rationale Function genügt, die durch (2) geforderte Bedingung stets erfüllt. Die binomischen Differentialgleichungen, die in die hier behandelte Klasse gehören, haben die Gestalt

$$U^m = G(u-a)^{m+1}(u-b)^{m-1};$$

ihre Integrale sind $y^m = \varphi(u)$, wo φ eine lineare Function bedeutet. Hr.

G. Vivanti. Sulle equazioni algebraico-differenziali del primo ordine. Palermo Rend. IV. 9-24, 197-216.

Es werden einige Fragen erörtert betreffend die Bedingungen, unter denen ein Integral einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung algebraisch durch gewisse Transcendenten ausdrückbar ist, insbesondere durch Integrale von linearen oder von Systemen linearer algebraischer Differentialgleichungen erster Ordnung. Für den Fall, dass das System aus zwei Gleichungen bestehen soll, ist das Resultat, dass die gegebene Gleichung dann stets durch eine algebraische Transformation der abhängigen Variabeln in eine lineare algebraische Differentialgleichung erster Ordnung übergeführt werden kann. Hr.

P. Painlevé. Sur les intégrales rationnelles des équations du premier ordre. C. R. CX. 34-36.

Es handelt sich um eine Methode, welche gestattet, für die rationalen Integrale $y = R(x)$ der Differentialgleichungen von der Form

$$(1) \qquad y' = \frac{P(y, x)}{Q(y, x)},$$

wo P und Q Polynome bezeichnen, eine obere Grenze für die Grade des Zählers und Nenners von $R(x)$ anzugeben. Durch eine homographische Transformation kann man stets bewirken, dass die Schnittpunkte der Curven $P = 0$, $Q = 0$, unter denen auch die der Curven $y = R(x)$ und $Q = 0$ sich befinden müssen, sämtlich im Endlichen liegen. (x_0, y_0) sei einer dieser Punkte. Man ermittelt aus der Differentialgleichung für die holomorphen

Integrale die Ordnung von $y-y_0$ in Beziehung auf $x-x_0$ und damit den grösstmöglichen Grad der Vielfachheit von (x_0, y_0) als Schnittpunkte der Curven $y=R(x)$ und $Q=0$. So ergiebt sich eine obere Grenze μ für die Gesamtzahl der Schnittpunkte (die vielfachen nach dem Grad ihrer Vielfachheit gerechnet) der genannten Curven. Ist m der Grad von Q, n der höchste der Grade des Zählers und Nenners von R, so ist also $\mu \geqq m(n+1)$. Hierdurch erhält man eine Grenze für n. Die Methode versagt nur, wenn die Differentialgleichung eine Riccati'sche ist. Auf die Gleichung (1) lassen sich die Differentialgleichungen $f(y', y, x) = 0$ zurückführen, wenn f rational in x und vom Geschlechte Null in Beziehung auf y, y' ist. Ist f irrational in x, dann kann man die rationalen Integrale durch rein algebraische Operationen erhalten. Auch auf die Gleichungen

$$y' = A(y, x) + B(y, x)\sqrt{C(y, x)}$$

lässt sich die Methode ausdehnen. An die Stelle der Curve $Q=0$ tritt hier $C=0$. Hr.

P. Painlevé. Sur une transformation des équations différentielles du premier ordre. C. R. CX. 840-843.

Ist die Gleichung

$$(1) \qquad y' = \frac{P(y, x)}{Q(y, x)}$$

gegeben, wo P und Q Polynome bez. von den Graden i und $\varkappa$ sind, so kann man durch eine Transformation von der Form

$$(2) \qquad y = \frac{ay_1+b}{cy_1+d}, \quad x = \varphi(x_1)$$

die Gleichung (1) stets in eine ähnliche Gleichung überführen, in der P und Q resp. die Grade n und $n-2$ haben, wenn n die grösste der beiden Zahlen i und $\varkappa+2$ ist. Setzt man die Gleichung (1) bereits in dieser Form voraus, so kann sie durch die Substitution

$$y = \frac{\alpha y_1+\beta}{y_1+\delta}, \quad x = \varphi(x_1),$$

wo α eine p-fache Wurzel der Gleichung $Q(\alpha, x) = 0$ ist, β, δ und φ mit Hülfe zweier Quadraturen bestimmt sind, in eine ähnliche „reducirte“ Gleichung transformirt werden, in der auf der rechten Seite die Coefficienten von y_1^n im Zähler, von y_1^{n-2-p} im Nenner gleich 1 sind und die Glieder vom Grade $n-1$ und $n-1-p$ im Zähler fehlen. Die übrigen Coefficienten hängen für eine gegebene Wurzel α von zwei willkürlichen Constanten ab, und man erhält alle zu dieser Wurzel gehörigen „Reducirten“ aus einer, indem y_1 durch Cy_1 und x_1 durch $\frac{x_1}{C^{p+1}}+h$ (C und h Constanten) ersetzt werden. Wenn $p = 1$, dann bilden die $2n-5$ Coefficienten der „Reducirten“ ein System von verschiedenen Invarianten der Gleichung (1). Zwei Gleichungen, die in diesen Invarianten übereinstimmen, lassen sich durch eine Substitution (2) in einander transformiren. Mittels der Invarianten kann man ferner die Gleichungen von der Form (1) angeben, deren Integrale um bewegliche kritische Punkte eine gegebene endliche Anzahl von Werten annehmen. Endlich wird noch der Satz abgeleitet, dass die Gleichungen (1), die für eine continuirliche Gruppe von Transformationen (2) invariant bleiben, sich durch eine Substitution dieser Art aus homogenen Gleichungen ableiten lassen und daher integrabel sind. Eine Ausnahme bildet die Riccati'sche Gleichung, die auch die einzige ist, welche eine Zurückführung auf die reducirte Form nicht gestattet.

Hr.

P. Painlevé. Sur les intégrales algébriques des équations différentielles du premier ordre. C. R. CX. 945-948

Für die Differentialgleichung

$$y' = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \quad (P \text{ und } Q \text{ Polynome in } x \text{ und } y)$$

wird eine Methode angegeben, zu erkennen, ob das Integral eine algebraische Curve ist, durch deren vielfache Punkte nicht mehr als k verschiedeneZweige gehen, wo k gegeben ist. Hierzu dient die Entwickelung von $y-y_i$ nach Potenzen von $x-x_i$ nach dem Verfahren von Briot und Bouquet, wo (x_i, y_i) die

Schnittpunkte von $P=0$, $Q=0$ sind, unter denen die gedachten vielfachen Punkte sich befinden. Eine zweite Methode gestattet, alle algebraischen Integrale von gegebenem Geschlechte p zu finden. Man lässt zunächst mittels einer Cremona'schen Substitution alle Punkte (x_i, y_i) mit dem Ursprung O zusammenfallen. Sei m der Grad einer algebraischen Integralcurve vom Geschlechte p, μ der Grad der Vielfachheit des nunmehr einzigen vielfachen Punktes O; dann ist, wenn μ nicht grösser als 1 ist, eine obere Grenze von m gegeben durch die Gleichung

$$(m-1)(m-2)=2p.$$

Wenn p nicht Null ist, dann ist n wenigstens gleich 1, und man hat $n^2<2p$, $\mu<p$ und damit eine obere Grenze für m und μ. Ist $p=0$, so wird die Aufgabe durch die Substitution $y=tx$ auf die in der vorhergehenden Note behandelte Frage nach den rationalen Integralen der Differentialgleichung in x und t zurückgeführt. Hr.

Elliot. Sur une équation du premier ordre et l'équation de Jacobi. Ann. de l'Éc. Norm. (3) VII. 101-134.

Gegenstand der Arbeit sind die Differentialgleichungen erster Ordnung von der Gestalt

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Py^2+Qy+R}{Sy+T},$$

deren Coefficienten beliebige Functionen von x sind. Durch die Substitution

$$(1) \qquad y=e^{\int\frac{P}{S}dx}\cdot Y-\frac{T}{S}$$

transformirt sie sich in die „reducirte Gleichung“

$$(2) \qquad \frac{dY}{dx}+J=\frac{H}{Y},$$

in der J und H bis auf die willkürlichen constanten Factoren h, resp. h^2 bestimmt sind und die Eigenschaft haben, in Folge der gleichzeitigen Aenderungen

$$y = ay_1 + b, \quad \frac{dx_1}{dx} = c \quad (a, b, c \text{ beliebige Functionen von } x)$$

in

$$J_1 = \frac{1}{c} J, \quad H_1 = \frac{1}{c} H$$

überzugehen. Der Quotient $H : J = \overline{J}$ ist daher eine absolute Invariante. Führt man in (2) noch durch die Substitution $\frac{dX}{dx} = J$ die neue unabhängige Variable X ein, so erhält man die „kanonische Gleichung"

$$(3) \qquad \frac{dY}{dX} + 1 = \frac{\overline{J}}{Y},$$

in der X ebenfalls eine absolute Invariante ist. Aus (2) und (3) erkennt man, dass die Gleichung (1) integrabel wird, wenn

$$\frac{d\overline{J}}{dX} = \frac{d\frac{H}{J}}{dx} : J = \text{const. oder } \overline{J} = \frac{H}{J} = \text{const.}$$

Durch die Substitution $Y = u + \frac{1}{aY_1 + b}$, wo u eine Lösung von (2), a und b beliebige Functionen von x sind, erhält man eine neue Gleichung von der Form (1), und indem man diese auf die kanonische Form bringt, wird die daselbst auftretende Invariante $\overline{J}_1$ von den Functionen a und b unabhängig. Es kann nun eintreten, dass $\frac{d\overline{J}_1}{dX_1}$, wo X_1 die andere absolute Invariante ist, constant $= k$ wird, alsdann ist die ursprüngliche Gleichung integrabel. Die bezügliche Discussion ergiebt, dass die absolute Invariante von (1) in diesem Falle die Form hat

$$\overline{J} = \pm \frac{2}{9} \frac{9k+2}{\sqrt{X}} + \frac{2}{9}\Big[3(3k+1) - X\Big].$$

Durch diesen Wert von $\overline{J}$ sind eben die Jacobi'schen Gleichungen charakterisirt. Diese werden einer näheren Betrachtung unterzogen, wobei 3 Fälle unterschieden werden, je nachdem die zugehörige kubische Gleichung 3 verschiedene Wurzeln, eine Doppelwurzel oder eine dreifache Wurzel hat. Im ersten Falle ergiebt sich k als Wurzel einer kubischen Gleichung, im zweiten

ist $k=0$, im dritten ist $\frac{d\frac{H}{J}}{dx}:J=-\frac{2}{9}$, also die Jacobi'sche Gleichung unmittelbar integrabel. Im folgenden werden die Gleichungen der Form (1) untersucht, deren allgemeines Integral die Form hat

$(y-A)^\alpha(y-B)^\beta(y-C)^\gamma = D\,.\,\text{const.}$ (A, B, C, D beliebige Functionen von x). Hierzu ist notwendig, dass entweder $D=\text{const.}$ und $\alpha+\beta+\gamma=0$, oder $D=\text{const.}\ A^\alpha B^\beta C^\gamma$ mit der Bedingung $\frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{B}+\frac{\gamma}{C}=0$. Die erste Form führt nur auf Gleichungen, die aus der Jacobi'schen Gleichung durch Aenderung der unabhängigen Variable hervorgehen. Die zweite Form ist ein Specialfall der Form

$$(y-A)^\alpha(y-B)^\beta(y-C)^\gamma(y-D)^\delta=\text{const.},$$

welche zu einer Differentialgleichung von der Form (1) führt, unter den Bedingungen

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0,\quad \alpha A+\beta B+\gamma C+\delta D=0.$$

Durch eine Aenderung der unabhängigen Variable kann man bewirken, dass A, B, C, D lineare Functionen von x sind. Die Differentialgleichung hat alsdann 4 Particularlösungen, die lineare Functionen von x sind, und stellt somit eine Verallgemeinerung der Jacobi'schen Gleichung dar. Sie gehört zu der Klasse von Gleichungen, die Herr Darboux in den C. R. LXXXVI (F. d. M. X. 1878. 214) betrachtet hat.

Zum Schlusse folgen Bemerkungen über die Gleichungen von der Form (1), in denen P, Q, R Constanten, S und T Polynome vom ersten oder zweiten Grade sind. Hr.

W. Raschke. Ueber die Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung, in welchen die unabhängige Veränderliche nicht vorkommt. Acta Math. XIV. 31-80.

Die Arbeit ist der Inhalt einer im Jahre 1883 erschienenen Dissertation, über die in diesem Jahrbuch XV. 1883. 249 be-

richtet ist. Herr Fuchs, der sie zum Abdruck gebracht hat, fügt einige Worte hinzu, denen wir entnehmen: „Leider wurde der talentvolle junge Mann im darauf folgenden Jahre in seiner Vaterstadt Danzig das Opfer eines Unglücksfalles. Die Arbeit enthält Gesichtspunkte, welche sowohl für die vorliegende Frage, als auch für andere, welche über dieselbe hinausgehen, bemerkenswert sind". Hr.

R. Lohnstein. Ueber lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche Integrale besitzen, durch deren Umkehrung sich eindeutige Functionen zweier Variabeln ergeben. Diss. Berlin. 68 S. 4°.

In einer Reihe von grundlegenden Abhandlungen hat Herr Fuchs eine Klasse von Functionen mehrerer Variabeln eingeführt, von denen die Abel'schen Functionen einen besonderen Fall bilden, indem er die Frage behandelte, welche Functionen in dem Jacobi'schen Umkehrungssatze die Stelle der algebraischen Functionen einnehmen dürfen, wenn die Umkehrbarkeit erhalten werden sollte. Insbesondere hat er für den Fall zweier Variabeln, von dem System der Differentialgleichungen

$$(1)\quad du_1 = f_1(z_1)dz_1 + f_1(z_2)dz_2, \qquad du_2 = f_2(z_1)dz_1 + f_2(z_2)dz_2$$

ausgehend, unter gewissen Voraussetzungen über die Functionen $f_1(z)$ und $f_2(z)$, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für sie entwickelt, damit die symmetrischen Functionen von z_1, z_2 eindeutige Functionen von u_1, u_2 seien. Der Verf. bringt zunächst den interessanten Nachweis, dass, wenn man das Umkehrproblem für die allgemeinere Form

$$du_1 = f_1(z_1)dz_1 + \varphi_1(z_2)dz_2, \qquad du_2 = f_2(z_1)dz_1 + \varphi_2(z_2)dz_2$$

stellt, $\varphi_1(z)$ mit $f_1(z)$ und $\varphi_2(z)$ mit $f_2(z)$ als notwendig identisch sich ergeben, wodurch man auf die Form des Systems (1) zurückgeführt wird. Die weitere Untersuchung wird unter der Voraussetzung geführt, dass $f_1(z)$, $f_2(z)$ ein Fundamentalsystem von Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit lauter regulären Integralen bilden, bei welcher die Wurzeln sämtlicher determinirenden Gleichungen

rationale Zahlen sind. Dabei findet der Verfasser ausser den bereits von Herrn Fuchs in einer Tabelle (Gött. Nachr. 1880) aufgeführten Differentialgleichungen, die gewissen in einer früheren Arbeit (J. für Math. LXXXIX, F. d. M. XII. 1880. 241) entwickelten Bedingungen genügen, noch eine weitere Anzahl allerdings algebraisch integrirbarer Differentialgleichungen, für welche die fragliche Umkehrung möglich ist.

Nach einer kurzen Zusammenfassung der Hauptresultate, zu denen Herr Fuchs in der Behandlung des allgemeinen Umkehrproblems für zwei Variabeln (Gött. Abh. 1881, F. d. M. XIII. 321) gelangt ist, werden zuvörderst die verschiedenen Formen, welche die Wurzeln der determinirenden Gleichungen für die singulären Punkte ($z=\infty$ einbegriffen) haben müssen, aufgestellt. Darauf werden die Differentialgleichungen in drei Gruppen geteilt, je nach der Beschaffenheit von z als Function des Quotienten $\zeta = f_2(z):f_1(z)$. Diese Function, die, wie Herr Fuchs nachgewiesen hat, ein- oder zweiwertig sein muss, wird hier durchgehends eindeutig vorausgesetzt. In der ersten Gruppe ist $\zeta=\infty$ der einzige wesentlich singuläre Punkt von z als Function von ζ. In diesem Falle muss z eine doppeltperiodische Function von ζ sein, und die durch die Substitution $f_2(z_\varkappa):f_1(z_\varkappa)=\zeta_\varkappa$ $(\varkappa=1,2)$ transformirten Gleichungen (1) in den Variabeln ζ_1, ζ_2 haben zur Lösung

$$\zeta_1+\zeta_2=u_1-v_1,\quad \zeta_1^2+\zeta_2^2=2(u_2-v_2),$$

wo v_1 und v_2 Constanten sind. Die symmetrischen Functionen von z_1, z_2 stellen sich also nach der Theorie der elliptischen Functionen als Quotienten zweier für alle endlichen Werte von u_1, u_2 convergirenden Potenzreihen dar. In der zweiten Gruppe hat $z(\zeta)$ auch endliche, wesentlich singuläre Punkte. Die nähere Untersuchung zeigt, dass höchstens ein Punkt dieser Art existirt, und dass $z(\zeta)$ die Form $z=\varphi\left(\frac{\omega}{\pi i}\log\zeta\right)$ annimmt, wo φ eine doppeltperiodische Function und ω eine ihrer Perioden bezeichnet. Die in ζ_1 und ζ_2 transformirten Gleichungen (1) haben hier die Lösungen

$$\zeta_1^{-\frac{1}{2}}+\zeta_2^{-\frac{1}{2}}=-2(u_1-v_1),\quad \zeta_1^{\frac{1}{2}}+\zeta_2^{\frac{1}{2}}=2(u_2-v_2),$$

und die symmetrischen Functionen von z_1, z_2 stellen sich, wie vorhin, vermittelst Reihenentwickelungen als eindeutige Functionen von $\zeta_1+\zeta_2$, $\zeta_1-\zeta_2$ dar, während die letzteren aus den vorstehenden Gleichungen sich eindeutig durch u_1, u_2 ausdrücken. In der letzten Gruppe hat $z(\zeta)$ keinen wesentlich singulären Punkt, ist also eine algebraische Function von ζ. Die hierher gehörigen Differentialgleichungen sind algebraisch integrirbar, und das Umkehrungsproblem lässt sich, wie man a priori weiss, durch die Abel'schen Functionen zweier Variabeln erledigen. Doch ergeben sich auf dem hier eingeschlagenen Wege Integralgleichungen ziemlich hoher Grade, deren Kenntnis von Interesse ist. Zugleich dienen die hier durchgeführten Rechnungen, da die Gesamtheit der in diese Gruppe fallenden Differentialgleichungen aufgestellt und integrirt wird, zur lehrreichen Illustration der Sätze, die Herr Fuchs in seinen klassischen Abhandlungen über algebraisch integrirbare Differentialgleichungen zweiter Ordnung (J. für Math. LXXXI und LXXXV, F. d. M. VII. 1875. 172 und X. 1878. 228) entwickelt hat. Hr.

A. Rosén. Undersökning af en lineär differentialekvation af andra ordningen. Lund 1890. 55 S.

Es werden die integrirenden Functionen einer linearen, homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit drei singulären Punkten untersucht, und zwar ohne Hülfe von Poincaré's allgemeinen Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen mit regulären Integralen. Nach einigen bekannten Sätzen betreffs linearer Substitutionen bringt der Verfasser kurze Mitteilungen über die Fuchs'sche Theorie der linearen Differentialgleichungen mit besonderer Rücksicht auf Gleichungen zweiter Ordnung und studirt dann bei einer Gleichung der oben genannten Art den Quotienten zweier particulären Integrale, durch welchen die Integrale selbst und damit das allgemeine Integral sich leicht ausdrücken lassen. Besonders werden reelle Werte der unabhängigen Variable berücksichtigt. Bdn.

G. Cassel. Sur une équation linéaire du second ordre à coefficients transcendants. Stockholm Öfv. 381-384.

Zufolge der Gleichungen

$$\frac{d^2t}{d(\pi v)^2}+\left[\frac{3}{16}\frac{1}{\sin^2\pi v}+\frac{A}{2}\cdot\frac{1}{\sin\pi v}\right]t=0,\quad \frac{dz}{d(\pi v)}=\frac{1}{t^2}$$

giebt v, als Function von z, eine conforme Abbildung eines gewissen, durch Geraden und Kreisbogen begrenzten Gebietes auf die ganze Halbebene; ebenso x, als Function von u, wenn $x=\frac{2}{1+2v}$, $u=\frac{1}{z}$. Als bemerkenswert wird hierbei bezeichnet, dass man die x-Werte, welche den Eckpunkten der abgebildeten Figur entsprechen, leicht bestimmen kann. Bdn.

V. Jamet. Sur un cas particulier de l'équation de Lamé. C. R. CXI. 638-639.

Die Gleichung

$$\frac{d^2z}{d\varphi^2}=\left(\tfrac{3}{4}k^2\mathrm{sn}^2\varphi-\frac{1+k^2}{4}\right)z$$

hat zum allgemeinen Integral

$$z=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{sn}\frac{C-\varphi}{2}\,\mathrm{cn}\frac{C-\varphi}{2}\,\mathrm{dn}\frac{C-\varphi}{2}}}\left(A+B\,\mathrm{sn}^2\frac{C-\varphi}{2}\right),$$

wo A und B willkürliche Constanten sind und C bestimmt ist durch

$$C=2\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}+\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Hr.

P. Siemon. Ueber die Integrale einer nicht homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Pr. Luisensch. Berlin. 22 S.

Die behandelte Differentialgleichung ist

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=k_nx^{n-1},$$

wo k_n constant ist. Die reducirte Gleichung ist die Bessel'sche, deren vollständiges Integral bekannt ist. Es handelt sich daher nur um das additiv hinzutretende particuläre Integral der completen Gleichung. Dieses wird zunächst in der für $n > \frac{1}{2}$ gültigen Form gegeben:

$$H_n = k_n x^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x \cos w) \sin^{2n} w \, dw = k_n x^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x \sin w) \cos^{2n} w \, dw.$$

Die Entwickelung der Eigenschaften dieser Function bildet den Inhalt der Arbeit.

1. Aufstellung der recurrenten Gleichungen zwischen $H_{n+1}(x)$, $H_n(x)$, $H_{n-1}(x)$, oder $\frac{dH_n}{dx}$, $H_n(x)$, $H_{n-1}(x)$.

2. Reihenentwickelung von $H_n(x)$ in der Form $x^n \mathfrak{P}(x)$.

3. Die vorhergehenden Darstellungen gelten nur für $n > -\frac{1}{2}$. Mit Benutzung der Gleichung

$$\frac{d^m}{dx^m}\left[x^{\frac{n}{2}} H_n(\sqrt{x})\right] = \frac{1}{2^m} x^{\frac{n-m}{2}} H_{n-m}(\sqrt{x})$$

werden Ausdrücke für H mit beliebig negativem Index durch die Summe zweier endlichen Reihen abgeleitet, von denen die eine Potenzen von x, die andere H-Functionen mit positivem Index enthält. Dies geschieht auf unendlich viele Weisen.

4. Verhalten der Function $H_n(x)$ für sehr grosse Werte des Arguments. Zu dem Zwecke werden für $H_n(x)$ semiconvergente Reihen entwickelt, die nach negativen Potenzen von x fortschreiten. Es ergiebt sich u. a., dass für $-\frac{1}{2} < n \leqq 1$

$$\lim H_n(x) = 0 \text{ für } x = \infty.$$

5. Darstellung von H_n durch Reihen, die nach Bessel'schen Functionen fortschreiten, und mittels derselben Auswertung der bestimmten Integrale $\int_0^\infty \frac{H_n(x) J_\nu(x)}{x} dx$. Sind m und n positive ganze Zahlen mit Ausschluss der Null, so ist für $m < n$

$$\int_0^\infty \frac{H_n(x) J_{n-m}(x)}{x} dx = 0.$$

6. Berechnung anderer bestimmter Integrale, welche die Function H enthalten. Hr.

G. de Longchamps. Intégration de l'équation de Brassine au moyen des fonctions hyperbernoulliennes. Assoc. Franç. Limoges XIX. 146-152.

Die hier betrachteten hyperbernoullischen Functionen entspringen aus dem Gebrauche des Algorithmus

$$A_1A_{n-1}+A_2A_{n-2}+\cdots+A_{n-1}A_1=(A)_n,$$

der nach einem vom Verfasser gemachten Vorschlage (Belg. Bull. (3) XVIII, F. d. M. XXI. 1889. 447) die „Isobare" der Folge $A_1, A_2, \ldots, A_n$ heisst. Benutzt man die Recursionsformel $A_n\varphi(n)=(A)_n$, in welcher $\varphi(n)$ den „Schlüssel" darstellt, so bestimmt man die unbegrenzte Folge $A_1, A_2, \ldots$ und die Functionen $A_1x+A_2x^2+\cdots$ und andere ähnliche, adjungirte Functionen benannt. Die „Schlüsselfunctionen" zweiten Grades ermöglichen, abgesehen von einem Ausnahmefalle, die vollständige Integration der zu dem Geschlechte der Brassine'schen Gleichungen gehörigen Differentialgleichungen von folgender Form:

$$A\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{B}{x}\frac{dy}{dx}+C\cdot\frac{y}{x^2}-4y^2=\frac{\alpha_1}{x^4}+\frac{\alpha_2}{x^2}+\alpha_3+\cdots+\alpha_p x_{2p-6}.$$

Lp.

H. Gyldén. Fortsatta Undersökningar rörande en ickelineär Differentialekvation af andra ordningen. Stockh. Vetensk. Bihang. 23 S. (1889.)

D. Besso. Sull' integrazione dell' equazione differenziale lineare omogenea del second' ordine, quando sia conosciuta una funzione intera del secondo grado a coefficienti costanti di due suoi integrali fondamentali. Modena Mem. (2) VII. 239-244.

Ist eine ganze Function zweiten Grades zweier Fundamental-Integrale y_1, y_2 der Gleichung

$$y''+py'+qy=0$$

gleich z gegeben, so sind, falls nicht eine gewisse Relation zwischen p, q und ihren Derivirten stattfindet, y_1 und y_2 die Wurzeln einer Gleichung zweiten Grades, deren Coefficienten rational aus z, p, q und deren Ableitungen zusammengesetzt sind. Im Ausnahmefalle lässt sich die gegebene Differentialgleichung auf die einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung reduciren.

Hr.

D. Besso. Sull' integrazione dell' equazione differenziale lineare omogenea del terz' ordine quando sia conosciuta una funzione intera del secondo grado a coefficienti costanti di due suoi integrali fondamentali. Modena Mem. (2) VII. 245-252.

Sind y_1, y_2, y_3 drei Fundamentalintegrale einer linearen homogenen Differentialgleichung dritter Ordnung und ist

$$(1) \qquad y_1^2+y_2^2+y_3^2 = z$$

als Function von x bekannt, so lässt sich die Integration auf die einer Differentialgleichung zweiter Ordnung reduciren von der Beschaffenheit, dass die logarithmischen Ableitungen ihrer Lösungen die Wurzeln einer Gleichung vierten Grades mit bekannten Coefficienten sind. Ist zweitens eine nicht homogene Function zweiten Grades von y_1, y_2, y_3 als Function von x gegeben, dann lässt sich, falls nicht eine gewisse Relation zwischen den Coefficienten der Differentialgleichung stattfindet, eine Lösung derselben rational durch z, die Coefficienten und ihre Ableitungen ausdrücken, und die nach bekannter Reductionsmethode mit ihrer Hülfe hergestellte Differentialgleichung zweiter Ordnung hat die Eigenschaft, dass die logarithmischen Ableitungen ihrer Lösungen Wurzeln einer quadratischen Gleichung mit bekannten Coefficienten sind. Im erwähnten Ausnahmefalle hängt die erste Lösung von der Integration einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung ab.

Hr.

E. Jahnke. Zur Integration der binomischen Differentialgleichung dritter Ordnung. Schlömilch Z. XXXV. 376-380.

Die Reduction der Differentialgleichung

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = P^2(u) = (a_0u^3+a_1u^2+a_2u+a_3)^2,$$

der eine elliptische Function u genügt, auf die Differentialgleichung zweiten Grades der Weierstrass'schen Function $s=\wp(z-z_0)$ geschieht durch eine Transformationsformel, welche $s=\infty$ giebt für ein beliebiges $u=u_0$. Durch die Substitution

$$y = a_0^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{P(u)} - a_0 u$$

erhält man für y eine elliptische Function zweiten Grades, wobei $y=\infty$ dem Werte $u=\infty$ entspricht. Um $u=u_0$ an Stelle von $u=\infty$ zu substituiren, führt man $u'=\dfrac{1}{u-u_0}$ ein. Endlich wird y in die s-Function durch die von Herrn Weierstrass in seinen Vorlesungen gegebene Transformation übergeführt. Die Invariante g_2 verschwindet im vorliegenden Fall. g_3 stimmt bis auf einen numerischen Factor mit der Discriminante von $P(u)$ überein. Hr.

A. Cayley. On a particular case of Kummer's differential equation of the third order. Mess. (2) XX. 75-79.

Die allgemeine Form der Gleichung ist

$$\frac{x'''}{x'}-\frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2+x'^2\left\{\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x(x-1)}+\frac{C}{x^2}\right\} - \left\{\frac{A'}{(t-1)^2}+\frac{B'}{t(t-1)}+\frac{C'}{t^2}\right\}=0.$$

Der besondere Fall, auf welchen die gegenwärtige Notiz sich bezieht, ist von Hrn. Goursat betrachtet (Recherches sur l'équation de Kummer, Acta Soc. Sc. Fennicae XV. (1888) 47-127); bei ihm sind die Constanten:

$$A=\frac{4}{9},\ B=-\frac{37}{32},\ C=\frac{4}{9},\ A'=\frac{3}{8},\ B'=\frac{131}{144},\ C'=\frac{5}{18}.$$

Glr. (Lp.)

M. ROSENKRANZ. Ueber gewisse homogene quadratische Relationen unter den Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung sechster Ordnung. Schlömilch Z. XXXV. 82-96, 129-147; Diss. Halle. 37 S. 8°.

Nach der grundlegenden Abhandlung des Herrn Fuchs über die linearen Differentialgleichungen, zwischen deren Integralen homogene Relationen höherer als erster Ordnung bestehen (Berl. Ber. 1882; Acta Math. I, F. d. M. XIV. 1882. 242), in welcher der Fall der Gleichungen dritter Ordnung erledigt ist, haben sich die Herren Goursat (S. M. F. Bull. XI, F. d. M. XV. 1883. 265) und Schlesinger (Diss. 1887, F. d. M. XX. 1888. 347) mit derselben Frage bezüglich der Gleichungen vierter Ordnung beschäftigt. Bei diesen ergab die Untersuchung, dass, falls jene Beziehungen quadratisch sind, der Differentialgleichung Potenzen der Integrale einer, oder Producte von Potenzen der Integrale verschiedener Differentialgleichungen Genüge leisten, übereinstimmend mit dem Ergebnis des Herrn Fuchs, dass eine Differentialgleichung dritter Ordnung in diesem Falle durch die Quadrate der Integrale einer Gleichung zweiter Ordnung befriedigt werde. Es ist nun einleuchtend, dass zwischen den Integralen einer Differentialgleichung n^{ter} Ordnung $u_1, \dots, u_n$, die als Producte von Potenzen der Integrale einer beliebigen Anzahl von Differentialgleichungen darstellbar sind, quadratische Relationen von der Form bestehen müssen

$$u_\varkappa u_\lambda = u_\mu u_\nu, \quad u_\lambda^2 = u_\mu u_\nu;$$

aber es fragt sich, ob diese Relationen auch die hinreichende Bedingung für jene Eigenschaft der Differentialgleichung bilden. In der vorliegenden Arbeit wird diese Frage für die linearen homogenen Differentialgleichungen sechster Ordnung mit eindeutigen Coefficienten erledigt. Es können nach den verschiedenen dabei auftretenden Möglichkeiten der Gleichung genügen: 1. die fünften Potenzen der Integrale einer Gleichung zweiter Ordnung, 2. die Quadrate der Integrale einer Gleichung dritter Ordnung, 3. die Producte der Integrale einer Gleichung zweiter Ordnung in die einer solchen dritter Ordnung. Die in jedem einzelnen

Falle aufzustellenden homogenen quadratischen Relationen bilden, was für den Zweck der Arbeit wichtig ist, die notwendige und hinreichende Bedingung für die Darstellbarkeit der Integrale in der verlangten Form. Im Anschluss an den erstgenannten Fall wird allgemein nachgewiesen, dass, wenn unter den Integralen $u_1, \dots, u_n$ einer Gleichung n^{ter} Ordnung die $n-2$ Relationen bestehen

$$u_2^2 = u_1 u_3, \quad u_3^2 = u_2 u_4, \dots, \quad u_{n-1}^2 = u_{n-2} u_n,$$

dieser Gleichung die $(n-1)^{\text{ten}}$ Potenzen der Integrale einer Gleichung zweiter Ordnung genügen. Als bemerkenswert heben wir noch folgenden Satz hervor, der die Verallgemeinerung einer bekannten Eigenschaft der Functionen η, die durch beliebige Umläufe des Arguments x in $\eta' = \frac{\lambda + \mu\eta}{\nu + \varrho\eta}$ übergehen, darbietet: Sind ω_1, ω_2 Functionen von x, die bei einem beliebigen Umlaufe von x in

$$\omega_1' = \frac{a_2 + b_2\omega_1 + c_2\omega_2}{a_1 + b_1\omega_1 + c_1\omega_2}, \quad \omega_2' = \frac{a_3 + b_3\omega_1 + c_3\omega_2}{a_1 + b_1\omega_1 + c_1\omega_2}$$

übergehen, und bestimmt man 3 Grössen ξ_1, ξ_2, ξ_3 als Functionen von x so, dass

$$\frac{\xi_2}{\xi_1} = \omega_1, \quad \frac{\xi_3}{\xi_2} = \omega_2, \quad \Sigma \pm \xi_1 \frac{d\xi_2}{dx}\frac{d\xi_3}{dx} = c,$$

wo c eine Constante bezeichnet, dann genügen diese Functionen einer homogenen linearen Differentialgleichung dritter Ordnung mit eindeutigen Coefficienten von der Form

$$\frac{d^3y}{dx^3} = p\frac{dy}{dx} + qy.$$

Die Erweiterung auf die Bestimmung von n Grössen ergiebt sich unmittelbar. Hr.

G. Penseler. **Eine lineare Differentialgleichung fünfter Ordnung mit zwei endlichen singulären Stellen.** Diss. Kiel. Lipsius u. Fischer. 23 S. 4°.

E. Grohn. Ueber die Ableitung der singulären Lösungen eines Systems von simultanen Differentialgleichungen aus den Differentialgleichungen. Diss. Marburg. 45 S. 8°.

Capitel 6.

Partielle Differentialgleichungen.

A. R. Forsyth. Theory of differential equations. Part I. Exact equations and Pfaff's problem. Cambridge. University Press. XIII + 340 S. 8°.

In der Vorrede zu dem „Treatise on differential equations“ (vgl. die Anzeige der deutschen Uebersetzung in F. d. M. XXI. 1889. 297 ff.) kündigte Hr. Forsyth an, dass es in seiner Absicht läge, in einem späteren Bande verschiedene dort fortgelassene Gegenstände zu behandeln. Das vorliegende Buch ist ein erster Beitrag zur Erfüllung jenes Versprechens. Die Behandlung ist nach der geschichtlichen Entwickelung angeordnet, um jede wesentliche Förderung der Erkenntnis in den behandelten Dingen hervorzuheben, und im Laufe der Darstellung werden eingehende Angaben über die Schriften der ursprünglichen Forscher gemacht. Das Buch zerfällt in dreizehn Capitel. Die beiden ersten erörtern bezw. die einfache totale Differentialgleichung und ein System totaler Gleichungen. In dem ersten werden die Methoden von Euler, Bertrand, Collet, Natani und du Bois-Reymond besprochen; das andere dagegen enthält eine Verallgemeinerung der Euler'schen Methode nebst einer Prüfung der Natani'schen und eines Mayer'schen Theorems zu ihrer Weiterführung. Auch die Frobenius'schen Bedingungen für die kanonische Form werden erörtert. Die nächsten vier Capitel sind einer historischen

Uebersicht über die zur Erledigung des Pfaff'schen Problems ersonnenen Methoden gewidmet, insbesondere über die Pfaff'sche, durch Gauss und Jacobi vervollständigte Reduction, über die Methoden Grassmann's und Natani's. Im siebenten Capitel wird eine Anwendung auf partielle Differentialgleichungen erster Ordnung gemacht. Dann folgen Capitel über die Clebsch'sche Methode, über Berührungs-Transformationen, über die Lie'sche Methode, über die Frobenius'sche und eines mit einem Auszuge aus den Darboux'schen Arbeiten; das letzte Capitel endlich erörtert Systeme Pfaff'scher Gleichungen. Ein alphabetisches Namen- und Sach-Register erleichtert die Auffindung gesuchter Gegenstände und gereicht dem Werke zu besonderer Empfehlung.

Gbs. (Lp.)

E. GOURSAT. Théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Leçons à l'École Normale (1889-90) rédigées par C. Bourlet. Deux parties. Paris. 168 S. 4°. autographirt.

In erweiterter Form 1891 in Paris bei Hermann herausgegeben (354 S. 8°). Anzeige in Darboux Bull. (2) XV. 5-10. „Bücher dieser Art, welche den Zustand der Wissenschaft über einen besonderen Punkt zusammenfassen, sind äusserst wünschenswert.“

Lp.

CH. MÉRAY et RIQUIER. Sur la convergence des développements des intégrales ordinaires d'un système d'équations différentielles partielles. Ann. de l'Éc. Norm. (3) VII. 23-88, auch sep. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

Im Anschluss an die Abhandlung der Verfasser bezüglich der Systeme totaler Differentialgleichungen (Ann. d'Éc. Norm. (3) VI., F. d. M. XXI. 1889. 338) werden hier die Bedingungen vollständig angegeben für die Existenz von gewöhnlichen (nicht singulären) Integralen von Systemen partieller Differentialgleichungen, die beliebig gewählten Anfangsbedingungen oder solchen, die nach einem gewissen Gesetze gewählt sind, entsprechen.

Hr.

Ch. Méray et Riquier. Sur la convergence des développements des intégrales ordinaires d'un système d'équations différentielles totales. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

Besondere Ausgabe der Abhandlung, über welche F. d. M. XXI. 1889. 338 berichtet ist.

Ch. Méray. Extension de la méthode de Jacobi pour intégrer une seule équation aux dérivées partielles à une fonction inconnue, dont les dérivées y entrent linéairement, au cas d'un système passif d'équations de cette sorte en nombre quelconque. Ann. de l'Éc. Norm. (3) VII. 217-232.

Nachdem der Verfasser eine Reihe von Sätzen und Bezeichnungen aus einer früheren, gemeinsam mit Herrn Riquier verfassten Abhandlung (Ann. de l'Éc. Norm. (3) VI, VII; F. d. M. XXI. 1889. 338 und das vorangehende Referat) über Systeme von partiellen Differentialgleichungen wiederholt hat, wendet er sich zur Betrachtung des „immediaten passiven" Systems

$$\frac{\partial u}{\partial x_m} = -A_{m,0} + A_{m,1}\frac{\partial u}{\partial u_1} + \cdots + A_{m,q}\frac{\partial u}{\partial u_q} \qquad (m = 1, \ldots, p),$$

wo u eine Function der p Hauptvariabeln $x_1, \ldots, x_p$, der parametrischen Variabeln $u_1, u_2, \ldots, u_q$ ist und $A_{m,n}$ Functionen von $x_1, \ldots, x_p, u_1, \ldots, u_q, u$ bedeuten. Damit dasselbe passiv sei, müssen die Gleichungen bestehen

$$-\frac{\partial A_{m,\nu}}{\partial x_n} + \sum_{\mu=0}^{q}\frac{\partial A_{m,\nu}}{\partial u_\mu}A_{n,\mu} = -\frac{\partial A_{n,\nu}}{\partial x_m} + \sum_{\mu=0}^{q}\frac{\partial A_{n,\nu}}{\partial u_\mu}A_{m,\mu}$$
$$(\nu = 0, 1, \ldots, q),$$

worin für $\frac{\partial}{\partial u_0}$ stets $\frac{\partial}{\partial u}$ zu nehmen ist und m und n sämtliche Combinationen zu zweien der Zahlen $1, \ldots, p$ annehmen. Um dieses System zu lösen, kann der von Jacobi für eine Gleichung vorgeschriebene Weg eingeschlagen werden. Man bildet zunächst

ein Hülfssystem totaler Differentialgleichungen, löst die Formeln, welche die allgemeinen Integrale hiervon liefern, nach den willkürlichen Constanten auf und bildet aus den hierdurch erhaltenen Functionen $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{q+1}$ die Lösungen des vorgelegten Gleichungssystems. Sh.

P. A. MacMahon. A theorem in the calculus of linear partial differential operations. Quart. J. XXIV. 246-250.

Eine Erweiterung von Taylor's Theorem durch Einführung gewisser Symbole. Wegen Einzelheiten muss auf die Arbeit selbst verwiesen werden. Sh.

G. Chrystal. A demonstration of Lagrange's rule for the solution of a linear partial differential equation, with some historical remarks on defective demonstrations hitherto current. Edinb. Trans. XXXVI. 551-562.

Der Verf. meint, der Punkt, in welchem die Beweise mangelhaft seien, liege in dem Nachweise, dass jede Lösung der Differentialgleichung $Pp+Qq=R$ von der Form $f(u,v)=0$ sein muss, wobei $u=a, v=b$ zwei unabhängige Integrale des Hülfssystems $\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$ sind. Cly. (Lp.)

W. P. Ermakoff. Lineare Differentialgleichungen mit partiellen Derivirten erster Ordnung. Charkow Ges. (2) I. 104-112. (Russisch.)

N. Sokoloff. Lineare Differentialgleichungen mit partiellen Derivirten erster Ordnung. Kiew. Univ. Nachr. X. (1889). 65-100. (Russisch.)

Hr. Ermakoff skizzirt im ersten Artikel den Plan einer neuen Darstellung der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen ohne Beweise der Theoreme (vgl. F. d. M. XX. 1888. 360). Die vollständige Ausführung dieses Planes bildet den Inhalt der zweiten Abhandlung. Wi.

W. E. Serdobinsky. Ueber die besonderen Fälle, welche bei der Aufsuchung des allgemeinen Integrals nach der Methode von Lagrange eintreten können. Mosk. Math. Samml. XIV. 439-451. (Russisch.)

Wenn $z = F(x, y, a, b, c, d, e)$ das vollständige Integral einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, so müssen die Constanten a, b, c, d, e durch Functionen von x, y ersetzt werden, wenn man das allgemeine Integral bekommen will. Diese Functionen müssen den drei Gleichungen genügen:

$$\frac{\partial F}{\partial a} da + \cdots + \frac{\partial F}{\partial e} de = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial a \,.\, \partial x} da + \cdots + \frac{\partial^2 F}{\partial e \cdot \partial x} de = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial a \cdot \partial y} da + \cdots + \frac{\partial^2 F}{\partial e \,.\, \partial y} de = 0.$$

Der Verfasser beschäftigt sich mit den Fällen, in welchen diese Bestimmung von a, b, c, d, e als Functionen von x und y unmöglich ist. Wenn $\frac{\partial F}{\partial b}$, $\frac{\partial F}{\partial c}$, $\frac{\partial F}{\partial d}$, $\frac{\partial F}{\partial e}$ die partiellen Lösungen einer Gleichung von der Form $P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} = Ru$ sind, so erhält man $a =$ Const. Wenn aber $\frac{\partial F}{\partial c}$, $\frac{\partial F}{\partial d}$, $\frac{\partial F}{\partial e}$ die partiellen Lösungen derselben Gleichung sind, so erhält man $a =$ Const., $b =$ Const.

Wi.

D. A. Grawe. Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. St.-Petersb. (1889.)

Die Abhandlung enthält in ihrem ersten Teile die Verallgemeinerung der zweiten Jacobi'schen Methode zur Integration der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung für den Fall, in welchem diese Gleichung die unbekannte Function V enthält, und die Anwendung der von Korkine gegebenen Methode zur Auflösung der verallgemeinerten Aufgabe von Cauchy, das normale System der Gleichungen

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, V, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ f_g(x_1, x_2, \ldots, x_n, V, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0 \end{cases} \qquad (g \leqq n)$$

so zu integriren, dass die unbekannte Function V bei den particulären Werten der unabhängigen Veränderlichen $x_n = a$, $x_{n-1} = a_1, \ldots, x_{n-g+1} = a_{g-1}$ in eine willkürliche Function $\Pi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-g})$ der übrigen sich verwandelt. Der Verfasser behandelt die Untersuchungen von Herrn Mayer über lineare Gleichungen und die neue Lie'sche Integrationsmethode als specielle Fälle der allgemeinen Theorie.

Das zweite Capitel ist den Anwendungen gewidmet. Nach den Beispielen der Systeme, welche unmittelbar integrirt werden, wird die Theorie auf das Problem der drei Körper angewandt, und es wird gezeigt, dass die Gleichungen Bertrand's, ausser den schon bekannten Integralen, keine anderen, von dem Wirkungsgesetze der Kräfte unabhängigen besitzen. Wi.

J. Horn. Ueber Systeme linearer Differentialgleichungen mit mehreren Veränderlichen. Berlin. Mayer u. Müller. 123 S.

Ein integrables System totaler linearer Differentialgleichungen

$$(1) \qquad dz_k = (a_{k1}z_1 + \cdots + a_{km}z_m)\,dx + (b_{k1}z_1 + \cdots + b_{km}z_m)\,dy$$
$$(k = 1, 2, \ldots, m)$$

habe zu Coefficienten rationale Functionen von x und y, deren gemeinschaftlicher Nenner die irreductibeln Factoren $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y), \ldots$ enthalte; dann besitzt das den simultanen Gleichungen genügende Functionensystem $z_1, \ldots, z_m$ folgende Eigenschaften: Jeder Zweig des Systems lässt sich mittels eines Fundamentalsystems von m Zweigen

$$z_{k1}, \ldots, z_{km} \quad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

in der Form

$$z_k = c_1 z_{k1} + \cdots + c_m z_{km}$$

mit constanten Coefficienten darstellen. An sämtlichen Stellen (a, b), die nicht auf einem der „singulären Gebilde" $\varphi(x,y) = 0$, $\psi(x,y) = 0, \cdots$ sich befinden, sind alle Zweige in Potenzreihen

$\mathfrak{P}(x-a, y-b)$ entwickelbar. In der Umgebung einer Nullstelle (a, b) von φ, die nicht zugleich Schnittstelle zweier singulären Gebilde ist, existirt ein Fundamentalsystem, dessen Darstellung im einfachsten Falle lautet:

$$z_{k1} = \varphi(x, y)^{p_k} \xi_{k,1}, \ \ldots, \ z_{k,m} = \varphi(x, y)^{p_k} \xi_{k,m} \quad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

$p_1, \ldots, p_m$ haben für alle Punkte (a, b) von $\varphi = 0$ denselben Wert und sind, bis auf additive ganze Zahlen, dadurch bestimmt, dass $e^{2\pi i p_k}$ Wurzel einer Gleichung n^{ten} Grades (Fundamentalgleichung) ist, deren Coefficienten mit den Constanten des Differentialgleichungssystems in transcendentem Zusammenhange stehen. $\zeta_{k,i}$ sind in der Umgebung von (a, b) eindeutige Functionen von x, y. Im allgemeinen treten in der Darstellung der Integrale noch Logarithmen von φ auf, in der Form:

$$z_{ke} = \varphi(x, y)^{p_k} \{ \zeta_{k,e} + \zeta_{k,e-1} \log \varphi + \cdots + \zeta_{k,1} (\log \varphi)^{e-1} \}.$$

Lassen sich bei geeigneter Wahl des Exponenten p_k alle auftretenden ζ_k in nach ganzen, positiven Potenzen von $x-a$, $y-b$ fortschreitende Potenzreihen $\mathfrak{P}(x-a, y-b)$ entwickeln, so heisst das Zweigsystem regulär und zum Exponenten p_k gehörig, wenn zugleich p_k so gewählt ist, dass z. B. im einfachsten Falle nicht sämtliche Potenzreihen $\zeta_{k1}, \ldots, \zeta_{k,m}$ durch φ teilbar sind. Ein Differentialgleichungssystem (1), das an einem singulären Gebilde $\varphi = 0$ lauter reguläre Integrale hat, heisst selbst regulär an $\varphi = 0$. Hauptgegenstand des Werkes ist nun die Erforschung der Bedingungen der Regularität des Systems (1) und, falls diese erfüllt sind, die Darstellung der regulären Zweigsysteme. Die Exponenten, zu denen dieselben gehören, ergeben sich als Wurzeln einer „determinirenden Gleichung“, deren Coefficienten mit den Constanten des Differentialgleichungssystems (1) in algebraischer Beziehung stehen. Die Lösung der gestellten Aufgaben wird für $m = 2$ und $m = 3$ derart durchgeführt, dass man erkennt, dass der Uebergang zu Systemen mit m abhängigen Variabeln keine principiellen Schwierigkeiten bietet. In Betreff des Auftretens von Logarithmen in den Zweigsystemen werden übrigens nur die Bedingungen für die Möglichkeit, nicht für die Wirklichkeit ihres Vorkommens entwickelt.

In einer früheren Arbeit (Acta Math. XII), auf welche in d vorliegenden Werke bezüglich einiger Sätze verwiesen wird, der Verfasser sich mit einem gewissen als integrabel vor gesetzten System partieller Differentialgleichungen von der Fo

$$(2)\quad \begin{cases} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a_0 z + a_1 \frac{\partial z}{\partial x} + a_2 \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = b_0 z + b_1 \frac{\partial z}{\partial x} + b_2 \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = c_0 z + c_1 \frac{\partial z}{\partial x} + c_2 \frac{\partial z}{\partial y} \end{cases}$$

beschäftigt. Dieses lässt sich durch die Substitution $z =$ $\frac{\partial z}{\partial x} = z_1$, $\frac{\partial z}{\partial y} = z_2$ auf ein totales integrables System (1) mit drei hängigen Veränderlichen zurückführen. Die specielle Untersuc des Systems (2) wird hier von neuem nach den vorhergehen Gesichtspunkten aufgenommen und die allgemeinste Form d Systems (2) mit lauter regulären Integralen aufgestellt. zeigt sich, dass das in der genannten Arbeit behandelte Syst das einfachste der Art ist.

Zum Schlusse wird noch das Verhalten der Integrale in d Umgebung der Schnittstelle zweier singulären Gebilde $\varphi =$ $\psi = 0$ andeutungsweise entwickelt. Haben die „determinirende Gleichungen bezüglich $\varphi = 0$, $\psi = 0$ lauter verschiedene Wurze p_0, p_1, p_2 bezw. q_0, q_1, q_2, dann ist ein Fundamentalsystem v Integralen der Gleichungen (2) darstellbar in der Form

$$z_k = \varphi(x,y)^{p_k} \psi(x,y)^{q_k} \mathfrak{P}_k(x-a, y-b) \quad (k = 1, 2, 3).$$

Hr.

F. Engel. Zur Invariantentheorie der Systeme vo Pfaff'schen Gleichungen. (Zweite Mitteilung.) Leip Ber. XLII. 192-207.

Zur Fortsetzung der Mitteilung in den Leipziger Ber. XL (F. d. M. XXI. 1889. 340) werden neue Sätze über System die mit einem Pfaff'schen Systeme invariant verknüpft sind, g geben und die Resultate nach der Ausdrucksweise der Manni faltigkeitslehre anschaulich gedeutet. Anwendung davon wir gemacht auf ein System von drei Pfaff'schen Gleichungen m sechs Veränderlichen und auf die vom Verfasser schon frühe

(Math. Ann. XXII, F. d. M. XVI. 1884. 324) behandelte Frage nach allen solchen Transformationen der n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten M_n des $(m+n)$-fach ausgedehnten Raumes R_{m+n}, bei welchen Berührung erster Ordnung der M_n erhalten bleibt. Hr.

A. E. Pellet. Sur une classe d'équations aux dérivées partielles. Assoc. Franç. Limoges XIX. 203-204.

Es sei $f(v, u, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$ die partielle Differentialgleichung; in ihr bedeuten $p_1, p_2, \dots, p_n$ die Ableitungen einer Function z nach den unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \dots, x_n$, v die Function $A_1x_1 + \dots + A_nx_n$, wo die A_k Functionen bloss von den p_k sind, $u = z - p_1x_1 - \dots - p_nx_n$. Man setze

$$\frac{dp_1}{A_1} = \frac{dp_2}{A_2} = \dots = \frac{dp_n}{A_n} = d\alpha.$$

Dieses System simultaner Gleichungen bestimmt die n Functionen p_i mit $n-1$ willkürlichen Constanten ausser derjenigen, welche als Zusatzconstante von α auftritt; ferner

$$u = \varphi(\alpha), \quad -A_1x_1 - \dots - A_nx_n = \varphi'(\alpha),$$

und schliesslich bestimmen wir $\varphi(\alpha)$ aus der Gleichung

$$f(-\varphi', \varphi, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0.$$

Lp.

P. Jărisch. Zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen. Hamb. Mitt. II. 110-119.

Verf. stellt sich die Aufgabe, Functionen $\psi(F)$ zu finden, welche Lösungen gewisser partieller Differentialgleichungen sind, wenn F selbst ein Integral derselben ist.

Für lineare Gleichungen erster Ordnung mit constanten Coefficienten

$$z + \sum_{i=1}^{k} a_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0$$

werden die Functionen ψ in der Form

$$\psi(z) = (a_ix_j - a_jx_i) \cdot z, \quad (i, j = 1, 2, \dots, k \text{ und } i \lessgtr j)$$

gefunden, deren Anzahl $\frac{1}{2}k(k-1)$ ist. Durch wiederholte Anwendung der durch ψ angedeuteten Operation auf $\psi(z)$ ergeben

sich aus diesen beliebig viele neue Functionen, welche dieselben Eigenschaften besitzen.

Für die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}+m^2F=0$$

stellt Verf. sechs Functionen ψ auf, von denen einige bei Anwendung von Kugel- oder Cylindercoordinaten die bemerkenswerte Eigenschaft besitzen, nur von zwei Veränderlichen explicite abzuhängen. Sh.

F. G. Teixeira. Note sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. Teixeira J. IX. 168-172.

Herr Imschenetzky hat gezeigt (Étude sur les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre, Archiv für Math. LIV. 209-360), dass die Gleichung

$$Hr+2Ks+Lt+M+N(rt-s^2)=0$$

in eine lineare Gleichung transformirt werden kann, wenn man ein particuläres Stammintegral mit drei willkürlichen Constanten kennt. Indem er sich dann auf die Untersuchungen Ampère's über die allgemeine Theorie der Integrale partieller Differentialgleichungen stützt (Cah. XVII, XVIII des J. de l'Éc. Pol.), zeigt er, dass diese Gleichung beträchtlich einfacher wird, wenn dieses Integral dem einen oder beiden Systemen von Gleichungen genügt, auf welche Monge und Ampère das Problem der Integration der vorgelegten Gleichung zurückführen, indem sie eine der Formen annehmen:

$$S\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha\partial\beta}+T\frac{\partial^2\eta}{\partial\beta^2}+U=0,$$

$$S\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha\partial\beta}+U=0,\quad T\frac{\partial^2\eta}{\partial\beta^2}+U=0.$$

Da die Ampère'sche Theorie sich zu einer gedrängten Darstellung nicht gut eignet, so zeigt der Verf., wie man diese Ergebnisse durch directe ganz elementare Ueberlegungen gewinnt.

Tx. (Lp.)

E. PICARD. Sur l'emploi des approximations successives dans l'étude de certaines équations aux dérivées partielles. C. R. CX. 61-67.

E. PICARD. Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives. Journ. de Math. (4) VI. 145-210.

E. PICARD. Rectification au sujet du mémoire sur les équations aux dérivées partielles. Journ. de Math. (4) VI. 231.

Es handelt sich hier um die Integration der partiellen Differentialgleichung:

$$\Delta u \equiv A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right),$$

wo A, B, C Functionen von x, y darstellen, und die Grenzbedingungen verschieden sind, je nachdem die Discriminante B^2-AC positiv oder negativ ist. Im ersten Falle sind $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ auf einer Curve, u in einem Punkte derselben gegeben; im zweiten dagegen ist der Wert von u auf einer Linie bekannt. Man kann die folgenden zwei Formen als Typen der Gleichungen von positiver bezw. negativer Discriminante annehmen:

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right),$$

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right).$$

Die von Herrn Picard eingeführte Annäherungsmethode besteht darin, dass man zuerst eine beliebige Function u_1 annimmt und dann die Gleichungen:

$$\Delta(u_2) = F\left(u_1, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}, x, y\right),$$

$$\Delta(u_3) = F\left(u_2, \frac{\partial u_2}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial y}, x, y\right),$$

. . . .

unter den vorgeschriebenen Grenzbedingungen nacheinander integrirt. Es kann sich ereignen, dass die Functionenreihe

u_1, u_2, u_3 nach einer bestimmten Grenzfunction convergirt, welche in diesem Falle das gesuchte Integral liefert.

Die Untersuchungen von Herrn Picard beziehen sich zum grössten Teile auf die Gleichung (2) und auf einige besondere Fälle derselben. Ist Gleichung (2) linear, so existirt unter vorgegebenen Grenzbedingungen in jedem beliebigen Bereiche ein einziges Integral. Im allgemeinen Falle existirt immer ein Integral, wenn nur der Bereich hinreichend klein ist und die Function F in Bezug auf jedes von ihren Argumenten derivirbar ist; es kann aber auch mehrere verschiedene Integrale geben. Ist jedoch F von $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ unabhängig, ferner für jedes Wertsystem u, x, y positiv und nimmt mit u zu, so kann man beweisen, dass es, welches auch der vorgegebene Bereich sei, nicht zwei verschiedene Integrale geben kann. Wendet man dann die Annäherungsmethode an, so gelangt man nicht zu einer die Gleichung $\Delta u = F(u, x, y)$ befriedigenden Function u, sondern zu zwei Functionen u, v, für welche das Gleichungssystem:

$$\Delta(u) = F(v, x, y), \quad \Delta(v) = F(u, x, y)$$

erfüllt ist; und man muss den Bereich gehörig verkleinern, um die zwei verschiedenen Functionen u, v auf eine einzige zu reduciren. Diese Beschränkung ist aber nur scheinbar, denn man kann das für einen hinreichend kleinen Bereich ermittelte Integral auf jeden beliebigen Bereich durch die Schwarz'sche alternirende Methode erweitern. Diese Methode ist auch dann anwendbar, wenn F für $u = 0$ verschwindet und u auf der Begrenzung durchgängig positiv sein soll.

Die Picard'sche Annäherungsmethode kann auch auf Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen angewandt werden, wie der Verfasser im letzten Capitel seiner Abhandlung nachweist. Vi.

E. Picard. Sur la détermination des intégrales de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre etc. J. de l'Éc. Pol. LX. 89-105 und C. R. CXI. 487-492.

Fortsetzung der Studien (Acta Math. XII. 323-338, Journ. de Math. (4) VI; F. d. M. XXI. 1889. 348) über die Bestimmung der Integrale partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung durch ihre Werte längs einer geschlossenen Curve. Zunächst wird bewiesen, dass, wenn die Coefficienten von

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2D\frac{\partial u}{\partial x}+2E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=0$$

analytische Functionen von x und y sind, innerhalb des Teiles der Ebene, für den $B^2-AC<0$ ist, auch u eine analytische Function der Variabeln ist. Früher war gezeigt worden, dass ein Integral durch seine Werte längs einer genügend kleinen geschlossenen Curve bestimmt ist, jetzt wird dieser Satz dahin erweitert, dass, wenn F Null ist oder das entgegengesetzte Zeichen von A und C hat, u bestimmt ist durch seine Werte längs einer beliebigen geschlossenen Curve, und es wird auf dem schon früher eingeschlagenen Wege dies Integral wirklich ermittelt. Sh.

G. Kobb. Sur un théorème de M. Picard. C. R. CXI. 726-728.

Damit ein Integral von

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2d\frac{\partial z}{\partial x}+2e\frac{\partial z}{\partial y}+fz=0$$

innerhalb einer geschlossenen Curve durch die Werte desselben auf der Curve bestimmt sei, muss letztere so gewählt sein, dass sich innerhalb derselben zwei reelle und stetige Functionen B und B' bestimmen lassen, welche die Ungleichheit

$$B^2+B'^2<\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\vartheta,\quad \vartheta=\frac{\partial d}{\partial x}+\frac{\partial e}{\partial y}-f$$

erfüllen. Diese von Herrn Picard gegebene Bedingung ersetzt der Verfasser durch die, dass die Curve, innerhalb deren diese Bedingung erfüllt ist, ein Integral von

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\vartheta w=0$$

ist, für welches $w=0$ eine geschlossene Curve ist.

Sh.

A. Petot. Sur les équations linéaires aux dérivées partielles. C. R. CXI. 522-524.

Besitzt die Gleichung

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\partial v}+a\frac{\partial\lambda}{\partial\mu}+b\frac{\partial\lambda}{\partial v}+c\lambda=0$$

vier Lösungen $\lambda_1, \dots, \lambda_4$, welche der Gleichung:

$$\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=\lambda_4^2$$

genügen, so entspricht jeder Lösung λ obiger Gleichung eine Lösung μ der Gleichung:

$$\frac{\partial^2\mu}{\partial u\partial v}-a\frac{\partial\mu}{\partial u}-b\frac{\partial\mu}{\partial v}+\left(c-\frac{\partial a}{\partial u}-\frac{\partial b}{\partial v}\right)\mu=0,$$

welche durch die Formel bestimmt ist:

$$\mu=\left(\lambda\frac{\partial\lambda_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2\lambda_2}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial\lambda_3}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2\lambda_4}{\partial v^2}\right)$$
$$\times e^{\int\left[\left(2b-\frac{\partial\log C_2}{\partial u}\right)du+\left(2a-\frac{\partial\log B_2}{\partial v}\right)dv\right]},$$

wo B_2 und C_2 Coefficienten eines bestimmten Differentialausdrucks sind. Für den Uebergang von μ zu λ ist eine ähnliche Formel entwickelt. Sh.

C. Guichard. Sur une classe particulière d'équations aux dérivées partielles dont les invariants sont égaux. Ann. de l'Éc. Norm. (3) VII. 19-22.

Aus einer Lösung ϱ der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\varrho}{\partial u\partial v}=\varrho\sin\varphi,$$

worin φ eine Lösung von

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}+\cos\varphi=0$$

ist, ergeben sich neue Lösungen der Form:

$$r=-\frac{\partial^2\varrho}{\partial u^2}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial u}\quad\text{und}\quad s=-\frac{\partial^2\varrho}{\partial v^2}+\vartheta\frac{\partial\varphi}{\partial v},$$

wo λ und ϑ durch Quadraturen zu bestimmen sind aus:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u} = -\frac{\partial \varrho}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}; \quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \varrho \cos\varphi = \frac{\partial \vartheta}{\partial u};$$
$$\frac{\partial \vartheta}{\partial v} = -\frac{\partial \varrho}{\partial v} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Transformationen ergeben sich beliebig viele neue Lösungen. Sh.

S. Zaremba. Note concernant l'intégration d'une équation aux dérivées partielles. Ann. de l'Éc. Norm. (3) VII. 135-142.

S. Zaremba. Sur l'intégration d'une équation aux dérivées partielles. C. R. CX. 127-129.

Die Bestimmung des allgemeinen Integrals einer partiellen Differentialgleichung der Form:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \varphi_1(x+y)\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right) + \varphi_2(x+y)z = 0,$$

wo φ_1 und φ_2 beliebige Functionen von $x+y$ sind, kann auf die Integration einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung und auf Quadraturen zurückgeführt werden, wie dies Riemann (Werke S. 162) schon bemerkt hat. Dieses Resultat wird auf ein von Herrn Darboux gestelltes Problem angewandt, das Linienelement auf einer abwickelbaren Oberfläche auf die Form

$$ds^2 = \alpha du^2 + \frac{1}{\alpha} dv^2$$

zu bringen. Diese Aufgabe erfordert die Integration der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] + 4\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$
$$+ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right] = 0,$$

und diese lässt sich zurückführen auf:

$$2\frac{\partial^2 V}{\partial r \partial s} - \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial V}{\partial s} = 0,$$

welche unter obigem Typus enthalten ist. Sh.

J. Kürschak. Ueber partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit gleichen Charakteristiken. Math. Ann. XXXVII. 317-320.

Wenn die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} r + 2\frac{\partial^2 V}{\partial p \partial q} s + \frac{\partial^2 V}{\partial q^2} t + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial p} + \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial q} + \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial p} p + \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial q} q - \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

welche das Problem:

$$\delta \iint V(x, y, z, p, q)\, dx\, dy = 0$$

löst, eine charakteristische Gleichung:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \mu^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial p \partial q} \mu + \frac{\partial^2 V}{\partial q^2} = 0$$

mit gleichen Wurzeln hat, so ist sie nach der Methode von Monge lösbar, und zwar nach Ermittelung zweier ersten Integrale vermöge einer einzigen Quadratur. Sh.

G. Torelli. Sopra alcune equazioni alle derivate parziali. Nap. Rend. (2) IV. 123-128.

Von Herrn Beltrami wurde bemerkt, dass die vollständigen elliptischen Integrale erster resp. zweiter Gattung

$$u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\varrho^2 \sin^2\vartheta + \varrho'^2 \cos^2\vartheta)^{\mp \frac{1}{2}} d\vartheta$$

Lösungen der partiellen Differentialgleichungen

$$\varrho\varrho'\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho'^2}\right) = \pm\left(\varrho\frac{\partial u}{\partial \varrho'} - \varrho'\frac{\partial u}{\partial \varrho}\right) = \pm(\varrho'^2 - \varrho^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho\, \partial \varrho'}$$

sind. Verf. leitet für

$$U = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\beta-1}\vartheta \cos^{2\gamma-2\beta-1}\vartheta (\varrho^2 \sin^2\vartheta + \varrho'^2 \cos^2\vartheta)^{-\alpha} d\vartheta$$

verschiedene partielle Differentialgleichungen ab, welche ausser für $\alpha = \pm\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$ in eine der obigen Differentialgleichungen übergehen. Sh.

A. Gutzmer. **Remarques sur certaines équations aux différences partielles d'ordre supérieur.** Journ. de Math. (4) VI. 405-422.

Mathieu bildete durch Iteration von:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

den Ausdruck

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial z^2} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial z^2}$$

und untersuchte die Integrale der Gleichung

$$\Delta^2 u = 0 \text{ resp. } -8\pi\varphi,$$

die er als zweite Potentiale bezeichnete. Verf. verallgemeinert diese Betrachtungen nach zwei Richtungen: nach der Anzahl der Iterationen und der der unabhängigen Variabeln. In erster Hinsicht erhält man Differentialgleichungen $2n^{\text{ter}}$ Ordnung, deren Integrale untersucht und als n^{te} Potentiale bezeichnet werden; in letzter Hinsicht unterscheiden sich die Lösungen der erhaltenen Differentialgleichungen wesentlich, je nachdem die Anzahl der Variabeln gerade oder ungerade ist. Nur für eine gerade Anzahl erhält man den allgemeinen Fall des logarithmischen Potentials.

Sh.

A. Gutzmer. **Remarque sur certaines équations différentielles.** Teixeira J. X. 3-12.

In einer Abhandlung, welche im Journ. de Math. (4) VI. 405-422 (vergl. das vorangehende Referat) erschienen ist, hat der Verf. die Differentialgleichungen betrachtet, welche aus der Laplace'schen

$$\Delta u = \Sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, \varrho)$$

durch Wiederholung der Operation Δ entstehen. Innerhalb desselben Gedankenkreises nimmt jetzt der Verf. zur Verallgemeinerung seiner Ergebnisse u als Function von v an und setzt

$$v = \int \varphi(r)dr, \quad r = \Sigma(x_i - a_i)^2 \qquad (i = 1, 2, \dots, \varrho)$$

und kommt so zur Gleichung

$$\frac{d^2u}{dv^2} + \frac{\psi(r)}{\varphi(r)}\frac{du}{dv} = 0,$$

die er untersucht. Es folgen dann einige Bemerkungen über die Iteration der homogenen linearen Differentialgleichungen und die Anwendung dieser Bemerkungen auf die Gauss'sche Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{(\alpha+\beta+1)x-\gamma}{x^2-x}\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha\beta}{x^2-x} = 0.$$

Der Verfasser bestimmt die Bedingungen dafür, dass diese Gleichung die Iteration der Gleichung sei:

$$\frac{dy}{dx} + p\gamma = 0.$$

Tx. (Lp.)

J. Weingarten. Ueber particuläre Integrale der Differentialgleichung $\varDelta V = 0$ und eine mit der Theorie der Minimalflächen zusammenhängende Gattung von Flüssigkeitsbewegungen. Gött. Nachr. 313-335.

Verfasser untersucht diejenigen Lösungen V der Laplace'schen Differentialgleichung, zwischen deren ersten Derivirten ξ, η, ζ eine und dieselbe Gleichung in jedem Punkte des Raumes besteht.

Im ersten Abschnitt wird zunächst entwickelt, dass die durch diese Gleichung zwischen ξ, η, ζ dargestellte Fläche, deren Punkte durch 2 Parameter p und q bestimmt werden, erstens eine Minimalfläche ist und zweitens der Differentialparameter der Function $\vartheta = x\xi + y\eta + z\zeta - V$ identisch verschwindet. Unter der die Allgemeinheit nicht beeinträchtigenden Annahme, dass p, q stets als orthogonalen isothermen Curvenscharen angehörig betrachtet werden, entwickelt der Verfasser alsdann die geometrischen Eigenschaften des bei der Bestimmung von V auftretenden Strahlensystems.

Im zweiten Abschnitt wird untersucht, ob Potentialfunctionen obiger Art existiren, denen eine stationäre Bewegung einer incompressiblen Flüssigkeit entspricht, für welche eine Stromfläche zugleich Fläche gleichen Drucks ist. Hierbei ergeben sich die

zwei Sätze: Jeder Minimalfläche, welche eine sphärische Asymptotenlinie besitzt, lassen sich Potentialfunctionen zuordnen, welchen eine Flüssigkeitsbewegung entspricht, für die eine abwickelbare Oberfläche gleichzeitig Stromfläche und Fläche constanten Drucks der Flüssigkeit wird. Und: Jeder Minimalfläche, die längs einer in ihr befindlichen Curve durch eine Kugel berührt werden kann, lassen sich unendlich viele Potentialfunctionen zuordnen, denen Flüssigkeitsbewegungen entsprechen, für welche eine geradlinige Fläche die erwähnte Eigenschaft besitzt. Ein einfaches Beispiel der zweiten Art ist das Katenoid; die damit zusammenhängenden Bewegungen werden zum Schlusse ausführlich behandelt.

Sh.

G. Bäcklin. Om partiela differentialekvationer. Diss. Upsala. 44 S.

Auseinandersetzungen über sogenannte „complete" Integrale (mit $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)-1$ unterschiedlichen willkürlichen Constanten) einer Differentialgleichung n^{ter} Ordnung zwischen einer abhängigen und zwei unabhängigen Veränderlichen und über Hülfssysteme von gewöhnlichen Differentialgleichungen, durch welche man von einem „completen" Integrale zum „allgemeinen" übergehen kann.

Bdn.

C. Somigliana. Sulla trasformazione delle equazioni lineari, omogenee, a derivate parziali, con coefficienti costanti. Annali di Mat. (2) XVIII. 265-299.

Die gewöhnlichen Methoden der Transformation linearer homogener partieller Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten leiden an den Uebelständen, besonders bei höheren Ordnungen sehr langwierige Rechnungen zu verursachen und vollständig die äusserst wichtigen Beziehungen zwischen den Coefficienten der transformirten Differentialgleichung im Dunkeln zu lassen. Anknüpfend an die Jacobi'sche Transformation der Laplace'schen Gleichung legt sich der Verfasser die Frage vor, ob es nicht möglich ist, die Transformation linearer homogener Differentialausdrücke mit constanten Coefficienten der Form:

$$\Delta_\nu[U] = \sum_{i_1 i_2 \dots i_\nu} a_{i_1 i_2 \dots i_\nu} \frac{\partial^\nu U}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_\nu}}$$

auf die Transformation des Ausdrucks erster Ordnung:

$$\Delta_1[U_1, U_2, \dots, U_\nu] = \sum_{i_1 \dots i_\nu} a_{i_1 i_2 \dots i_\nu} \frac{\partial U_1}{\partial x_{i_1}} \cdot \frac{\partial U_2}{\partial x_{i_2}} \cdots \frac{\partial U_\nu}{\partial x_{i_\nu}}$$

zurückzuführen.

Setzt man

$$H_{qr.p} = \sum_{i,k} \frac{\partial^2 y_p}{\partial x_i \partial x_k} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial y_q} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial y_r} = - \sum_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_q \partial y_r} \cdot \frac{\partial y_p}{\partial x_i}$$

und führt man durch die Substitution der Variabeln y an Stelle von x in $\Delta_\nu[U]$ diesen Ausdruck über in:

$$\Delta_\nu[U] = \sum_{l_1 l_2 \dots l_\nu} \sum_{\lambda=1}^{\nu} b_{l_1 l_2 \dots l_\lambda} \frac{\partial^\lambda U}{\partial y_{l_1} . \partial y_{l_2} \dots \partial y_{l_\lambda}},$$

wo die b Functionen der y sind, so zeigt sich, dass diese Coefficienten $b_{l_1 \dots l_\lambda}$ lineare Functionen der Coefficienten $b_{l_1 \dots l_\nu}$ (also der Coefficienten der ν^{ten} Ableitungen) und gewisser ganzer rationaler Ausdrücke der Grössen $H_{qr,p}$ und deren Ableitungen nach den y sind.

Nun sind aber die Coefficienten $b_{l_1 \dots l_\nu}$ auch diejenigen der Transformirten von $\Delta_1[U_1, \dots, U_\nu]$, und man folgert daraus, dass die Zurückführung der Transformation von $\Delta_\nu[U]$ auf die von $\Delta_1[U_1, \dots, U_\nu]$ ausführbar ist, sobald gewisse lineare Gleichungen nach $H_{qr,p}$ auflösbar sind. Die auf diese Auflösung bezüglichen Entwickelungen hier anzuführen, dürfte zu weit führen. Die allgemeinen Methoden werden dann an Gleichungen bis zur vierten Ordnung zur Transformation benutzt. Sh.

C. Somigliana. Sopra un' equazione a derivate parziali del quarto ordine. Annali di Mat. (2) XVIII. 59-92.

Diese Abhandlung ist der Untersuchung der Gleichung:

$$\text{(a)} \qquad c_0 \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^4} + 4c_1 \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^3 \partial x_2} + 6c_2 \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + 4c_3 \frac{\partial^4 U}{\partial x_1 \partial x_2^3} + c_4 \frac{\partial^4 U}{\partial x_2^4} = 0$$

gewidmet, wo die c constante Grössen sind. Als Grundlage dazu dient die Theorie der zu einer binären biquadratischen Differentialform gehörigen unveränderlichen Ausdrücke. Ist:

$$\varphi(dx_1, dx_2) = a_0\, dx_1^4 + 4a_1\, dx_1^3\, dx_2 + 6a_2\, dx_1^2\, dx_2^2 + 4a_3\, dx_1\, dx_2^3 + a_4\, dx_2^4 = \Sigma a_{hklm}\, dx_h\, dx_k\, dx_l\, dx_m,$$

wo die a Functionen von x_1, x_2 sind, und setzt man:

$$\alpha_{1111} = a_{2222},\ \alpha_{1112} = -a_{1222},\ \alpha_{1122} = a_{1122},\ \alpha_{1222} = -a_{1112},\ \alpha_{2222} = a_{1111},$$

so ist:

$$a = \tfrac{1}{2}\Sigma a_{hklm}\, \alpha_{hklm}$$

eine Invariante der Form φ. Ist ferner eine zweite Form ψ gegeben, deren Coefficienten durch b bezeichnet werden mögen, und setzt man $c_{hklm} = \dfrac{\alpha_{hklm}}{a}$, so ist $\Sigma b_{hklm} c_{hklm}$ eine absolute simultane Invariante von φ, ψ. Nimmt man als Form ψ nach einander die Formen:

$$\varphi_1(dx_1, dx_2) = dU.dV.dW.dT = \Sigma \frac{\partial U}{\partial x_h}\frac{\partial V}{\partial x_k}\frac{\partial W}{\partial x_l}\frac{\partial T}{\partial x_m}\, dx_h\, dx_k\, dx_l\, dx_m,$$

$$\varphi_2(dx_1, dx_2) = d^2U.dV.dW = \Sigma \frac{\partial^2 U}{\partial x_h \partial x_k}\frac{\partial V}{\partial x_l}\frac{\partial W}{\partial x_m}\, dx_h\, dx_k\, dx_l\, dx_m,$$

$$\varphi_2^1(dx_1, dx_2) = d^2U.d^2V = \Sigma \frac{\partial^2 U}{\partial x_h \partial x_k}\frac{\partial^2 V}{\partial x_l \partial x_m}\, dx_h\, dx_k\, dx_l\, dx_m,$$

$$\varphi_3(dx_1, dx_2) = d^3U.d\,V = \Sigma \frac{\partial^3 U}{\partial x_h \partial x_k \partial x_l}\frac{\partial V}{\partial x_m}\, dx_h\, dx_k\, dx_l\, dx_m,$$

$$\varphi_4(dx_1, dx_2) = d^4U = \Sigma \frac{\partial^4 U}{\partial x_h \partial x_k \partial x_l \partial x_m}\, dx_h\, dx_k\, dx_l\, dx_m$$

an, so erhält man die folgenden unveränderlichen Ausdrücke:

$$\varDelta_1[U, V, W, T] = \Sigma c_{hklm}\frac{\partial U}{\partial x_h}\frac{\partial V}{\partial x_k}\frac{\partial W}{\partial x_l}\frac{\partial T}{\partial x_m},$$

insbesondere:

$$\varDelta_1[U, U, U, U] = \varDelta_1[U]$$

$$= \frac{a_0\left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)^4 - 4a_1\left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)^3\frac{\partial U}{\partial x_1} + 6a_2\left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)^2\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)^2 - 4a_3\frac{\partial U}{\partial x_2}\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)^3 + a_4\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)^4}{a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2},$$

$$\varDelta_2[U | V, W] = \Sigma c_{hklm}\frac{\partial^2 U}{\partial x_h \partial x_k}\frac{\partial V}{\partial x_l}\frac{\partial W}{\partial x_m},$$

$$\Delta_2[U, V] \quad = \Sigma c_{hklm} \frac{\partial^2 U}{\partial x_h \partial x_k} \frac{\partial^2 V}{\partial x_l \partial x_m},$$

$$\Delta_3[U|V] \quad = \Sigma c_{hklm} \frac{\partial^3 U}{\partial x_h \partial x_k \partial x_l} \frac{\partial V}{\partial x_m},$$

$$\Delta_4[U] \quad = \Sigma c_{hklm} \frac{\partial^4 U}{\partial x_h \partial x_k \partial x_l \partial x_m},$$

und hieraus die ferneren Ausdrücke, welche wie $\Delta_1[U, V, W, T]$ und $\Delta_2[U, V]$ in Bezug auf ihre Argumente symmetrisch sind:

$$\Delta_2[U, V, W] = \Delta_2[U|V, W] + \Delta_2[V|W, U] + \Delta_2[W|U, V],$$
$$\Delta_3[U, V] = \Delta_3[U|V] + \Delta_3[V|U].$$

Die linke Seite von (a) kann als die für die Form:

$$\varphi = \frac{c_4 dx_1^4 - 4c_3 dx_1^3 dx_2 + 6c_2 dx_1^2 dx_2^2 - 4c_1 dx_1 dx_2^3 + c_0 dx_2^4}{c_0 c_4 - 4c_1 c_3 + 3c_2^2}$$

berechnete Invariante $\Delta_4[U]$ angesehen werden; bringt man φ auf die Form:

$$\varphi = \frac{dx^4 + 6m\,dx^2 dy^2 + dy^4}{1 + 3m^2},$$

was sich immer durch eine lineare Transformation ausführen lässt, so geht (a) in:

$$\text{(b)} \qquad \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 6m \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0$$

über. Wir werden voraussetzen, dass φ eine positive Form ist dass also $3m + 1 > 0$. Ist $\psi(x, y) = 0$ die Begrenzung eines zusammenhängenden Bereiches C, und setzt man:

$$\nabla_2[U, U] = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)^2 + 6m \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)^2,$$

$$\nabla_2[U|\psi, U] = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + 3m\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial \psi}{dy},$$

bezeichnet man ferner durch U ein innerhalb C reguläres Integral von (b), d. h. eine Function, welche (b) erfüllt und nebst ihren Ableitungen bis auf die vierte Ordnung eindeutig, endlich und stetig ist, so ist U vollständig bestimmt, wenn die Werte

von U und $\nabla_2[U|\psi, U]$, nur bis auf eine bilineare Function bestimmt, wenn die Werte von $\nabla_2[U|\psi, U]$ und $\Delta_3[U|\psi]$ auf der Begrenzung gegeben sind. Jedes reguläre Integral der Gleichung (b) kann aus einem speciellen Integrale derselben abgeleitet werden vermittelst der Formel:

$$\iint (U\Delta_4[V] - V\Delta_4[U])d\sigma$$
$$= -\int \{U\Delta_3[V|\psi] - V\Delta_3[U|\psi] + \Delta_2[V|U, \psi] - \Delta_2[U|V, \psi]\} \frac{ds}{\sqrt[4]{\Delta_1[\psi]}},$$

wo das erste Integral über den ganzen Bereich C, das zweite über die Begrenzung desselben erstreckt ist, und $ds = \sqrt[4]{\varphi}$, $d\sigma = \frac{1}{\sqrt[4]{1+3m^2}} dx\,dy$; man erhält nämlich, wenn $U(\alpha, \beta)$ den Wert des gesuchten Integrales im inneren Punkte (α, β), $Z(x, y)$ das bekannte specielle Integral bezeichnet:

$$U(\alpha, \beta) = \frac{1}{h(m).H(m)} \int \{U\Delta_3[Z|\psi] - Z\Delta_3[U|\psi] + \Delta_2[Z|U, \psi]$$
$$- \Delta_2[U|Z, \psi]\} \frac{ds}{\sqrt[4]{\Delta_1[\psi]}},$$

wo Z statt $Z(x-\alpha, y-\beta)$ der Kürze halber gesetzt wurde, und $h(m)$, $H(m)$ zwei von m abhängige Constanten sind. Was das specielle Integral $Z(x, y)$ betrifft, so findet man:

für $|m| < \frac{1}{3}$:

$$Z(x, y) = \left(x^2 - \frac{2}{k}xy + y^2\right) \lg \sqrt{x^2 - 2kxy + y^2}$$
$$+ \left(x^2 + \frac{2}{k}xy + y^2\right) \lg \sqrt{x^2 + 2kxy + y^2}$$
$$+ \frac{\sqrt{1-k^2}}{k}(x^2 - y^2) \operatorname{arctang}\left(\frac{k}{\sqrt{1-k^2}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right),$$

wo $k = \sqrt{\frac{1-3m}{2}}$;

für $m > \frac{1}{3}$:

$$Z(x,y) = -\frac{1}{2}\frac{p^2}{p^4-1}(x^2-p^2y^2)\lg\sqrt{x^2+p^2y^2}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{p^4}{p^4-1}\left(x^2-\frac{y^2}{p^2}\right)\lg\sqrt{x^2+\frac{y^2}{p^2}}+\frac{p^3xy}{p^4-1}\operatorname{arctang}\left(\frac{(p^2-1)xy}{p(x^2+y^2)}\right),$$

wo $p = \sqrt{3m-\sqrt{9m^2-1}}$.

Auf die Entwickelung von $Z(x,y)$ in eine unendliche Reihe können wir hier nicht eingehen. Vi.

V. Volterra. Sulle equazioni differenziali che provengono da questioni di calcolo delle variazioni. Rom. Acc. L. Rend. (4) VI_1. 43-54.

Es bezeichne F eine Function der unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \dots, x_n$, der Functionen derselben $y_1, y_2, \dots, y_p$ und der Ableitungen dieser Functionen, und es mögen zwischen $y_1, y_2, \dots, y_p$ und ihren Ableitungen die Relationen bestehen:

$$F_1 = 0,\ F_2 = 0,\ \dots,\ F_r = 0.$$

Betrachten wir die Ableitungen von $y_1, y_2, \dots, y_p$ (bis auf die höchsten) als selbständige Functionen, setzen wir nämlich:

$$\frac{\partial^{k_1+k_2+\cdots+k_n}y_i}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\dots\partial x_n^{k_n}} = z_h$$

für

$$0 \leqq k_1 \leqq h_1,\ 0 \leqq k_2 \leqq h_2, \dots,\ 0 \leqq k_n \leqq h_n,$$
$$k_1+k_2+\cdots+k_n < h_1+h_2+\cdots+h_n,$$

wo $\dfrac{\partial^{h_1+h_2+\cdots+h_n}y_i}{\partial x_1^{h_1}\partial x_2^{h_2}\dots\partial x_n^{h_n}}$ die höchste in $F, F_1, F_2, \dots, F_r$ vorkommende Ableitung von y_i ist, so verwandeln sich $F, F_1, F_2, \dots, F_r$ in Functionen von $z_1, z_2, \dots$ und deren ersten Ableitungen, während zwischen diesen Grössen, ihrer Definition gemäss, noch andere

Relationen:

$$F_{r+1} = 0,\ F_{r+2} = 0,\ \ldots,\ F_s = 0$$

bestehen. Bezeichnen wir durch $z_h^{(i)}$ den Differentialquotienten $\frac{\partial z_i}{\partial x_h}$ und setzen voraus, die Function:

$$\Phi = F + \sum_{h=1}^{s} \lambda_h F_h$$

enthalte nur die Differentialquotienten $z_{i_1}^{(i)}, z_{i_2}^{(i)}, \ldots, z_{i_t}^{(i)}$, und das Gleichungssystem:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z_{i_1}^{(i)}} = p_{i_1}^{(i)},\ \frac{\partial \Phi}{\partial z_{i_2}^{(i)}} = p_{i_2}^{(i)},\ \frac{\partial \Phi}{\partial z_{i_t}^{(i)}} = p_{i_t}^{(i)},\ F_1 = 0,\ F_2 = 0,\ \ldots,\ F_s = 0$$

sei nach $z_{i_1}^{(i)}, z_{i_2}^{(i)}, \ldots, z_{i_t}^{(i)}, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ auflösbar. Setzt man die für diese Grössen gefundenen Ausdrücke in die Function:

$$H = \Phi - \sum_{i=1}^{m} \left[z_{i_1}^{(i)} p_{i_1}^{(i)} + z_{i_2}^{(i)} p_{i_2}^{(i)} + \cdots + z_{i_t}^{(i)} p_{i_t}^{(i)} \right]$$

ein, so werden die durch das Gleichungssystem:

$$(\mathrm{a}) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial p_{i_1}^{(i)}}{\partial x_{i_1}} + \frac{\partial p_{i_2}^{(i)}}{\partial x_{i_2}} + \cdots + \frac{\partial p_{i_t}^{(i)}}{\partial x_{i_t}} = \frac{\partial H}{\partial z_i}, \\ & \frac{\partial z_i}{\partial x_{i_1}} = -\frac{\partial H}{\partial p_{i_1}^{(i)}},\ \frac{\partial z_i}{\partial x_{i_2}} = -\frac{\partial H}{\partial p_{i_2}^{(i)}},\ \ldots,\ \frac{\partial z_i}{\partial x_{i_t}} = -\frac{\partial H}{\partial p_{i_t}^{(i)}} \end{aligned} \right.$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m)$$

bestimmten Functionen z die Gleichung:

$$\delta \int F dx_1 dx_2 \ldots dx_n = 0$$

befriedigen. Dieses wichtige Resultat giebt zu manchen Folgerungen Veranlassung, von welchen nur eine hier hervorgehoben werden möge. Ist S_{n-1} die Begrenzung eines n-dimensionalen Raumes S_n, ν die innere Normale zu S_{n-1}, und bezeichnen z_i, $p_{i_l}^{(i)}$ und u_i, $q_{i_l}^{(i)}$ zwei Integralsysteme der Gleichungen (a), so gilt die Relation:

$$\int\limits_{S_{n-1}} \sum_{i=1}^{m} z_i \left(q_{i_1}^{(i)} \cos \nu x_{i_1} + q_{i_2}^{(i)} \cos \nu x_{i_2} + \cdots + q_{i_t}^{(i)} \cos \nu x_{i_t} \right) dS_{n-1}$$

$$- \int\limits_{S_{n-1}} \sum_{i=1}^{m} u_i \left(p_{i_1}^{(i)} \cos \nu x_{i_1} + p_{i_2}^{(i)} \cos \nu x_{i_2} + \cdots + p_{i_t}^{(i)} \cos \nu x_{i_t} \right) dS_{n-1}$$

$$= \int\limits_{S_n} \sum_{i=1}^{m} \left[u_i \frac{\partial H}{\partial z_i} + q_{i_1}^{(i)} \frac{\partial H}{\partial p_{i_1}^{(i)}} + q_{i_2}^{(i)} \frac{\partial H}{\partial p_{i_2}^{(i)}} + \cdots + q_{i_t}^{(i)} \frac{\partial H}{\partial p_{i_t}^{(i)}} \right] dS_n$$

$$- \int\limits_{S_n} \sum_{i=1}^{m} \left[z_i \frac{\partial H}{\partial u_i} + p_{i_1}^{(i)} \frac{\partial H}{\partial q_{i_1}^{(i)}} + p_{i_2}^{(i)} \frac{\partial H}{\partial q_{i_2}^{(i)}} + \cdots + p_{i_t}^{(i)} \frac{\partial H}{\partial q_{i_t}^{(i)}} \right] dS_n.$$

Vi.

S. Lie. Neuer Beweis des zweiten Fundamentalsatzes in der Theorie der Transformationsgruppen. Leipz. Ber. XLII. 453-477.

Als zweiten Fundamentalsatz seiner Gruppentheorie bezeichnet Herr Lie den Satz, dass r unabhängige infinitesimale Transformationen:

$$X_k f = \sum_{1}^{n} {}_\nu \xi_{k\nu}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \quad (k = 1, \ldots, r)$$

in n Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ stets dann, aber auch nur dann, eine r-gliedrige Gruppe erzeugen, wenn sie in Beziehungen von der Form:

$$(1) \qquad (X_i X_k) = \sum_{1}^{r} {}_s c_{iks} X_s f \quad (i, k = 1, \ldots, r)$$

stehen, wobei die c_{iks} Constanten bedeuten. Er giebt hier für diesen Satz einen neuen Beweis, der sich durch besondere Einfachheit der zu Grunde liegenden Gedanken auszeichnet. Die Hauptgedanken dieses Beweises sind folgende:

Sind $X_1 f, \ldots, X_r f$ irgend welche unabhängige infinitesimale Transformationen, so erzeugt die infinitesimale Transformation:

$$Xf = e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$$

mit den r willkürlichen Parametern $e_1, \ldots, e_r$ eine Schar von

∞^r endlichen Transformationen:

$$(2)\quad \begin{cases} y_\nu = x_\nu + \frac{1}{1!} Xx_\nu + \frac{1}{2!} XXx_\nu + \cdots \\ \quad = f_\nu(x_1, \ldots, x_n;\, e_1, \ldots, e_r) \\ \qquad (\nu = 1, \ldots, n), \end{cases}$$

die paarweise zu einander invers sind. Bei diesen ∞^r Transformationen nimmt jede Figur des Raumes $x_1, \ldots, x_n$ höchstens ∞^r verschiedene Lagen an. Betrachtet man insbesondere solche Figuren, die Herr Lie m-Ecke nennt, und die aus je m Punkten von allgemeiner gegenseitiger Lage bestehen, so erkennt man sofort, dass jedes m-Eck bei den ∞^r Transformationen (2) höchstens ∞^r und, wenn $m \leqq r$, mindestens ∞^m verschiedene Lagen annimmt. Demnach nimmt für $m \geqq r$ jedes m-Eck bei den Transformationen (2) gerade ∞^r verschiedene Lagen an.

Sollen nun die ∞^r Transformationen (2) eine r-gliedrige Gruppe bilden, so ist notwendig und hinreichend, dass die Schar der Transformationen

$$(3)\qquad y'_\nu = f_\nu(f_1(x, e), \cdots, f_n(x, e);\, h_1, \ldots, h_r)$$

mit den $2r$ Parametern e_k und h_k nur aus ∞^r verschiedenen Transformationen besteht; denn die Schar (3) umfasst die Schar (2) (für $h_k = 0$) und fällt daher dann, und nur dann, mit (2) zusammen, wenn sie bloss ∞^r Transformationen enthält. Demnach bildet die Schar (2) dann, und nur dann, eine Gruppe, wenn jedes $(r+1)$-Eck auch bei zweimaliger Ausführung der ∞^r Transformationen (2) nur ∞^r verschiedene Lagen annimmt, wenn also der Inbegriff der ∞^r Lagen, die ein $(r+1)$-Eck bei den Transformationen (2) annimmt, seinerseits stets diesen Transformationen gegenüber invariant bleibt, oder wenn die $\infty^{n(r+1)}$ $(r+1)$-Ecke des Raumes $x_1, \ldots, x_n$ von den Transformationen (2) in $\infty^{n(r+1)-r}$ invariante Scharen von je ∞^r $(r+1)$-Ecken zerlegt werden.

Sind $x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, r+1)$ die Ecken eines beliebigen $(r+1)$-Ecks und setzt man:

$$\sum_1^n{}_\nu\, \xi_{k\nu}(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}) \frac{\partial f}{\partial x_\nu^{(j)}} = X_k^{(j)} f,$$

so kommt die eben gefundene Bedingung darauf hinaus, dass

die r Gleichungen:

$$(4) \qquad U_k f = \sum_1^{r+1} {}_j X_k^{(j)} f = 0 \quad (k = 1, \ldots, r)$$

in den $n(r+1)$ Veränderlichen $x_\nu^{(j)}$ gerade $n(r+1) - r$ unabhängige Lösungen gemein haben müssen. Da nun die Gleichungen (4) sicher von einander unabhängig sind, so tritt dieser Fall dann, und nur dann, ein, wenn sie ein r-gliedriges vollständiges System bilden, wenn also Relationen von der Form:

$$(U_i U_k) = \sum_1^r {}_s \varphi_{iks}(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(r+1)}) U_s f \quad (i, k = 1, \ldots, r)$$

bestehen. Diese aber zerlegen sich in die Gleichungen:

$$(X_i^{(j)} X_k^{(j)}) = \sum_1^r {}_s \varphi_{iks} X_s^{(j)} f$$

$$(i, k = 1, \ldots, r; \quad j = 1, \ldots, r+1),$$

aus denen nach einem alten Satze von Lie folgt, dass die φ_{iks} blosse Constanten sind.

Damit ist bewiesen, dass das Bestehen von Gleichungen von der Form (1) notwendig und hinreichend ist, wenn die ∞^r Transformationen (2) eine r-gliedrige Gruppe bilden sollen.

El.

S. Lie. Bestimmung aller r-gliedrigen transitiven Transformationsgruppen durch ausführbare Operationen. Leipz. Ber. XLII. 478-490.

Herr Lie hat früher bewiesen, dass r^3 Constanten c_{iks} stets dann, aber auch nur dann, die Zusammensetzung einer r-gliedrigen Gruppe bestimmen, wenn sie seine bekannten Relationen:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{c} c_{iks} + c_{kis} = 0, \\ \sum_1^r \{ c_{ik\nu} c_{\nu js} + c_{kj\nu} c_{\nu is} + c_{ji\nu} c_{\nu ks} \} = 0 \\ (i, k, j, s = 1, \ldots, r) \end{array} \right.$$

erfüllen. Indem er sich auf diesen Satz stützt, beweist er hier, dass alle r-gliedrigen transitiven Grnppen von gegebener Zusammensetzung durch ausführbare Operationen gefunden werden können.

Zunächst setzt Herr Lie auseinander, dass gewisse von ihm

schon 1878 angewandte Betrachtungen ohne weiteres zwei zu einander reciproke, einfach transitive Gruppen von der Zusammensetzung c_{iks} aufzustellen erlauben; die infinitesimalen Transformationen dieser Gruppen, der sogenannten kanonischen Parametergruppen, findet man durch Integration eines Systems von linearen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten; sie werden rationale Functionen von gewissen Ausdrücken $\nu_1, \nu_2, \ldots$ und von den Exponentialgrössen e^{ν_1}, $e^{\nu_2}, \ldots$, die ν_k sind dabei algebraische Functionen von r Veränderlichen, und zwar die Wurzeln einer gewissen algebraischen Gleichung mit rationalen Coefficienten.

Nunmehr lassen sich nach früheren Lie'schen Sätzen die endlichen Gleichungen der beiden kanonischen Parametergruppen durch Quadraturen finden und, wenn dies geschehen ist, ohne Quadraturen die endlichen Gleichungen jeder transitiven Gruppe von der gegebenen Zusammensetzung c_{iks}.

Die Bestimmung der endlichen Gleichungen aller transitiven Gruppen von gegebener Zusammensetzung erfordert demnach ausser der Auflösung einer algebraischen Gleichung höchstens noch Quadraturen. Verbindet andererseits Herr Lie seine Ergebnisse mit einer von Herrn Schur gemachten Bemerkung, so zeigt sich, dass die Bestimmung der infinitesimalen Transformationen aller dieser Gruppen nicht einmal Quadraturen verlangt, sondern nur die Auflösung einer algebraischen Gleichung.

El.

F. Schur. Beweis für die Darstellbarkeit der infinitesimalen Transformationen aller transitiven endlichen Gruppen durch Quotienten beständig convergenter Potenzreihen. Leipz. Ber. XLII. 1-7.

Der Beweis beruht auf der früher (Math. Ann. XXXV. 161-197) gegebenen analytischen Darstellung der Componenten der infinitesimalen Transformationen der Parametergruppen oder der einfach transitiven Gruppen. Alsdann wird bewiesen, dass die Componenten der infinitesimalen Transformationen der tran-

sitiven Gruppen überhaupt rational durch die der zugehörigen Parametergruppe ausgedrückt werden können, wodurch auch für diese der Beweis erbracht ist. Sh.

W. Killing. Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen. (Vierter Teil. Schluss.) Math. Ann. XXXVI. 161-189.

Diese vierte Abhandlung (über die dritte s. F. d. M. XXI. 1889. 376ff.) enthält eine grosse Anzahl von Sätzen, die sich auf die Hauptuntergruppen r-gliedriger Gruppen beziehen.

Der an die Spitze von § 27 gestellte Satz (s. S. 166) ist schon früher von Lie gegeben (Theorie der Trfsgr. I, S. 262. 1888). Die übrigen Sätze des § 27 sind fast alle einfache Folgerungen aus diesem Satze; wirklich neu ist nur der Satz auf S. 168: „Jede Gruppe, die ihre eigene Hauptuntergruppe ist, mit Ausnahme der einfachen und der halbeinfachen Gruppen, besitzt eine invariante Untergruppe, deren Transformationen mit einander vertauschbar sind.“ (Halbeinfach nennt Herr Killing jede Gruppe, die in mehrere paarweise vertauschbare einfache Gruppen zerfällt.)

In § 28 erschliesst Herr Killing zunächst aus seinen früheren Entwickelungen den Satz: „Jede Gruppe, die ihre eigene Hauptuntergruppe ist, enthält Kegelschnittsgruppen.“ (Als Kegelschnittsgruppe wird jede dreigliedrige Gruppe bezeichnet, die mit der allgemeinen projectiven Gruppe auf der Geraden gleich zusammengesetzt ist). Dieser Satz fällt mit einem früher vom Ref. aufgestellten Satze zusammen; da aber der damals gegebene Beweis eine Lücke enthält, so gebührt Herrn Killing das Verdienst, den ersten strengen Beweis des Satzes geliefert zu haben. Die übrigen Sätze des § 28 ergeben sich unmittelbar, wenn man den eben angeführten Satz mit gewissen schon früher von Lie angestellten Betrachtungen (Th. d. Trfsgr. I, S. 265-270) verbindet.

Im § 29 wird die Frage erörtert, wie eine Gruppe beschaffen sein muss, um Hauptuntergruppe einer andern sein zu können.

Herr Killing gelangt hier zu dem bemerkenswerten Satze (S. 180): „Wenn die Hauptuntergruppe einer gegebenen Gruppe keine Kegelschnittsgruppe enthält, so muss sie vom Range Null sein".

In § 30 endlich wird das Problem erledigt, die Zusammensetzung aller Gruppen zu finden, deren Hauptuntergruppe eine gegebene Gruppe ist, die ihrerseits mit ihrer Hauptuntergruppe zusammenfällt. Erwähnt sei hier der Satz auf S. 184f.: „Wenn eine r-gliedrige Gruppe eine p-gliedrige Hauptuntergruppe besitzt, die einfach oder halbeinfach ist, so enthält sie $r-p$ unabhängige ausgezeichnete infinitesimale Transformationen". Ausserdem behandelt Herr Killing noch den Fall, dass die Hauptuntergruppe einer gegebenen Gruppe nicht ihre eigene Hauptuntergruppe ist, und gelangt hier zu dem wichtigen Satze (S. 187): „Die Hauptuntergruppe einer beliebigen Gruppe besteht stets aus einer einfachen oder halbeinfachen Gruppe und einer invarianten Untergruppe vom Range Null." Dabei ist zu beachten, dass entweder die einfache (halbeinfache) Gruppe oder die invariante Untergruppe vom Range Null oder auch die ganze Hauptuntergruppe auf die identische Transformation zusammenschrumpfen kann. Zum Schluss wollen wir noch auf den wichtigen Satz auf S. 189 aufmerksam machen. El.

- - -

W. Killing. Bestimmung der grössten Untergruppen von endlichen Transformationsgruppen. Math. Ann. XXXVI. 239-254.

Diese Abhandlung zeigt, dass die allgemeinen Untersuchungen des Verfassers über die Zusammensetzung der Gruppen unmittelbar zur Lösung der in der Ueberschrift bezeichneten Aufgabe führen. In erster Linie bestimmt Herr Killing die grössten Untergruppen der einfachen Gruppen. Indem er die von ihm selbst aufgestellten Typen von Zusammensetzungen derartiger Gruppen der Reihe nach behandelt, gelangt er unter anderem zu dem früher von Lie bewiesenen Satze über die grössten Untergruppen der allgemeinen projectiven Gruppe und zu den

Werner'schen Sätzen über die projective Gruppe einer Mannigfaltigkeit zweiten Grades im n-fach ausgedehnten Raume (vgl. F. d. M. XXI. 1889. 375 f.); ausserdem bestimmt er aber auch (so können wir es ausdrücken) die grössten Untergruppen der projectiven Gruppe des linearen Complexes im $(2n+1)$-fach ausgedehnten Raume, eine Aufgabe, die bisher noch nicht gelöst war.

Auch für die nicht einfachen Gruppen giebt Herr Killing die nötigen Regeln, um ihre grössten Untergruppen zu bestimmen. Endlich sei noch erwähnt, dass, wie Herr Killing selbst betont, seine Betrachtungen überhaupt zur Bestimmung aller Untergruppen einer Gruppe von gegebener Zusammensetzung geeignet sind. El.

A. Schwarz. Zur Theorie der reellen linearen Transformationen und der Lobatschewski'schen Geometrie. Wien. Ber. XCIX. 153-190.

Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ reelle Zahlen und ist $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, so bestimmt die Gleichung:

$$(1) \qquad x' + iy' = \frac{\alpha(x+iy)+\beta}{\gamma(x+iy)+\delta}$$

bekanntlich eine Gruppe von ∞^3 reellen Transformationen der Ebene x, y. Fasst man jede Transformation dieser Gruppe als eine Bewegung der Ebene auf, so erhält man eine Gruppe von nichteuklidischen Bewegungen, die dem Falle der Lobatschewski'schen Geometrie entspricht; die durch (1) definirte reelle Gruppe kann nämlich, wie nebenbei erwähnt werden mag, durch eine reelle Transformation in die projective Gruppe eines reellen Kegelschnitts übergeführt werden.

Herr Schwarz untersucht in seiner Abhandlung die Geometrie, die in der Ebene x, y durch die besprochenen Bewegungen definirt wird; er berechnet die Bogenlänge und den Flächeninhalt gewisser Curven, sucht die kürzesten Linien auf, bestimmt die Curven, die in der bewussten Geometrie als Kreise zu bezeichnen sind, und löst noch eine Anzahl anderer Aufgaben der euklidischen Geometrie für die von ihm zu Grunde gelegte nichteuklidische Geometrie. El.

G. Scheffers. Bestimmung einer Klasse von Berührungstransformationsgruppen des dreifach ausgedehnten Raumes. Acta Math. XIV. 111-178. Auch Sep.-Abdr. Diss. Leipzig. 70 S. 4°.

Nach Lie heisst eine Gruppe von Berührungstransformationen des gewöhnlichen Raumes reducibel, wenn sie sich durch eine Berührungstransformation dieses Raumes in eine Gruppe von Punkttransformationen überführen lässt; im entgegengesetzten Falle heisst sie irreducibel. Da nun Lie schon längst alle Gruppen von Punkttransformationen des R_3 bestimmt hatte, so war es, um alle Gruppen von Berührungstransformationen dieses Raumes zu kennen, nur noch nötig, die irreducibeln unter ihnen zu bestimmen. Einen Teil dieser Aufgabe hat Lie selbst schon früher erledigt, einen andern Teil hat Herr Scheffers auf Lie's Veranlassung und unter seiner Anleitung durchgeführt. Herr Scheffers bestimmt nämlich in der vorliegenden Arbeit alle irreducibeln Berührungstransformationsgruppen des Raumes x, y, z, bei denen eine Schar von ∞^1 partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$(1) \qquad \Phi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = \text{const.}$$

invariant bleibt.

Die von Lie herrührende Methode, die Herr Scheffers dabei benutzt, ist folgende: Zunächst denkt man sich die Gleichung (1) durch eine Berührungstransformation auf die Form:

$$(1') \qquad y = \text{const.}$$

gebracht, was nach einem Lie'schen Satze immer möglich ist. Jede der gesuchten Berührungstransformationsgruppen erhält dabei eine neue Form G, bei der y für sich transformirt wird, und zwar, wieder nach einem Satze von Lie, höchstens dreigliedrig. Nun enthält G eine invariante Untergruppe g, bei der y gar nicht transformirt wird, und es lässt sich zeigen, dass g stets irreducibel ist, wenn G es ist. Andererseits kennt man durch Lie's Untersuchungen alle irreducibeln Berührungstransformationsgruppen der Ebene, und daraus kann man durch ge-

wisse von Lie häufig angewandte Betrachtungen die verschiedenen möglichen Formen von g betimmen und auf Normalformen zurückführen. Hat man diese Aufgabe gelöst, so muss man noch zu jeder der gefundenen Gruppen g die zugehörigen Gruppen G bestimmen, bei denen die Veränderliche y ein-, zwei- oder dreigliedrig transformirt wird.

Es erübrigt noch zu bemerken, dass Herr Scheffers im ganzen zwölf verschiedene Normalformen für die gesuchten Gruppen findet, das heisst, jede Gruppe von der verlangten Beschaffenheit ist durch eine Berührungstransformation des Raumes x, y, z mit einer dieser zwölf Normalformen ähnlich. El.

Capitel 7.
Variationsrechnung.

M. E. Waschtschenko - Zakhartschenko. Variationsrechnung. Kiew 1889. (Russisch.)

Das Buch enthält folgende Capitel:

I. Die Definition der Variation.
II. Entwickelung der Variationen der bestimmten Integrale.
III. Die grössten und kleinsten Werte der bestimmten Integrale.
IV. Geometrische Beispiele.
V. Beispiele aus der Geometrie des Raumes.
VI. Isoperimetrische Aufgaben.
VII. Isoperimetrische Aufgaben (Fortsetzung).
VIII. Die Kriterien der Maxima und Minima. Wi.

E. T. Sabinine. Ueber die Transformationen in der Variation des bestimmten Integrals. Mosk. Math. Samml. XV. 99-117. (Russisch.)

Es wird gezeigt, dass die Methode des willkürlichen Factors, welche von Clebsch im § 4 seiner Abhandlung: „Ueber die Reduction der zweiten Variation auf ihre einfachste Form“ für die Transformation des einfachen Integrals gegeben wurde, auch auf das Doppelintegral anwendbar ist. Wi.

W. P. Ermakoff. Die Ausdehnung der Aufgaben der Variationsrechnung auf die Differentialgleichungen. Kiew. Univ. Nachr. 1889. (Russisch.)

Die Aufgabe der Variationsrechnung wird in folgender Weise erweitert: „Es ist ein System von Gleichungen $F_1=0$, $F_2=0$, ... gegeben, welche die unabhängige Veränderliche x, die gesuchten Functionen $y, y_1, y_2, \dots$ und ihre Ableitungen bis zu einer beliebigen Ordnung enthalten. Diese Functionen sollen so bestimmt werden, dass irgend eine von ihnen für einen Wert der unabhängigen Veränderlichen einen bestimmten Wert, für einen anderen den grössten oder kleinsten Wert annimmt.“ Die Aufgabe von der Brachistochrone wird als ein specieller Fall dieser allgemeinen Aufgabe betrachtet und gelöst. Wi.

G. von Escherich. Zur Theorie der zweiten Variation. (Fortsetzung.) Wien. Ber. XCIX. 1463-1501.

Fortsetzung der Abhandlung aus Wien. Ber. XCVII Abth. IIa. 1416-1441 (vergl. F. d. M. XXI. 1889. 379). Die schon in dieser Arbeit behandelte Differentialgleichung $\varphi(z)=0$ wird hier wieder den Betrachtungen zu Grunde gelegt. Es giebt unendlich viele Systeme von n linear unabhängigen particulären Integralen von $\varphi(z)=0$, in denen jedes Paar von Integralen, für y und z in $\varphi(y, z)$ (F. d. M. XXI. 1889. 380) gesetzt, diesen Ausdruck gleich Null macht. Nennt man solche Integrale ein System conjugirter Integrale, so giebt es zu jedem Punkte x der Strecke a, b ein conjugirtes System. Die genauere Untersuchung besonders der Determinanteneigenschaften dieser conjugirten Integrale führt dann zu folgendem Schlussresultat: Erteilt man in dem Integrale

$$\int_a^b f(x, y', \ldots, y^{(n)})\,dx,$$

wo $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ an den Grenzen a und b feste Werte annehmen sollen, diesen Grössen Variationen $\eta, \eta', \ldots, \eta^{(n-1)}$, die an den Grenzen und innerhalb überall stetig sind, während $\eta^{(n)}, \ldots, \eta^{(2n-1)}$ daselbst eine discrete Mannigfaltigkeit von Unstetigkeitspunkten besitzen dürfen, so sind die sämtlichen zugehörigen zweiten Variationen des Integrals dann, und nur dann, von Null verschieden und gleichbezeichnet, wenn die Determinante des einer Grenze conjugirten Integralsystems weder an der anderen Grenze noch innerhalb beider Grenzen verschwindet. Wird diese Determinante innerhalb der Grenzen Null, so bestehen Variationen mit entgegengesetztem Vorzeichen; ist sie nicht innerhalb der Grenzen, aber an der oberen Grenze Null, so sind alle Variationen gleichbezeichnet, aber nicht mehr alle von Null verschieden. Sh.

G. Kobb. Om maxima och minima af dubbelintegraler. Stockholm Öfv. 385-399.

Der Verf. sucht eine Theorie für die Maxima und Minima der Doppelintegrale aufzustellen, welche der Weierstrass'schen Theorie für einfache Integrale entspricht. In voller Allgemeinheit hat er später seine Untersuchung in den Acta Mathematica dargestellt. Hier wird nur ein besonderer Fall behandelt.

Bdn.

V. Volterra. Sopra una estensione della teoria Jacobi-Hamilton del calcolo delle variazioni. Rom. Acc. L. Rend. (4) VI_1. 127-138.

Es sei $I = \iint U du dv$, wo U eine Function der unabhängigen Variabeln u, v, der Functionen derselben $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und der Functionaldeterminanten $\dfrac{d(x_i, x_h)}{d(u, v)}$ oder ξ_{ih} ist. Setzt man:

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_{ih}} = p_{ih}, \quad -U + \sum_{i,h} p_{ih}\xi_{ih} = H(p_{12}, p_{13}, p_{23}, \ldots, x_1, x_2, x_3, \ldots, u, v),$$

so erhält man aus $\delta I = 0$ das Gleichungssystem:

$$\text{(a)} \qquad \frac{\partial H}{\partial p_{ih}} = \frac{d(x_i, x_h)}{d(u, v)}, \quad \frac{\partial H}{\partial x_i} = -\sum_{h=1}^{n} \frac{d(p_{ih}, x_h)}{d(u, v)},$$

und I nimmt folgende Gestalt an:

$$I = \iint \Big(\sum_{i,h} \frac{\partial H}{\partial p_{ih}} p_{ih} - H \Big) du\, dv.$$

Setzen wir voraus, um die Betrachtungen des Verfassers zu vereinfachen, die Begrenzung des Integrationsbereiches bestehe aus einer einzigen Linie $\mathfrak{L}$, deren Gleichungen $u = f(t)$, $v = \varphi(t)$ sein mögen; nehmen wir ferner an, die Integrale $x_1, x_2, \dots, x_n$ von (a) seien vollkommen bestimmt, wenn ihre Werte auf $\mathfrak{L}$ bekannt sind, und bezeichnen diese Werte für $n = 3$ durch:

$$\text{(b)} \qquad x_1 = \psi(t), \quad x_2 = \chi(t), \quad x_3 = \theta(t).$$

Dann ist I eine Function der fünf Functionen $f, \varphi, \psi, \chi, \theta$, oder auch eine Function der in einem fünfdimensionalen Raume $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ liegenden Linien $\varDelta$, deren Gleichungen:

$$y_1 = f(t),\ y_2 = \varphi(t),\ y_3 = \psi(t),\ y_4 = \chi(t),\ y_5 = \theta(t)$$

sind (über Linienfunctionen siehe die früheren Arbeiten des Verfassers). Man kann nämlich schreiben: $I = W|[\varDelta]|$. Bezeichnet man aber durch L die im dreidimensionalen Raume (x_1, x_2, x_3) liegende Linie, deren Gleichungen die (b) sind, so beweist man, dass $I = W|[L, \mathfrak{L}]|$, dass man nämlich jede der Linien L, $\mathfrak{L}$ unabhängig von der anderen längs sich selbst verschieben kann, ohne dass der Wert von I verändert werde. Die Linienfunction W erfüllt die Gleichung:

$$\frac{\partial W}{\partial(u, v)} + H\Big(\frac{\partial W}{\partial(x_1, x_2)}, \frac{\partial W}{\partial(x_1, x_3)}, \frac{\partial W}{\partial(x_2, x_3)}, x_1, x_2, x_3, u, v\Big) = 0;$$

sie ist im allgemeinen nicht „vom ersten Grade" (siehe F. d. M. XXI. 1889. 402), es gilt aber der Satz:

Sind die Integrale der Gleichungen (a) bekannt, so kann man eine Function W vom ersten Grade der Linien L des Raumes (x_1, x_2, x_3) derart bestimmen, dass:

$$H\Big(\frac{\partial W}{\partial(x_1, x_2)}, \frac{\partial W}{\partial(x_1, x_3)}, \frac{\partial W}{\partial(x_2, x_3)}, x_1, x_2, x_3\Big) + h = 0,$$

wo h eine Constante bezeichnet. Ist umgekehrt eine solche Func-

tion vorhanden, und sind die Gleichungen:

$$(c) \qquad \frac{\partial H}{\partial p_{ih}} = \frac{d(x_i, x_h)}{d(u, v)},$$

nach Ersetzung von p_{ih} durch $\frac{\partial W}{\partial(x_i, x_h)}$, unter einander verträglich, so finden auch die Gleichungen:

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\sum_{h=1}^{n} \frac{d(p_{ih}, x_h)}{d(u, v)}$$

statt.

Es ergiebt sich ferner: Sind:

$$(d) \qquad x_1 = x_1(u, v), \quad x_2 = x_2(u, v), \quad x_3 = x_3(u, v)$$

die Integrale der Gleichung (c) und enthält W eine Constante a, so ist:

$$\frac{\partial W}{\partial a} = W' \,|[L]|\, = a', \quad \frac{\partial W}{\partial h} = W'' \,|[L]|\, = \iint_\sigma du\,dv + h',$$

wo a', h' zwei Constanten sind und σ den von irgend einer auf der Fläche (d) liegenden Linie L eingeschlossenen Flächenteil bezeichnet.

Die Arbeit schliesst mit einigen geometrischen Anwendungen dieser letzten Sätze. Vi.

E. T. Sabinine. Ueber die Abhandlung von Sarrus. Mosk. Math. Samml. XIV. 451-470. (Russisch.)

Es wird eine Stelle der Abhandlung von Sarrus „Recherches sur le calcul des variations" (Mém. Sav. Étr. X) kritisirt, nämlich seine Lösung der Aufgabe, eine Fläche zu finden, die bei einer gegebenen Oberfläche das grösste Volumen enthält. Sarrus hat dabei nicht berücksichtigt, dass die gesuchte Fläche auch cylindrische und ebene Teile haben kann. Wi.

L. Barbera. Teoria della integrabilità delle funzioni e dei massimi e minimi degli integrali definiti. Bologna. Tip. Gamberini e Parmeggiani. 213 S. 8°.

Die unter diesem Titel erschienene Schrift ist das Werk eines Dilettanten auf dem Gebiete der Mathematik, welchem nicht das Glück zu Teil geworden ist, die Segnungen zu erfahren, die eine strenge mathematische Schulung zu gewähren

pflegt. Es fehlt dem Verfasser gänzlich dasjenige Mass specieller Kenntnisse, welches für den Schriftsteller unerlässlich ist, der den Anspruch erheben will, auf dem Gebiete der Variationsrechnung als Reformator aufzutreten.

Wenn der Verfasser sich mit den Ergebnissen früherer Forschungen auf diesem Gebiete etwas genauer bekannt gemacht hätte, als er es zu thun für ausreichend gehalten hat, wenn er sich ferner hätte dazu entschliessen können, die von ihm aufgefundenen, auf seine neue „Theorie" sich gründenden und zur Erläuterung derselben bestimmten angeblichen Lösungen einiger specieller Aufgaben hinsichtlich ihrer Richtigkeit einer eingehenden Prüfung zu unterziehen, so würde ihm die vollständige Unhaltbarkeit seiner Methode nicht haben entgehen können.

Als Problema VII behandelt der Verfasser (Seite 210-211) die Aufgabe der Bestimmung eines (von einer vorgeschriebenen Begrenzungslinie begrenzten) Flächenstückes von kleinstem Flächeninhalt. Es handelt sich also darum, (unter Anwendung der bekannten Bezeichnungsweise) das Doppelintegral $\iint \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy$ unter einer vorgeschriebenen Grenzbedingung zu einem Minimum zu machen. Auf Grund seiner „Theorie" gelangt nun der Verfasser nicht zu der wohlbekannten, von Lagrange im Jahre 1761 aufgefundenen partiellen Differentialgleichung der Minimalflächen

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)=0,$$

sondern zu einem Systeme von zwei partiellen Differentialgleichungen

$$r\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)=0, \quad t\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)=0.$$

Nach der ausdrücklich ausgesprochenen Meinung des Verfassers ist die Ebene die einzige Fläche kleinsten Flächeninhalts.

Die angeführte Behauptung charakterisirt für jeden in dieser Frage genügend Unterrichteten den wissenschaftlichen Standpunkt der besprochenen Schrift. Sz.

Siebenter Abschnitt.

Functionentheorie.

Capitel 1.

Allgemeines.

Ch. Cellérier. Note sur les principes fondamentaux de l'analyse. Darboux Bull. (2) XIV. 142-160.

Die vorliegende Note ist älteren Datums; sie wurde in den nachgelassenen Papieren des Verfassers, der Professor in Genf war, aufgefunden. Offenbar ist dieselbe unabhängig von den bekannten Arbeiten von Weierstrass, Schwarz, Dini u. a., welche sich auf dieselben Fragen beziehen, entstanden. Auch heute noch hat der Inhalt der Note ein Interesse durch die Beispiele, welche der Verfasser giebt, und die die gleichmässige Convergenz (convergence commune, wie der Verfasser sie nennt), Differentiirbarkeit, Taylor'sche Entwickelung betreffen. Bemerkenswert ist das Beispiel einer für alle Werte des Argumentes stetigen Function, die nirgends einen Differentialquotienten besitzt. Der Verfasser beweist durch sehr einfache Betrachtungen, dass

$$f(x) = \Sigma \frac{1}{a^n} \sin(a^n x) \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty)$$

eine derartige Function ist, falls a eine genügend gross gewählte ganze Zahl bedeutet. Als Beispiel einer Function, die mit allen ihren Ableitungen stetig ist und dennoch nicht nach dem Taylor'-

schen Satze entwickelt werden kann, giebt der Verfasser die Function

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(g^n x),$$

wo g wiederum eine genügend gross zu wählende ganze Zahl bezeichnet. Hz.

Cecilio Giménez Rueda. Prolegómenos de Arithmética universal.

In diesem Werke beschäftigt sich der Verf. mit der allmählichen Entstehung des Zahlbegriffes von der ganzen Zahl an bis zur complexen, aus drei Einheiten gebildeten Zahl; darauf folgt die allgemeine Theorie der Operationen nach den Vorstellungen von Grassmann und Hankel. Tx. (Lp.)

E. Study. Ueber Systeme complexer Zahlen und ihre Anwendung in der Theorie der Transformationsgruppen. Monatsh. f. Math. I. 283-355.

Die vorliegende Abhandlung enthält eine zusammenfassende und teilweise umgearbeitete Darstellung der Untersuchungen, die der Verfasser in zwei früheren Abhandlungen über die Theorie der complexen Zahlen und deren Zusammenhang mit der Lie'schen Theorie der Transformationsgruppen veröffentlicht hat. Im Bd. XXI. 1889, pag. 385 und 391 dieses Jahrbuches finden sich ausführliche Referate über diese Abhandlungen. Hz.

A. Köbcke. Analytische Darstellung einer differentiirbaren Function mit Oscillationen in jedem Intervalle. Hamb. Mitt. II. 128-153.

Der Verfasser hat in zwei früheren Abhandlungen (vgl. F. d. M. XIX. 1887. 391 und XXI. 1889. 393) nachgewiesen, dass man Functionen bilden kann, die überall differentiirbar sind und dabei in jedem Intervalle Maxima und Minima besitzen. In der vorliegenden Note stellt der Verfasser eine derartige Function

her, die sich in eine unendliche Summe von Sinusreihen entwickeln lässt, wobei die Coefficienten dieser Reihen eine verhältnismässig einfache Berechnung gestatten. Auf die vom Verfasser in der Einleitung der Note aufgeworfene Frage, ob die in Rede stehenden Functionen analytisch darstellbar seien, ist zu bemerken, dass diese Darstellbarkeit unmittelbar aus einem Satze von Weierstrass folgt, nach welchem jede stetige Function durch eine (unendliche) Summe von ganzen rationalen Functionen darstellbar ist (vgl. F. d. M. XVII. 1885. 384). Hz.

M. Lerch. Sur une classe de fonctions à espace lacunaire. Teixeira J. X. 27-28.

Der Verf. zeigt, dass eine beliebige Reihe von der Form

$$\Sigma\varphi([n])x^n \quad (n = 1, 2, \dots, \infty),$$

die im Innern des Kreises $|x| = 1$ convergirt, und wo $[n]$ die Anzahl Ziffern von n bezeichnet, nicht über den Umfang jenes Kreises hinaus fortgesetzt werden kann, wenn der reelle oder der imaginäre Teil der Function $\varphi(\nu)$ unter Beibehaltung seines Zeichens endlos mit ν wächst. Tx. (Lp.)

Gukowsky. Ueber eine Eigenschaft der homogenen Functionen. Odessa Ges. XI. 145-149.

Wenn die Function $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ die Eigenschaft hat, dass bei jedem Werte von λ

$$\frac{f(x_1', x_2', \dots, x_n')}{f(x_1'', x_2'', \dots, x_n'')} = \frac{f(\lambda x_1', \dots, \lambda x_n')}{f(\lambda x_1'', \dots, \lambda x_n'')},$$

wo $x_1', \dots, x_n', x_1'', \dots, x_n''$ die Werte der Veränderlichen darstellen, so ist y eine homogene Function der Veränderlichen $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Wi.

F. G. Teixeira. Extension d'un théorème de Jacobi. Monatsh. f. Math. I. 481-484.

Der Verfasser beweist den Satz: „Wenn die Functionaldeterminante von n Functionen nebst allen ihren Unterdetermi-

nanten bis zur i^{ten} Ordnung hin verschwindet, während eine ihrer Unterdeterminanten $(i+1)^{\text{ter}}$ Ordnung nicht Null ist, so sind $i+1$ der n Functionen als Functionen der übrigen darstellbar.

Hz.

Fr. Meyer. Ueber die höheren Ableitungen eines Quotienten zweier Functionen. Monatsh. f. Math. I. 33-38.

Fr. Meyer. Ueber Teilbarkeitseigenschaften ganzer Functionen höherer Differentialquotienten. Math. Ann. XXXVI. 435-452.

Fr. Meyer. Ueber algebraische Relationen zwischen den Entwickelungscoefficienten höherer Differentiale. Math. Ann. XXXVI. 453-466.

In der ersten Arbeit gelangt der Verfasser mittels eines Recursionsverfahrens zu einem Ausdrucke für die n^{te} Ableitung von $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ nach x. Die gewonnene Formel lautet:

$$\varDelta_n = \frac{1}{n!} f_0^{n+1}\left(\frac{\varphi}{f}\right)^{(n)} = \varphi_0 E_n + \varphi_1 f_0 E_{n-1} + \varphi_2 f_0^2 E_{n-2} + \cdots + \varphi_{n-1} f_0^{n-1} E_1 + \varphi_n f_0^n,$$

wo allgemein

$$\varphi_i = \frac{1}{i!}\varphi^{(i)}(x),\quad f_i = \frac{1}{i!} f^{(i)}(x),\quad \varphi_0 = \varphi(x),\quad f_0 = f(x)$$

und

$$E_k = \frac{1}{k!} f_0^{k+1}\left(\frac{1}{f}\right)^{(k)} = (-1)^k \Sigma (-1)^{\alpha_0} \frac{(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k)!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_k!} f_0^{\alpha_0} f_1^{\alpha_1}\ldots f_k^{\alpha_k}$$

zu setzen ist; dabei durchlaufen die $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ alle ganzzahligen, nicht negativen Werte, welche den Bedingungen

$$\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k = \alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+\cdots+k\alpha_k = k$$

genügen. Setzt man insbesondere $\varphi(x) = f'(x) = f_1$, so ergiebt sich eine speciellere Formel, welche im wesentlichen mit der bekannten Waring'schen Potenzsummenformel, so wie anderer-

seits mit den Newton'schen Potenzsummenrelationen übereinstimmt.

Die zweite Arbeit wendet sich zum genaueren Studium der in der ersteren definirten Functionen Δ_n und E_k. Die Functionen Δ_n sind ganze ganzzahlige Functionen von $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, f, f_1, \ldots, f_n$. Dieselben genügen der folgenden, auf den Modul f^{k-1} bezüglichen Congruenz:

$$\Delta_n + f_1 \Delta_{n-1} + f_2 f \Delta_{n-2} + \cdots + f_{k-1} f^{k-2} \Delta_{n-k+1} \equiv 0, \ (f^{k-1});$$

aus derselben folgen dann die weiteren auf den Modul f bezüglichen Congruenzen

$$\Delta_n \equiv (-1)^s f_1^s \Delta_{n-s}, \ (f) \qquad (s = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

welche ihrerseits zeigen, dass für $s = s_1 + s_2$ der Ausdruck $\Delta_n \Delta_{n-s} - \Delta_{n-s_1} \Delta_{n-s_2}$ notwendig durch f teilbar sein muss; die nähere Untersuchung dieses Ausdruckes zeigt ferner, dass derselbe sogar durch die $(n-s+1)^{\text{te}}$ Potenz von f teilbar ist, und dass die Congruenz

$$\Delta_n \Delta_{n-s} - \Delta_{n-s_1} \Delta_{n-s_2} \equiv (-f_1)^{s-2} (\Delta_{n-s+2} \Delta_{n-s} - \Delta_{n-s+1}^2), \ (f^{n-s+2})$$

besteht. Indem man noch beliebige quadratische Functionen der Grössen Δ in Betracht zieht, deren Coefficienten ganze ganzzahlige Functionen von $\varphi_0, \ldots, \varphi_n, f, f_1, \ldots, f_n$ sind, ergiebt sich der allgemeinere Satz, dass eine solche quadratische Function nur dann durch f teilbar ist, wenn dies von der Summe ihrer Coefficienten gilt. Die genannten Methoden werden schliesslich auch auf Functionen von höherem Grade in den Δ ausgedehnt.

Die dritte Arbeit geht von einer Formel aus, welche mit der in der ersten Arbeit abgeleiteten Formel im wesentlichen übereinstimmt. Bezeichnet nämlich y eine Function von x und x eine Function von der unabhängigen Veränderlichen t, und setzt man $y_\varrho = \frac{1}{\varrho!} \frac{d^\varrho y}{dx^\varrho}$, $x_i = \frac{d^i x}{dt^i}$, so gilt die Formel

$$y_n = \Sigma \frac{\varrho!}{k_1! \ldots k_n!} y_\varrho x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n},$$

wo die ganzen Zahlen $\varrho, k_1, \ldots, k_n$ alle Werte durchlaufen, welche den Gleichungen genügen:

$$\varrho = k_1 + k_2 + \cdots + k_n, \quad n = k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n.$$

Der Coefficient von y_ϱ in der rechts stehenden Summe werde mit $C_{n,n-\varrho}$ bezeichnet. Derselbe ist eine ganze ganzzahlige homogene und isobare Function von $x_1, \dots, x_n$. Der Verfasser zeigt zunächst, dass zwischen diesen Coefficienten C die folgenden $\frac{1}{2}n(n+1)$ linearen Relationen bestehen:

$$C_{n,k} = x_1 C_{n-1,k} + x_2 C_{n-2,k-1} + x_3 C_{n-3,k-2} + \cdots + x_{k+1} C_{n-k-1,0},$$
$$(k = 0, 1, 2, \dots, n-2), \quad (n = 1, 2, 3, \dots, n),$$
$$C_{n,n-1} = x_n,$$

durch welche dieselben auch umgekehrt eindeutig charakterisirt sind. Hierauf werden die quadratischen Relationen zwischen den C untersucht, und zwar giebt der Verfasser ein System von $\frac{1}{2}n(n-1)$ solchen Relationen an, durch welche wiederum die Coefficienten C in eindeutiger Weise als ganze ganzzahlige Functionen der Grössen $x_i = C_{i,i-1}$ bestimmt sind. Die Coefficienten C sind übrigens im wesentlichen mit denjenigen Functionen identisch, welche in der oben angeführten Form für E_k als Entwickelungs-Coefficienten der Potenzen von f_0 auftreten.

Ht.

G. Halphen. Sur les formes différentielles associées.
Journ. de Math. (4) VI. 211-230.

Ist y eine Function der unabhängigen Veränderlichen x, und bezeichnet man mit $y', y'', \dots$ die Differentialquotienten dieser Function, so hat man

$$2yy' = (y^2)', \quad 2yy'' = (y^2)'' - 2y'^2, \dots .$$

Der Verfasser betrachtet nun eine quadratische Function von $y, y', y'', \dots$, deren Coefficienten ebenfalls als Functionen von x zu deuten sind. Ein solcher quadratischer Ausdruck U heisst eine „genaue Ableitung“, wenn es einen anderen Ausdruck U_0 von der nämlichen Beschaffenheit giebt, dessen Ableitung nach x genau gleich dem Ausdrucke U wird. So sind beispielsweise die Ausdrücke yy' und yy''' genaue Ableitungen. Der Verfasser braucht ferner die Bezeichnung $U \equiv V$, wenn die Differenz der beiden quadratischen Ausdrücke U und V gleich einer genauen Ableitung ist. So ist beispielsweise:

$$yy^{(2m)} \equiv (-1)^m (y^{(m)})^2,$$
$$ay^{(m)} \equiv (-1)^m a^{(m)} y.$$

Es wird dann der Satz bewiesen, dass eine beliebige quadratische Form U auf eine und nur auf eine Weise in die folgende Form einer Quadratsumme

$$U \equiv Ay^2 + B(y')^2 + \cdots + L(y^{(i)})^2$$

gebracht werden kann, wo A, B, ..., L geeignet gewählte Functionen von x sind. Hieraus folgt leicht der Satz: Damit eine quadratische Form U eine genaue Ableitung ist, ist es notwendig und hinreichend, dass bei der obigen Darstellung als Quadratsumme die Coefficienten A, B, ..., L sämtlich identisch verschwinden. Wenn man zwei in y, y', y'', ... lineare Ausdrücke betrachtet, und wenn dieselben von der Besonderheit sind, dass ihr Product eine genaue Ableitung wird, so heissen die beiden Ausdrücke einander associirt. Die Theorie dieser associirten Ausdrücke wird nun angewandt auf die Aufgabe, den linearen Ausdruck zu finden, welcher einem gegebenen linearen Ausdrucke adjungirt ist. Der Verfasser findet, dass zwischen zwei adjungirten Ausdrücken $G(y)$ und $\Gamma(\eta)$, welche von der Ordnung r sind, die Relation

$$\eta G(y) + (-1)^{r-1} y \Gamma(\eta) \equiv 0$$

besteht, und umgekehrt ist durch diese Relation, wenn der lineare Ausdruck $G(y)$ gegeben wird, der adjungirte Ausdruck $\Gamma(\eta)$ eindeutig bestimmt. Im besonderen ergiebt sich aus diesen Entwickelungen ein Mittel, diejenigen linearen Ausdrücke zu finden, die mit ihren adjungirten identisch sind. Ist die Ordnung eines solchen Ausdrucks ungerade, so ist derselbe infolge der obigen Relation zu y associirt. Ht.

A. Capelli. Sulla teoria delle funzioni algebriche di più variabili. Napoli Rend. (2) IV. 297-303.

Es sei φ eine algebraische Function der n Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$, und die Coefficienten der irreducibeln Gleichung, welcher die Function φ genügt, mögen sämtlich bei gewissen

Permutationen der Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ ungeändert bleiben; dann wird die algebraische Function φ selbst als eine solche bezeichnet, welche jene Permutationen zulässt. Der Verfasser beweist nun den Satz: Damit eine rationale Function F der Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ rational ausdrückbar sei durch eine algebraische Function φ dieser selben Veränderlichen und durch die elementaren symmetrischen Functionen derselben, ist es notwendig und hinreichend, dass die Function F ungeändert bleibt bei allen denjenigen Permutationen, welche die Function φ zulässt. Daraus ergiebt sich zugleich der Satz, dass, wenn eine algebraische Function f von der λ^{ten} Ordnung alle Permutationen zulässt, welche eine andere algebraische Function φ zulässt, dann jene Function f eine algebraische Function von nicht höherer als der λ^{ten} Ordnung der Function φ und der elementaren symmetrischen Function ist. Dabei wird unter der Ordnung λ einer algebraischen Function der Grad der irreduciblen Gleichung verstanden, welcher sie genügt. Ht.

E. Study. Ein Reciprocitätsgesetz in der Theorie der algebraischen Functionen. Leipz. Ber. XLII. 153-171.

Um die auf dem Riemann-Roch'schen Satze beruhenden Sätze der Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen einfacher formuliren zu können, hält es der Verfasser für zweckmässig, folgende Begriffe einzuführen. Zunächst wird der Begriff „der linearen Unabhängigkeit“, dessen Bedeutung für algebraische Functionen offenbar ist, auch auf die Punktgruppen übertragen, welche durch Nullsetzen dieser algebraischen Functionen bestimmt sind. Dann wird die „Abhängigkeit μ_r einer Punktgruppe G_m in Bezug auf die Schar g_r“ durch die Gleichung $\mu_r = m - \varrho + m_r$ definirt, worin m_r die Zahl der linear unabhängigen Punktgruppen der Schar g_r bedeutet, in denen die Punktgruppe G_m enthalten ist; dabei ist ϱ die Zahl, welche angiebt, wie viel linear unabhängige Punktgruppen die Schar g_r überhaupt enthält. Der Riemann-Roch'sche Satz lautet unter Benutzung dieser Bezeichnungen, wie folgt: Die Beweglichkeit

einer Punktgruppe auf einem algebraischen Gebilde ist gleich ihrer Abhängigkeit in Bezug auf die Specialschar g_{2p-2}, wo p das Geschlecht der algebraischen Curve bedeutet, so dass $\varrho=p$ zu setzen ist. Zufolge der Festsetzung, welche der Verfasser betreffs der Bedeutung der eben definirten Zahlen in gewissen Grenzfällen macht, gilt diese Fassung des Riemann-Roch'schen Satzes auch noch für diejenigen Fälle, wo die Grundcurve das Geschlecht 0 oder 1 besitzt. Doch muss hervorgehoben werden, dass die ursprüngliche Fassung des Riemann-Roch'schen Satzes diesen Vorzug ebenfalls besitzt. In entsprechender Weise werden auch die an den Riemann-Roch'schen Satz anknüpfenden Sätze über reciproke Punktgruppen und Scharen behandelt, wobei auch der Cayley'sche Schnittpunktsatz seine Stelle findet. Von den behandelten Sätzen sei nur der erstere erwähnt, welcher wie folgt lautet: Die Anzahl der linear unabhängigen Specialgruppen G_{2p-2}, die eine Punktgruppe G_l der Schar g_l enthalten, ist gleich der Schar der linear unabhängigen Punktgruppen $G_{l'}$ der zu g_l reciproken Schar $g_{l'}$, die eine Punktgruppe G_n der Schar g_n enthalten, dabei ist $l+l'=n+2p-2$. Ht.

W. Wirtinger. Ueber Functionen, welche gewissen Functionalgleichungen genügen. Wien. Ber. XCIX. 918-925.

Der Verfasser stellt sich die Aufgabe, alle transcendenten ganzen Functionen $F(x)$ zu bestimmen, welche der Gleichung $F(x+K)=e^{-\varphi(x)}F(x)$ genügen, wo $\varphi(x)$ eine ganze rationale Function bezeichnet. Unter der Voraussetzung der Convergenz stellt die Reihe $1+a_0+a_0a_1+a_0a_1a_2+\cdots+b_1+b_1b_2+b_1b_2b_3+\cdots$ eine derartige Function dar, wenn $a_n=e^{\varphi(x+nK)}$ und $b_n=e^{-\varphi(x-nK)}$ ist. Die Convergenz der Reihe findet statt, falls $\varphi(x)$ eine Function ungerader Ordnung ist und der Coefficient der höchsten Potenz in $\varphi(xK)$ einen negativen reellen Bestandteil besitzt. Ist der Grad von $\varphi(x)$ gleich 1, so geht die Reihe in die ϑ-Reihe über. Der allgemeine Ausdruck von $F(x)$ ergiebt sich in Form eines unendlichen Productes, welches eine Verallgemeinerung der σ-Function von Weierstrass darstellt.

Soll $F(x)$ zwei Gleichungen $F(x+K) = e^{-\varphi(x)} . F(x)$ und $F(x+K') = e^{-\psi(x)} . F(x)$ befriedigen, wo $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ganze rationale Functionen bezeichnen, so ist $F(x)$ notwendig ein Product der Gestalt $\sigma(x-\xi_1).\sigma(x-\xi_2) \dots \sigma(x-\xi_p).e^{g(x)}$, wo $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$ Constanten und $g(x)$ eine ganze rationale Function bezeichnen.

Hz.

H. Padé. Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles. C. R. CXI. 674-676.

Ist $f(x)$ eine in der Umgebung der Nullstelle holomorphe Function, die für $x=0$ nicht verschwindet, so kann man die rationale Function $\frac{g(x)}{h(x)}$ stets und nur auf eine Weise so bestimmen, dass $g(x)$ höchstens vom Grade p, $h(x)$ höchstens vom Grade q ist und die Differenz $f(x) - \frac{g(x)}{h(x)}$ mindestens von der Ordnung $p+q+1$ für $x=0$ verschwindet. Bildet man eine Tafel mit 2 Eingängen, so kann man die verschiedenen zu $f(x)$ gehörenden rationalen Functionen übersichtlich anordnen, indem man die Function $\frac{g(x)}{h(x)}$ in dasjenige Feld der Tafel setzt, in welchem sich die p^{te} Horizontal- und die q^{te} Verticalreihe kreuzen. Der Verfasser giebt nun mehrere auf diese Anordnung bezüglichen Sätze. Insbesondere erörtert er die Frage, an welchen Stellen der Tafel sich die Näherungsbrüche gewisser Kettenbruchentwickelungen von $f(x)$ befinden. Hz.

H. Seeliger. Ueber die interpolatorische Darstellung einer Function durch eine nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihe. Münch. Ber. XX. 499-511.

Es bezeichne $P^{(n)}$ die Laplace-Legendre'sche Kugelfunction n^{ten} Grades einer Variable, ferner sei $P_{ni}(\mu) = (1-\mu^2)^{\frac{i}{2}} \frac{d^i P^{(n)}(\mu)}{d\mu^i}$

und

$$Y^{(n)} = \sum_0^n{}_i (A_{ni}\cos i\varphi + B_{ni}\sin i\varphi) P_{ni}(\mu)$$

die Kugelfunction n^{ten} Grades. Sind nun für eine Function $f(\mu, \varphi)$ der beiden Variabeln μ, φ die $2\mu(\mu+1)$ Functionswerte

$$f\left(\mu_i, \frac{k\pi}{p}\right) \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, p+1 \\ k = 0, 1, 2, \dots, 2p-1 \end{pmatrix}$$

gegeben, wo $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p+1}$ die Wurzeln der Gleichung $P^{(p+1)}_{(\mu)} = 0$ bedeuten, so kann man nach einer von Fr. Neumann herrührenden Methode die Function $f(\mu, \varphi)$ interpolatorisch durch eine Summe von Kugelfunctionen in der Form

$$f(\mu, \varphi) = Y^{(1)} + Y^{(2)} + \dots + Y^{(p)}$$

darstellen. Zur Bestimmung der in den einzelnen Kugelfunctionen auftretenden Constanten A_{ni}, B_{ni} dienen dabei die Formeln

$$A_{ni} = \sum_1^{p+1}{}_\lambda \mathfrak{A}_{ni}(\mu_\lambda) C_i(\mu_\lambda), \qquad B_{ni} = \sum_1^{p+1}{}_\lambda \mathfrak{A}_{ni}(\mu_\lambda) S_i(\mu_\lambda),$$

wo die C_i und S_i aus den gegebenen Functionswerten in einfacher Weise zu berechnen sind, während die $\mathfrak{A}_{ni}$ nur von der Zahl p abhängende Constanten bezeichnen. Der Verfasser giebt nun in vorliegender Note für diese Constanten und ihre Logarithmen bis zum Falle $p = 6$ inclusive Tabellen, die dazu dienen, die in jedem einzelnen Falle auszuführenden Rechnungen zu erleichtern. Hz.

K. J. Koteloff. Ueber eine besondere Art der Zerlegung einer holomorphen Function in ein unendliches Product. Kasan Ges. VII. 407-415. (Russisch.)

Die Zerlegung der holomorphen Function $G(z)$ in Primfactoren wird umgeformt für den Fall, dass die Nullpunkte der Function $G(z)$ sich in die Gruppen der Wurzeln der binomischen Gleichungen k^{ten} Grades einteilen lassen. Wi.

P. Stäckel. Zur Theorie der eindeutigen Functionen. J. für Math. CVI. 189-192.

Der Verf. ersetzt die Mittag-Leffler'sche Darstellung der eindeutigen analytischen Functionen mit der einen wesentlich singulären Stelle $x=\infty$, welche an unendlich vielen gegebenen Stellen a_ν wie gegebene rationale Functionen $f^{(\nu)}(x)$ unendlich werden, durch die folgende:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x) e^{-u_\nu\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)^{h_\nu}}.$$

Aus ihr leitet er einen Ausdruck ab für alle transcendenten ganzen Functionen, deren Entwickelungen nach Potenzen der $x-a_\nu$ in den h_ν ersten Gliedern mit denen gegebener Functionen übereinstimmen. Bdt.

W. Burnside. On a property of plane isothermal curves. Mess. (2) XX. 64-68.

Eine Function u von x und y, welche nebst ihren partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ endlich, stetig und einwertig in allen Punkten eines gegebenen ebenen Flächenstücks bleibt und überall innerhalb desselben der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ genügt, ist bekanntlich vollständig bestimmt, wenn ihre Werte an den Grenzen gegeben sind. Die gegebenen Grenzwerte müssen endlich und stetig sein, sind aber keiner sonstigen Beschränkung unterworfen. Die so bestimmte Function u hat innerhalb des Flächenstücks keine grössten oder kleinsten Werte, oder mit anderen Worten: alle extremen Punkte liegen auf der Grenze. Es folgt auch, dass die Zahl der extremen Punkte auf jeder einzelnen begrenzenden Curve gerade sein muss. Der Zweck der vorliegenden Untersuchung besteht darin, die lineare Beziehung zu ermitteln, welche zwischen der Anzahl der begrenzenden Curven des Flächenstücks, der Anzahl der Maximal- und Minimal-Punkte der Grenze und der Anzahl der Doppelpunkte auf den Konturlinien besteht. Glr. (Lp.)

V. Volterra. Sulle variabili complesse negli iperspazi. Rom. Acc. L. Rend. (4) VI_2. 241-252.

Fortsetzung einer früheren Arbeit mit fast gleichem Titel (Delle variabili complesse negli iperspazi, Rom. Acc. L. Rend. (4) V_1. 158-165, 291-299; F. d. M. XXI. 1889. 400).

Es sei $F|[S_r]|$ eine beliebige einfache Function der im Hyperraume S_n liegenden Hyperräume S_r, $\varphi|[S_r]|$ eine ebensolche reelle Function, und es werde gesetzt:

$$\frac{\partial F}{\partial(x_{i_1}\dots x_{i_{r+1}})} = \frac{dF}{d(x_I)} = p_I + iq_I, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial(x_{i_1}\dots x_{i_{r+1}})} = \frac{d\varphi}{d(x_I)} = \varpi_I,$$

wo I den Inbegriff der Indices $i_1, \dots, i_{r+1}$ darstellt, ferner:

$$p_I p_H + q_I q_H = E_{IH}, \quad p_I q_H - p_H q_I = D_{IH}.$$

Besteht zwischen diesen Grössen für jede mögliche Combination der Indices die Relation:

$$\varpi_I D_{HK} + \varpi_H D_{KI} + \varpi_K D_{IH} = 0,$$

so ist:

$$\frac{E_{IH}\varpi_K - E_{IK}\varpi_H}{D_{KH}}$$

von H, K unabhängig und kann durch χ_I bezeichnet werden; es folgt dann:

$$\chi_I D_{HK} + \chi_H D_{KI} + \chi_K D_{IH} = 0, \qquad \varpi_I = \frac{E_{IH}\chi_K - E_{IK}\chi_H}{D_{HK}},$$

und $\dfrac{\varpi_I + i\chi_I}{p_I + iq_I}$ ist unabhängig von I. Dieses Verhältnis bleibt bei jeder Coordinatentransformation unverändert; dasselbe geschieht bei den Ausdrücken:

$$\Theta_\varphi = \frac{1}{D_{HK}}\begin{vmatrix} \varpi_H & \varpi_K \\ \chi_H & \chi_K \end{vmatrix} = \frac{(p_H\chi_K - p_K\chi_H)^2 + (q_H\chi_K - q_K\chi_H)^2}{D_{HK}^2}$$
$$= \frac{E_{IH}\varpi_K\varpi_L - E_{IK}\varpi_H\varpi_L + E_{LK}\varpi_H\varpi_I - E_{LH}\varpi_K\varpi_I}{D_{IL}D_{HK}},$$

$$H_{\varphi\varphi'} = H_{\varphi'\varphi} = \frac{1}{D_{HK}}\begin{vmatrix} \varpi_H & \varpi_K \\ \chi'_H & \chi'_K \end{vmatrix} = \frac{1}{D_{HK}}\begin{vmatrix} \varpi'_H & \varpi'_K \\ \chi_H & \chi_K \end{vmatrix}$$
$$= \frac{E_{KK}\varpi_H\varpi'_H - E_{HK}(\varpi_H\varpi'_K + \varpi_K\varpi'_H) + E_{HH}\varpi_K\varpi'_K}{D_{HK}^2},$$

wo φ' eine zu φ analoge Function bezeichnet.

Ist $n \geqq m \geqq r+2$, so kann man zwei solche Functionen $\Phi|[S_{m-r-2}]|$, $\Psi|[S_{m-r-2}]|$ angeben, dass:

$$\varpi_I = \sum_l D_{LI} \frac{d\Phi}{d(x_{L'})} + \sum_l E_{LI} \frac{d\Psi}{d(x_{L'})},$$

wo:

$L \equiv (l_1, \ldots, l_{r+1})$, $L' \equiv (l_{r+2}, \ldots, l_m)$, $(l_1, \ldots, l_m) \equiv (1, 2, \ldots, m)$;

man hat dann:

$$\chi_I = -\sum_l E_{LI} \frac{d\Phi}{d(x_{L'})} + \sum_l D_{LI} \frac{d\Psi}{d(x_{L'})},$$

$$\varpi_I - i\chi_I = (p_I - iq_I) \sum_l (p_L + iq_L) \frac{d(\Psi + i\Phi)}{d(x_{L'})},$$

$$\Theta_\varphi = -\sum_l \frac{d\Phi}{d(x_{L'})} \chi_L + \sum_l \frac{d\Psi}{d(x_{L'})} \varpi_L,$$

$$H_{\varphi\varphi'} = -\sum_l \frac{d\Phi}{d(x_{L'})} \chi'_L + \sum_l \frac{d\Psi}{d(x_{L'})} \varpi'_L = -\sum_l \frac{d\Phi'}{d(x_{L'})} \chi_L + \sum_l \frac{d\Psi'}{d(x_{L'})} \varpi_L,$$

wo Φ', Ψ' die zur Function φ' gehörigen Hülfsfunctionen Φ, Ψ sind. Setzt man:

$$M_{\varphi\varphi'} = \sum_l \frac{d\Phi}{d(x_{L'})} \varpi'_L + \sum \frac{d\Psi}{d(x_{L'})} \chi'_L,$$

so ist:

$$M_{\varphi\varphi'} = -M_{\varphi'\varphi},$$

$$H_{\varphi\varphi'} + iM_{\varphi\varphi'} = \sum_l \left[(\varpi_L + i\chi_L) \frac{d(\Psi' + i\Phi')}{d(x_{L'})}\right] = \sum_l \left[(\varpi'_L - i\chi'_L) \frac{d(\Psi - i\Phi)}{d(x_{L'})}\right].$$

Setzt man ferner (was immer möglich ist, siehe Rom. Acc. L. Rend. (4) V_1. 604):

$$\frac{d\Phi}{d(x_{L'})} = \sum_{s=r+2}^{m} (-1)^s \frac{\partial P_{l_{r+2} \cdots l_{s-1} l_{s+1} \cdots l_m}}{\partial x_{l_s}},$$

$$\frac{d\Psi}{d(x_{L'})} = \sum_{s=r+2}^{m} (-1)^s \frac{\partial Q_{l_{r+2} \cdots l_{s-1} l_{s+1} \cdots l_m}}{\partial x_{l_s}},$$

$$\frac{d\Phi'}{d(x_{L'})} = \sum_{s=r+2}^{m} (-1)^s \frac{\partial P'_{i_{r+2} \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_m}}{\partial x_{i_s}},$$

$$\frac{d\Psi'}{d(x_{L'})} = \sum_{s=r+2}^{m} (-1)^s \frac{\partial Q'_{i_{r+2} \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_m}}{\partial x_{i_s}},$$

und bezeichnet $\bar{S}_m$ einen m-dimensionalen Hyperraum, dessen Begrenzung $\bar{S}_{m-1}$ ist, so ergiebt sich:

$$\int_{\bar{S}_m} H_{\varphi\varphi'}\, d\bar{S}_m = \int_{\bar{S}_{m-1}} \sum_i P_{i_{r+3} \ldots i_m} \Big(\sum_{s=1}^{r+2} (-1)^s \chi'_{i_1 \ldots i_{s-1} i_{s+1} \ldots i_{r+2}} \cos \nu x_{i_s}\Big) d\bar{S}_{m-1}$$
$$- \int_{\bar{S}_{m-1}} \sum_i Q_{i_{r+3} \ldots i_m} \Big(\sum_{s=1}^{r+2} (-1)^s \varpi'_{i_1 \ldots i_{s-1} i_{s+1} \ldots i_{r+2}} \cos \nu x_{i_s}\Big) d\bar{S}_{m-1}$$
$$+ \int_{\bar{S}_m} \sum_i P_{i_{r+3} \ldots i_m} \Big(\sum_{s=1}^{r+2} (-1)^s \frac{\partial \chi'_{i_1 \ldots i_{s-1} i_{s+1} \ldots i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}}\Big) d\bar{S}_m,$$

$$\int_{\bar{S}_m} (H_{\varphi\varphi'} + i M_{\varphi\varphi'}) d\bar{S}_m = \int_{\bar{S}_{m-1}} \sum_i (Q'_{i_{r+3} \ldots i_m} + i P'_{i_{r+3} \ldots i_m})$$
$$\times \Big(\sum_{s=1}^{r+2} (-1)^s (\varpi_{i_1 \ldots i_{s-1} i_{s+1} \ldots i_{r+2}} + i \chi_{i_1 \ldots i_{s-1} i_{s+1} \ldots i_{r+2}}) \cos \nu x_{i_s}\Big) d\bar{S}_{m-1}$$
$$+ i \int_{\bar{S}_m} \sum_i (Q'_{i_{r+3} \ldots i_m} + i P'_{i_{r+3} \ldots i_m}) \Big(\sum_{s=1}^{r+2} (-1)^s \frac{\partial \chi_{i_1 \ldots i_{s-1} i_{s+1} \ldots i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}}\Big) d\bar{S}_m$$
$$= \int_{\bar{S}_{m-1}} \sum_i (Q_{i_{r+3} \ldots i_m} - i P_{i_{r+3} \ldots i_m})$$
$$\times \Big(\sum_{s=1}^{r+2} (-1)^s (\varpi'_{i_1 \ldots i_{s-1} i_{s+1} \ldots i_{r+2}} - i \chi'_{i_1 \ldots i_{s-1} i_{s+1} \ldots i_{r+2}}) \cos \nu x_{i_s}\Big) d\bar{S}_{m-1}$$
$$- i \int_{\bar{S}_m} \sum_i (Q_{i_{r+3} \ldots i_m} - i P_{i_{r+3} \ldots i_m}) \Big(\sum_{s=1}^{r+2} (-1)^s \frac{\partial \chi'_{i_1 \ldots i_{s-1} i_{s+1} \ldots i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}}\Big) d\bar{S}_m.$$

Ist:

$$\sum_{s=1}^{r+2} (-1)^s \frac{\partial \chi_{i_1 \ldots i_{s-1} i_{s+1} \ldots i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}} = 0, \quad \sum_{s=1}^{r+2} (-1)^s \frac{\partial \chi'_{i_1 \ldots i_{s-1} i_{s+1} \ldots i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}} = 0,$$

so sind die χ die Ableitungen einer Function ψ, die χ' die Ableitungen einer Function ψ'; und die drei Functionen F, $\varphi + i\psi$,

$\varphi' + i\psi'$ sind zu einander isogen. Die obigen Formeln vereinfachen sich dann beträchtlich; aus der letzten ergiebt sich:

$$\int\limits_{\bar{S}_{m-1}} \sum_i (Q'_{i_{r+3}\dots i_m} + iP'_{i_{r+3}\dots i_m})$$
$$\times \left(\sum_{s=1}^{r+2} (-1)^s \frac{d(\varphi + i\psi)}{d(x_{i_1}\dots x_{i_{s-1}} x_{i_{s+1}}\dots x_{i_{r+2}})} \cos \nu x_{i_s}\right) d\bar{S}_{m-1}$$
$$= \int\limits_{S_{m-1}} \sum_i (Q_{i_{r+3}\dots i_m} - iP_{i_{r+3}\dots i_m})$$
$$\times \left(\sum_{s=1}^{r+2} (-1)^s \frac{d(\varphi' - i\psi')}{d(x_{i_1}\dots x_{i_{s-1}} x_{i_{s+1}}\dots x_{i_{r+2}})} \cos \nu x_{i_s}\right) d\bar{S}_{m-1}.$$

Sind $F|[S_r]|$, $\Phi|[S_{m-r-2}]|$ zwei Functionen vom ersten Grade, so existirt bekanntlich (F. d. M. XXI. 1889. 405) eine solche Function vom ersten Grade $f|[S_{m-1}]|$, dass $f \equiv (F, \Phi)$. Setzt man:

$$\frac{dF}{d(x_{i_1}\dots x_{i_{r+1}})} = \sum_{s=1}^{r+1} (-1)^s \frac{\partial P_{i_1\dots i_{s-1}\, i_{s+1}\dots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}},$$
$$\frac{d\Phi}{d(x_{i_1}\dots x_{i_{r+1}})} = \sum_{s=1}^{r+1} (-1)^s \frac{\partial \Pi_{i_1\dots i_{s-1}\, i_{s+1}\dots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}},$$

so ergiebt sich, wenn S_{m-1} ein geschlossener Hyperraum ist, welcher auf einen Punkt zusammenschrumpfen kann, ohne irgend welcher Singularität der Functionen F, Φ zu begegnen:

$$f|[S_{m-1}]| = \int\limits_{S_{m-1}} \sum_i \left(\sum_h \frac{dF}{d(x_{h_1}\dots x_{h_{r+1}})} \Pi_{h_{r+2}\dots h_{m-1}}\right) \alpha_{i_1\dots i_{m-1}} dS_{m-1}$$
$$= \int\limits_{S_{m-1}} \sum_i \left(\sum_h \frac{d\Phi}{d(x_{h_1}\dots x_{h_{r+1}})} P_{h_{r+2}\dots h_{m-1}}\right) \alpha_{i_1\dots i_{m-1}} dS_{m-1},$$

wo $(h_1, \dots, h_{m-1}) \equiv (i_1, \dots, i_{m-1})$, und $\alpha_{i_1\dots i_{m-1}}$ die Richtungscosinus von S_{m-1} bezeichnen. Im besonderen Falle, wo $f \equiv 0$ ist, kann man diese Formel als eine Verallgemeinerung des Cauchy'schen Satzes ansehen. Vi.

Cornelia Fabri. Sopra alcune proprietà generali delle funzioni che dipendono da altre funzioni e da linee. Torino Atti XXV. 654-674.

Ist $y = y|[\varphi(x_1, \ldots, x_n)]|$ eine in einem n-dimensionalen Bereiche C gegebene „Functionsfunction" (über Functions- und Linienfunctionen siehe: Volterra, Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni und Sopra le funzioni dipendenti da linee, Rom. Acc. L. Rend. (4) III_2. 97-105, 141-46, 153-58, 225-30, 274-81; F. d. M. XIX. 1887. 408, 411), und erteilt man der Function φ eine Variation $\varepsilon\psi(x_1, \ldots, x_n)$, so hat man, wenn $t_1^{(1)}, \ldots, t_n^{(1)}$ die Coordinaten eines Punktes $P^{(1)}$ von C sind:

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta y}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon=0} \frac{y|[\varphi(x_1, \ldots, x_n) + \varepsilon\psi(x_1, \ldots, x_n)]| - y|[\varphi(x_1, \ldots, x_n)]|}{\varepsilon}$$

$$= \frac{dy}{d\varepsilon} = \int\limits_C y'|[\varphi(x_1, \ldots, x_n), t_1^{(1)}, \ldots, t_n^{(1)}]|.\ \psi(t_1^{(1)}, \ldots, t_n^{(1)}) dt_1^{(1)} \ldots dt_n^{(1)},$$

wo $y'|[\varphi(x_1, \ldots, x_n), t_1^{(1)}, \ldots, t_n^{(1)}]|$ die auf den Punkt $P^{(1)}$ bezügliche erste Ableitung von y bezeichnet. Man erhält analog:

$$\frac{d^2y}{d\varepsilon^2} = \int\limits_C^{(2)} y''|[\varphi(x_1, \ldots, x_n), t_1^{(1)}, \ldots, t_n^{(1)}, t_1^{(2)}, \ldots, t_n^{(2)}]|.\ \psi(t_1^{(1)}, \ldots, t_n^{(1)}).$$

$$\times \psi(t_1^{(2)}, \ldots, t_n^{(2)}) dt_1^{(1)} \ldots dt_n^{(1)} dt_1^{(2)} \ldots dt_n^{(2)},$$

und allgemein:

$$\frac{d^m y}{d\varepsilon^m} = \int\limits_C^m y^m|[\varphi(x_1, \ldots, x_n), t_1^{(1)}, \ldots, t_n^{(1)}, \ldots, t_1^{(m)}, \ldots, t_n^{(m)}]|$$

$$\times \prod_{i=1}^{m} \psi(t_1^{(i)}, \ldots, t_n^{(i)}) dt_1^{(i)} \ldots dt_n^{(i)},$$

folglich, für $0 < \theta < 1$:

$$y|[\varphi(x_1, \ldots, x_n) + \psi(x_1, \ldots, x_n)]| = y|[\varphi(x_1, \ldots, x_n)]|$$

$$+ \sum_{h=1}^{m} \frac{1}{h!} \int\limits_C^h y^{(h)}|[\varphi(x_1, \ldots, x_n), t_1^{(1)}, \ldots, t_n^{(1)}, \ldots, t_1^{(h)}, \ldots, t_n^{(h)}]|$$

$$\times \prod_{i=1}^{h} \psi(t_1^{(i)}, \ldots, t_n^{(i)}) dt_1^{(i)} \ldots dt_n^{(i)}$$

$$+ \frac{1}{(m+1)!} \int\limits_C^{(m+1)} |[\varphi(x_1, \ldots, x_n) + \theta\psi(x_1, \ldots, x_n), t_1^{(1)}, \ldots, t_n^{(1)}, \ldots, t_1^{(m+1)}, \ldots, t_n^{(m+1)}]|$$

$$\times \prod_{i=1}^{m+1} \psi(t_1^{(i)}, \ldots, t_n^{(i)}) dt_1^{(i)} \ldots dt_n^{(i)}.$$

Die auf die m Punkte $P^{(1)}, \ldots, P^{(m)}$ bezügliche m^{te} Ableitung von y ist symmetrisch in Bezug auf diese Punkte.

Ganz analoge Eigenschaften kommen den Functionen von der Form $y|[\varphi_1(x_1),\ldots,\varphi_n(x_n)]|$ zu. —

Nach diesen allgemeinen Erörterungen kommt die Verfasserin auf die Behandlung der Functionen der geschlossenen Linien eines dreidimensionalen Raumes, jedoch mit der Bemerkung, dass die erhaltenen Resultate sich leicht auf Functionen von Hyperräumen ausdehnen lassen.

Ist $\varphi|[L]|$ eine Linienfunction, und bezeichnet s den Bogen der Linie L, so ist, wie Herr Volterra nachgewiesen hat:

$$\delta\varphi|[L]| = \int_L (\varphi'_x\delta x + \varphi'_y\delta y + \varphi'_z\delta z)\,ds,$$

wo $\varphi'_x, \varphi'_y, \varphi'_z$ die auf einen Punkt s_1 von L bezüglichen partiellen Ableitungen von φ darstellen. Diese Functionen, welche nicht nur von L, sondern auch von den Coordinaten des Punktes s_1 abhängen, befriedigen die Gleichung:

$$\alpha_1\varphi'_x + \beta_1\varphi'_y + \gamma_1\varphi'_z = 0,$$

wo $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die Richtungscosinus der in s_1 gezogenen Tangente zu L bezeichnen; man kann folglich (und zwar auf unendlich viele Weisen) drei solche Linienfunctionen A, B, C angeben, dass:

$$\varphi'_x = \gamma_1 B - \beta_1 C,\quad \varphi'_y = \alpha_1 C - \gamma_1 A,\quad \varphi'_z = \beta_1 A - \alpha_1 B.$$

Sind insbesondere A, B, C nur von den Coordinaten des Punktes s_1 abhängig, und ist bei unbeschränkter Verkleinerung von L $\lim \varphi|[L]| = 0$, so ergiebt sich:

$$\varphi|[L]| = \int_\sigma (A\cos nx + B\cos ny + C\cos nz)\,d\sigma,$$

wo σ eine durch L begrenzte einfach zusammenhängende Fläche, n die Normale zu σ bezeichnet. Die Function $\varphi|[L]|$ heisst dann „einfach“ oder „vom ersten Grade“, und es ist:

$$\varphi|[L_1 + L_2]| = \varphi|[L_1]| + \varphi|[L_2]|,$$

wenn L_1, L_2 irgend zwei Linien sind, welche einen gemeinschaftlichen Teil mit entgegengesetzter Richtung besitzen.

Ist $\varphi|[L]|$ nicht vom ersten Grade, und sind A'_x, A'_y, A'_z; B'_x, B'_y, B'_z; C'_x, C'_y, C'_z die auf einen Punkt s_2 von L bezüglichen Ableitungen der Linienfunctionen A, B, C, ferner $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ die Rich-

tungscosinus der Tangente zu L in s_2, so kann man setzen:

$$A'_x = \gamma_2 A^{(2)}_{12} - \beta_2 A^{(3)}_{12}, \quad B'_x = \gamma_2 B^{(2)}_{12} - \beta_2 B^{(3)}_{12}, \quad C'_x = \gamma_2 C^{(2)}_{12} - \beta_2 C^{(3)}_{12},$$
$$A'_y = \alpha_2 A^{(3)}_{12} - \gamma_2 A^{(1)}_{12}, \quad B'_y = \alpha_2 B^{(3)}_{12} - \gamma_2 B^{(1)}_{12}, \quad C'_y = \alpha_2 C^{(3)}_{12} - \gamma_2 C^{(1)}_{12},$$
$$A'_z = \beta_2 A^{(1)}_{12} - \alpha_2 A^{(2)}_{12}, \quad B'_z = \beta_2 B^{(1)}_{12} - \alpha_2 B^{(2)}_{12}, \quad C'_z = \beta_2 C^{(1)}_{12} - \alpha_2 C^{(2)}_{12}.$$

Sind insbesondere $A^{(1)}_{12}, A^{(2)}_{12}, A^{(3)}_{12}, B^{(1)}_{12}, B^{(2)}_{12}, B^{(3)}_{12}, C^{(1)}_{12}, C^{(2)}_{12}, C^{(3)}_{12}$ nur von den Coordinaten der Punkte s_1, s_2 abhängig, und bezeichnet man diese Punktfunctionen bezw. durch $p_{x_1x_2}, p_{x_1y_2}, p_{x_1z_2}, p_{y_1x_2}, p_{y_1y_2}, p_{y_1z_2}, p_{z_1x_2}, p_{z_1y_2}, p_{z_1z_2}$, so erhält man, wenn $\lim \varphi|[L]|=0$ für $\lim L=0$:

$$\text{(a)} \quad \varphi|[L]| = \tfrac{1}{2}\int_\sigma^{(2)} (p_{x_1x_2} \cos n_1 x \cos n_2 x + p_{x_1y_2} \cos n_1 x \cos n_2 y$$
$$+ p_{x_1z_2} \cos n_1 x \cos n_2 z + p_{y_1x_2} \cos n_1 y \cos n_2 x + p_{y_1y_2} \cos n_1 y \cos n_2 y$$
$$+ p_{y_1z_2} \cos n_1 y \cos n_2 z + p_{z_1x_2} \cos n_1 z \cos n_2 x + p_{z_1y_2} \cos n_1 z \cos n_2 y$$
$$+ z_1 z_2 \cos n_1 z \cos n_2 z) d\sigma^2 = \tfrac{1}{2}\int_\sigma^{(2)} f_2\{p\} d\sigma^2.$$

Die Functionen p sind symmetrisch in Bezug auf ihre Indices und befriedigen die Gleichungen:

$$\frac{\partial p_{x_1x_2}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{x_1y_2}}{\partial y_2} + \frac{\partial p_{x_1z_2}}{\partial z_2} = 0, \quad \frac{\partial p_{x_2x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{x_2y_1}}{\partial y_1} + \frac{\partial p_{x_2z_1}}{\partial z_1} = 0,$$
$$\frac{\partial p_{y_1x_2}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{y_1y_2}}{\partial y_2} + \frac{\partial p_{y_1z_2}}{\partial z_2} = 0, \quad \frac{\partial p_{y_2x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{y_2y_1}}{\partial y_1} + \frac{\partial p_{y_2z_1}}{\partial z_1} = 0,$$
$$\frac{\partial p_{z_1x_2}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{z_1y_2}}{\partial y_2} + \frac{\partial p_{z_1z_2}}{\partial z_2} = 0, \quad \frac{\partial p_{z_2x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{z_2y_1}}{\partial y_1} + \frac{\partial p_{z_2z_1}}{\partial z_1} = 0.$$

Werden die zwei in (a) vorkommenden Integrationen nicht über eine und dieselbe Fläche σ, sondern über zwei verschiedene Flächen σ_1, σ_2 mit den Begrenzungen L_1, L_2 erstreckt, so stellt $\tfrac{1}{2}\int_{\sigma_1}\int_{\sigma_2} f_2\{p\} d\sigma_1 d\sigma_2$ eine Function $\psi|[L_1, L_2]|$ der zwei Linien L_1, L_2 dar, welche in Bezug sowohl auf L_1 als auch auf L_2 vom ersten Grade ist, und es ergiebt sich:

$$\psi|[L, L]| = \varphi|[L]|, \; \varphi|[L_1 + L_2]| = \varphi|[L_1]| + 2\psi|[L_1, L_2]| + \varphi|[L_2]|.$$

Man sagt dann, die Function $\varphi|[L]|$ sei „vom zweiten Grade".

Indem man so fortfährt, kann man eine Linienfunction „vom n^{ten} Grade" $\varphi|[L]|$ als eine solche definiren, welche durch eine Gleichung von der Form:

$$\varphi|[L]| =$$

$$\frac{1}{n!}\int_\sigma^{(n)} \Sigma\left(p_{x_{l_1}\dots x_{l_r}\, y_{l_{r+1}}\dots y_{l_h} z_{l_{h+1}}\dots z_{l_n}} \prod_{i=1}^{r} \cos n_{l_i} x \,.\prod_{i=r+1}^{h} \cos n_{l_i} y \,.\prod_{i=h+1}^{n} \cos n_{l_i} z\right) d\sigma_n$$

$$= \frac{1}{n!}\int_\sigma^{(n)} f_n\{p\}\, d\sigma^n$$

dargestellt wird, wo $(l_1, \dots, l_n) \equiv (1, \dots, n)$. Die Functionen p sind symmetrisch in Bezug auf ihre Indices und befriedigen die $n.3^{n-1}$ Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} p_{x_{l_1}\dots x_{l_r} x_i y_{l_{r+1}}\dots y_{l_h} z_{l_{h+1}}\dots z_{l_{n-1}}} + \frac{\partial}{\partial y_i} p_{x_{l_1}\dots x_{l_r} y_{l_{r+1}}\dots y_{l_h} y_i z_{l_{h+1}}\dots z_{l_{n-1}}}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z_i} p_{x_{l_1}\dots x_{l_r} y_{l_{r+1}}\dots y_{l_h} z_{l_{h+1}}\dots z_{l_{n-1}} z_i} = 0,$$

wo $(l_1, \dots, l_r, l_{r+1}, \dots, l_h, l_{h+1}, \dots, l_{n-1}, i) \equiv (1, 2, \dots, n), i = 1, 2, \dots, n$. Setzt man:

$$\frac{1}{n!}\int_{\sigma_1}\int_{\sigma_2}\cdots\int_{\sigma_n} f_n\{p\}\, d\sigma_1 d\sigma_2 \dots d\sigma_n = \psi|[L_1, L_2, \dots, L_n]|,$$

wo $L_1, L_2, \dots, L_n$ die Begrenzungen der Integrationsflächen $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ sind, so ist ψ eine in Bezug auf jede der Linien $L_1, L_2, \dots, L_n$ einfache Linienfunction, und es ist offenbar:

$$\psi|[L, L, \dots, L]| = \varphi|[L]|.$$

Bezeichnet man durch $\psi_{r,n-r}|[L_1, L_2]|$ die Linienfunction ψ, von der r Argumente mit L_1 und die $n-1$ übrigen mit L_2 übereinstimmen, so ergiebt sich:

$$\varphi|[L_1 + L_2]| = \varphi|[L_1]| + \sum_{r=1}^{n-1}\binom{n}{r}\psi_{r,n-r}|[L_1, L_2]| + \varphi|[L_2]|.$$

Eine Linienfunction kann unter gewissen Beschränkungen, die wir hier nicht näher angeben können, und auf eine einzige Weise in eine Reihe entwickelt werden, deren Glieder Linienfunctionen 1., 2., ... Grades sind. Vi.

G. Peano. Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane. Math. Ann. XXXVI. 157-160.

Ist t irgend eine zwischen 0 und 1 gelegene reelle Zahl, so

kann man dieselbe stets in die Gestalt

$$t = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \cdots$$

entwickeln, wo $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sämtlich die Werte 0, 1 oder 2 haben. Man setze nun $K0 = 2$, $K1 = 1$, $K2 = 0$ und verstehe unter $K^n a$ die durch n-malige Wiederholung der Operation K entstehende Zahl. Nun bilde man allgemein die Zahlen

$$b_n = K^{a_2+a_4+\cdots+a_{2n-2}} a_{2n-1},$$
$$c_n = K^{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}} a_{2n}$$

und betrachte dann die beiden Zahlen

$$x = \frac{b_1}{3} + \frac{b_2}{3^2} + \cdots, y = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \cdots.$$

Es ergiebt sich dann, dass diese Grössen x und y, als Functionen von t aufgefasst, stetig und eindeutig sind und überdies jedes Paar von Werten darstellen können, welche zwischen 0 und 1 gelegen sind. Die Functionen x und y vermitteln somit die stetige Abbildung eines Linienstückes von der Länge 1 auf ein Quadrat von der Seitenlänge 1. Einem Satze von Netto entsprechend, ist diese Abbildung jedoch nicht umkehrbar eindeutig, indem einem gegebenen Wertepaare x, y eins, zwei oder vier Werte von t entsprechen können. Ueberdies sind die Functionen x und y nirgends nach t differentiirbar. Ht.

D. Hilbert. Ueber die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück. Naturf. Ges. Bremen. 11-12.

G. Mittag-Leffler. Sur une transcendante remarquable découverte par M. Fredholm. C. R. CX. 627-629.

Der Verfasser teilt eine von Herrn Fredholm gemachte Bemerkung mit, der zufolge die durch die Potenzreihe

$$F(x) = 1 + ax + a^2x^4 + a^3x^9 + \cdots \quad (|a| < 1)$$

definirte Function zugleich mit allen ihren Ableitungen auf dem Kreise mit dem Radius 1 stetig verläuft, obwohl dieser Einheitskreis die natürliche Grenze für die Function darstellt.

Ht.

RIQUIER. Sur les fonctions continues d'un nombre quelconque de variables et sur le principe fondamental de la théorie des équations algébriques. Ann. de l'Éc. Norm. (3) VI. 265-288.

Der Cauchy'sche Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra beruht auf einem, von Cauchy nicht bewiesenen, Satze der Functionentheorie, nämlich dass, wenn der absolute Betrag einer stetigen Function zweier Veränderlichen für diejenigen Wertsysteme, welche dem Innern eines continuirlichen Bereiches angehören, eine untere Grenze besitzt, er für mindestens ein Wertsystem im Innern des Bereiches diese untere Grenze wirklich erreicht. Der Beweis dieses Satzes ist im Bulletin des Sciences mathématiques (1872) von Herrn Darboux veröffentlicht (übrigens auch von Herrn Weierstrass in seinen Vorlesungen vorgetragen) worden. Herr Riquier beschäftigt sich in der vorliegenden Arbeit nun damit, den Satz auf Functionen von beliebig vielen Variabeln auszudehnen und den Cauchy'schen Beweis in einer rein algebraischen Form zu reproduciren. F.

L. POCHHAMMER. Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf. Math. Ann. XXXV. 470-494.

L. POCHHAMMER. Ueber eine Klasse von Integralen mit geschlossener Integrationscurve. Ib. XXXVII. 500-511.

Die erste Abhandlung betrachtet Integrale, deren Integrationscurve zwei Verzweigungspunkte der zu integrirenden Function abwechselnd umkreist, und zwar einen jeden zuerst im positiven, dann im negativen Sinne. Sie behalten auch dann einen bestimmten Sinn, wenn der Integrationswert wegen einer in den Verzweigungspunkten auftretenden Unstetigkeit nicht bis an diese herangeführt werden kann, und ihre Benutzung beseitigt deshalb die Beschränkung, welche der Auflösung linearer Differentialgleichungen durch bestimmte Integrale bisher anzuhaften pflegte.

Die zweite Abhandlung erweitert die Methode auf Umläufe

um mehr als zwei Verzweigungspunkte; eine Note erwähnt, dass Herr C. Jordan bereits 1887 Integrale mit Doppelumlauf benutzt hat.

Bdt.

G. Teixeira. Extrait d'une lettre à M. Hermite. Darboux Bull. (2) XIV. 200-208.

Der Verfasser betrachtet das Integral

$$J=\int\frac{f(z)\,.\,\sin^m(x-a)dz}{\sin(z-x)\sin^m(z-a)},$$

welches in der z-Ebene um ein Rechteck erstreckt wird, das den Punkt a als Mittelpunkt und die Seitenlängen π und $2l$ besitzt. Nimmt man an, dass $f(z)$ in diesem Rechteck holomorph ist, und dass x im Innern des Rechtecks liegt, so ergiebt die Anwendung des Cauchy'schen Satzes auf das Integral J die Gleichungen

$$f(x)=\sum K_{2n+1}\sin^{2n+1}(x-a)+\cos(x-a)\sum L_{2n}\sin^{2n}(x-a)+J,$$
$$\left(n=0,1,\ldots,\frac{m}{2}-1\right),$$

$$f(x)=K_0'+\sum K_{2n+2}'\sin^{2n+2}(x-a)$$
$$+\cos(x-a)\sum L_{2n+1}'\sin^{2n+1}(x-a)+J,$$
$$\left(n=0,1,\ldots,\frac{m-3}{2}\right),$$

je nachdem m eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

Dabei bedeuten die K, L, K', L' von x unabhängige Grössen, deren Werte durch die Bemerkung bestimmt werden, dass J von der m^{ten} Ordnung für $x=a$ verschwindet. Es fragt sich nun, wann das Integral J mit unendlich wachsendem m unendlich klein wird. Dies geschieht für $|\sin(x-a)|=1$, falls $l\geqq\log(1+\sqrt{2})$ und für $|\sin(x-a)|<\frac{e^l-e^{-l}}{2}$, falls $l<\log(1+\sqrt{2})$. In diesen Fällen darf man also in den obigen Entwickelungen von $f(x)$ das Restglied J fortlassen und statt dessen den Summationsbuchstaben n alle ganzen Zahlen von 0 bis ∞ durchlaufen lassen. Als Anwendungen giebt der Verfasser die Entwickelungen von $\cos kx$ und $\sin kx$. — Eine entsprechende Unter-

suchung über das Integral

$$\int \frac{f(z)\sin(x-\alpha)\sin(x-\beta)\ldots\sin(x-\lambda)}{\sin(z-x)\sin(z-\alpha)\sin(z-\beta)\ldots\sin(z-\lambda)}\,dz$$ beschliesst den Brief.

Hz.

F. G. Teixeira. Sobre o desenvolvimento das funcções em serie ordenada segundo as potencias dos senos e cosenos. Teixeira J. X. 35-47.

Der Inhalt stimmt überein mit dem Briefe an Hrn. Hermite in Darboux Bull. (2) XIV. 200-208 (vergl. das vorangehende Referat).

A. Jonquière. Ueber einige Transcendenten, welche bei der wiederholten Integration rationaler Functionen auftreten. Bern. Huber u. Co. 50 S. 8°.

Bericht in F. d. M. XXI. 1889. 432.

A. Palmström. Determinantteoriens anvendelse på laeren om komplexe stórrelsers multiplikation. Arch. for Math. og Naturvid. XIII. 128-132.

Der Ausdruck

$$(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)\ldots(a_n+ib_n)$$

wird durch zwei Determinanten auf die Form $A+iB$ gebracht. Der Verf. discutirt die Eigenschaften dieser Determinanten und stellt als Anwendung Determinantenausdrücke auf für trigonometrische Functionen von einer Summe von n Winkeln.

Bdn.

K. Melander. Några satser rörande implicita funktioner. Pr. Gymn. Kalmar. 16 S.

Einige Sätze über Functionen y, welche durch das Verschwinden einer Potenzreihe $Sa_{r,s}x^ry^s$ definirt sind. Nichts wesentlich Neues. Bdn.

J. Fredholm. Om en speciell klass af singulära linier. Stockh. Öfv. 131-134.

Der Verf. beweist, dass die Function $F(x) = \sum\limits_0^{\infty} a^n x^{n^2}$, wo $|a| < 1$, nicht über den Einheitskreis hinaus fortgesetzt werden kann, und macht auf einen Unterschied zwischen dieser Function und anderen nicht-fortsetzbaren Functionen aufmerksam. (Vergl. oben S. 406.) Bdn.

F. de Brun. Analytisk härledning af ekvationerna för de ytor och linier, som äro invarianta för den Poincaré'ska generaliserade substitutionen. Stockh. Öfv. 135-162.

F. de Brun. Invarianta uttryck för den Poincaré'ska generaliserade substitutionen. Stockh. Öfv. 265-281.

Die lineare Substitution $z' = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ transformirt bekanntlich einen Kreis in einen anderen. Poincaré nennt „generalisirte lineare Substitution“ eine solche, welche zwei Kugeln, deren grösste Kreise die erwähnten sind, in einander überführen. In den zwei fraglichen Aufsätzen werden Linien und Flächen untersucht, welche bei einer derartigen Substitution in sich selbst übergehen, und invariante analytische Ausdrücke, besonders Differentialausdrücke hergeleitet. Bdn.

G. Cassel. Om en generalisering af de Klein'ska funktionerna af tredje familjen. Stockh. Öfv. 237-264.

Der Verf. sucht die von Poincaré als „Klein'sche Functionen dritter Familie“ bezeichneten Functionen zu verallgemeinern, indem er sich mit linearen Substitutionen beschäftigt, welche gewisse, durch unendlich viele Kreise begrenzte Figuren auf die Ebene abbilden, und die Existenz analytischer Functionen aufweist. welche bei solchen Substitutionen unverändert bleiben.

Bdn.

F. N. Cole. The linear functions of a complex variable. Annals of Math. V. 121-176.

Der Verfasser giebt im engen Anschluss an eine Vorlesung von F. Klein eine ausführliche Darstellung der Theorie der isogonalen Transformation, die durch die allgemeine lineare Function einer complexen Variable vermittelt wird. Die Beziehung dieser Transformation für den Fall, dass die complexe Variable auf der Kugel geometrisch dargestellt wird, zu denjenigen Collineationen des Raumes, die die Kugel in sich überführen, wird auf rechnerischem Wege klar gelegt. Neben den durch die Gleichung $w=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ definirten Transformationen werden auch die (mit Umlegung der Winkel verbundenen) Transformationen $w=\frac{\alpha\bar{z}+\beta}{\gamma\bar{z}+\delta}$ betrachtet, wo $\bar{z}$ die zu z conjugirte Grösse bedeutet.

Hz.

R. Reiff. Ueber die Condensation der Singularitäten. Böklen Mitt. III. 94-97.

Ist $w_1, w_2, \dots$ eine unendliche abzählbare Menge von reellen Zahlen, so stellt das unendliche, über alle diese Zahlen w zu erstreckende Product

$$\Phi(x)=\prod_{i=1}^{i=\infty}\left\{\int_0^\infty \frac{\sin (x-w_i)^2\alpha}{\alpha}\,d\alpha\right\}^{\frac{1}{2^i}}$$

eine Function von x dar, welche für alle Werte $x=w_i$ verschwindet und für alle von den w_i verschiedenen Werte x gleich Eins ist. Aus dieser Function $\Phi(x)$ lässt sich dann leicht eine Function herstellen, welche für $x=w_i$ den Wert einer beliebig gegebenen Function $\lambda(x)$ und für $x+w_i$ den Wert einer zweiten beliebigen Function $\nu(x)$ annimmt.

Ht.

J. König. Ueber stetige Functionen, die innerhalb jedes Intervalls extreme Werte besitzen. Monatsh. f. Math. I. 7-12.

Der Verfasser beschäftigt sich mit solchen Functionen $F(x)$

einer reellen Veränderlichen x, welche in jedem beliebig klein gewählten Intervalle der Veränderlichen x gleiche Werte annehmen, oder — was im wesentlichen auf dasselbe hinausläuft — welche in jedem noch so kleinen Intervalle für drei aufeinander folgende Argumente x_1, x_2, x_3 solche drei Werte besitzen, dass der mittlere von ihnen, nämlich $F(x_2)$, entweder kleiner oder grösser ist, als jeder der beiden anderen Werte $F(x_1)$ und $F(x_3)$. Von einer solchen Function $F(x)$ beweist der Verfasser zunächst, dass es in jedem noch so kleinen Intervalle unendlich viele Stellen giebt, an denen die Function den nämlichen Wert annimmt. Ferner wird bewiesen, dass es in jedem Intervalle möglich ist, eine solche Stelle $x = \zeta$ zu finden, so dass die Grösse $\frac{F(\zeta + h_n) - F(\zeta)}{h_n}$ in der Grenze gleich 0 wird, wenn $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$ passend gewählte, der Grenze 0 zustrebende Zahlen sind.

Ht.

P. Appell. Sur les intégrales de fonctions à multiplicateurs et leur application au développement des fonctions abéliennes en séries trigonométriques. Acta Math. XIII. (3. u. 4.) 1-174.

Die vorliegende Abhandlung ist eine der beiden Arbeiten, die den vom König Oscar von Schweden im Jahre 1885 ausgeschriebenen Preis erhalten haben. Derselben ist ein kurzer Bericht von Hermite, der einer der Preisrichter war, vorausgeschickt. Das Ziel der in der Abhandlung niedergelegten Untersuchungen bildet die Entwickelung der Abel'schen Functionen von zwei und mehreren Veränderlichen in trigonometrische Reihen, also die Verallgemeinerung der bekannten Entwickelungen der elliptischen Functionen nach den Sinus und Cosinus der ganzen Vielfachen des Argumentes. Um dieses Ziel zu erreichen, untersucht der Verfasser zunächst eine neue Klasse von Functionen des Ortes auf einer Riemann'schen Fläche, die er „multiplicatorische“ Functionen (fonctions à multiplicateurs) nennt. Ist R die zu der irreducibeln algebraischen Gleichung $F(s,z) = 0$ gehörende Riemann'sche Fläche, R_{abc} die durch die Riemann'-

schen Schnitte

$$a_1, a_2, \ldots, a_p; \quad b_1, b_2, \ldots, b_p; \quad c_2, c_3, \ldots, c_p$$

in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelte Fläche R, so versteht Herr Appell unter einer multiplicatorischen Function eine auf R_{abc} eindeutige Function ohne wesentlich singuläre Stellen, die in gegenüberliegenden Punkten eines der Schnitte Werte besitzt, die sich nur durch einen längs des einzelnen Schnittes constant bleibenden Factor unterscheiden. Es ergiebt sich, dass diese Factoren (Multiplicatoren) längs der Schnitte c_i sämtlich gleich 1 sein müssen, dass dagegen die Multiplicatoren $m_1, m_2, \ldots, m_p; n_1, n_2, \ldots, n_p$ für die Schnitte $a_1, a_2, \ldots, a_p$; $b_1, b_2, \ldots, b_p$ bez. als beliebige nicht verschwindende Constanten angenommen werden können. In der That besteht der Satz, dass nach willkürlicher Annahme dieser Multiplicatoren eine Summe von Integralen dritter Gattung und Integralen erster Gattung $\Pi(z)$ in mannigfaltiger Weise so gewählt werden kann, dass die Function

$$(1) \qquad \Phi(z) = e^{\Pi(z)}$$

eine multiplicatorische Function mit den vorgeschriebenen Multiplicatoren ist, und zwar lässt sich jede derartige Function durch eine Gleichung der Gestalt (1) definiren. Die logarithmischen Residuen von $\Pi(z)$ sind sämtlich ganze Zahlen, und es wird daher $\Phi(z)$ ebenso oft Null wie unendlich. Sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ die Unendlichkeits- und $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ die Nullstellen von $\Phi(z)$, bedeuten ferner $w_1(z), w_2(z), \ldots, w_p(z)$ die zu der gewählten Zerschneidung gehörenden Normalintegrale erster Gattung, so bestehen die p Relationen

$$(2) \qquad \sum_{j=1}^{j=q}\Big(w_k(\beta_j) - w_k(\alpha_j)\Big) = \tfrac{1}{2}\log n_k - \frac{1}{2\pi i}\sum_{r=1}^{r=p} b_{r,k}\log m_r$$
$$(k = 1, 2, \ldots, p),$$

wobei die $b_{r,k}$ die Periodicitätsmoduln der Normalintegrale an den Schnitten b_i bezeichnen. Aus diesen Relationen folgt, dass, allgemein zu reden, p der Stellen α_j und β_j durch die übrigen bestimmt sind.

Wenn $\Phi(z)$ eine Function mit bestimmten Multiplicatoren bezeichnet, so sind alle Functionen mit denselben Multiplicatoren

in der Form $\Phi(z) \,.\, R(s, z)$ darstellbar, wo $R(s, z)$ eine rationale Function von s und z bedeutet. Die multiplicatorischen Functionen bilden eine Verallgemeinerung der elliptischen Functionen zweiter Art. Betrachtet man in der That den Fall $p = 1$, und führt das überall endliche Integral u als unabhängige Variable ein, so gehen die multiplicatorischen Functionen in elliptische Functionen zweiter Art von u über. Andererseits bilden die multiplicatorischen Functionen auch eine Verallgemeinerung der eindeutigen algebraischen Functionen auf der Riemann'schen Fläche R. Die letzteren erscheinen als ein Specialfall der ersteren; sie entsprechen offenbar dem Falle, wo alle Multiplicatoren gleich 1 sind. Dieser Thatsache entsprechend, erscheinen auch die von Herrn Appell gegebenen Sätze zumeist als Verallgemeinerungen bekannter Sätze aus der Theorie der algebraischen Functionen. Ausser den schon erwähnten Sätzen giebt Herr Appell noch folgendes Theorem: „Die Functionen mit gegebenen Multiplicatoren, deren q Unendlichkeitsstellen vorgeschrieben sind, setzen sich linear und homogen mit constanten Coefficienten aus $q-p+1$ unter ihnen zusammen“. Dieses Theorem, welches die Verallgemeinerung des Riemann-Roch'schen Satzes darstellt, ist jedoch nur im allgemeinen richtig und bedarf für besondere Lagen der Unendlichkeitsstellen einer Modification, die in jedem Falle durch einen vom Referenten aufgestellten Satz, der für jede noch so specielle Lage der Unendlichkeitsstellen gilt, gegeben wird. (Hurwitz, Zur Theorie der Abel'schen Functionen. Göttinger Nachrichten vom 15. Februar 1892.)

An die Betrachtung der multiplicatorischen Functionen $\Phi(z)$ knüpft Herr Appell im zweiten Teile der Abhandlung die Untersuchung ihrer Integrale $\int \Phi(z)\,dz$. Diese lassen sich, wie die Abel'schen Integrale, in solche erster, zweiter und dritter Gattung einteilen. Die Integrale erster Gattung sind dadurch charakterisirt, dass sie überall endlich sind, die zweiter Gattung dadurch, dass sie algebraische, die dritter Gattung dadurch, dass sie logarithmische Unstetigkeiten besitzen.

Die Anzahl der linear unabhängigen Integrale erster Gat-

tung beträgt bei gegebenen Multiplicatoren genau $p-1$, ausgenommen den Fall, wo die Multiplicatoren übereinstimmen mit den Multiplicatoren eines Ausdrucks der Gestalt:

$$\text{(A)} \qquad E(z) = e^{a_1 w_1(z) + a_2 w_2(z) + \cdots + a_p w_p(z) + a},$$

wo $a, a_1, \ldots, a_p$ Constanten bezeichnen. In diesem Falle, den ich weiterhin kurz als Ausnahmefall (A) bezeichnen will, ist jene Anzahl gleich p. Sind $R_1, R_2, \ldots, R_q$ die Residuen an den Unstetigkeitsstellen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ einer Function $\Phi(z)$ mit den Multiplicatoren m_k, n_k, ist ferner $\Omega(z)$ eine überall endliche Integralfunction mit den Multiplicatoren $\frac{1}{m_k}, \frac{1}{n_k}$, so besteht die Relation

$$\sum_{j=1}^{j=q} R_j \Omega'(\alpha_j) = 0,$$

welche $p-1$ beziehungsweise p Relationen in sich vereinigt.

Zwischen den an den $3p-1$ Querschnitten a_k, b_k, c_k stattfindenden Periodicitäts-Moduln eines Integrales erster Gattung mit den Multiplicatoren m_k, n_k finden p lineare homogene Relationen statt. Zwischen den Periodicitätsmoduln eines solchen Integrales und denen eines eben solchen, zu den inversen Multiplicatoren gehörigen Integrales finden ferner bilineare Relationen statt, welche im Falle $m_k = n_k = 1$ in die bekannten Relationen zwischen den Periodicitäts-Moduln zweier Abel'schen Integrale erster Gattung übergehen. — Unter den Integralen dritter Gattung mit den Multiplicatoren m_k, n_k sind die einfachsten diejenigen, welche nur an einer Stelle z_0 unstetig werden wie $\log(z-z_0)$. Für jede Lage von z_0 existirt ein solches (bis auf additive Integrale erster Gattung bestimmtes) Integral, abgesehen von dem Ausnahmefalle (A), in welchem jedes Integral dritter Gattung mindestens zwei Unstetigkeitsstellen besitzt. Entsprechendes gilt für Integrale zweiter Gattung. Es giebt stets ein solches Integral, welches nur an einer willkürlich angenommenen Stelle z_0, und zwar wie $\frac{1}{z-z_0}$, unstetig wird, abgesehen von dem Ausnahmefall (A), wenn zugleich $E(z)$ sich nicht auf eine Constante

reducirt. In diesem Ausnahmefalle hat wieder jedes Integral zweiter Gattung mindestens zwei Unstetigkeitsstellen.

Die Darstellung der multiplicatorischen Functionen durch Aggregate von Integralen zweiter Gattung und die Herleitung der verschiedenen Relationen, welche zwischen den Periodicitätsmoduln der Integrale bestehen, beschliessen den zweiten Teil der Abhandlung.

Der dritte Teil der Abhandlung beschäftigt sich endlich mit der Anwendung der entwickelten Theorie auf die Darstellung der Abel'schen Functionen von zwei Variabeln durch trigonometrische Reihen.

Es würde zu weit führen, die Untersuchungen des Verfassers, die derselbe zunächst an dem Falle $p=1$ erläutert, im einzelnen zu besprechen.

Wir begnügen uns daher damit, die Hauptgedanken der Untersuchungen kurz darzulegen. Der Verfasser geht aus von dem hyperelliptischen Gebilde

$$s^2 = z(1-z)(1-\varkappa^2 z)(1-\lambda^2 z)(1-\mu^2 z),$$

wo $\varkappa, \lambda, \mu$ reelle, den Ungleichungen $1>\varkappa>\lambda>\mu$ genügende Constanten bezeichnen. Die zugehörigen Normalintegrale erster Gattung

$$V(z)=\int_0^z \frac{B-Cz}{s}\,dz, \qquad W(z)=-\int_0^z \frac{B'-C'z}{s}\,dz$$

besitzen dann längs der Schnitte a_1, a_2, b_1, b_2 bez. die Periodicitäts-Moduln

$$\begin{array}{lllll} V(z): & 0, & \pi i, & -2A, & \log p; \\ W(z): & \pi i, & 0, & \log q, & -2A, \end{array}$$

wo p und q reelle, zwischen 0 und 1 liegende Grössen bezeichnen, A eine positive Grösse. Setzt man nun mit Jacobi

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} v = V(z_1)+V(z_2)-V\left(\frac{1}{\varkappa^2}\right), \\ w = W(z_1)+W(z_2)-W\left(\frac{1}{\varkappa^2}\right), \end{array} \right.$$

so sind die in z_1, s_1 und z_2, s_2 symmetrischen rationalen Functionen eindeutige, vierfach-periodische Functionen von v und w, und

es handelt sich darum, diese in trigonometrische Reihen zu entwickeln.

Als Beispiel betrachtet Herr Appell zunächst die Function

$$-\varkappa\lambda\mu z_1 z_2 = \frac{\varphi_{1\,0}^{\,2}(v,w)}{\varphi_{0\,0}^{\,2}(v,w)},$$

wo rechter Hand die von Rosenhain gegebene Darstellung dieser Function als Quotient zweier ϑ-Reihen angedeutet ist. Setzt man nun

$$-\varkappa\lambda\mu z_1 z_2 = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} P_{m,n} e^{-2mv-2nw},$$

so ergiebt sich

$$P_{m,n} = -\frac{1}{\pi^2}\iint \frac{\varphi_{1\,0}^{\,2}(v,w)}{\varphi_{0\,0}^{\,2}(v,w)}\,dv\,dw,$$

wo die Integration nach v bez. w durch rein imaginäre Werte $v_0 \ldots v_0 + \pi i$ bez. $w_0 \ldots w_0 + \pi i$ zu erstrecken ist. Führt man jetzt vermöge der Gleichungen (3) z_1 und z_2 als neue Integrationsvariabeln ein, so findet man nach kurzer Rechnung

$$P_{m,n} = \varDelta\,.\,e^{-2mV\left(\frac{1}{\varkappa^2}\right)-2nW\left(\frac{1}{\varkappa^2}\right)}$$

$$\times\iint \frac{z_1 z_2 (z_2 - z_1)}{s_1 s_2}\, e^{2m[V(z_1)+V(z_2)]+2n[W(z_1)+W(z_2)]}dz_1\,dz_2,$$

wo $\varDelta = \dfrac{\varkappa\lambda\mu}{\pi^2}(BC'-CB')$ und die Integration nach z_1 längs einer die Verzweigungspunkte $\dfrac{1}{\varkappa^2}$ und $\dfrac{1}{\lambda^2}$ umkreisenden Linie L_1, nach z_2 längs einer die Verzweigungspunkte 0 und 1 umkreisenden Linie L_2 auszuführen ist. Es sei nun

$$A = \int_0^z \frac{z\,dz}{s} e^{2mV(z)+2nW(z)},\quad \mathfrak{A} = \int_0^z \frac{z^2 dz}{s} e^{2mV(z)+2nW(z)},$$

dann wird:

$$P_{m,n} = \varDelta e^{-2mV\left(\frac{1}{\varkappa^2}\right)-2nW\left(\frac{1}{\varkappa^2}\right)}(A_1\mathfrak{A}_2 - A_2\mathfrak{A}_1),$$

wo A_i bez. $\mathfrak{A}_i$ den Wert des längs der Linie L_i genommenen Integrals A bez. $\mathfrak{A}$ bezeichnet. Die Integrale A und $\mathfrak{A}$ sind aber Integrale von multiplicatorischen Functionen und A_1, A_2, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ Periodicitäts-Moduln derselben. A ist ein Integral erster Gattung,

während $\mathfrak{A}$ einen einzigen logarithmischen Unstetigkeitspunkt im Unendlichen besitzt. Vermöge der Relationen, die zwischen den Periodicitäts-Moduln dieser Integrale bestehen, ergiebt sich schliesslich

$$P_{m,n} = (-1)^m \cdot \frac{16(BC' - CB')i}{\pi\varkappa\lambda\mu}(mC - nC') \frac{\psi(m,n) + \psi(-m,-n)}{r^{-m}q^{-n} - r^m q^n},$$

wo $\psi\ (m,n)$ das auf geradlinigem Wege genommene Integral

$$\psi(m,n) = \int_0^1 \frac{z dz}{s} e^{2m V(s) + 2n W(s)}$$

bedeutet. Der Wert von $P_{m,n}$ erscheint für $m = n = 0$ in unbestimmter Form, so dass $P_{0,0}$ direct zu bestimmen ist, was leicht geschieht.

Nach einigen Bemerkungen über den Fall, wo sich das hyperelliptische Gebilde auf ein elliptisches reducirt, giebt der Verfasser noch eine Reihe weiterer Entwickelungen von Functionen $f(z_1, s_1; z_2, s_2)$ in trigonometrische Reihen. Schliesslich bemerkt er, dass in dem Integrale $\psi(m,n)$ die Bessel'schen Functionen als Grenzfälle enthalten sind.

Der Abhandlung ist ein Supplement beigegeben, welches die Ausdehnung der Untersuchungen des dritten Teiles auf die hyperelliptischen Functionen vom Geschlecht p (insbesondere auf den Fall $p = 3$) enthält, sowie einige Betrachtungen über eine besondere Klasse von homogenen linearen Differentialgleichungen bringt. Diese Differentialgleichungen sind von beliebiger Ordnung n, und ihre Coefficienten sind eindeutige algebraische Functionen auf einer über der Ebene der unabhängigen Variabeln ausgebreiteten Riemann'schen Fläche. Ueberdies soll ihre allgemeine Lösung gewissen Unstetigkeitsbedingungen genügen. Die Integrale multiplicatorischer Functionen sind Lösungen derartiger Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Hz.

P. Appell. Sur les fonctions de deux variables à plusieurs paires de périodes. C. R. CX. 181-183.

Nach einem Satze von Poincaré lässt sich eine analytische Function $f(x, y)$, die im Endlichen überall den Charakter einer

rationalen Function besitzt, in die Gestalt $\frac{\varphi(x,y)}{\psi(x,y)}$ setzen, wo $\varphi(x,y)$ und $\psi(x,y)$ ganze Functionen sind, die nur an jenen Stellen ($x = y_0$, $y = y_0$) gleichzeitig verschwinden, an welchen $f(x,y)$ unbestimmt ist. Appell bemerkt zunächst, dass jede andere Darstellung von $f(x,y)$ als Quotient zweier ganzen Functionen aus der Darstellung $\frac{\varphi(x,y)}{\psi(x,y)}$ durch Multiplication von Zähler und Nenner mit derselben ganzen Function $G(x,y)$ hervorgeht. Hieraus folgt leicht, dass $\frac{\varphi(x+a,y+b)}{\varphi(x,y)} = \frac{\psi(x+a,y+b)}{\psi(x,y)} = e^{g(x,y)}$ ist, wenn a, b ein Periodensystem der Function $f(x,y)$ bedeutet, d. h. wenn $f(x+a, y+b) = f(x,y)$ ist. Dabei bezeichnet $g(x,y)$ eine ganze Function. Dieser Satz gestattet viele weitere Folgerungen, z. B. dass jede vierfach periodische Function von zwei Variabeln, die im Endlichen sich überall wie eine rationale Function verhält, durch θ-Functionen darstellbar ist. Hz.

P. Appell. Sur les fonctions périodiques de deux variables. C. R. CXI. 636-638.

Auszug aus einem grösseren Aufsatze, der eine ausführliche Entwickelung der Sätze über periodische Functionen von zwei Variabeln enthält, auf welche sich die vorstehend besprochene Note bezieht. Als interessantes Ergebnis seiner Untersuchungen hebt der Verfasser den Satz hervor, dass jede eindeutige Function von zwei Variabeln, die im Endlichen überall den Charakter einer rationalen Function hat und zwei Periodensysteme besitzt, als Quotient zweier ebensolcher ganzen Functionen darstellbar ist. Diese beiden Functionen können indessen gleichzeitig verschwinden, ohne dass ihr Quotient unbestimmt wird.

Hz.

P. Appell. Sur les fonctions de deux variables quadruplement périodiques de troisième espèce. Ann. de l'Éc. Norm. (3) VII. 143-154.

Im Anschluss an die Terminologie, welche Hr. Hermite in die Theorie der doppeltperiodischen Functionen eingeführt hat, bezeichnet Hr. Appell eine eindeutige Function von zwei Variabeln x, y, die sich bei Vermehrung der Argumente um ein Paar zusammengehöriger Perioden mit einem Exponentialfactor der Gestalt $e^{ax+by+c}$ multiplicirt, als eine periodische Function dritter Art. Doch dürfen die Constanten a und b nicht sämtlich verschwinden. Wenn diese Constanten verschwinden, ohne dass die Constanten c sämtlich Null sind, so heisst die Function periodisch zweiter Art. Wenn endlich auch die Constanten c sämtlich verschwinden, so heisst die Function periodisch schlechthin oder periodisch erster Art. Für die Functionen der ersten und zweiten Art, die keine wesentlich singuläre Stelle im Endlichen haben, gilt der Satz, dass sie zurückgeführt werden können auf ebensolche Functionen mit den Periodensystemen $(2\pi i, 0)$, $(0, 2\pi i)$, (α, β), (α', β'), wobei $\beta = \alpha'$ ist. Lässt man wesentlich singuläre Stellen im Endlichen zu, so sind die Periodensysteme für die Functionen erster und zweiter Art keiner Einschränkung unterworfen, wie Herr Picard gezeigt hat. Der Hauptzweck der vorliegenden Abhandlung ist nun der Nachweis, dass für Functionen dritter Art, auch wenn sie wesentlich singuläre Stellen im Endlichen haben, die Periodensysteme stets auf die Gestalt $(2\pi i, 0)$, $(0, 2\pi i)$, (α, β), (α', β') mit der Bedingung $\beta = \alpha'$ gebracht werden können. Am Schluss der Abhandlung giebt der Verfasser unendliche Reihen an, die vierfach-periodische Functionen dritter Art darstellen. Hz.

H. Poincaré. Sur une classe nouvelle de transcendantes uniformes. Journ. de Math. (4) VI. 313-365.

Ein System von Functionen $\varphi_1(u), \varphi_2(u), \dots, \varphi_n(u)$ besitzt ein „Multiplicationstheorem", wenn $\varphi_1(mu), \varphi_2(mu), \dots, \varphi_n(mu)$ sich als rationale Functionen von $\varphi_1(u), \varphi_2(u), \dots, \varphi_n(u)$ mit von u unabhängigen Coefficienten darstellen lassen, wobei m eine Constante bezeichnet. Beispiele von derartigen Functionssystemen lassen sich leicht bilden. So besitzen die Systeme

$$\varphi_1(u) = \sin u, \quad \varphi_2(u) = \cos u,$$

sowie

$$\varphi_1(u) = \theta^2\left(u - \frac{\omega'}{2}\right), \quad \varphi_2(u) = \theta(u-\alpha)\,\theta(u+\alpha-\omega'), \quad \varphi_3(u) = e^{\frac{au}{2}},$$

wo α und ω' Constanten bedeuten, je ein Multiplicationstheorem, wobei noch der Constante m jeder ganzzahlige Wert beigelegt werden kann.

Der Verfasser stellt sich nun die Aufgabe, diejenigen Functionssysteme, welche ein Multiplicationstheorem besitzen, näher zu untersuchen. Doch beschränkt er sich auf den Fall, wo $|m| > 1$ ist und überdies die Functionen des Systems sich in der Umgebung von $u = 0$ wie rationale Functionen verhalten. Es ist dann keine weitere Beschränkung, wenn man annimmt, dass die Functionen für $u = 0$ sämtlich verschwinden. Da vermöge des Multiplicationstheorems die für die Umgebung ϱ der Nullstelle eindeutig gegebenen Functionen sich eindeutig auf die Umgebung $|m|.\varrho$ fortsetzen lassen, so folgt, dass die Functionen in der ganzen u-Ebene eindeutig sind. Sind nun

$$(1) \qquad \varphi_i(mu) = R_i(\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

die Gleichungen des Multiplicationstheorems, so schliesst der Verfasser, indem er $u = 0$ setzt, dass die rationale Function R_i verschwindet, wenn alle Argumente gleich Null sind. Dieser Schluss ist aber nicht bindend, da R_i für $u = 0$ auch verschwinden kann, wenn $R_i(0, 0, \ldots, 0)$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annimmt. Setzt man also mit dem Verfasser $R_i(0, 0, \ldots, 0) = 0$, so implicirt dies eine weitere Beschränkung. Vergleicht man in den Gleichungen (1) die Coefficienten von u, welche bei der Entwickelung der linken und rechten Seiten nach Potenzen von u auftreten, so erhält man die n Gleichungen

$$(2) \qquad mA_i = B_{i1}A_1 + B_{i2}A_2 + \cdots + B_{in}A_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dabei bedeutet A_i den Wert von $\frac{d\varphi_i(u)}{du}$ für $u = 0$ und B_{ik} den Wert von $\frac{\partial R_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_k}$ für $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Der

Verfasser beschränkt sich nun weiter auf diejenigen Systeme $\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)$, bei welchen wenigstens eine der Grössen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nicht verschwindet. Es folgt dann aus den Gleichungen (2), dass die ganze Function n^{ten} Grades von S:

$$(3) \qquad F(S) = \begin{vmatrix} B_{11}-S & B_{12} & \ldots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22}-S & \ldots & B_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{n1} & B_{n2} & \ldots & B_{nn}-S \end{vmatrix}$$

für $S = m$ verschwinden muss. Wenn nun die rationalen Functionen $R_i(x_1, \ldots, x_n)$ gegeben und die Bedingungen $R_i(0, \ldots, 0) = 0$ und $F(m) = 0$ erfüllt sind, so zeigt sich, dass man die Gleichungen (1) formell stets durch n gewöhnliche Potenzreihen $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)$ befriedigen kann, wenn nur $F(m^2), F(m^3), \ldots$ sämtlich von Null verschieden sind. Diese Potenzreihen enthalten noch h willkürliche Constanten $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h$, wenn die Determinante $F(m)$ mit ihren Unterdeterminanten der ersten $h-1$ Ordnungen verschwindet, die Unterdeterminanten h^{ter} Ordnung nicht mehr. Die Reihen $\varphi_1(u), \ldots, \varphi_n(u)$ sind dann nach Potenzen von $\beta_1 u, \beta_2 u, \ldots, \beta_h u$ angeordnet und gehen, wenn man $\beta_1 u = u_1$, $\beta_2 u = u_2$, $\ldots$, $\beta_h u = u_h$ setzt, in n Reihen $\varphi_1(u_1, u_2, \ldots, u_h), \ldots, \varphi_n(u_1, u_2, \ldots, u_h)$ über, die formell den Gleichungen

$$\varphi_i(mu_1, mu_2, \ldots, mu_h) = R_i[\varphi_1(u_1, \ldots, u_h), \ldots, \varphi_n(u_1, \ldots, u_h)]$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

genügen. Es handelt sich nun darum, zu beweisen, dass die gefundenen Reihen in einem genügend klein gewählten Bezirk convergiren. Dieser Beweis beruht auf der Methode der Reihenvergleichung, die bei dem Nachweise der Existenz der Lösung von Differentialgleichungen angewandt zu werden pflegt. Nach Erledigung dieses wesentlichen Punktes wendet sich der Verfasser zu der Darstellung der Functionen $\varphi_1(u), \ldots, \varphi_n(u)$ durch Quotienten ganzer (transcendenter) Functionen. Es ergiebt sich hier der Satz, dass diese Darstellung immer in der Gestalt $\varphi_1(u) = \dfrac{\psi_1(u)}{\psi_{n+1}(u)}, \ldots, \varphi_n(u) = \dfrac{\psi_n(u)}{\psi_{n+1}(u)}$ und zwar so möglich ist, dass die ganzen Functionen $\psi_i(u)$ ein Multiplicationstheorem

der Form

$$\psi_i(mu) = G_i(\psi_1(u), \psi_2(u), \ldots, \psi_{n+1}(u)) \quad (i = 1, 2, \ldots, n+1)$$

besitzen, wo $G_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ ganze rationale Functionen von $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ bedeuten. Die weiteren Untersuchungen des Verfassers beziehen sich auf die „Cremona'schen" Functionen. Darunter ist Folgendes zu verstehen. Das Multiplicationstheorem heisst „Cremonaisch", wenn die Gleichungen (1) eine eindeutige Umkehrung gestatten, wenn also aus diesen Gleichungen $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)$ als rationale Functionen von $\varphi_1(mu)$, $\varphi_2(mu)$, $\ldots, \varphi_n(mu)$ darstellbar sind. Ist dann überdies $B_{ii} = m$ und $B_{ik} = 0$ $(i \lesssim k)$, so heissen die Functionen $\varphi_1(u), \ldots, \varphi_n(u)$ „Cremona'sche Functionen." Diese Functionen enthalten nach dem Obenbemerkten noch n willkürliche Constanten $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ und gehen, wenn $\beta_1 u, \beta_2 u, \ldots, \beta_n u$ bez. mit $u_1, u_2, \ldots, u_n$ bezeichnet werden, in n Functionen

$$(4) \qquad z_i = \varphi_i(u_1, u_2, \ldots, u_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

über. Die Gleichungen (4) lassen sich für hinreichend kleine Werte von $|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_n|$ umkehren und ergeben

$$(5) \qquad u_i = \psi_i(z_1, z_2, \ldots, z_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Eine erste Frage, welche der Verfasser behandelt, bezieht sich auf den Existenzbereich der Functionen $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$. Die Functionen existiren, allgemein zu reden, nur für die Stellen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ eines gewissen Gebietes D. Untersucht man nämlich, ob $u_1, u_2, \ldots, u_n$ so bestimmt werden können, dass die aus Gleichung (4) folgenden Werte von $z_1, z_2, \ldots, z_n$ vorgeschriebene Werte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sind, so erkennt man, dass dies dann, und nur dann, der Fall ist, wenn die unbegrenzte Iterirung der Cremona'schen Transformation die Stelle $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ in die Stelle $(0, 0, \ldots, 0)$ überführt. Die Gesamtheit aller Stellen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ von dieser Eigenschaft bildet das Gebiet D. In diesem Gebiete sind die Functionen $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ eindeutig; sie gehen bei Anwendung der Cremona'schen Transformation bis auf den constanten Factor m in sich selber über, und der Quotient je zweier dieser Functionen bleibt also vollständig ungeändert. Jede andere Function $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ von derselben

Eigenschaft ist eine rationale Function der Quotienten $\frac{\psi_1}{\psi_n}$, $\frac{\psi_2}{\psi_n}$, $\ldots$, $\frac{\psi_{n-1}}{\psi_n}$, wenn sie in dem Gebiete D meromorph ist.

Zum Schlusse wendet der Verfasser diese allgemeine Theorie auf den besonderen Fall an, wo $n = 2$ ist und die Cremona'sche Transformation $\left(x, y; \frac{mx}{1-\beta x}, \frac{ay+b}{cy+d}\right)$ lautet. Die Grösse m ist dabei, wie durchgängig in der Abhandlung, der Multiplicator; ferner bezeichnet β eine Constante und a, b, c, d ganze rationale Functionen von x, die sich für $x = 0$ auf $a = m$, $b = 0$, $c = c_0$, $d = 1$ reduciren. Hz.

B. Bukreieff. Ueber die Fuchs'schen Functionen nullten Ranges mit einem symmetrischen Fundamentalpolygon. Kiew. 1889. (Russisch.)

Die Arbeit besteht aus drei Capiteln.

Im ersten Capitel stellt sich der Verfasser die Aufgabe der Abbildung einer gegebenen einfach zusammenhängenden Fläche auf die Halbebene. Vor allem betrachtet er die Functionen der complexen Veränderlichen, welche einen gegebenen rationalen Charakter innerhalb der abgebildeten Fläche haben und auf der Kontur nur reelle endliche Werte annehmen. Solche Functionen heissen Functionen des Typus G. Es wird gezeigt, dass jede Function des Typus G rational und mit reellen Coefficienten durch ein und dasselbe Paar der Functionen desselben Typus $G_1(z)$ und $G_2(z)$ ausgedrückt werden kann, und dass diese Functionen durch eine algebraische Gleichung nullten Ranges mit reellen Coefficienten verbunden sind. Hiernach wird eine rationale Function von $G_1(z)$ und $G_2(z)$ mit reellen Coefficienten bestimmt, durch welche $G_1(z)$ und $G_2(z)$ sich umgekehrt rational und mit reellen Coefficienten ausdrücken lassen. Mit Hülfe dieser Function t ist die gestellte Abbildungsaufgabe gelöst; dabei enthält die allgemeine Lösung drei willkürliche Constanten.

Im zweiten Capitel behandelt der Verfasser die Frage von

der analytischen Fortsetzung sowohl der abzubildenden Function t als auch der inversen $z = \Phi(t)$. Ueber die analytischen Linien, aus welchen die Kontur der abgebildeten Fläche besteht, wird jetzt die Voraussetzung gemacht, dass sie Kreisbogen sind. Dann wird gezeigt, dass jedem geschlossenen Wege der Veränderlichen t eine lineare Transformation der Function z entspricht. Das Capitel schliesst mit der Ermittelung der Bedingungen, die zu erfüllen sind, wenn $t = F(z)$ eine Fuchs'sche Function von z mit einem symmetrischen Fundamentalpolygon ist.

Im dritten Capitel wird die Differentialgleichung ermittelt, deren Integrale $y_1 = \sqrt{F'(z)}$, $y_2 = z\sqrt{F'(z)}$ sind. Die Differentialgleichung hat die Form $\frac{d^2y}{dt^2} = R(t).y$, wo $R(t)$ eine rationale Function von t ist. Die Abhandlung schliesst mit einigen Bemerkungen über die Bestimmung der Parameter dieser rationalen Function, wenn das Fundamentalpolygon gegeben ist. Wi.

O. Biermann. Ueber die Darstellung der Fuchs'schen Functionen erster Familie durch unendliche Producte.

Monatsh. f. Math. I. 49-70.

Wenn man die Null- und Unendlichkeitsstellen angiebt, so reichen die Thetafuchs'schen Functionen nicht aus, um die Theorie der Fuchs'schen Functionen zu entwickeln, man braucht vielmehr Hülfsfunctionen, deren Null- und Unendlichkeitsstellen stets ersichtlich bleiben, also Producte gewisser Primfunctionen. (Vgl. des Verfassers Arbeit in Wien. Ber. XCII, F. d. M. XVII. 1885. 411.)

Hier werden zuerst die Sätze zusammengestellt, welche für die Bildung einer Gruppe linearer Substitutionen erster Familie nötig sind. Hat man dann auf Grund derselben eine Gruppe von n Fundamentalsubstitutionen:

$$(z, f(z)) = \left(z, \frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}\right), \qquad \alpha_i\delta_i - \beta_i\gamma_i = 1,$$

welche den Einheitskreis ungeändert lassen, abgeleitet, so ist

die Aufgabe zu lösen, eindeutige analytische Functionen $F(z)$ zu bilden, welche durch verschiedene Substitutionen der Gruppe nicht geändert werden. Eine solche Function findet der Verfasser in der Gestalt:

$$\tau(z, a_0) = \prod_{\nu=0}^{\nu=\infty}\left(1 - \frac{a_\nu - b_\nu}{z - b_\nu}\right) e^{\frac{a_\nu - b_\nu}{z - b_\nu}},$$

und jede andere geht durch Multiplication mit einer willkürlichen Function von der Form $e^{G(x)}$ aus ihr hervor, wenn $G(x)$ eine innerhalb des Einheitskreises durchaus reguläre und eindeutige Function bedeutet.

Hebt man die hierbei gemachte Voraussetzung über die Lage der Unendlichkeitsstellen a_λ innerhalb der Fundamentalpolygone auf und nimmt an, dass die Stellen $f_\nu(a)$ mit den p-fach zu zählenden Ecken eines m-gliedrigen Cyklus zusammenfallen, so entsteht die analoge Function:

$$\prod_{\nu=0}^{\nu=\infty}\left(1 - \frac{a_\nu - b_\nu}{z - b_\nu}\right)^p e^{p\frac{a_\nu - b_\nu}{z - b_\nu}}.$$

Hierauf wird das Verhalten der Function $\tau(z, a_0)$ hinsichtlich einer Substitution der obigen Gruppe untersucht; dann wird der allgemeinste Ausdruck einer innerhalb des Einheitskreises eindeutigen analytischen Function mit vorgegebenen Null- und Unendlichkeitsstellen in der Gestalt gefunden:

$$F(z) = C \cdot \frac{\prod\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa} \tau(z, c_0^{(\varkappa)})}{\prod\limits_{\lambda=1}^{\lambda} \tau(z, c^{(\lambda)})} e^{G(z)},$$

und endlich wird das Verhalten derselben hinsichtlich einer Substitution der Gruppe gekennzeichnet. Dann ist es möglich, die Bedingungen anzugeben, unter welchen die Function eine Fuchs'sche wird; doch hat der Verfasser dieselben noch nicht auf die notwendigen und hinreichenden Bedingungen zurückgeführt. Die vorliegende Arbeit steht, wie der Verfasser am Schlusse bemerkt, in engem Zusammenhange mit der von Herrn Stahl in Math. Ann. XXXIII (1888) veröffentlichten Abhandlung über die Productdarstellung

eindeutiger linear-periodischer Functionen, von der er jedoch erst nach Vollendung seines Aufsatzes Kenntnis bekommen hat.

Bm.

X. Stouff. Sur de nouvelles fonctions harmoniques à trois variables analogues aux fonctions thêtafuchsiennes. Toulouse Ann. IV A. 5-19.

In seiner Arbeit über die Klein'schen Gruppen weist Herr Poincaré auf die Bildung von Substitutionsgruppen mit drei Variabeln hin, welche den Fuchs'schen Gruppen analog sind. Es liegt also die Aufgabe nahe, solche Functionen zu suchen, welche der bekannten Gleichung $\varDelta V = 0$ genügen und einfache Transformationen erleiden, wenn man die Variabeln den Substitutionen der Gruppe unterwirft. Im ersten Abschnitte der Abhandlung betrachtet der Verfasser die Substitution:

$$\begin{pmatrix} u, & \dfrac{\lambda\mu_0 + ca_0 z^2}{\mu\mu_0 + aa_0 z^2} \\ z, & \dfrac{z}{\mu\mu_0 + aa_0 z^2} \end{pmatrix},$$

welche die x, y ungeändert lässt, und woselbst $u = x + iy$, $\mu = au + b$, $\lambda = cu + d$ ist und a, b, c, d vier complexe Zahlen bedeuten, die der Gleichung $bc - ad = 1$ genügen und so beschaffen sind, dass der reelle wie der imaginäre Teil ganze Zahlen darstellen, während der Index 0 die conjugirte complexe Zahl angiebt.

Ist nun S_i irgend eine Substitution dieser Gruppe und

$$r_i = \sqrt{\mu_i \mu_{i_0} + a_i a_{i_0} z^2},$$

so wird gezeigt, dass die $n+1$ Functionen:

$$\varphi_{nki} = \frac{\mu_i^{n-k}(u_0 \mu_i + a_i z^2)^k}{r_i^{2n+1}} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

der Gleichung $\varDelta V = 0$ genügen. Das Gleiche lässt sich dann von der allgemeineren Function beweisen, welche durch die für $n \geqq 4$ convergente unendliche Reihe

$$\sum_i \varphi_{nki}$$

dargestellt wird. Hieraus ergeben sich dann Functionen, die den Zetafuchs'schen Functionen des Herrn Poincaré ähnlich sind.

Die Substitutionen, welche die xy-Ebene ungeändert lassen, werden im zweiten Teil der Abhandlung so umgeformt, dass sie eine Kugel mit dem Radius 1, die Fundamentalkugel, invariant lassen, woraus sich dann analoge Functionen dreier Variabeln ergeben. Im dritten Abschnitte endlich wird noch gezeigt, wie sich Functionen construiren lassen, welche aus den Substitutionen einer Gruppe der einfachsten Transformationen hervorgehen.

Bm.

L. Fuchs. Bemerkung zu der Arbeit im Bande 75 Seite 177 dieses Journals. J. für Math. CVI. 1-4.

In der angeführten Stelle (F. d. M. V. 1873. 235) handelt es sich um den grössten Radius R eines um den Nullpunkt der w-Ebene beschriebenen Kreises, innerhalb dessen nicht zwei verschiedene Werte w existiren, die der Function

$$z = F(w) = \frac{f(w)}{wg(w)},$$

wo $f(w)$ und $g(w)$ ganze rationale, für $w = 0$ nicht verschwindende Functionen bedeuten, denselben Wert erteilen. R ergab sich als der Modul derjenigen Wurzel der Gleichung $F'(w) = 0$, die den kleinsten Modul unter allen Wurzeln hat. Unter besonderen Bedingungen für die Coefficienten von $f(w)$ und $g(w)$ kann jedoch R einen kleineren Wert haben. Dieser Ausnahmefall wird in der vorliegenden Note präcisirt (vgl. das folgende Referat).

Hr.

P. A. Nekrassoff. Ueber den Fuchs'schen Grenzkreis. Mosk. Math. Samml. XIV. 537-548. (Russisch.)

Es wird eine allgemeine Regel zur Bestimmung des Radius des Grenzkreises gegeben und die Vorschrift des Hrn. Fuchs (J. für Math. CVI) kritisirt (vgl. das vorangehende Referat).

Wi.

G. Humbert. Sur le théorème d'Abel et quelques-unes de ses applications à la géométrie. (Suite et fin.) Journ. de Math. (4) VI. 233-292.

Dieser zweite Teil einer bereits in derselben Zeitschrift (4) V. 81 (vgl. F. d. M. XXI 1889. 441) begonnenen Arbeit über das Abel'sche Theorem enthält hauptsächlich Anwendungen der dort gegebenen Sätze über vielfache Abel'sche Integrale. In den Abschnitten I und II werden interessante Theoreme aufgestellt, welche sich auf begrenzte Flächenteile beziehen, die zwischen den Schnittcurven zweier Flächensysteme mit einer Ebene, bezüglich einer Kugel enthalten sind. Der dritte reichhaltigste Abschnitt beschäftigt sich mit der Quadratur gewisser Flächen auf dem dreiaxigen Ellipsoid. Zunächst gelingt es, durch Einführung der elliptischen $\wp$-Function einen Differentialausdruck für die Differenz zwischen dem Mantel (S) des von einem Punkte der Focalhyperbel an das Ellipsoid gehenden Tangentialkegels und der Fläche (σ) der zwischenliegenden Kalotte des Ellipsoides zu finden.

Man erhält hierfür den einfachen Ausdruck:

$$dS - d\sigma = -\pi\sqrt{\frac{\varrho}{3}}(\wp u - 1)du,$$

wobei $\varrho = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$ ist, während die Halbaxen des Ellipsoids a, b, c sind. Ferner ist $\wp'^2(u) = 4(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3)$

$$\text{und } e_1 = 1 - \frac{3b^2c^2}{\varrho},\; e_2 = 1 - \frac{3a^2c^2}{\varrho},\; e_3 = 1 - \frac{3a^2b^2}{\varrho}.$$

Je nach den Grenzen, zwischen denen die Integration dieser Formel ausgeführt wird, ergeben sich mehrere Sätze, und ausserdem führt die obige Formel dazu, die Zone zu bestimmen, welche zwischen den Basisellipsen zweier solcher Rotationskegel liegt. Für diese ergiebt sich dann speciell der Satz: „Liegen zwei solche Zonen in der Weise, dass die vier sie begrenzenden Ebenen eine zu dem gegebenen Ellipsoid homothetische Fläche berühren, dann ist die Summe oder Differenz ihrer Flächen algebraisch ausdrückbar.“ Ein anderes Flächenstück des Ellipsoides, welches sich mittels elliptischer Functionen quadriren

lässt, ist jenes, für welches die Normalen der Randcurve mit einer der drei Hauptaxen beständig einen constanten Winkel bilden. Dieses Flächenstück wurde schon von Jellet (Cambr. and Dubl. Math. Journ. I. 57) und Lebesgue (Journ. de Mathém. (1) XI. 332) bestimmt; derselbe zeigte, dass man den Winkel der Normalen so wählen kann, dass drei solche Zonen zu je zweien eine algebraische Differenz aufweisen. Lebesgue's Formel wird vom Autor durch Einführung der $\wp$-Function wesentlich vereinfacht. Ferner leitet er aus der obigen Definition einen allgemeineren Fall ab, indem er statt der Axe, mit welcher die Normalen einen constanten Winkel bilden, einen beliebigen Durchmesser einführt. Auch die von einer solchen Curve eingeschlossene Fläche lässt sich durch elliptische Functionen integriren, und die gefundene Formel ergiebt den geometrischen Satz: „Wenn man auf dem Ellipsoide E_1, das confocal zu dem Ellipsoide E und ausserhalb desselben gelegen ist, irgend einen Centralkegelschnitt nimmt und um diesen und das Ellipsoid E eine Developpable beschreibt, so bleibt die Fläche auf E zwischen den beiden Aesten der Berührungscurven bis auf eine algebraische Function constant, wenn der Kegelschnitt sich auf E_1 bewegt.“ Daran schliesst sich noch folgender bemerkenswerter Satz: „Nimmt man auf dem Ellipsoide E_1 einen beliebigen Kegelschnitt, dessen Ebene durch das Centrum geht, und beschreibt um ihn und um E eine Developpable, so ist der Ueberschuss der Fläche dieser letzteren, begrenzt von Kegelschnitt und Ellipsoid E, über die Fläche des Ellipsoids, welche innerhalb dieser Developpabeln liegt, eine Constante.“ Wählt man den Kegelschnitt in einer der Hauptebenen von E, so erhält man als speciellen Fall dieses Theorems einen Satz, den schon Lebesgue aus seinem Theorem folgerte.

Des weiteren wird vom Verfasser noch diejenige ellipsoidische Fläche bestimmt, welche zwischen den beiden Berührungscurven der gemeinsamen Developpabeln eines Ellipsoids und einer Kugel liegt; sie erweist sich ausdrückbar durch elliptische und algebraische Functionen, während sich die algebraische Summe zweier Flächenstücke des Ellipsoids, die einerseits von

den Schnittcurven zweier parallelen Ebenen, andererseits von zwei Curven der erwähnten Gattung begrenzt werden, als algebraische und logarithmische Function des Parameters der Kugel und als ganze Function zweiten Grades des veränderlichen Parameters der parallelen Ebenen ausdrückt. Ein ganz ähnlicher Satz gilt dann auch, wie noch im IV. Abschnitte gezeigt wird, für jede beliebige algebraische Fläche, und ausserdem besteht ein allgemeines Theorem, welches erlaubt, auf irgend einer Oberfläche auf unendlich viele Arten Flächenstücke abzugrenzen, deren algebraische Summe durch elementare Functionen ausdrückbar ist. Dasselbe lautet: „Ist auf der Fläche $f=0$ eine Reihe von Curven durch eine Gleichung von der Form:

$$f'x^2+f'y^2+f'z^2=\varphi^2(x,y,z,u)$$

definirt, wo φ ein ganzes Polynom höchstens vom $(m-1)^{\text{ten}}$ Grade in x, y, z und von beliebigem Grade in u ist, so ist die algebraische Summe der Flächenstücke, welche zwischen zwei dieser Curven und zwei parallelen Ebenen liegen, eine rationale und logarithmische Function des Parameters u und eine Function zweiten Grades des Parameters, von welchem die parallelen Ebenen abhängen.“ Bm.

Capitel 2.

Besondere Functionen.

A. Elementare Functionen (einschliesslich der Gammafunctionen und der hypergeometrischen Reihen).

E. Schulze. **Die vierte Rechenstufe.** Pr. Friedr.-Gymn. Berlin. R. Gärtner's Verlagshandlung H. Heyfelder.

E. Schulze. **Die vierte Rechenstufe.** Auszug aus der Progr.-Arb. des Friedrichs-Gymn. zu Berlin. Ostern 1890. Hoppe Arch. (2) IX. 320-326.

Der Verfasser hatte schon früher einen Aufsatz über die

vierte Rechenstufe veröffentlicht, und zwar in Teil III der zweiten Reihe des Hoppe'schen Archivs (1885). Man lese zunächst das Referat, welches der Referent der vorliegenden Arbeiten über jenen Aufsatz in diesem Jahrbuch erscheinen liess. Der Verfasser spricht aus, dass er eine Fortsetzung jenes Aufsatzes bis dahin unterlassen hätte, weil er zu der Ueberzeugung gelangt wäre, dass die Einführung einer Operation, welche aus der Potenzirung so hervorgehe, wie letztere aus der Multiplication, überflüssig sei. Nur die Thatsache, dass Männer wie Hankel und Grassmann die Gleichberechtigung der vierten Rechenstufe mit den drei ersten als selbstverständlich betrachtet haben, habe ihn zu dem neuen Aufsatze ermutigt. Referent möchte hierzu bemerken, dass vom Standpunkte der das Gesetz der Permanenz anerkennenden reinen Arithmetik die eingehende Untersuchung der Operationen vierter und höherer Stufe nicht allein nicht überflüssig, sondern sogar dringend geboten ist. Freilich ist von der Einführung dieser Operation eine so gewaltige Förderung der Arithmetik nicht zu erwarten, wie die Förderung war, welche die Arithmetik durch Einführung der Potenzirung und ihrer beiden Umkehrungen erhielt. Der Grund hierfür ist darin zu suchen, dass bei der Operation, aus welcher die Potenzirung, ursprünglich durch abgekürzte Schreibweise, hervorgeht, das Commutationsgesetz gültig ist, während bei der Potenzirung, als der Quelle der Operation vierter Stufe, das Commutationsgesetz ungültig ist. Ueberdies ist ein wesentlicher Fortschritt in den arithmetischen Forschungsmitteln bei der Einführung einer Operation höherer Stufe erst dadurch zu erzielen, dass man die active Zahl (Multiplicator, Exponent, Zahl g des Verfassers) von dem ihr durch die Ableitung aus der Operation niederer Stufe auferlegten Zwange befreit, notwendig ganzzahlig zu sein. Beispielsweise stellt eine Potenz mit ganzem Exponenten nichts mehr als eine bequem geschriebene Multiplication dar, und zu etwas Neuem kommt man nur dadurch, dass es gelingt, Formeln aufzustellen, bei denen der Exponent eine Differenz und ein Quotient wird, und dass man sich entschliesst, diese Formeln auf den Fall zu übertragen, wo der Subtrahendus

grösser als der Minuendus und der Divisor kein Teiler des Dividendus ist. Derartige Formeln existiren aber bei der Operation vierter Stufe nicht mehr, und darum erfährt die Arithmetik durch Einführung dieser Operation keine so wesentliche Förderung. Freilich sieht Herr Schulze am Schluss seiner Arbeit auch die active Zahl der Verknüpfung vierter Stufe als Variable an und bespricht den Fall, dass sie negativ ist. Doch sind die erhaltenen Resultate naturgemäss mehr analytischer als arithmetischer Natur.

Nach diesen allgemeineren Bemerkungen möchte der Referent auf einige besonders interessante Einzelheiten der inhaltreichen Arbeit eingehen. Mit Gerlach bezeichnet der Verfasser

$$z^z \text{ mit } {}^2z,\; z^{(z^z)} \text{ mit } {}^3z$$

und überhaupt:

$$z^{\left(z^{\left(z^{\left(z^{\cdot^{\cdot}}\right)}\right)}\right)}$$

mit ${}^gz$, wenn g-mal der Buchstabe z vorkommt. Diejenige Umkehrung, welche die passive Zahl z sucht, bezeichnet er mit $\overline{Z}\sqrt[g]{\;}$, wo $Z = {}^gz$ ist. Nach eingehender, auf Differentiiren beruhender Untersuchung der Curve $Z = {}^gz$ für reelle, positive Werte von z und Z liefert der Verfasser eine neue interessante Reihen-Entwickelung für ${}^gz$, welche nach Potenzen des natürlichen Logarithmus von z fortschreitet. Die Mitteilung des Coefficienten-Gesetzes würde hier zu viel Raum kosten. In den nächsten Capiteln wird der Grenzwert von ${}^gz$ für $g = \infty$ behandelt und damit eine kritische Prüfung der Betrachtungen und Resultate gewonnen, welche schon Eisenstein im XXVIII. Bande des Journ. für Math. über diesen Grenzfall geliefert hat. Bei der nun folgenden Untersuchung der Umkehr-Function $\overline{Z}\sqrt[g]{\;}$ wird für die Reihen-Entwickelung die Bürmann-Lagrange'sche Reihe benutzt. Hiernach wird die Function $Z = {}^za$, wo z die Variable ist, untersucht und in eine Reihe entwickelt. Am Schluss wird die active Zahl als negativ ganz betrachtet, wie schon oben erwähnt ist. Möge die interessante Arbeit des Herrn Verfassers

zu weiteren Untersuchungen über die vierte Rechenstufe die Anregung geben. Scht.

F. Rogel. Ein Discontinuitätsfactor. Hoppe Arch. (2) IX. 334-336.

Aus der Identität

$$n^p = \binom{np}{p} - \binom{p}{1}\binom{n(p-1)}{p} + \binom{p}{2}\binom{n(p-2)}{p} - + \cdots \pm \binom{n}{p}$$

leitet der Verfasser, indem er die einzelnen Glieder rechter Hand nach aufsteigenden Potenzen von n entwickelt, die Thatsache her, dass der Ausdruck

$$\frac{1}{p!}\left[p^m - \binom{p}{1}(p-1)^m + \binom{p}{2}(p-2)^m - + \cdots \pm \binom{p}{p-1}\right]$$

gleich 1 oder 0 ist, je nachdem $m = p$ oder $m < p$ ist. Hz.

A. Dumoulin. Note sur le développement en série des fonctions sinus, cosinus et de la fonction exponentielle. Belg. Bull. (3) XIX. 541-542.

Man erhält diese Reihen, indem man die Ungleichungen $\cos x < 1$, $e^{-x} < 1$ hinreichend oft integrirt. Mn. (Lp.)

M. d'Ocagne. Méthode nouvelle pour calculer $\sin ma$ et $\cos ma$ en fonction de $\sin a$ et de $\cos a$. Nieuw Archief XVII. 229-232.

Dieser Aufsatz schliesst sich an einen anderen des nämlichen Verfassers über eben diesen Gegenstand an (Nouv. Ann. 1884, 1890). Aus der Anwendung der daselbst gemachten Schlussfolgerungen ergiebt sich hier eine einfache Ableitung für obengenannte Entwickelung und finden sich die bekannten auch im Serret'schen Lehrbuche mitgeteilten Formeln für $\sin na$ und $\cos na$ wieder. G.

M. d'Ocagne. Sur le développement de $\sin n\varphi$ et de $\cos n\varphi$ suivant les puissances de $\cos\varphi$. Teixeira J. IX. 161-162.

In diesem Artikel bringt Hr. d'Ocagne einen ganz elementaren Beweis für die betreffenden Entwickelungen.

Tx. (Lp.)

F. ROGEL. Die Entwickelung der Exponentiellen in eine unendliche Factorenfolge. Hoppe Arch. (2) IX. 206-210.

Durchläuft c_m alle Producte aus m ungleichen Primzahlen mit Ausschluss der Primzahl 2, so ist

$$e^x = \prod_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1+x^{c_m}}{1-x^{c_m}}\right)^{\frac{(-1)^m}{2c_m}} \qquad (c_0=1),$$

wie man erkennt, wenn man den Logarithmus des unendlichen Productes nach Potenzen von x entwickelt. Durch Wahl specieller Werte von x erhält man bemerkenswerte Darstellungen von Potenzen der Zahl e durch unendliche Factorenfolgen.

Hz.

F. ROGEL. Darstellung der harmonischen Reihen durch Factorenfolgen. Hoppe Arch. (2) IX. 297-319.

Durch Umformungen der bekannten Euler'schen Identität

$$\Pi\left(\frac{p^n}{1-p^n}\right) = \Sigma\frac{1}{z^n},$$

wo p alle Primzahlen, z alle ganzen Zahlen durchläuft, und ähnlicher verwandter Identitäten leitet der Verfasser eine Reihe anderer Identitäten ab. Als Beispiel führen wir an:

$$\mathfrak{S}_n = \log\prod_{m=0}^{\infty}(S_{nc_m})^{\frac{(-1)^m}{c_m}},$$

wo c_m alle Producte aus m ungleichen Primzahlen durchläuft ($c_0 = 1$), $\mathfrak{S}_n$, S_n die Summe der reciproken n^{ten} Potenzen aller Primzahlen, bez. aller Zahlen bedeuten. Ist n eine gerade Zahl, so lassen sich die Summen S_{nc_m} durch die Bernoulli'schen Zahlen ausdrücken, und die Formel kann dem entsprechend in eine andere Gestalt gebracht werden.

Hz.

T.-J. STIELTJES. Sur la fonction exponentielle. C. R. CX. 267-270.

Ein sehr einfacher Beweis der Transcendenz von e, der auf die Hermite'sche Formel

$$(1) \qquad \int_0^a e^{-xz} F(z)\,dz = \mathrm{F}(0) - e^{-ax}\mathrm{F}(a)$$

gegründet ist, wo $F(z)$ eine ganze rationale Function von z vom Grade M und

$$\mathrm{F}(z) = \frac{F(z)}{x} + \frac{F'(z)}{x^2} + \cdots + \frac{F^{(M)}(z)}{x^{M+1}}$$

ist. Um zu zeigen, dass die Gleichung

$$N + N_1 e^a + N_2 e^b + \cdots + N_n e^h = 0$$

unmöglich ist, wählt Stieltjes

$$F(z) = z^{\mu}(z-a)^{\mu+\varkappa_1}(z-b)^{\mu+\varkappa_2}\dots(z-h)^{\mu+\varkappa_n},$$

wo die Bestimmung der ganzen Zahlen μ, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, ..., $\varkappa_n$, von denen die letzten n einen der Werte 0 und 1 erhalten, vorbehalten bleibt. Unter Benutzung der Formel (1) für $x = 1$ ergeben sich dann die Gleichungen

$$\frac{e^a}{\mu!}\int_0^a e^{-z}F(z)\,dz = e^a P - P_1,\quad \frac{e^b}{\mu!}\int_0^b e^{-z}F(z)\,dz = e^b P - P_2,\ \dots,$$
$$\frac{e^h}{\mu!}\int_0^h e^{-z}F(z)\,dz = e^h P - P_n,$$

wo P, P_1, P_2, ..., P_n ganze Zahlen bedeuten. Es folgt nun weiter in bekannter Weise, dass für ein genügend gross gewähltes μ die Gleichung

$$N_1 . e^a \int_0^a e^{-z}F(z)\,dz + N_2 e^b \int_0^b e^{-z}F(z)\,dz + \cdots + N_n e^h \int_0^h e^{-z}F(z)\,dz = 0$$

oder

$$\int_0^h \Phi(z) . e^{-z}F(z)\,dz = 0$$

bestehen muss, wo $\Phi(z)$ eine unstetige Function von z bedeutet, die in den Intervallen $0 \dots a$, bezw. $a \dots b$ etc. die constanten Werte $N_1 e^a + N_2 e^b + \cdots + N_n e^h$, bezw. $N_2 e^b + \cdots + N_n e^h$ etc. besitzt. Die Function $\Phi(z)e^{-z}F(z)$ hat aber in dem Integrationsintervalle $0 \dots h$ beständig einen positiven Wert, wenn μ eine gerade Zahl ist und $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, ..., $\varkappa_n$ passend gewählt werden. Ist aber $\Phi(z)e^{-z}F(z)$ beständig positiv, so kann $\int_0^h \Phi(z)e^{-z}\,F(z)\,dz$

nicht $=0$ sein, und also ist auch die Gleichung

$$N+N_1 e^a+N_2 e^b+\cdots+N_n e^h=0$$

unmöglich. Hz.

O. Venske. Ueber eine Abänderung des ersten Hermite'schen Beweises für die Transcendenz der Zahl e. Gött. Nachr. 335-338.

In seiner klassischen Abhandlung „Sur la fonction exponentielle" hat Hermite zwei Beweise für die Transcendenz der Zahl e gegeben, von denen jedoch nur der zweite von Hermite selber als streng angesehen wird. Der Verfasser zeigt in der vorliegenden Note, dass eine leichte Abänderung genügt, um auch den ersten Hermite'schen Beweis strenge zu machen. Nach Ansicht des Referenten ist indessen auch der Hermite'sche erste Beweis in seiner ursprünglichen Fassung streng. Doch ist trotzdem die vom Verfasser gegebene Abänderung von Interesse, da sie mit wesentlich einfacheren Hülfsmitteln operirt. Hz.

J. Molk. Exposition de la démonstration, donnée par M. Weierstrass de ce théorème: π est un nombre transcendant. Darboux Bull. (2) XIV. 186-199.

J. Molk. Exposition de la démonstration, donnée par M. Weierstrass, des théorèmes de M. Lindemann sur la fonction exponentielle. Darboux Bull. (2) XIV. 228-240.

Der Verfasser giebt in französischer Sprache eine Darstellung des Inhalts von Weierstrass' Abhandlung: „Zu Lindemann's Abhandlung: Ueber die Ludolph'sche Zahl". (Berl. Ber. 1885, F. d. M. XVII. 414). Hz.

J. J. Sylvester. 1) Sur le rapport de la circonférence au diamètre. C. R. CXI. 778-780.

J. J. Sylvester. 2) Preuve que π ne peut pas être racine d'une équation algébrique à coefficients entiers. C. R. CXI. 866-871.

Der Verfasser hat die in der ersten Note enthaltenen Entwickelungen in der zweiten zurückgenommen. In dieser zweiten Note will Herr Sylvester einen Beweis, der einfacher als der von Lindemann herrührende ist, für die Transcendenz der Zahl π oder vielmehr allgemeiner der trigonometrischen Tangente einer algebraischen Zahl geben. Der Beweis scheint dem Referenten jedoch nicht stichhaltig zu sein. Der Verfasser stützt sich auf den Lambert'schen Satz, dass

$$\tau(\theta) = \cfrac{\theta^2}{1 - \cfrac{\theta^2}{3 - \cfrac{\theta^2}{5 - \ddots}}} = \theta . \operatorname{tg}\theta$$

ist. Setzt man

$$\Theta_r(\theta) = \cfrac{\theta^2}{2r+1 - \cfrac{\theta^2}{2r+3 - \ddots}},$$

so findet man

$$\Theta_r(\theta) = \frac{A_{r+1}(\theta).\tau(\theta) - B_{r+1}(\theta)}{A_r(\theta).\tau(\theta) - B_r(\theta)},$$

wo $A_r(\theta)$, $B_r(\theta)$ ganze ganzzahlige Functionen von θ sind. Ferner ist nach einem von Hrn. Sylvester vorausgeschickten Lemma stets von einem gewissen r ab der absolute Betrag von $\Theta_r(\theta)$ kleiner als 1, welchen Wert θ auch besitzen möge. Nimmt man nun an, θ genüge einer ganzzahligen Gleichung (in welcher der Coefficient der höchsten Potenz von θ, unbeschadet der Allgemeinheit, gleich 1 vorausgesetzt wird); nimmt man ferner an, $\operatorname{tg}\theta$ sei rational, oder allgemeiner: $\tau(\theta)$ sei eine rationale Function von θ mit rationalen Coefficienten, so wird für einen geeigneten Wert der ganzen Zahl k das Product $k.\tau(\theta)$ und also auch

$$k[A_r(\theta)\tau(\theta) - B_r(\theta)]$$

eine ganze ganzzahlige Function von θ sein. Nun ist nach dem erwähnten Lemma das Product

$$\Theta_r(\theta)\Theta_r(\theta_2) \dots \Theta_r(\theta_n) = \Pi\Theta_r(\theta),$$

absolut genommen, kleiner als 1, falls r gross genug gewählt wird und $\theta_2, \dots, \theta_n$ die mit θ conjugirten algebraischen Zahlen bedeuten.

Hieraus folgt, dass die absoluten Werte der Producte

$$k^n \Pi(A_r(\theta)\tau(\theta) - B_r(\theta)), \quad k^n \Pi(A_{r+1}(\theta)\tau(\theta) - B_{r+1}(\theta)), \dots$$

eine unendliche Reihe abnehmender Zahlen bilden. Diese Zahlen (so fährt Sylvester fort) sind aber ganze positive Zahlen, und man hat daher einen Widerspruch. Dieser Schluss, dass es sich um positive ganze Zahlen handle, ist aber nicht zulässig. Denn wenn auch $k[A_r(\theta)\tau(\theta)-B_r(\theta)]$ eine ganze ganzzahlige Function von θ ist, so folgt noch nicht, dass $k[A_r(\theta_i)\tau(\theta_i)-B_r(\theta_i)]$, wo i einen der Werte 2, ..., n besitzt, dieselbe ganze Function von θ_i ist. Damit wird aber der ganze Beweis hinfällig. Hz.

L. Pochhammer. Zur Theorie der Euler'schen Integrale. Math. Ann. XXXV. 495-526.

Behandlung der Euler'schen Integrale beider Arten mittels der Methode der Abhandlung „Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf" (vergl. S. 407 dieses Bandes); als Anwendung werden die Lösungen der Gauss'schen Differentialgleichung durch bestimmte Integrale mit denjenigen durch hypergeometrische Reihen verglichen. Bdt.

W. A. Stekloff. Interpolation einiger Producte. Charkow Ges. (2) I. 239-248. (Russisch.)

Das Product $\Pi_{\alpha+k\beta} = (\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)(\alpha+3\beta)\dots(\alpha+k\beta)$ liegt zwischen den Grenzen

$$\frac{\sqrt{2\pi}\,.\,e^{-k+\frac{1}{12k}}k^{k+\frac{1}{2}}(k+1)^{\frac{\alpha}{\beta}}\beta^k e^{\frac{\alpha(\alpha-\beta)}{2\beta^2 k}}}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)}$$

und

$$\sqrt{2\pi}\,.\,e^{-k}k^{k+\frac{1}{2}}(k+1)^{\frac{\alpha}{\beta}}\beta^k e^{\frac{\alpha(\alpha-\beta)}{\beta^2 2(k+1)}-\frac{\alpha(\alpha^2-\beta^2)}{3\beta^3 k(k+1)}}.$$

Es werden ähnliche Grenzen für die Producte $\Pi_{\alpha-k\beta}$, $\Pi_{\alpha-k'\beta}$, $\Pi_{\alpha+k'\beta}$ gefunden.

Die Interpolation beruht auf den Eigenschaften der Gamma-Functionen. Wi.

W. P. Alexeiewsky. Ueber die Functionen, welche den Gamma-Functionen ähnlich sind. Charkow Ges. (2) I. 169-238. (Russisch.)

Die Arbeit enthält ein eingehendes Studium der Eigenschaften der Function $G(x)$, welche durch die Gleichung $G(x+1) = \Gamma(x)G(x)$ und die Bedingung $G(x) = 1$ definirt ist, sowie der Function $\Phi(x) = \frac{d \log G(x)}{dx}$. Die Eigenschaften dieser Functionen sind vollkommen analog den Eigenschaften der Gamma-Function und der Function $\psi(x) = \frac{d \log \Gamma(x)}{dx}$. So hat man für die Function $G(x)$ z. B. die folgenden Formeln:

$$G(x) = \lim \left\{ (n+1)^{\frac{(x-1)(x-2)}{2}} [\Gamma(n+1)]^{x-1} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(x+k)} \right\},$$

$$G(x+1) = (2\pi)^{\frac{x}{2}} e^{-\frac{x(x+1)}{2}} . e^{-\frac{\gamma x^2}{2}} \prod_{1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k e^{\frac{x^2}{2k} - x},$$

$$\int_0^1 \log G(a+x) dx = \log \left\{ \frac{G^{\frac{4}{3}}(\frac{1}{2})}{2^{\frac{1}{36}}} \left(\frac{\pi}{e}\right)^{\frac{1}{12}} \right\} + \frac{a}{2} \log 2\pi - \frac{a(a-1)}{2}$$
$$+ a \log \Gamma(a) - \log G(1+a) \text{ u. s. w.},$$

die den ähnlichen Formeln in der Theorie der Gamma-Functionen entsprechen.

Durch die neu eingeführte Function lassen sich einige Integrale sehr einfach darstellen. So ist

$$\int_0^x \log \sin \pi x . dx = x \log \frac{\sin \pi x}{2\pi} + \log \frac{G(1+x)}{G(1-x)},$$

$$\int_0^x \pi x . \operatorname{cotg} \pi x . dx = x \log 2\pi + \log \frac{G(1-x)}{G(1+x)}.$$

Wenn man berücksichtigt, dass

$$\log \Gamma(x) = \Delta^{-1} \log x, \quad \log G(x) = \Delta^{-2} \log x,$$

so wird man zur Betrachtung der Functionen $G_n(x)$ geführt, welche durch die Gleichung $\log G_n(x) = \Delta^{-n} \log x$ und die Bedingung $\log G_n(1) = 0$ definirt sind; ihre Eigenschaften erörtert der Verfasser ebenfalls.

Am Ende der Abhandlung betrachtet der Verfasser die Function $G(x)$ als einen speciellen Fall der Function $H(x)$, welche durch die Gleichung $H(x+1) = \Gamma\left(\frac{x}{\alpha}\right) H(x)$ und die Bedingung $H(1) = 1$ definirt ist. Es werden die Eigenschaften

der Function $H(x)$ hergeleitet; das unendliche Product für die Function $H(x)$:

$$H(x) = e^{ax+bx^2} \frac{x}{\alpha} \Pi\left(1+\frac{x}{m+n\alpha}\right) e^{-\frac{x}{m+n\alpha}+\frac{x^2}{2(m+n\alpha)^2}}$$

(wo m und n alle ganzen positiven Werte durchlaufen müssen mit Ausnahme der Combination $m = 0$, $n = 0$) zeigt, dass, wenn man $x = \frac{z}{\omega}$, $\alpha = \frac{\omega'}{\omega}$ setzt, wo ω und ω' die Perioden der elliptischen Functionen sind, die Function $H(x)$ übergeht in die Function

$$H\left(\frac{z}{\omega}\right) = e^{a\frac{z}{\omega}+b\frac{z^2}{\omega^2}} \frac{z}{\omega'} \Pi\left(1+\frac{z}{m\omega+n\omega'}\right) e^{-\frac{z}{m\omega+n\omega'}+\frac{z^2}{2(m\omega+n\omega')^2}},$$

welche in dem engsten Zusammenhange mit der Heine'schen Function steht. Wi.

N. J. Sonine. Die Darstellung des Logarithmus und der Euler'schen Constante durch bestimmte Integrale. Warsch. Univ. Nachr. 1889. VIII. (Russisch.)

Unter gewissen Bedingungen in Bezug auf $f(t)$ hat das Integral

$$\int_0^\infty \left\{ e^{-t} - f(t) \right\} \frac{dt}{t}$$

einen bestimmten endlichen Wert, den wir mit $\log \alpha$ bezeichnen. Wenn wir annehmen

$$\int_x^\infty f(t) \frac{dt}{t} = \log F(x),$$

so muss $F(x)$ eine differentiirbare Function sein, die für positive Werte des Arguments weder Null noch unendlich wird; dabei muss $\lim\limits_{x=0} xF(x)$ eine endliche positive Grösse sein, die mit A bezeichnet wird, und $F(\infty) = 1$. Bei allen diesen Voraussetzungen ist $\log \alpha = -\log A - C$, wo C die Euler'sche Constante bedeutet. Für die unmittelbare Berechnung von α finden wir

$$\alpha = \lim_{z=\infty} \frac{z \cdot \psi(0)}{\psi(z)},$$

wo

$$\frac{d}{dz}\log\psi(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\,dt.$$

Die Constante α behält ihren Wert für eine andere Function $f_1(t)$, wenn

$$\int_0^\infty \left\{ f(t) - f_1(t) \right\} \frac{dt}{t} = 0.$$

Wenn $f(t)$ eine differentiirbare Function ist, so haben wir:

$$-\log A = \int_0^\infty f'(t)\log t\,.\,dt.$$

Unter der Voraussetzung, dass

$$f(t) = \int_0^\infty e^{-tz}\sigma(z)\,dz,$$

erhalten wir

$$\log\alpha = \int_0^\infty \sigma(z)\log z\,.\,dz.$$

Für die Darstellung des Logarithmus haben wir die Formel:

$$\log\frac{x}{y} = \int_0^\infty \left\{ f\left(\frac{y}{\alpha}u\right) - f_1\left(\frac{x}{\alpha_1}u\right) \right\} \frac{du}{u}\cdot$$

Die einfachsten Integrale für C werden unter den Voraussetzungen $A = 1$ oder $\alpha = 1$ erhalten.

Für die Berechnung dieser Constante kann man mit Erfolg die folgende Formel benutzen:

$$C = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log\left(n + \frac{1}{2}\right)$$
$$+ \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i (1 - 2^{-2i+1}) \frac{B_{2i-1}}{2i} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{-2i}$$
$$+ (1)^p (1 - 2^{-2p+1}) \frac{B_{2p-1}}{2p} \left(n + \frac{1}{2} + \xi\right)^{-2p},$$

wo

$$0 < \xi < \frac{3}{2\pi\sqrt{2e}} < 0{,}20478,$$

und auch andere leicht ableitbare Formeln. Wi.

A. W. Lettnikoff. Ueber die hypergeometrischen Functionen höherer Ordnungen. Mosk. Math. Samml. XIV. 216-222. (Russisch.)

Die particulären Integrale der Gleichung

$$\sum_{m=0}^{m=n}(q+n-1)_m\varphi^{(m)}(x)\frac{d^{n-m}y}{dx^{n-m}}=\sum_{m=1}^{m=n}(q+n-1)_{m-1}\psi^{(m-1)}(x)\frac{d^{n-m}y}{dx^{n-m}},$$

wo φ und ψ ganze Functionen von x sind,

$$(p)_m=\frac{p(p-1)\dots(p-m+1)}{1.2\dots m},$$

werden durch die zwischen Grenzen genommenen Derivirten ausgedrückt. Wi.

D. M. Sintzeff. Ueber die Bernoulli'schen Functionen mit fractionärem Index. Kasan Ges. VIII. 291-336. (Russisch.)

Die Bernoulli'sche Function der Ordnung p ist, nach der Definition des Verfassers, die Function, welche der Gleichung

$$\varphi_{p,n}(x)=D_z^n\left(\left(\frac{z}{e^z-1}\right)^p\left(e^{xz}-1\right)\right)$$

genügt, wo p eine willkürliche reelle Grösse ist. Die Eigenschaften dieser so definirten Function sind ganz analog denen der Bernoulli'schen Function. Die wichtigsten sind folgende:

1) Die Bernoulli'sche Function $\varphi_{p,n}(x)$ ist ein Polynom vom n^{ten} Grade.

2) Die Derivirten und die Integrale der Functionen werden durch diese Functionen ausgedrückt nach den Formeln:

$$D_x^m\varphi_{p,n}(x)=n(n-1)\dots(n-m+1)(\varphi_{p,n-m}(x)+B_{n,m}),$$

$$\int_0^x\varphi_n(x)dx=\frac{1}{n+1}\varphi_{n+1}(x)-B_n\,.\,x.$$

3) $$\varphi_{p,n}(p-x)=(-1)^n\varphi_{p,n}(x)+\varphi_{p,n}(p).$$

Der Verfasser giebt auch die Entwickelungen dieser Functionen nach Sinus und Cosinus, die Ausdrücke durch bestimmte Integrale und die Ausdehnung des Raabe'schen Theorems auf diese Functionen.

Die Coefficienten der Bernoulli'schen Functionen der Ordnung p, die Bernoulli'schen Zahlen $B_{p,n}$, haben auch die Eigen-

schaften, die denen der Bernoulli'schen Zahlen analog sind. Sie können durch die Gleichung

$$B_{p,n} = D_z^n \left(\frac{z}{e^z - 1}\right)^p_{z=0}$$

definirt werden und sind Polynome n^{ten} Grades von p. Am Schlusse ist eine Tabelle dieser Polynome für Werte von $n = 1$ bis $n = 11$ hinzugefügt. Wi.

F. Klein. Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe. Gött. Nachr. 382-383.

F. Klein. Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe. Math. Ann. XXXVII. 573-590.

F. Klein. Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe. Naturf. Ges. Bremen. 4.

Der Verfasser entwickelt eine neue und sehr bemerkenswerte Methode, mit deren Hülfe es möglich ist, die Anzahl der reellen Nullstellen zu bestimmen, welche die hypergeometrische Function $F(l, m, n, x)$ bei bestimmt gegebenen reellen Parametern l, m, n zwischen $x = 0$ und $x = 1$ besitzt.

Es sei

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p \cdot \frac{dy}{dx} + q \cdot y = 0$$

eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Coefficienten p, q reelle Functionen von x sind, und man betrachte auf der x-Axe ein Intervall $a \dots b$, in dessen Innerem kein singulärer Punkt der Differentialgleichung gelegen ist. Es sei ferner y_2 ein particuläres Integral der Differentialgleichung, welches in a verschwindet, und X bezeichne die Anzahl der Nullstellen, welche y_2 in jenem Intervalle $a \dots b$ besitzt. Endlich bezeichne y_1 ein beliebiges anderes particuläres Integral, welches in a negativ ist. Betrachtet man nun den Quotienten $\eta = \frac{y_1}{y_2}$, so folgt aus einem leicht zu beweisenden Satze von Sturm, dass, während x das Intervall $a \dots b$ durchläuft, der Quotient η gerade X-mal von $-\infty$

bis $+\infty$ läuft, ohne dass zwischendurch eine Umkehr stattfindet. Jetzt seien p, q rationale Functionen von x mit reellen Coefficienten, und die n singulären Punkte $a, b, c, \ldots$ seien ebenfalls sämtlich reell. Ziehen wir jetzt neben den reellen Werten von x und η auch die complexen in Betracht, so ist bekannt, dass die positive Halbebene der Veränderlichen x sich mittels der Function η auf ein Kreisbogen-n-Eck abbildet, und zwar sind die Eckenwinkel beziehungsweise $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$, ..., wenn unter $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ die Exponentendifferenzen verstanden werden, welche zu den einzelnen singulären Punkten $a, b, c, \ldots$ zugehören. Somit erscheint jetzt die Zahl X als die Anzahl von Malen, dass die zugehörige Seite des Polygons der η-Ebene eine volle Kreisperipherie umspannt, oder, was dasselbe ist, als die Anzahl von Malen, dass die betreffende Polygonseite sich selbst überschlägt. Im Falle der hypergeometrischen Differentialgleichung handelt es sich demnach um die Frage, wie ein Kreisbogendreieck mit irgend welchen gegebenen Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ gestaltet ist, wobei die Ecken beliebig vielfache Windungspunkte sein können. Die nähere Untersuchung zeigt, dass die dem Winkel $\lambda\pi$ gegenüber liegende Seite sich so oft überschlägt, als die grösseste ganze Zahl angiebt, welche von $\frac{1}{2}(\lambda-\mu-\nu+1)$ überschritten wird. Nun drücken sich die Exponentendifferenzen λ, μ, ν durch die Formeln

$$\lambda = |1-n|, \quad \mu = |l-m|, \quad \nu = |n-l-m|$$

aus, und somit lässt sich dann die Zahl X ermitteln, welche dem Intervalle $0\ldots1$ entspricht. Als schliessliches Resultat ergiebt sich: Die gesuchte Zahl der Nullstellen ist gleich der grössesten positiven Zahl E, welche von dem Ausdrucke

$$\tfrac{1}{2}(|l-m|-|1-n|-|n-l-m|+1)$$

überschritten wird, sobald $1-n$ negativ oder 0 ist; ist dagegen $1-n$ positiv, so ist die gesuchte Zahl der Nullstellen gleich E oder gleich $E+1$; welcher von beiden Fällen eintritt, lässt sich dadurch entscheiden, dass man feststellt, ob $F(l, m, n, x)$ eine gerade oder ungerade Zahl von Nullstellen in jenem Intervalle $0\ldots1$ besitzt. Ht.

A. Hurwitz. Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe. Gött. Nachr. 557-564.

Die von F. Klein behandelte Frage nach der Anzahl der zwischen $x=0$ und $x=1$ gelegenen Nullstellen der hypergeometrischen Reihe $F(l, m, n, x)$ — vergleiche das vorige Referat — wird in der vorliegenden Note in anderer Weise, nämlich auf Grund derjenigen Principien gelöst, welche bei dem Sturm'schen Satze von der Anzahl der reellen Wurzeln einer algebraischen Gleichung zur Verwendung gelangen. Setzt man allgemein

$$F_i = F(l+i, m+i, n+i, x), \quad r_i = -\frac{(l+i+1)(m+i+1)}{(n+i)(n+i+1)}$$

und bildet dann die Functionen

$$V_{2i} = r_0 r_2 \dots r_{2i-2} F_{2i}, \quad V_{2i+1} = \frac{lm}{n} r_1 r_3 \dots r_{2i-1} F_{2i+1},$$

so wird die Reihe $V_0, V_1, V_2, \dots, V_k$ bei geeigneter Wahl der Zahl k allen Bedingungen einer Sturm'schen Reihe genügen und zwar für jedes Intervall $a \dots b$, welches ganz in dem Intervalle $0 \dots 1$ enthalten ist. Man erkennt dies, wenn man die Gauss'schen Relationen zwischen den drei benachbarten Functionen V_i, V_{i+1}, V_{i+2} aufstellt. Bezeichnen dann N_a und N_b die Anzahlen der Zeichenwechsel jener Reihe für $x=a$ bezüglich $x=b$, so giebt $N_a - N_b$ die Anzahl der Nullstellen von $V_0 = F(l, m, n, x)$ an, welche zwischen a und b liegen. Durch Anwendung dieses Satzes auf den Fall $a=0, b=1$ findet der Verfasser dann in der That die von F. Klein angegebenen Anzahlen bestätigt.

Ht.

J. Kleiber. Empirische Formeln. Phys. Ges. St. Petersb. XXII. 11-43. (Russisch.)

Die vorliegende Abhandlung besteht aus mehreren unabhängigen Teilen, welche nur dadurch in ein Ganzes verbunden sind, dass sie die Fortsetzung und weitere Entwickelung der Resultate bilden, welche der Verfasser in seiner Arbeit: „Theorie der Ausgleichung der Beobachtungsreihen“ (F. d. M. XX. 1888.

220) erhalten hat. In der Einleitung giebt der Verfasser kurz denjenigen Teil der Theorie der Ausgleichung wieder, der bei der Berechnung empirischer Formeln in Betracht kommt; ausserdem ist eine Tafel beigefügt, welche für die praktische Anwendung der vom Verfasser vorgeschlagenen Methode zur Berechnung der Constanten empirischer Formeln in physikalischen Untersuchungen dienen soll. Bb.

B. Elliptische Functionen.

G. H. Halphen. Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications. IIIième Partie. Fragments. Publication faite par les soins de la section de géométrie de l'Académie des Sciences. Paris. Gauthier-Villars et Fils. (1891.) XVI + 272 S. 8°.

Bei dem Berichte über die beiden ersten Bände des „Traité des fonctions elliptiques" (F. d. M. XVIII. 1886. 377; XX. 1888. 434) haben wir bereits erwähnt, dass der dritte Teil die algebraischen und arithmetischen Anwendungen der elliptischen Functionen behandeln sollte, und dass leider der frühzeitige Tod des Verfassers diese Arbeit unterbrochen hat. Im vorliegenden Bande sind die Bruchstücke des dritten Teiles nach hinterlassenen Manuscripten von der geometrischen Section der Pariser Akademie veröffentlicht. Das erste Capitel (S. 1-46) enthält die Teilung der Perioden durch 5 und die Lösung der Gleichung fünften Grades mit Hülfe der elliptischen Functionen. Das zweite Capitel (S. 47-191) behandelt die Teilung der Perioden durch die Zahl 7. Es folgen nun verschiedene Bruchstücke: I. Ueber die complexe Multiplication in den elliptischen Functionen, und insbesondere über die Multiplication mit $\sqrt{-23}$ (S. 151 bis 196); II. Aliquote Teile von Perioden; ihre Einteilung in Gruppen, wenn der Teiler eine Primzahl (S. 197-239); III. Kleinere Fragmente zur Transformation (S. 239-269). Voran geht

diesem Bande eine Lebensbeschreibung Halphen's von É. Picard (S. VII-XVI). M.

E. H. Moore. Note concerning a fundamental theorem of elliptic functions, as treated in Halphen's Traité, Vol. I, Pages 39-41. Palermo Rend. IV. 186-194.

Das betreffende Theorem lautet: Es existirt ein Argument u und, abgesehen von Vielfachen der Perioden, nur ein einziges, für welches $\wp u$ und $\wp' u$ resp. gleich gegebenen imaginären Grössen sind, die der Gleichung

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$

genügen. Unter Wiederholung des Beweises von Halphen werden einige Punkte desselben eingehender erörtert. M.

G. Königs. Remarque sur un point de la théorie des fonctions elliptiques. Toulouse Ann. IV E. 1-4.

Es sei $F(z|z_1, z_2, \dots, z_\nu)$ ein Polynom m^{ten} Grades in $z_1, z_2, \dots, z_\nu$, dessen Coefficienten eindeutige doppeltperiodische Functionen von z sind. Macht man in F

$$z_1 = \zeta(z-a_1),\ z_2 = \zeta(z-a_2),\ \dots,\ z_\nu = \zeta(z-a_\nu),$$

wo $\zeta(z)$ die elliptische Function zweiter Art bedeutet, und $a_1, a_2, \dots, a_\nu$ Constanten sind, so wird $F[z|\zeta(z-a_1), \dots, \zeta(z-a_\nu)]$ eine Function ohne Pole in endlicher Entfernung, reducirt sich also auf eine Constante. Dieser Satz, der hier bewiesen wird, dient zur einfacheren Herleitung mehrerer Formeln in der Theorie der elliptischen Functionen. M.

P. Appell. Sur les fonctions elliptiques. C. R. CX. 32-34.

Es wird die Darstellung der elliptischen Functionen als der Quotient von Functionen Θ a priori durch solche Betrachtungen gerechtfertigt, die sich auch auf Functionen von 2 Veränderlichen mit 4 Gruppen von Perioden ausdehnen lassen. Diese Ausdehnung erscheint möglich mit Hülfe des Poincaré'schen

Theorems (Acta Math. II): „Eine Function von 2 Veränderlichen, die sich in einem endlichen Bereiche wie eine rationale Function verhält, kann als Quotient zweier ganzen Functionen dargestellt werden, die nicht gleichzeitig für die Punkte verschwinden, für welche die Function unbestimmt ist.“ M.

J. P. Teixeira. Estudo sobre as funcções duplamente periodicas de terceira especie. Coimbra.

In dieser Schrift beschäftigt sich der Verf. mit der analytischen Darstellung der doppeltperiodischen Functionen dritter Art. Zuerst erfolgt die Darstellung dieser Functionen als Quotient zweier Functionen, und dann die Darstellung derselben Functionen durch Reihen von einfachen periodischen Elementen.

Tx. (Lp.)

J. P. Dolbnia. Sur les intégrales pseudo-elliptiques d'Abel. Journ. de Math. (4) VI. 293-311.

Analog der Günther'schen Bezeichnung pseudo-elliptische Integrale (S. M. F. Bull. X. 1882. 88) nennt Herr Dolbnia „Abel'sche pseudo-elliptische Integrale“ die von der Form

$$\int\frac{(x+H)dx}{\sqrt{a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4}}$$

in dem Falle, wo sich die letzteren durch Logarithmen ausdrücken lassen. Die Theorie dieser Integrale hat Hr. Tschebyscheff geschaffen (Bull. St. Pétersbourg III, 1861). Seine Sätze wurden von Zolotareff (Journ. de Math. (2) XIX) bewiesen. Da sich aber Zolotareff der alten elliptischen Functionen bediente, so sind seine Beweismethoden sehr umständlich. Herr Dolbnia zeigt, dass diese Theorie durch Einführung der Weierstrass'schen Functionen sich viel eleganter gestaltet. M.

J. P. Dolbnia. Ueber die Abel'schen pseudoelliptischen Integrale. Kasan Ges. VIII. 252-277.

Der Verfasser führt in die Lösung der Frage ein, ob das

Integral

$$(1)\quad \int \frac{(x+H)dx}{\sqrt{a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4}}$$

sich algebraisch-logarithmisch darstellen lässt durch die Weierstrass'sche Function $\wp u$. Indem er für dieses Integral die Formel

$$\int \frac{(x+H)dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{m\sqrt{a_0}} \log \left\{ e^{mJu} \left[\frac{\sigma(u+v)}{\sigma u}\right]^m \right\}$$

entwickelt, zeigt sich, dass, damit das Integral (1) ein pseudoelliptisches werde, die Reihe

$$\wp(v), \wp(2v), \dots, \wp(2^s . v),$$

wo v von den Constanten des Integrals abhängt, periodisch sein muss. Dieses Kriterium kann auch mit einem anderen, das in der Periodicität gewisser Reihen von Constanten besteht, vertauscht werden. Wi.

J. P. Dolbnia. Analogie zwischen den elliptischen und trigonometrischen Functionen. Kasan Ges. VIII. 129-144. S. F. d. M. XXI. 1889. 469.

M. A. Tichomandritzky. Die Entwickelungen der trigonometrischen und elliptischen Functionen in Partialbrüche und unendliche Producte. Charkow Ges. (2) II. 167-209. (Russisch.)

Eine sehr einfache Ableitung der Entwickelungen der trigonometrischen und der elliptischen Weierstrass'schen Functionen. Wi.

J. W. L. Glaisher. Expansions of K, I, G, E in powers of k'^2-k^2. Mess. (2) XIX. 146-150.

Setzt man $\lambda = k'^2 - k^2$, so findet man $K =$

$$K^0\left\{1+\frac{1^2}{2.4}\lambda^2+\frac{1^2.5^2}{2.4.6.8}\lambda^4+\frac{1^2.5^2.9^2}{2.4.6.8.10.12}\lambda^6+\cdots\right\}$$

$$-2G^0\left\{\tfrac{1}{2}\lambda+\frac{3^2}{2.4.6}\lambda^3+\frac{3^2.7^2}{2.4.6.8.10}\lambda^5+\frac{3^2.7^2.11^2}{2.4.6\dots14}\lambda^7+\cdots\right\},$$

wo K^0 und G^0 die Werte von K und G sind, wenn der Modul

gleich $1/\sqrt{2}$ ist. Aehnliche Entwickelungen werden für I, G, E und für Grössen, die von ihnen abhängen, gegeben.

Glr. (Lp.)

G. F. Childe. On a direct relation between the definite elliptic integrals of the first and second order. Mess. (2) XIX. 155-164.

Bezieht sich auf eine Reihe, die von dem Modul abhängt, welcher das Verhältnis von K zu E ausdrückt.

Glr. (Lp.)

J. W. L. Glaisher. On the expansion of $\frac{G}{K}$, $\frac{K}{G}$, $\frac{I}{E}$ etc., in ascending powers of k^2. Mess. (2) XIX. 164-174.

In dieser Arbeit, welche durch die eben angezeigte Abhandlung des Hrn. Childe veranlasst wurde, beschäftigt sich der Verf. mit den nach aufsteigenden Potenzen von k^2 fortschreitenden Entwickelungen von $\frac{G}{K}, \frac{K}{G}, \frac{I}{E}, \frac{E}{I}, \log K, \frac{G^2}{K^2}$, u. s. w.

Glr. (Lp.)

G. Zurria. Sulla espressione degl'integrali ellittici in integrali definiti (con diverse applicazioni). Separatabzug aus den Memorie della Società italiana delle scienze (detta dei XL). (3) VIII. 18 S. 4°.

Die im Titel angeführten Ausdrücke sind:

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} \operatorname{arctang}\left[\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}.\operatorname{tang}\varphi\right],$$

$$\int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = \operatorname{cotg}\varphi\,.\,(1-\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi})$$
$$+\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\operatorname{arctang}\left[\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,.\,\operatorname{tang}\varphi\right],$$

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+u\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+u}\sqrt{1+\frac{k^2}{u}}} \operatorname{arctang}[\sqrt{1+u}\,.\operatorname{tang}\varphi] + \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$
$$-\frac{2}{\pi}.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\left(1+\frac{k^2}{u}\sin^2\psi\right)\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} \operatorname{arctang}[\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}.\operatorname{tang}\varphi].$$

Hieraus ergeben sich die folgenden Reihenentwickelungen, von denen die erste mit der von Gudermann (Series novae, quarum ope integralia elliptica primae et secundae speciei computantur simul ea, quorum moduli sunt conjugati, Journ. für Math. XVI. 366-72) aufgestellten, von der Bezeichnung abgesehen, übereinstimmt:

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = 2t\sum_{r=1}^{\infty} B_r t^{2r}, \quad \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2 sin^2\varphi}\, d\varphi = 2t\sum_{r=1}^{\infty} Q_r t^{2r};$$

hier ist:

$$t = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2},\quad B_r = \frac{(-1)^r}{2r+1}\left[1+\sum_{p=1}^{r}(-1)^p \frac{(r+p)!}{(r-p)!(p!)^2} k^{2p}\right],$$
$$Q_r = \frac{(-1)^r}{2r+1}\left[1-\sum_{p=1}^{r}(-1)^p \frac{1}{2p+1}\frac{(r+p)!}{(r-p)!(p!)^2} k^{2p}\right].$$

Endlich benutzt der Verfasser seine Formeln zur Berechnung der Fläche des Ellipsoids. Vi.

E. Picard. Sur l'inversion de l'intégrale elliptique et l'irréductibilité de ses périodes. Darboux Bull. (2) XIV. 107-110.

Die eine Methode, um zu zeigen, dass die Umkehrung des elliptischen Integrals erster Gattung auf eine eindeutige Function führt, geht von dem Additionstheorem aus und lässt sich auch für die Abel'schen Functionen anwenden, wie aus der grossen Abhandlung von Weierstrass im Journal für Math. XLVII bekannt ist. Die zweite nimmt ihren Ausgangspunkt von dem Fundamentaltheorem für die Existenz der Integrale der

Differentialgleichung

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = (u-a)(u-b)(u-c)(u-d).$$

Im Vorliegenden ergänzt Herr Picard diese Beweismethode derart, dass auch sie vollständig streng wird. Die zweite Note enthält den Beweis, dass die beiden Perioden dieser Function sich nicht auf eine reduciren lassen, wenn die vier Constanten a, b, c, d von einander verschieden sind. M.

G. Torelli. Estensione d'un teorema di Riemann relativo al quoziente degl'integrali ellittici completi di 1ª specie. Napoli Rend. (2) IV. 238-244.

Das Riemann'sche Theorem besagt, dass für die elliptischen Functionen, in denen als variables Element der Quotient der Perioden $\frac{iK'}{K}$ betrachtet wird, stets der Coefficient von i in dem imaginären Teile dieses Quotienten positiv sein muss. Hier wird ein jenen Satz umfassendes allgemeines Theorem hergeleitet, indem der Quotient der bestimmten trinomischen Integrale

$$x = \int_0^1 z^{\beta-1}(1-z)^{\gamma-\beta-1}(1-xz)^{-\alpha}dz,$$

$$x' = \int_0^1 z^{\beta-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}[1-(1-x)z]^{-\alpha}dz$$

betrachtet wird, welcher der Gauss'schen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} - [\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx} + \alpha\beta y = 0$$

genügt. M.

G. Valle. Sopra un caso particolare di trasformazione delle funzioni ellittiche. Torino Atti XXVI. 236-243.

Abel (Oeuvres 1881, I. 568) unterschied 18 verschiedene Transformationen zweiter Ordnung, die der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}} = \frac{1}{\mu}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}}$$

genügen. Acht derselben sind von dem Typus:

$$y = \frac{a+bx+cx^2}{a'+b'x+c'x^2},$$

sechs vom Typus

$$y = \frac{a+bx^2}{a'+b'x^2}$$

und vier vom Typus

$$y = \frac{ax}{1+bx^2}.$$

Hier wird nun gezeigt, dass man 4 neue Transformationen erhält, wenn man bemerkt, dass die Gleichung

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}} = \frac{adx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

erfüllt wird, indem man in ihr y, λ, a resp. mit $-\frac{1}{y}$, $\frac{1}{\lambda}$, λa vertauscht. Die neuen Transformationen haben daher den Typus

$$y = -\frac{1+bx^2}{a\lambda x}.$$

Im ganzen hat man also 22 verschiedene Transformationen zweiter Ordnung. M.

H. P. Manning. Reduction of

$$\frac{dx}{\sqrt{A(1+mx^2)(1+nx^2)}} \text{ to } \frac{Mdy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

by the substitution $x^2 = \frac{a+by^2}{a'+b'y^2}$. American J. XIII. 185-188.

Einfache Herleitung der Legendre'schen Normalform.

M.

A. Cayley. A transformation in elliptic functions. Quart. J. XXIV. 259-262.

Herleitung der Formel

$$u = \int_y^\infty \frac{(zdz)}{\sqrt{\{f(z)\}}}, \quad P(u) = \frac{\sqrt{\{f(x)\}}\sqrt{\{f(\theta)\}} + F(x, y)}{2(xy)^2}$$

in Klein's Abhandlung: „Ueber hyperelliptische Sigmafunctionen“, Math. Ann. XXVII. 1886, 431-464, auf Seite 454. Wir be-

merken, dass der Weierstrass'sche Beweis für diese Reduction auf die Weierstrass'sche Normalform sich in der 2ten Auflage von Enneper's Elliptischen Functionen, Halle 1890, S. 27-29 findet. M.

W. Bock. Combinatorische Ableitung einiger Formeln der Θ-Functionen. Hamb. Mitt. II_1. 74-80.

Wenn die Argumente w, w', w'', w'''; w_1, w_1', w_1'', w_1''' resp. $a+b$, $a-b$, $c+d$, $c-d$; $a+c$, $a-c$, $b+d$, $b-d$ sind, so besteht zwischen den Θ Functionen

$$e^{\frac{w^2}{\tau}\pi i}\Theta(w)_3 = \Sigma e^{(w+\nu\tau)^2\frac{\pi i}{\tau}},$$
$$e^{\frac{w^2}{\tau}\pi i}\Theta(w)_2 = \Sigma e^{\{w+(\nu+\frac{1}{2}\tau)^2\}\frac{\pi i}{\tau}}$$

die Relation:

$$\Theta(w)_3.\Theta(w')_3.\Theta(w'')_3.\Theta(w''')_3 + \Theta(w)_2.\Theta(w')_2.\Theta(w'')_2.\Theta(w''')_2$$
$$= \Theta(w_1)_3.\Theta(w_1')_3.\Theta(w_1'')_3.\Theta(w_1''')_3 + \Theta(w_1)_2.\Theta(w_1')_2.\Theta(w_1'')_2.\Theta(w_1''')_3.$$

Dies wird auf combinatorischem Wege bewiesen, und es werden Folgerungen daraus hergeleitet. M.

Felix Klein. Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen. Ausgearbeitet und vervollständigt von Robert Fricke. Erster Band. Grundlegung der Theorie. Leipzig. Teubner. XIX u. 764 S. 8°.

Das vorliegende Werk lässt sich kurz charakterisiren als eine erweiterte Fortsetzung der bekannten „Vorlesungen über das Ikosaeder", in denen sein Erscheinen bereits in Aussicht gestellt worden war. Diesmal aber hat Herr Klein die Ausarbeitung und Vervollständigung seiner akademischen Vorträge nicht selbst übernommen, sondern Herrn R. Fricke übertragen, dem die Lösung der schwierigen, aber dankbaren Aufgabe: die Klein'sche Theorie der elliptischen Modulfunctionen in ausführlicher und übersichtlicher Weise darzustellen, durchaus gelungen ist, wie dies auch Herr Klein selbst anerkannt hat; und Herr Fricke darf für sich das Verdienst in Anspruch nehmen, ein

bisher schwer zugängliches aussichtsreiches Gebiet der modernen Analysis dem Verständnisse eines grösseren Kreises erschlossen zu haben.

Wie bei den Ikosaedervorlesungen ist das Mass specifischer Vorkenntnisse möglichst gering bemessen worden. Dieser durchaus zu billigende Grundsatz hat in Verbindung mit einer Darstellung, die zwischen zu grosser Knappheit des Ausdrucks und überflüssiger Breite eine glückliche Mitte innehält, bewirkt, dass die Theorie der Modulfunctionen zwei starke Bände füllt (der zweite Band ist im Sommer 1892 erschienen). Deshalb möchte der Referent darauf hinweisen, dass Herr Fricke in der Vorrede zum zweiten Bande dankenswerte Fingerzeige zur Erleichterung des Studiums des umfangreichen Werkes gegeben hat.

Der erste Abschnitt des ersten Bandes beginnt im ersten Capitel mit Untersuchungen über die Invarianten der binären biquadratischen Form, deren Endziel ist, verschiedene Normalformen des elliptischen Integrales erster Gattung herzuleiten und zu charakterisiren. Als solche Normalformen treten auf die Weierstrass'sche, die Legendre'sche und eine mit dieser in engem Zusammenhang stehende, welche mit einem vielleicht nicht ganz glücklich gewählten Namen als Riemann'sche Normalform bezeichnet wird. Es wird noch gezeigt, dass zwischen den hierbei auftretenden „rationalen Invarianten“ J, μ, λ Gleichungen bestehen, welche den Typus der Gleichungen der regulären Körper haben.

„Transcendente Invarianten“ sind die Perioden des Integrals erster Gattung, welche im zweiten Capitel studirt werden. Die gehörig normirte Periode Ω ist eine Function der absoluten Invariante J allein, welche einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt, deren Untersuchung auf Grund der Fuchs'schen Principien vorgenommen wird. Es ergiebt sich schliesslich, dass der Periodenquotient ω eine unendlich vieldeutige Function von J ist, deren sämtliche Zweige aus dem Ausgangszweige durch lineare gebrochene ganzzahlige Substitutionen der Determinante 1 hervorgehen. Vermöge der Schwarz'schen Ableitung erhält man eine Differentialgleichung dritter Ordnung für $\omega(J)$, welche sich als ein Specialfall der

von Herrn Schwarz in seiner Arbeit: „Zur Theorie der hypergeometrischen Reihe“ betrachteten Differentialgleichung ansehen lässt.

Die interessante Thatsache, dass auch die rationalen Invarianten λ und μ, als Functionen von J angesehen, Schwarz'sche s-Functionen sind, leitet über zum dritten Capitel. Hier werden zunächst auf Grundlage der Schwarz'schen Arbeiten die Sätze aus der Theorie der conformen Abbildung hergeleitet, auf denen sich die Lehre von den Functionen $s(\nu_1, \nu_2, \nu_3; J)$ aufbaut, die Herr Klein auch Dreiecksfunctionen nennt, weil jeder Zweig einer solchen Function die conforme Abbildung eines Kreisbogendreiecks auf eine Halbebene vermittelt. Unter den eindeutig umkehrbaren s-Functionen werden drei Arten unterschieden, je nachdem sie einen imaginären Orthogonalkreis, einen Häufungspunkt oder einen reellen Orthogonalkreis besitzen. Zu der s-Function dritter Art gehört die Function $\omega = s(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{\infty}; J)$, und hierdurch wird für $J(\omega)$ die Eindeutigkeit und Existenz in beschränktem Bereiche nachgewiesen, während die andere fundamentale Eigenschaft der Invarianz bei jenen linearen Substitutionen schon aus den Betrachtungen des zweiten Capitels folgte und jetzt auf anderem Wege zum zweiten Mal gefunden wird.

Das vierte Capitel stellt sich die Aufgabe, die Function $\omega = s(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{\infty}; J)$ in einer Weise zu behandeln, welche in der Theorie der Ikosaeder-Irrationalität $\zeta = s(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}; J)$ ihr Prototyp findet. Diese Betrachtung wird in äusserst interessanter Weise durchgeführt, und es ergiebt sich so als Grundproblem, die Resolventen der Modulgleichung $J(\omega) = J$ namhaft zu machen und zu untersuchen. Die Lösung dieser Aufgabe erfordert einmal die Ermittelung der Untergruppen der Modulgruppe, das ist das „gruppentheoretische Grundproblem“, dem der zweite Abschnitt des Buches gewidmet ist, und dann die Aufstellung der zugehörigen Resolventen, was nichts anderes heisst, als dass für die Untergruppen die zugehörigen Modulfunctionen gewonnen

und ihr Zusammenhang mit J explicite dargestellt werden soll; das ist das „functionentheoretische Grundproblem", welches im dritten Abschnitt behandelt wird.

Der erste Abschnitt schliesst im fünften Capitel mit einer Zusammenstellung von Formeln aus der Theorie der doppeltperiodischen Functionen und der Modulformen, welche hier ihren Platz gefunden hat, damit die Darstellung später nicht unterbrochen zu werden braucht.

Das erste und zweite Capitel des zweiten Abschnittes beschäftigen sich mit der Theorie der linearen Substitutionen einer Variable und deren Anwendung auf die Modulgruppe und auf die durch Spiegelung daraus entstehende erweiterte Gruppe. Auf Grund dieser Betrachtungen folgt im dritten Capitel in sehr eleganter Darstellung eine geometrische Theorie der Aequivalenz und Reduction der binären quadratischen Formen, wie sie für die Formen negativer Determinante von Herrn Dedekind, für die Formen positiver Determinante von Stephen Smith begründet worden ist, und es gewinnt somit die Modulteilung der ω-Ebene für die Zahlentheorie die schönste Bedeutung. Den Schluss des Capitels bilden Bemerkungen über die Gleichberechtigung der Modulsubstitutionen.

Die für die allgemeine Untersuchung der Untergruppen massgebenden Begriffe werden im vierten Capitel an der besonderen Untergruppe erläutert, welche zu dem Legendre'schen Modul als Function des Periodenverhältnisses ω gehört. Es ergeben sich so die Begriffe des Index, des Repräsentantensystems, des Fundamentalpolygons und der „zugehörigen" Gruppe, die entsteht, wenn man in der Modulgruppe die Substitutionen einer Untergruppe als identisch ansieht. Diese Gruppe ist deshalb so wichtig, weil die Betrachtung ihrer Untergruppen zu neuen Untergruppen der Modulgruppe führt. Dies wird im fünften Capitel, welches der allgemeinen Theorie der Untergruppen gewidmet ist, näher ausgeführt. Zu dem Begriff des „Geschlechtes" einer Untergruppe gelangt man, indem man den ihr zugehörigen Fundamentalbereich durch eine gewisse stetige Biegung in eine geschlossene Fläche verwandelt, deren Zusammenhang durch die

als Geschlecht benannte Zahl p charakterisirt wird. Was die ausgezeichneten Untergruppen betrifft, so giebt es für $p = 0$ nur die vier Untergruppen Γ_6, Γ_{12}, Γ_{24}, Γ_{60}, deren „zugehörige" Gruppen nichts anderes sind als die bekannten zum Dieder für $n = 3$, zum Tetraeder, zum Oktaeder und zum Ikosaeder gehörigen endlichen Gruppen linearer Substitutionen. Auch für jedes Geschlecht $p > 1$ ist die Zahl der ausgezeichneten Untergruppen begrenzt, während dies für $p = 1$ nicht der Fall ist. Ist jetzt umgekehrt auf einer geschlossenen Fläche eine Dreiecksteilung gegeben, deren Eckpunkte den Bedingungen genügen, welche bei jenen durch Biegung entstandenen Flächen erfüllt waren, so besagt der Verzweigungssatz, dass zu dieser Fläche stets eine Untergruppe mit ihren gleichberechtigten gehört.

Der Beweis dieses Satzes bildet den Anfang des sechsten Capitels, und es ist damit die Möglichkeit gegeben, zur Gesamtheit aller Untergruppen zu gelangen. Ein anderer Weg, welcher zu gewissen Untergruppen führt, wird durch die Betrachtung der zu der Function $s(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{n}; J)$ „gehörigen Teilung $(2, 3, n)$" der ω-Ebene gegeben. Es ergiebt sich jetzt der Begriff der Klasse einer Untergruppe. Als ausgezeichnete Untergruppen n^{ter} Klasse erhält man für $n = 2, 3, 4, 5$ die Gruppen vom Geschlechte Null, für $n = 6$ eine Gruppe Γ_{72} vom Geschlechte 1, für $n = 7$ eine Gruppe Γ_{168} vom Geschlechte 3. — Endlich entspringen aus der arithmetischen Betrachtung der Modulgruppe die „Congruenzgruppen", denen der Rest dieses Abschnittes gewidmet ist.

Im siebenten Capitel wird die „Hauptcongruenzgruppe" $\Gamma_{\mu(n)}$ n^{ter} Stufe und die zugehörige endliche Gruppe $G_{\mu(n)}$ betrachtet. Diese Gruppe ist übrigens nichts anderes, als die Gruppe der Galois'schen Resolvente, welche bei der Transformation n^{ter} Ordnung der elliptischen Functionen mit der absoluten Invariante J zu der Modulargleichung gehört; ein Umstand, der freilich erst im zweiten Bande des Werkes zur Geltung kommt. Für $n = 2, 3, 4, 5$ sind die Hauptcongruenzgruppen mit den ausgezeichneten Gruppen vom Geschlechte Null identisch, für $n = 6$

und 7 stimmen sie überein mit den Γ_{72} und Γ_{168}, die am Schluss des sechsten Capitels auftraten. Zur Gesamtheit der Congruenzgruppen n^{ter} Stufe gelangt man vermöge Zerlegung der $G_{\mu(n)}$ in ihre Untergruppen. Diese Zerlegung lässt sich reduciren auf die Zerlegung der $G_{\mu(q^\nu)}$, wo q eine Primzahl bedeutet. Aber nur der einfachste Fall, die Zerlegung der $G_{\mu(q)}$, also die Theorie der Congruenzgruppen von Primzahlstufe, kann im folgenden berücksichtigt werden, da der allgemeine Fall zuviel Raum erfordert hätte. Das siebente Capitel schliesst mit dem Hinweis darauf, dass mit den Congruenzgruppen nur ein verschwindend kleiner Teil der Untergruppen der Modulgruppe erschöpft ist.

Die „cyklischen Untergruppen" der $G_{\mu(q)} = G_{\frac{1}{2}q(q^2-1)}$ sind bereits 1859 von Herrn J. A. Serret bestimmt worden und werden im achten Capitel wesentlich auf Grundlage dieser Untersuchungen hergeleitet. Auch von den nicht cyklischen Untergruppen, mit denen sich das neunte Capitel beschäftigt, hat Herr Serret bereits die „halbmetacyklischen" $G_{\frac{1}{2}q(q-1)}$ und die Untergruppen vom Diedertypus entdeckt; dagegen verdankt man die Kenntnis der Tetraeder-, Oktaeder- und Ikosaedergruppen, welche in $G_{\mu(q)}$ enthalten sind, Herrn Gierster (1881), von dem auch der Nachweis herrührt, dass hiermit die Zerlegung dieser Gruppe in ihre Untergruppen vollendet ist. Im Hinblick auf die künftige Resolventenbildung wird nun gefragt, welches die Congruenzgruppen q^{ter} Stufe von kleinstem Index sind, und es ergiebt sich als Abschluss der Entwickelungen des zweiten Abschnitts der schöne Galois'sche Satz über die Resolventen der Modulargleichungen, der hier in gruppentheoretischer Einkleidung sich so darstellt: „Die den halbmetacyklischen $G_{\frac{1}{2}q(q-1)}$ entsprechenden $q+1$ gleichberechtigten Congruenzgruppen q^{ter} Stufe vom Index $q+1$ sind im allgemeinen Falle der Primzahlstufe q die Congruenzgruppen von niederstem Index. Ausnahmen treten nur für $q = 5$, 7, 11 ein, wo wir, bez. den G_{12}, G_{24} und G_{60} entsprechend, bei $q = 5$ ein System, bei $q = 7$ und 11 aber beide Male zwei Systeme von je q gleichberechtigten Γ_q des Index q zu verzeichnen haben."

Der dritte Abschnitt beginnt mit einer Uebersicht über die wichtigsten Ergebnisse der Riemann'schen Theorie der al-

gebraischen Functionen, die zwar kurz, aber klar ist. Das erste Capitel bezieht sich auf die Existenztheoreme, während das zweite Capitel den Riemann-Roch'schen Satz mit der Erweiterung giebt, welche Herr Klein als Brill-Nöther'schen Reciprocitätssatz bezeichnet. Als wertvolles Hülfsmittel für die weiteren Untersuchungen wird eine geometrische Anschauungsweise eingeführt. Ist nämlich ein System von ν linear unabhängigen, m-wertigen algebraischen Functionen einer Riemann'schen Fläche gegeben, die an denselben m Punkten dieser Fläche unendlich werden, so werden diese ν Grössen als Punktcoordinaten im Raume R_ν von ν Dimensionen angesehen, womit jedoch keineswegs die Möglichkeit aufgegeben wird, jenen Grössen complexe Werte beizulegen. Bei dieser Bedeutung der ν algebraischen Functionen erhalten wir die Punkte einer im R_ν gelegenen Curve, und diese Curve lässt sich an Stelle der Riemann'schen Fläche als Gegenbild des algebraischen Gebildes ansehen. Ist die Stufe ν der Mannigfaltigkeit bei gegebenem m die möglich kleinste, so heisst die Curve eine „Normalcurve". Setzt man, für $p > 1$, p linear-unabhängige Integranden erster Gattung p homogenen Veränderlichen proportional, so durchläuft der so bestimmte Punkt im R_{p-1} eine Curve, welche die Normalcurve dieser φ-Functionen heisst. Diese Curve ist im allgemeinen von der Ordnung $2p-2$, und alle zu der betreffenden Riemann'schen Fläche gehörenden algebraischen Functionen lassen sich rational durch die φ-Quotienten ausdrücken. Hieraus ergiebt sich als Grenzfall der hyperelliptische Fall, indem die Curve in eine doppelt zu zählende der Ordnung $p-1$ und des Geschlechtes 0 entartet; alle zum hyperelliptischen Gebilde gehörigen algebraischen Functionen lassen sich rational durch gewisse zwei Functionen ausdrücken.

Nach diesen Vorbereitungen ist es möglich — und das ist der Gegenstand des dritten Capitels — zu jeder Untergruppe Γ_μ von endlichem Index μ die zugehörigen eindeutigen Modulfunctionen zu construiren. Diese lassen sich stets durch J und eine algebraische Function z von J rational darstellen, welche selbst eine der gesuchten Modulfunctionen ist, und die algebraische

Gleichung $f(z, J) = 0$ ist die zur Untergruppe Γ_μ gehörige algebraische Resolvente der Modulgleichung. Nunmehr werden die in dem gruppentheoretischen Abschnitt gewonnenen Begriffe erst in ihrer vollen Bedeutung erkannt. Der Index ist der Grad der Gleichung $f(z, J) = 0$ in z. Aus einer Wurzel $z(\omega)$ dieser Gleichung entstehen die anderen, wenn auf ω die Substitutionen des „Repräsentantensystems" angewandt werden, und zu den verschiedenen Wurzeln gehören genau die Substitutionen der Γ_μ gleichberechtigten Untergruppen der Modulgruppe. Ist Γ_μ „ausgezeichnet", so ist die Gleichung $f(z, J) = 0$ eine Galois'sche Resolvente; die Wurzeln dieser Gleichung sind also alle rational ausdrückbar durch eine von ihnen, und die Gleichung $f(z, J) = 0$ wird durch μ rationale Transformationen in sich übergeführt. Ist Γ_μ „nicht ausgezeichnet", so ist die durch ihre Galois'sche Resolvente definirte Untergruppe der Modulgruppe ausgezeichnet, und der Index dieser Gruppe ist gleich der Ordnung der Monodromiegruppe. Das „Geschlecht" der durch Biegung aus dem Fundamentalbereich entstehenden geschlossenen Fläche ist identisch mit dem Geschlecht der Gleichung $f(z, J) = 0$, deren zugehörige μ-blättrige Riemann'sche Fläche durch Abbildung dieser geschlossenen Fläche auf die J-Ebene erhalten wird, und diese Abbildung geschieht eben durch eindeutige Functionen von ω, welche bei den Substitutionen der Γ_μ in sich übergehen. Endlich wird die Art der Verzweigung der Riemann'schen Fläche durch den im zweiten Abschnitt zur Definition der Untergruppen benutzten Verzweigungssatz gegeben.

Ist das Geschlecht einer Untergruppe gleich 0, so lassen sich alle zugehörigen Modulfunctionen durch eine rational ausdrücken, welche als „Hauptmodul" bezeichnet wird. Gehört die Untergruppe dem elliptischen oder hyperelliptischen Fall an, so sind zwei Moduln zur rationalen Darstellung der übrigen ausreichend, und diese bilden ein „volles Modulsystem". Endlich im allgemeinen Falle ergeben p linear unabhängige Integranden erster Gattung ein „volles Modulsystem". Die zu einer ausgezeichneten Untergruppe gehörigen Moduln werden als Galois'sche Moduln bezeichnet, und zu ihnen gehören

ein Galois'scher Hauptmodul oder ein Galois'sches Modulsystem.

In den folgenden Capiteln wird die allgemeine Theorie an einigen Beispielen durchgeführt. Das vierte Capitel handelt von den Modulfunctionen, die zu den vier ausgezeichneten Untergruppen des Geschlechtes Null gehören. Den Hauptteil dieser Untersuchungen bildet natürlich die Theorie der zu der Γ_{60} gehörenden Resolventen sechsten und fünften Grades. Am Anfang des fünften Capitels werden die beiden einzigen ausgezeichneten Untergruppen Γ_{48} und Γ_{120} behandelt, die dem hyperelliptischen Falle angehören. Als zugehörige volle Modulsysteme ergeben sich $\mu, \sqrt{\mu(\mu^4-1)}$ und $\zeta, \sqrt{\zeta(\zeta^{10}+11\zeta^5-1)}$. Es folgen Betrachtungen, die sich auf die historisch wichtigen Modulfunctionen beziehen, und es wird der Uebergang zu den Untersuchungen von Herrn Hermite bewerkstelligt. Den Schluss des Capitels bildet die Betrachtung der ausgezeichneten Γ_{72}, die als Beispiel für den elliptischen Fall gewählt ist.

Die beiden letzten Capitel des dritten Abschnittes sind der interessanten ausgezeichneten Untergruppe Γ_{168} gewidmet, deren Geschlecht $p=3$ ist. Das volle Modulsystem lässt sich so wählen, dass die Gleichung der zugehörigen Normalcurve

$$z_1^3 z_4 + z_4^3 z_2 + z_2^3 z_1 = 0$$

wird. Diese Curve vierter Ordnung geht durch 168 Collineationen in sich über. In einfachem Zusammenhang mit den Moduln z_1, z_2, z_4 stehen vier Moduln A_0, A_1, A_2, A_4 siebenter Stufe, welche nichts anderes sind als die Quadratwurzeln der Wurzeln der Multiplicatorgleichung, welche zu der Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen gehört. Werden diese Grössen als homogene Coordinaten im R_3 interpretirt, so ergiebt sich eine Raumcurve sechster Ordnung, die sowohl als vollständiger Schnitt von vier Flächen dritter Ordnung, als auch als die Kegelspitzencurve eines Bündels von Flächen zweiter Ordnung dargestellt wird. Zum Schluss werden die Resolventen achten und siebenten Grades der zur Γ_{168} gehörigen Galois'schen Gleichung 168. Grades explicite aufgestellt und ausführlich besprochen.

Es würde noch möglich sein, die Stufe $n = 11$ in ähnlicher Weise zu behandeln; allein die bis jetzt angewandten Methoden versagen bei höherer Stufenzahl wegen der übergrossen Complication der Rechnungen. Deshalb wird es notwendig, neue Hülfsmittel ausfindig zu machen, und diese gewährt die Transformation und die Teilung der elliptischen Functionen. Hiermit aber beschäftigt sich erst der zweite Band des Werkes, welcher ausserdem zahlentheoretische Anwendungen der Modulfunctionen enthält. St.

W. Wirtinger. Bemerkung über die elliptischen Modulfunctionen. Monatsh. f. Math. I. 429-432.

Es wird die Frage aufgeworfen, ob die elliptischen Modulfunctionen überhaupt unter die Formeln Poincaré's

$$\Theta(x, R) = \Sigma\left(\frac{dx_{axa'}}{dx}\right)^m R(x_{axa'})$$

(Acta Math. I. 4) fallen. In den Fällen $m = 2, 3$; $R = 1$ verschwinden, wie Herr Pick bemerkt hat, die Reihen $\Theta(\tau, R)$ identisch. Es zeigt sich leicht, dass für $m < 6$ dies immer der Fall ist. Für $m = 6$ findet man eine einzige Function (vgl. v. Mangoldt, Gött. Nachr. 1886). Für $m = 7$ findet man gar keine, für $m = 8$ zwei linear unabhängige Functionen etc. Die einfachsten Grundlagen zur Behandlung solcher speciellen Fälle sind durch die Eisenstein'schen Summen

$$\Sigma \frac{1}{(\mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2)^{2m}}$$

gegeben. Diese werden nicht unmittelbar in der allgemeinen Theorie erhalten, wohl aber leicht als Grenzwerte Poincaré'scher Reihen $\Theta(\tau, R)$. M.

A. Cayley. Note on Schlaefli's modular equation for the cubic transformation. Mess. (2) XX. 59-60, 120.

Bestätigung, dass Schläfli's Form der Modulargleichung (Journ. für Math. LXXII. 1870. 369)

$$S^4 + T^4 - 8ST + S^3T^3 = 0,$$

wo $S = 2\sqrt[4]{kk'}$, $T = 2\sqrt[4]{\lambda\lambda'}$, der gewöhnlichen Form äquivalent

ist:

$$u^4+v^4+2uv-2u^3v^3=0,$$

wo $u=\sqrt[4]{x}$, $v=\sqrt[4]{\lambda}$. Glr. (Lp.)

A. Cayley. Sur l'équation modulaire pour la transformation de l'ordre 11. C. R. CXI. 447-449.

Untersuchung der der Modulargleichung für die Transformation elfter Ordnung entsprechenden algebraischen Curve. M.

L. Kiepert. Ueber gewisse Vereinfachungen der Transformationsgleichungen in der Theorie der elliptischen Functionen. Math. Ann. XXXVII. 368-398.

Eine Fortsetzung der Abhandlung: „Ueber die Transformation der elliptischen Functionen bei zusammengesetztem Transformationsgrade", Math. Ann. XXXII. 1-135 (F. d. M. XX. 1888. 466). Dort waren Parameter von der Form

$$\xi=L(D_1)^{\delta_1}L(D_2)^{\delta_2}L(D_3)^{\delta_3}\dots$$

eingeführt, welche den Vorzug besitzen, dass ihr Charakter eine verhältnismässig kleine Zahl ist, dass also der Grad einer Gleichung zwischen zwei solchen Parametern ξ und η in Bezug auf jeden von ihnen wesentlich niedriger wird als z. B. der Grad der Jacobi'schen Modulargleichungen. Die Vereinfachung, welche sich daraus für die Transformation n^{ten} Grades ergiebt, kann noch weiter geführt werden, wenn man bei der Wahl der Exponenten $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ erst in zweiter Linie darauf achtet, dass der Charakter möglichst klein wird, während man es in erster Linie zu erreichen sucht, dass zwischen den verschiedenen Wurzeln der Parametergleichung Relationen bestehen. Auf diese Weise kann man die Parametergleichung zwischen ξ und η durch eine Gleichung zwischen x und y ersetzen, wo x und y rationale Functionen von resp. ξ und η sind. Die letztere Gleichung ist bedeutend einfacher und kann auch viel leichter gefunden werden. Durch den tieferen Einblick in die Para-

metergleichungen wird auch die Anwendung auf die complexe Multiplication der elliptischen Functionen wesentlich gefördert.

M.

G. B. Mathews. Complex multiplication of elliptic functions for the determinants -53 and -61. Lond. M. S. Proc. XXI. 215-217.

Eine Ergänzung der Abhandlung des Herrn A. G. Greenhill: Complex multiplication moduli of elliptic functions, Lond. M. S. Proc. XIX. 301-364 (s. F. d. M. XX. 1888. 473). Sie betrifft die bisher unerledigten Fälle, in denen $\Delta = 53$ und $\Delta = 61$ ist.

M.

R. Russell. On modular equations. Lond. M. S. Proc. XXI. 351-395.

Da die Modulargleichungen in der Jacobi'schen Form, als Gleichungen zwischen $u = \sqrt[4]{\varkappa}$ und $v = \sqrt[4]{\lambda}$, zu weitläufigen Ausdrücken führen, so hat man sich bemüht, kürzere Formen, wie Legendre's Gleichung der dritten Ordnung

$$\sqrt{\varkappa\lambda} + \sqrt{\varkappa'\lambda'} - 1 = 0,$$

oder Gützlaff's Gleichung der siebenten Ordnung

$$\sqrt[4]{\varkappa\lambda} + \sqrt[4]{\varkappa'\lambda'} - 1 = 0,$$

zu gewinnen. In einer früheren Abhandlung (Lond. M. S. Proc. XIX. 90-111; F. d. M. XX. 1888. 468) hat der Verfasser solche Formen für alle Primzahlgrade der Transformation ausser 29, 41, 43 aufgestellt. Im Vorliegenden werden mit Hülfe derselben Bezeichnung, aber nach teilweise verschiedenen Methoden die Resultate für $\mu = 13, 17, 29, 41, 43, 47, 53, 59, 71$ u. a. gewonnen. Diese Methode, die auf der Kenntnis der Gleichungen für $2\varkappa\varkappa'$, $2\sqrt{\varkappa\varkappa'}$, $2\sqrt[4]{\varkappa\varkappa'}$ beruht, wenn $\omega \equiv i\frac{K'}{K} = \sqrt{-n}$, berührt zugleich das Problem der complexen Multiplication. M.

A. G. Greenhill. Table of complex multiplication moduli. Lond. M. S. Proc. XXI. 403-422.

Ergänzung der früheren Abhandlungen über complexe Multiplication der elliptischen Functionen (F. d. M. XIX. 1887. 469 und XX. 1888. 473). Eine Tafel der numerischen Resultate in den bisher gelösten Fällen ist nützlich zur Verification der Form und der Coefficienten der Modulargleichung sowohl, wie für die Bestimmung der Coefficienten, wenn die Form der Modulargleichung durch unabhängige Betrachtungen erschlossen wird. Es werden die von Abel, Jacobi, Kronecker, Hermite, Joubert, Weber, R. Russell und Mathews gewonnenen Resultate ebenso wie in der vorigen Arbeit nach 4 Klassen gruppirt. M.

Mart. Krause. Ueber die Multiplication der doppeltperiodischen Functionen zweiter Art. Leipz. Ber. XLII. 24-45.

Es handelt sich darum, die Ausdrücke:

$$\frac{\vartheta_\alpha(nv-na)}{\vartheta_\beta(nv)}$$

durch die entsprechenden ursprünglichen und durch die Functionen sn, cn, dn mit den Argumenten

$$w = \pi \,.\, \vartheta_3^2 \,.\, v, \quad \alpha = \pi \,.\, \vartheta_3^2 \,.\, a$$

auszudrücken. Betrachtungen aus der Theorie der doppeltperiodischen Functionen dritter Art ergeben für den Fall, dass $\alpha = 0$, $\beta = 0$ und n gerade ist, die Darstellung:

$$\frac{\vartheta_0(nv-na)}{\vartheta_0(nv)} = \frac{\vartheta_0(v-a)^{n^2}}{\vartheta_0(v)^{n^2}} \frac{f_1(x)+\operatorname{sn} w \,.\, \operatorname{cn} w \,.\, \operatorname{dn} w \,.\, f_2(x)}{(1-k^2\operatorname{sn}^2 w \,.\, \operatorname{sn}^2\alpha)^{n^2} \,.\, f_3(x)},$$

wenn unter $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ ganze Functionen von

$$x = \operatorname{sn}^2 w$$

von den Graden $n^2, n^2-2, \frac{1}{2}n^2$ verstanden werden; freilich sind hierbei Zähler und Nenner noch mit einem gemeinschaftlichen Teiler behaftet, der ja auch bei der Multiplication der elliptischen

Functionen störend auftritt. Für die anderen Fälle gelten analoge Gleichungen. Die Bestimmung der Coefficienten in f_1, f_2, f_3 geschieht, indem Relationen mit Hülfe der Substitution halber Perioden und auf Grund der linearen Transformation der Thetafunctionen hergeleitet werden. Diese reichen indes zur vollständigen Berechnung der Coefficienten nicht aus; vielmehr gelingt diese erst dadurch, dass für die Grösse

$$V = \frac{\vartheta_0(nv - na)}{\vartheta_0(v+a)^{n^2}} \cdot \vartheta_0^{n^2-1},$$

als Function von x und dem Modul k angesehen, eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung abgeleitet wird.

Auch die Ausdrücke:

$$\frac{\vartheta_\alpha(nv + a)}{\vartheta_\beta(nv)},$$

zu deren Betrachtung sich der Verfasser nunmehr wendet, lassen sich durch die entsprechenden ursprünglichen und durch die elliptischen Functionen mit den Argumenten w und α ausdrücken, wobei sich ganz entsprechende Sätze wie im zuerst behandelten Falle ergeben. St.

Mart. Krause. Ueber die Differentialgleichungen, denen die doppeltperiodischen Functionen zweiter Art Genüge leisten. I. II. III. Leipz. Ber. XLII. 55-70, 268-283, 430-452.

Seit der berühmten Untersuchung von Herrn Ch. Hermite über die Lamé'sche Differentialgleichung ist die Integration linearer homogener Differentialgleichungen zweiter Ordnung mittels doppeltperiodischer Functionen zweiter Art vielfach behandelt worden. Der Verfasser schlägt den umgekehrten Weg ein. Mittels einer von ihm bereits 1889 in den Leipziger Berichten (F. d. M. XXI. 465) angegebenen Methode lassen sich unendlich viele Differentialgleichungen aufstellen, denen doppeltperiodische Functionen zweiter Art genügen. In der ersten Mitteilung wird nun gezeigt, wie man mit Hülfe dieser Methode zunächst zur Lamé'schen Gleichung, dann aber auch zu der allgemeineren von

Herrn Picard aufgestellten Gleichung gelangt. Hierbei ergiebt sich zugleich die Möglichkeit, die Integrale dieser Gleichung, deren Form Herr Picard nur kurz charakterisirt hatte, wirklich anzugeben, was bis jetzt nur für den Fall, dass die in jener Gleichung vorkommende Zahl n gerade ist, von Herrn Sparre (Acta Math. III) durchgeführt worden war.

Der Verfasser stellt sich nunmehr die Aufgabe, in systematischer Weise die Gleichungen zu entwickeln, welche man auf Grund dieser Methode integriren kann. In seiner zweiten und dritten Mitteilung handelt es sich um die Aufstellung aller linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei linear unabhängigen Integralen, die beide doppeltperiodische Functionen zweiter Art mit derselben einen Unendlichkeitsstelle der Ordnung n sind. Diese Differentialgleichungen lassen sich klassificiren nach der Ordnungszahl n und danach, ob ihre Coefficienten ausser jener Unendlichkeitsstelle der Integrale keine oder noch weitere $1, 2, \ldots, m$ Unendlichkeitsstellen besitzen.

Die Annahme a), dass n beliebig ist, aber die Coefficienten keine weiteren Unendlichkeitsstellen besitzen, führt auf die Lamé'sche Gleichung zurück.

Wird $n = 1$ angenommen, so können die Coefficienten höchstens zwei weitere Unendlichkeitsstellen besitzen, die notwendig einfach sind. Dies führt zu den diese Möglichkeit erschöpfenden Annahmen: b) Die Integrale haben nur eine Unendlichkeitsstelle erster Ordnung ($n = 1$), die Coefficienten ausserdem einen zweiten Unendlichkeitspunkt; c) für die Integrale ist $n = 1$, die Coefficienten besitzen ausserdem zwei einfache Unendlichkeitspunkte. Die Discussion ergiebt, dass auch in diesem Falle nur bekannte Gleichungen erhalten werden.

Dagegen folgen aus der Annahme d), dass die Integrale beide denselben Unendlichkeitspunkt von der Ordnung $n = 2$ haben, während die Coefficienten noch einen weiteren Unendlichkeitspunkt besitzen, Gleichungen, welche bisher noch nicht betrachtet worden sind. Die Gleichungen dieser Art werden auf vier Typen zurückgeführt, und in jedem der vier Fälle die beiden Integrale wirklich bestimmt. St.

Mart. Krause. Ueber die Entwickelung der doppeltperiodischen Functionen dritter Art in trigonometrische Reihen. (Vierte Abhandlung). Math. Ann. XXXV. 577-587.

In den vorhergehenden Abhandlungen desselben Titels (F. d. M. XIX. 1887. 448 und XX. 1888. 467) hatte Herr Krause gezeigt, dass das Problem, die doppeltperiodischen Functionen dritter Art durch trigonometrische Reihen darzustellen, darauf reducirt werden kann, die Primfunctionen:

$$\frac{\vartheta_\alpha(mv+ma, m\tau)}{\vartheta_\beta(v,\tau)} \quad \text{und} \quad \frac{\vartheta_\alpha(v-a)}{\vartheta_\beta(v-b)\,.\,\vartheta_\gamma(mv, m\tau)}$$

in solche Reihen zu entwickeln, und er hatte für die erste Kategorie dieses Problem auf mehrfache Weise gelöst. Nunmehr führt er die analoge Untersuchung für die zweite Kategorie von Functionen durch.

Die gewünschte Reihenentwickelung wird zuerst mit Hülfe einer indirecten Methode gewonnen, welche auf der Einführung gewisser Functionen beruht, die zuerst Herr Appell betrachtet hat (F. d. M. XVII. 1885. 381), und die von Herrn Krause als Restfunctionen bezeichnet worden sind. Es genügt nämlich die Function

$$f(v) = \frac{\vartheta_0(v-a)}{\vartheta_0(v-b)\,.\,\vartheta_0(mv, m\tau)}$$

den Gleichungen:

$$f(v+1) = f(v), \quad f(v+\tau) = -\,e^{-2\pi i(b-a)+\pi i m(2v+\tau)}\,.\,f(v)$$

und wird unendlich gross von der ersten Ordnung an den Stellen, an welchen $\vartheta_0(v-b)$ oder $\vartheta_0(mv, m\tau)$ verschwinden. Und umgekehrt kann jede Function $\varphi(v)$, welche denselben Gleichungen genügt und an denselben Stellen von derselben Art unendlich wird, von $f(v)$ sich nur um eine multiplicative Constante unterscheiden. Die Reihenentwickelungen der Appell'schen Restfunctionen in der Nähe ihrer Unendlichkeitsstellen zeigen aber, dass eine gewisse lineare homogene Function von m dieser Restfunctionen genau so wie $f(v)$ unendlich wird, und mit Hülfe einer von A. Enneper hergeleiteten Thetarelation ergiebt sich in eleganter Weise, dass auch die beiden Functionalgleichungen für $f(v)$ erfüllt sind. Damit ist das Problem der Reihenent-

wickelung zurückgeführt auf das entsprechende für die Restfunctionen, dessen Erledigung keine Schwierigkeiten bietet.

Zum Schluss werden zwei directe Methoden angegeben, welche auf der Betrachtung der Reihenentwickelungen in der Nähe der Unendlichkeitsstellen von $f(v)$ beruhen, und die deshalb von Interesse sind, weil man so auf systematischem Wege zur Aufstellung der Appell'schen Restfunctionen kommt, von denen die indirecte Methode ausging, womit ein neuer und naturgemässer Weg zur Einführung dieser wichtigen Functionen gegeben wird. St.

L. Kronecker. Zur Theorie der elliptischen Functionen. Berl. Ber. 99-120, 123-130, 219-241, 307-318, 1025-1029.

In dem schönen Nachruf, den Herr Hermite dem Andenken seines Freundes Leopold Kronecker gewidmet hat, bezeichnet er als dessen œuvre capitale, dass er in der Theorie der elliptischen Functionen eine zwar schwer zugängliche, aber um so ergiebigere Quelle für die Zahlentheorie gefunden hat. Die Hauptresultate dieser Forschungen hatte Kronecker bereits am Anfang der sechziger Jahre veröffentlicht, aber erst zwanzig Jahre später ging er daran, seine Sätze ausführlich zu beweisen, wobei sich eine Fülle neuer Ergebnisse herausstellte.

Ueber die ersten neunzehn Artikel der Abhandlungen: Zur Theorie der elliptischen Functionen ist in den F. d. M. bereits von anderer Seite berichtet worden. Der Artikel XX, mit dem die Veröffentlichungen des Jahres 1890 beginnen, enthält zuerst allgemeine Betrachtungen über die Begriffe der Aequivalenz und Invarianz. Setzt man für Systeme von n Grössen $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \dots, \mathfrak{z}_n$ irgend welche Aequivalenzen fest und vereinigt die einander äquivalenten Systeme in Klassen, so heisst eine eindeutige Function der Systemselemente $\mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_n$ Invariante dieser Aequivalenz, wenn sie unverändert bleibt bei Ersetzung der $\mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_n$ durch irgend ein äquivalentes System $\mathfrak{z}_1', \dots, \mathfrak{z}_n'$. Ein System von Invarianten $J_1, J_2, \dots, J_\nu$ heisst charakteristisch, wenn aus dem Bestehen der Gleichungen:

$$J_\varkappa(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \dots, \mathfrak{z}_n) = J_\varkappa(\mathfrak{z}_1', \mathfrak{z}_2', \dots, \mathfrak{z}_n') \qquad (\varkappa = 1, 2, \dots, \nu)$$

rückwärts die Aequivalenz der beiden Systeme folgt. Als einfachstes Princip der Invariantenbildung ergiebt sich die Aufstellung von symmetrischen Functionen der sämtlichen einander äquivalenten Systeme.

Es sei jetzt

$$ax^2 + bxy + cy^2$$

eine quadratische Form, deren Coefficienten, abweichend vom gewöhnlichen Sprachgebrauch, reelle Grössen sein sollen, die nur der Beschränkung unterworfen sind, dass ihre Determinante $b^2 - 4ac = -\Delta$ einen negativen Wert hat. Bei gegebener Determinante ist eine solche Form vollständig bestimmt durch die Angabe der Grössen:

$$a_0 = \frac{a}{\sqrt{\Delta}}, \quad b_0 = \frac{b}{\sqrt{\Delta}}, \quad c_0 = \frac{c}{\sqrt{\Delta}},$$

zwischen denen die Relation $4a_0c_0 - b_0^2 = 1$ besteht; ebenso aber genügt die Angabe der Wurzeln der Gleichung:

$$a_0 + b_0w + c_0w^2 = 0,$$

welche mit w_1 und $-w_2$ bezeichnet werden sollen; der reelle Teil von w_1i sei negativ. Geht man jetzt durch die lineare ganzzahlige Substitution

$$x = \alpha x' + \beta y', \quad y = \alpha' x' + \beta' y' \quad (\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1)$$

zu der äquivalenten Form

$$a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2$$

über, so entspricht auch dem System der a_0, b_0, c_0 ein äquivalentes System der a_0', b_0', c_0', welches durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_0' &= a_0\alpha^2 + b_0\alpha\alpha' + c_0\alpha'^2, \\ b_0' &= 2a_0\alpha\beta + b_0(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + 2c_0\alpha'\beta', \\ c_0' &= a_0\beta^2 + b_0\beta\beta' + c_0\beta'^2 \end{aligned}$$

bestimmt wird. Diese Aequivalenz ist aber enthalten unter der allgemeineren, dass einem Systeme $(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$, wo σ, τ reell, ein System $(\sigma', \tau', a_0', b_0', c_0')$ äquivalent sein soll, wenn ausser den vorstehenden Gleichungen noch die Relationen bestehen:

$$\begin{aligned} \sigma' &= \alpha\sigma + \alpha'\tau + \alpha'', \\ \tau' &= \beta\sigma + \beta'\tau + \beta'', \end{aligned}$$

in denen α'' und β'' beliebige ganze Zahlen bedeuten. Für diese Aequivalenz hatte Kronecker bereits im Jahre 1863 eine merkwürdige analytische Invariante angegeben, nämlich die

Function

$$\Delta(\sigma,\tau,w_1,w_2)=(4\pi^2)^{\frac{1}{3}}e^{\tau^2(w_1+w_2)\pi i}\cdot\frac{\vartheta(\sigma+\tau w_1,w_1)\,\vartheta(\sigma-\tau w_2,w_2)}{(\vartheta'(0,w_1)\,\vartheta'(0,w_2))^{\frac{1}{3}}},$$

welche zu interessanten zahlentheoretischen Sätzen Anlass giebt. Da Δ für $\sigma=0$, $\tau=0$ identisch verschwindet, erhält man auf diesem Wege keine Invariante der Klasse quadratischer Formen, welche durch $ax^2+bxy+cy^2$ repräsentirt wird. Wohl aber ergiebt sich eine solche bei der Untersuchung der Gleichung:

$$\log\Delta(\sigma,\tau,w_1,w_2)=\frac{-1}{2\pi}\lim_{\varrho=0}\sum_{m,n}\frac{e^{2(m\sigma+n\tau)\pi i}}{(a_0m^2+b_0mn+c_0n^2)^{1+\varrho}},$$

in welcher die Summation auf alle ganzzahligen Werte von m und n mit Ausschluss des Wertsystems $m=n=0$ in beliebig zu bestimmender Folge zu erstrecken ist. Entwickelt man nämlich den Ausdruck:

$$\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{2\pi}\sum_{m,n}\frac{1}{(a_0m^2+b_0mn+c_0n^2)^{1+\varrho}}$$

nach steigenden Potenzen von ϱ, so ergiebt sich als Coefficient des von ϱ unabhängigen Gliedes der Entwickelung:

$$2\Gamma'(1)+\log\frac{1}{c_0}\left(\frac{\vartheta'(0,w_1)}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{\vartheta'(0,w_2)}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}},$$

und dieser Ausdruck hat die verlangte Invarianteneigenschaft.

Die Aequivalenz $(\sigma,\tau,a_0,b_0,c_0)\rightsquigarrow(\sigma',\tau',a'_0,b'_0,c'_0)$ heisst vollständig, wenn α' und β gerade Zahlen sind. Da das System $(\sigma,\tau,a_0,b_0,c_0)$ wegen $4a_0c_0-b_0^2=1$ wesentlich nur von vier Grössen abhängt, so wird auch das System der charakteristischen Invarianten dieser Aequivalenz nur aus vier Functionen zu bestehen brauchen. Ein solches System wird nun auf folgendem höchst eleganten Wege gewonnen. Es sei:

$$\vartheta_0(\zeta,w)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-q)^{n^2}\cos2n\zeta\pi,$$

$$\vartheta_1(\zeta,w)=q^{\frac{1}{4}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{n^2+n}\sin(2n+1)\zeta\pi,$$

$$\vartheta_2(\zeta,w)=q^{\frac{1}{4}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}q^{n^2+n}\cos(2n+1)\zeta\pi,\qquad (q=e^{w\pi i})$$

$$\vartheta_3(\zeta,w)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}q^{n^2}\cos2n\zeta\pi.$$

Dann wird durch die Gleichung:

$$\mathrm{El}(\tfrac{1}{2}\zeta, \tfrac{1}{2}w) = \frac{\vartheta_1(\zeta, w)}{\vartheta_0(\zeta, w)}$$

eine elliptische Function definirt, welche zur Function sinam in einfacher Beziehung steht. Ist nämlich

$$\sqrt{\varkappa} = \frac{\vartheta_2(0, w)}{\vartheta_3(0, w)}, \quad 2K = \pi \vartheta_3^2(0, w), \quad 2K'i = 2w \,.\, 2K,$$

so gilt die Relation

$$\mathrm{El}(\tfrac{1}{2}\zeta, \tfrac{1}{2}w) = \sqrt{\varkappa}\, \mathrm{sin\,am}(2K\zeta, \varkappa).$$

Ist jetzt ein System $(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$ gegeben, so setze man in den vorhergehenden Formeln für w die Wurzel w_1 der Gleichung

$$a_0 + b_0 w + c_0 w^2 = 0.$$

Dann werden die Ausdrücke $\varkappa^2$ und $\sin^2 \mathrm{am}(2\sigma K + 2\tau K' i, \varkappa)$ Functionen der reellen Grössen $(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$. Zerlegt man diese Functionen in ihren reellen und rein imaginären Teil, so erhält man genau das gesuchte charakteristische Invariantensystem. Diese Zerlegung lässt sich aber auch explicite durchführen. Es sei:

$$\mathfrak{E}_0(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0) = \sum_{m,n} (-1)^{m(n-1)} e^{-\pi(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2)} \cos 2(m\sigma + n\tau)\pi,$$

$$\mathfrak{E}_1(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0) = \sum_{\mu,n} (-1)^{\frac{1}{2}(\mu-1)+n} e^{-\pi(\frac{1}{4}a_0\mu^2 + b_0\mu n + 4c_0 n^2)} \sin(\mu\sigma + 4n\tau)\pi,$$

$$\mathfrak{E}_2(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0) = \sum_{\mu,\nu} (-1)^{\frac{1}{2}(\nu-1)} e^{-\pi(\frac{1}{4}a_0\mu^2 + \frac{1}{2}b_0\mu\nu + c_0\nu^2)} \sin(\mu\sigma + 2\nu\tau)\pi,$$

wo die Summation bei m, n sich auf alle ganzen Zahlen, bei μ, ν nur auf die ungeraden erstreckt. Lässt man jetzt der Einfachheit halber die Argumente a_0, b_0, c_0 weg, so sind die Invarianten:

$$\frac{(\mathfrak{E}_1^2(\frac{1}{2}, 0) - \mathfrak{E}_2^2(\frac{1}{2}, 0))^2 - 4\mathfrak{E}_1^2(\frac{1}{2}, 0)\mathfrak{E}_2^2(\frac{1}{2}, 0)}{\mathfrak{E}_0^4(\frac{1}{2}, 0)},$$

$$\frac{\mathfrak{E}_1(\frac{1}{2}, 0)\mathfrak{E}_2(\frac{1}{2}, 0)(\mathfrak{E}_1^2(\frac{1}{2}, 0) - \mathfrak{E}_2^2(\frac{1}{2}, 0))}{\mathfrak{E}_0^4(\frac{1}{2}, 0)},$$

$$\frac{(\mathfrak{E}_1^2(\sigma,\tau) - \mathfrak{E}_2^2(\sigma,\tau))(\mathfrak{E}_1^2(\frac{1}{2},0) - \mathfrak{E}_2^2(\frac{1}{2},0)) - 4\mathfrak{E}_1(\sigma,\tau)\mathfrak{E}_2(\sigma,\tau)\mathfrak{E}_1(\frac{1}{2},0)\mathfrak{E}_2(\frac{1}{2},0)}{(\mathfrak{E}_1^2(\frac{1}{2}, 0) + \mathfrak{E}_2^2(\frac{1}{2}, 0))^2},$$

$$\frac{(\mathfrak{E}_1^2(\sigma,\tau) - \mathfrak{E}_2^2(\sigma,\tau))\mathfrak{E}_1(\frac{1}{2},0)\mathfrak{E}_2(\frac{1}{2},0) + (\mathfrak{E}_1^2(\frac{1}{2},0) - \mathfrak{E}_2^2(\frac{1}{2},0))\mathfrak{E}_1(\sigma,\tau)\mathfrak{E}_2(\sigma,\tau)}{(\mathfrak{E}_1^2(\frac{1}{2}, 0) + \mathfrak{E}_2^2(\frac{1}{2}, 0))^2}.$$

Speciell für das Bestehen der vollständigen Aequivalenz von (a_0, b_0, c_0) und (a'_0, b'_0, c'_0) wird das System charakteristischer Invarianten einfach von den beiden ersten der eben mitgeteilten Invarianten gebildet.

Vor der Invariante $\varDelta$ haben die neuen Invarianten das voraus, „dass sie für die Klasse vollständig äquivalenter Systeme charakteristisch sind, während die Invariante $\varDelta$ für je sechs Klassen, deren Unterscheidung sich nach arithmetischen Gesichtspunkten als notwendig erweist, einen und denselben Wert behält.“

Der Umstand, dass es notwendig ist, den reellen und imaginären Teil der Functionen $\varkappa^2$ und $\sin^2 \mathrm{am}(2\sigma K + 2\tau K'i, \varkappa)$ zu trennen, brachte nun Kronecker auf den Gedanken, „dass sich noch andere naturgemässe Entwickelungen der elliptischen Functionen finden lassen möchten, wenn man eine Trennung der beiden Teile der complexen Variabeln zulässt, und es lag hierbei offenbar am nächsten, die Entwickelung von $\sin \mathrm{am}(2\sigma K + 2\tau K'i, \varkappa)$ in eine zweifache, nach sinus und cosinus der Vielfachen von σ und τ fortschreitende Doppelreihe zu versuchen. Dies hat nun in der That zu überraschend einfachen und eleganten Formeln geführt, und es hat sich dadurch gezeigt, dass man sich nicht, wie bisher, auf solche Entwickelungen von Functionen einer complexen Variable $x + yi$ beschränken darf, welche die Variabeln x und y nur in ihrer formalen Verbindung zu $x + yi$ enthalten“. Diese Entwickelung ergiebt die interessante Gleichung:

$$\varkappa \sin \mathrm{am}(2\sigma K + 2\tau K'i, \varkappa) = \sum_{\nu, n} \frac{(-1)^n \sin(\nu\sigma + 2n\tau)\pi}{\nu K' + 2nKi},$$

wo ν und n die alte Bedeutung haben. Aus dieser Gleichung resultirt die Reihenentwickelung des Moduls:

$$\varkappa = \sum_{\nu, n} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(2n+\nu-1)}}{\nu K' + 2nKi},$$

und die nicht minder bemerkenswerte Relation zwischen K und $K'i$:

$$1 = \lim_{\tau = 0} \sum_{\nu, n} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(\nu-1)} \cos 2n\tau\pi}{\nu K' + 2nKi}.$$

Hierdurch veranlasst, untersucht Kronecker allgemeinere Doppelsummen und leitet im besonderen folgende Gleichung her. Es sei:

$$\operatorname{Ser}(u_0, u, v, w) = \sum_{m,n} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(\sigma+m)v + (\tau+n)w}; \qquad \begin{pmatrix} u_0 = \sigma_0 v + \tau_0 w, \\ u = \sigma v + \tau w \end{pmatrix};$$

die Function Series ist keineswegs im gewöhnlichen Sinne eine Function der complexen Variabeln u_0 und u, sondern nur insofern, als durch Angabe der complexen Werte u_0 und u ihr Wert vollständig bestimmt ist. Dann gilt die Hauptgleichung:

$$\operatorname{Ser}(u_0, u, v, w) = \frac{1}{v} e^{\frac{2\tau_0 u\pi i}{v}} \frac{\vartheta'\left(0, \frac{w}{v}\right) \vartheta\left(\frac{u_0+u}{v}, \frac{w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{w}{v}\right) \vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{w}{v}\right)}$$

unter gewissen Bedingungen, deren Präcisirung hier nicht erfolgen kann. Der ϑ-Quotient rechts kann als die dem reciproken Sinus entsprechende nächst höhere Function angesehen werden. Die Function Series ist eine Invariante der Aequivalenz

$$(\sigma_0, \tau_0, \sigma, \tau, v, w) \sim$$
$$(\alpha\sigma_0 + \beta\tau_0, \alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0, \alpha\sigma + \beta\tau, \alpha'\sigma + \beta'\tau, \beta'v - \alpha'w, -\beta v + \alpha w).$$

Diese Invarianteneigenschaft tritt in Evidenz, wenn man die ϑ-Functionen durch jene Function Alpha ausdrückt, welche in art. XIX eingeführt wurde. Es war:

$$A(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0) = \left(\frac{2\pi}{\vartheta'(0, w)}\right)^{\frac{1}{3}} e^{(\sigma+\tau w)\tau\pi i} \vartheta(\sigma + \tau w, w).$$

Die Bezeichnung A bedeutet den Anfangsbuchstaben von ἄτροπος, „welches wohl als der griechische Ausdruck für Invariante gelten kann“. Werden an Stelle der Grössen $\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0$ die Grössen u, v, w durch die Gleichungen:

$$u = \sigma v + \tau w, \quad (b_0 - i)v + 2c_0 w = 0$$

eingeführt, so soll nunmehr

$$A(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0) = \operatorname{Atr}(u, v, w)$$

gesetzt werden. Führt man noch ein

$$\overline{\operatorname{Atr}}(u_0, u, v, w) = e^{(\sigma\tau_0 - \sigma_0\tau)\pi i} \frac{\operatorname{Atr}'(0, v, w) \operatorname{Atr}(u_0 + u, v, w)}{\operatorname{Atr}(u_0, v, w) \operatorname{Atr}(u, v, w)},$$

so ergiebt sich die einfache Darstellung:

$$\overline{\text{Atr}}(u_0, u, v, w) = \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{m,n} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{u+mv+nw},$$

bei welcher die Summation in ganz bestimmter Weise auszuführen ist.

In art. XXI wird nun gezeigt, dass gewisse verschiedene Anordnungen der Summation dasselbe Resultat ergeben, und dies ist von besonderem Interesse deshalb, weil hierdurch ein Teil der Theorie der linearen Transformation der ϑ-Functionen auf einfachem Wege erhalten wird. Den Ausgangspunkt der Entwickelungen dieses Artikels bildet die Reihe:

$$\sum_{m,n} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)\,\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\varrho}} \qquad (m, n = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm M),$$

deren Grenzwert für $M = \infty$ mit:

$$\text{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w)$$

bezeichnet wird. Für $\varrho = 0$ entsteht hieraus eine Function, welche mit $\text{Ser}(u_0, u, v, w)$ identisch ist, und von der nachgewiesen wird, dass sie nichts anderes als die eben eingeführte Function $\overline{\text{Atr}}(u_0, u, v, w)$ ist.

Am Anfang von art. XXII wird angekündigt, dass man durch Integration von $\text{Ser}(u_0, u, v, w)$ „zu einer neuen merkwürdigen Verallgemeinerung der Jacobi'schen ϑ-Reihen gelangt". Doch nur der erste Paragraph dieses Artikels ist erschienen, und hiermit bricht plötzlich die Reihe der Veröffentlichungen ab, welche Kronecker diesem Gegenstand gewidmet hat. In seinem Nachlass haben sich aber auf die Theorie der elliptischen Functionen bezügliche Papiere vorgefunden, und man darf daher vielleicht hoffen, dass ein Teil der weiteren Forschungsergebnisse, die im Besitze Kronecker's waren, der Nachwelt nicht verloren geht.

St.

W. Scheibner. Ueber elliptische Doppelsummen.
Leipz. Ber. XLII. 130-152.

Auf die Wichtigkeit der von Eisenstein in seinen „Beiträgen zur Theorie der elliptischen Functionen" entwickelten Ideen hat wohl zuerst Herr Hurwitz (Math. Ann. XVIII, F. d. M. XIII. 1881.

364) aufmerksam gemacht, und seitdem sind diese wiederh
Gegenstand mathematischer Forschung gewesen. Auch He
Scheibner geht von der Eisenstein'schen Doppelsumme

$$(g, x) = \sum \frac{1}{(x+w)^g} \qquad (w = \alpha m + \beta n)$$

aus, in welcher m und n alle ganzzahligen positiven und neg
tiven Werte durchlaufen. Er entwickelt eine grosse Anza
interessanter Formeln, aus denen der Referent folgende hervo
heben möchte.

Kronecker hat in den Sitzungsberichten der Berliner Ak
demie (Februar 1890) die Formel abgeleitet:

$$\frac{\vartheta'_1 \vartheta_1(u+u_1)}{\vartheta_1 u \vartheta_1 u_1} e^{\frac{2uv'i}{h}} = \sum_{p,p'} \frac{1}{u+p\pi+p'hi} e^{2(p'v-p\frac{\pi}{h}v')i} \qquad \left(\begin{array}{l} q = e^{-h} \\ u_1 = v+v'i \end{array}\right)$$

Diese Gleichung wird hier auf anderem Wege bewiesen, un
aus ihr ein System von zwölf Formeln hergeleitet, welche ähn
liche Reihenentwickelungen für Ausdrücke der Form:

$$\frac{\vartheta'_1 \vartheta_\alpha(u+u_1)}{\vartheta_\beta u \vartheta_\gamma u_1} e^{\frac{2uv'i}{h}}$$

ergeben. Setzt man in diesen Gleichungen u beziehungsweise u
gleich Null, so ergeben sich die entsprechenden Ausdrücke fü
die zwölf Quotienten der Thetafunctionen. Beispielsweise ist

$$\frac{\vartheta'_1 \vartheta_2 u}{\vartheta_2 \vartheta_1 u} = \sum_{p,p'} \frac{1}{(p+\frac{1}{2})\pi+p'hi} \cdot e^{2(p'v-(p+\frac{1}{2})\frac{\pi}{h}v')i} \qquad (u = v+v'i)$$

Eine andere Art elliptischer Doppelsummen ergiebt sich
wenn man die von Herrn Scheibner in seiner Abhandlung: Ueber
die Reduction elliptischer Integrale (Leipz. Ber. 1879, S. 158-161)
aufgestellten Gleichungen gleichzeitig nach den Potenzen der
Grössen $\omega = e^{2ui}$ und $\zeta = e^{2vi}$ entwickelt. Es entsteht so ein
System von sechzehn Doppelreihen für Ausdrücke der Form:

$$\frac{\vartheta'_1 \vartheta_\alpha(u+v)}{\vartheta_\beta u \vartheta_\gamma v}.$$

Beispielsweise ist

$$\frac{\vartheta'_1 \vartheta_1(u+v)}{\vartheta u \vartheta v} = 4 \sum q^{2(m+\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})} \sin\{(2m+1)u+(2n+1)v\};$$

gerade diese Doppelsumme hatte bereits Kronecker in den
Monatsberichten der Berliner Akademie (December 1881) mit-

geteilt. Zu diesem Formelsystem bemerkt Herr Scheibner: „Es mag noch auf den eigentümlichen Parallelismus hingewiesen werden, in welchem die obigen sechzehn Doppelsummen zu den bekannten Doppelreihen für die sechzehn hyperelliptischen Thetafunctionen zweier Argumente $\Theta(u, v)$ stehen". St.

F. Caspary. Sur les relations qui lient les éléments d'un système orthogonal aux fonctions thêta et sigma d'un seul argument et aux fonctions elliptiques et sur une théorie élémentaire de ces transcendantes, déduite des dites relations. Journ. de Math. (4) VI. 367-404.

In seinen Untersuchungen über Thetafunctionen mit einer beliebigen Anzahl von Argumenten wurde der Verfasser zur Entdeckung von Relationen zwischen diesen Functionen und den Coefficienten eines orthogonalen Systems geführt. Diese Relationen nehmen, im Falle die Anzahl der Argumente eins oder zwei ist, d. h. im Falle elliptischer oder hyperelliptischer Functionen erster Gattung, eine so einfache Gestalt an, dass es möglich ist, umgekehrt aus den zwischen den Coefficienten bestehenden Beziehungen die Theorie der Theta- und Sigmafunctionen direct und zwar auf sehr einfache Weise abzuleiten. Dies geschieht hier für elliptische Theta- und Sigmafunctionen, indem der Verfasser zuerst die 9 Coefficienten $a_{m,n}$ $(m, n, = 1, 2, 3)$ eines orthogonalen Systems und die Grössen

$$p_k = -(a_{1k}da_{1l} + a_{2k}da_{2l} + a_{3k}da_{3l}),$$
$$v_k = a_{k1}da_{l1} + a_{k2}da_{l2} + a_{k3}da_{l3}, \quad l \neq m;\ l, m = 1, 2, 3$$

in Functionen von 4 unabhängigen Grössen a_1, a_2, a_3, a_4 ausdrückt, dann durch Verbindung der von Jacobi gegebenen Definitionen (Jacobi Werke B. I. p. 501) die zwischen den Producten

$$\vartheta(w, q)\,\vartheta(x, q);\quad \vartheta_\lambda(w, q)\vartheta_\lambda(x, q);\quad \lambda = 1, 2, 3$$

bestehenden Gleichungen bildet (die als Transformationsformeln zweiter Ordnung bekannt sind) und die 4 hierin auftretenden Functionen

$$\vartheta_\mu(w + x, q^2),\ \vartheta_\mu(w - x, q^2);\ \mu = 2, 3$$

an Stelle gewisser Combinationen der a_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ einführt.

Desgleichen werden die Weierstrass'schen Sigmafunctionen durch die Jacobi'schen Thetafunctionen definirt und die obigen 15 Grössen des orthogonalen Systems in gleicher Weise durch sie ausgedrückt. Diese zweimal 15 Gleichungen erlauben dann, mittels der einfachsten algebraischen und differentialen Identitäten zwischen jenen Substitutionscoefficienten die Fundamentalgleichungen der Theta- und Sigmafunctionen fast unmittelbar hinzuschreiben, die dann, ähnlich wie von Jacobi (Werke B. I. 516), zur Umkehr der elliptischen Integrale erster Gattung und zur Einführung der Jacobi'schen elliptischen Functionen benutzt werden. Ebenso leicht liefern jene Identitäten die Additionstheoreme dieser letzteren Functionen, an deren Entwickelung sich die Darstellung der elliptischen Integrale zweiter und dritter Gattung durch Thetafunctionen aus einfachen Differentialidentitäten zwischen den v_k sowie die Aufstellung des Additionstheorems der Integrale zweiter Gattung anschliesst. Dagegen lässt sich das Additionstheorem der Integrale dritter Gattung nicht direct aus jenen Identitäten gewinnen, weshalb es der Verfasser aus jener berühmten Relation ableitet, die Jacobi (B. I. 506) als Fundament der Entwickelung der elliptischen Functionen aus den Thetafunctionen diente. Bei dieser Gelegenheit zeigt der Verfasser, dass diese Relation Jacobi's aus einer einfachen Vertauschung der Factoren eines algebraischen Productes erhalten werden kann, und fügt die Bemerkung bei, dass man die entsprechenden Theoreme für die hyperelliptischen Thetafunctionen und diejenigen mit beliebiger Argumentenzahl auf die nämliche Weise abzuleiten im Stande ist (vgl. des Verfassers Arbeiten in C. R. CIV. 1094, 1258 und Math. Ann. XXVIII. 493, XXX. 571).

Fast noch einfacher als die Theorie der Jacobi'schen Thetafunctionen ergiebt sich aus den erwähnten Identitäten die Theorie der Weierstrass'schen Sigmafunctionen und der $\wp$-Function, die ebenfalls in ihren Grundzügen entwickelt wird. Hieran schliesst sich der Nachweis, dass die von Herrn Hermite in seinem Werke: „Sur quelques applications des fonctions elliptiques“ (1885) zuerst eingeführten doppeltperiodischen Functionen zweiter Gattung direct proportional gesetzt werden können den Elementen eines

Orthogonalsystems, und dass man die Eigenschaften der von Halphen (Traité des fonctions elliptiques t. I. p. 230) gegebenen doppeltperiodischen Functionen zweiter Gattung einfach bekommt, wenn man in diesen Identitäten $v_2 = 0$ setzt. Zum Schlusse weist der Verfasser noch darauf hin, dass man ganz auf dieselbe Weise wie die Theorie der elliptischen Functionen auch die der hyperelliptischen Functionen erster Gattung aus den Identitäten des orthogonalen Systems ableiten kann (vgl. des Verfassers Note C. R. CXI. 225, s. unten S. 487), und dass sich aus den Differentialidentitäten im Falle der doppeltperiodischen Functionen die von den Herren Fuchs, Hermite, Appell etc. in neuester Zeit gewonnenen Resultate leicht ergeben, wie der Autor in einer späteren Abhandlung darzulegen gedenkt. Bm.

W. Burnside. On the differential equation of confocal sphero-conics. Mess. (2) XX. 60-63.

Setzt man $\alpha = \frac{1}{2}\theta e^{i\varphi}$, $\beta = \text{tang}\,\frac{1}{2}\theta\,.\,e^{-i\varphi}$, wo θ und φ bezw. das Complement der Breite und die Länge auf der Kugelfläche bezeichnen, so findet der Verf. die fragliche Gleichung in der Gestalt

$$\frac{d\alpha'^2}{(1-\alpha'^2)(1-k^2\alpha'^2)} = \frac{d\beta'^2}{(1-\beta'^2)(1-k^2\beta'^2)},$$

wo $\alpha' = \alpha\sqrt{k}$, $\beta' = \beta\sqrt{k}$, $k = \dfrac{\sqrt{a^2-c^2}-\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}+\sqrt{b^2-c^2}}$, wenn der sphärische Kegelschnitt bestimmt ist durch

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 0, \quad x^2+y^2+z^2 = 1.$$

Daher $\alpha = \sqrt{k}\,.\,\text{sn}\,(u+iv)$, $\beta = \sqrt{k}\,.\,\text{sn}(u-iv)$, wo $(u+iv)\pm(u-iv) = \text{const.}$ Vermittelst dieser Gleichungen werden die stereographischen Projectionen der sphärischen Kegelschnitte betrachtet.

Glr. (Lp.)

G. Peano. Valori approssimati per l'area di un ellissoide. Rom. Acc. L. Rend. (4) VI$_2$. 317-321.

Für die Oberfläche E des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

hat Boussinesq (Cours d'Analyse infinitésimale, Paris 1890, II, 74) die beiden Näherungswerte

$$E'=4\pi\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2,\quad E''=4\pi\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{a+b+c}{3}+\frac{1}{5}\sqrt[3]{abc}\right)^2$$

aufgestellt, ohne die Kriterien für die Fehlergrenzen anzugeben. Herr Peano zeigt, dass unter Umständen die Quotienten $\frac{E'}{E}$ und $\frac{E''}{E}$ jede gegebene Grenze übersteigen können. Er giebt deshalb folgenden anderen Grenzwert:

$$E_1 = 4\pi ab,$$

woraus $\frac{1}{2}E_1<E<E_1$, oder besser:

$$E_2 = 2\pi b(a+c)$$

und untersucht den möglichen Fehler $E-E_2$. Ein fernerer Grenzwert ist

$$E_3 = 4\pi\frac{ab+ac+bc}{3}.$$

Nähert sich das Ellipsoid einer Kugel, so gilt der Näherungswert

$$E_4 = 4\pi\frac{ab+ac+bc}{3}+\frac{2}{15}\pi\left[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\right].$$

M.

O. Fulst. Bestimmung des Flächeninhalts des Mantels eines schiefen Kegels mit elliptischer Grundfläche. Diss. Göttingen. 33 S. 8°.

Die Mantelfläche eines schiefen Kegels mit Kreisbasis ist von Legendre, Hoüel, Tröger, Schellbach und Weierstrass bestimmt worden. Auch die analoge Frage für den schiefen Kegel mit elliptischer Basis ist für diejenigen Fälle vollständig gelöst, in denen der Fusspunkt des von der Spitze des Kegels auf die Grundfläche gefällten Lotes in eine der Hauptaxen der Grundellipse fällt. Die betreffenden Integrale sind von Legendre und Hoüel aufgestellt, und Herr G. Pfeiffer (Pr. Berlin 1882) hat die

Formeln für die numerische Berechnung vereinfacht (s. F. d. M. XIV. 1882. 689). Auch für den allgemeinsten Fall hat Legendre ein elliptisches Integral aufgestellt, das allerdings sehr complicirt ist. Hier wird, nach Anweisung des Herrn Schwarz, durch Einführung geeigneter unabhängiger Variabeln das den Flächeninhalt des Mantels darstellende Integral in einer zur directen Berechnung desselben geeigneten Form erhalten. Es werden elliptische Coordinaten eingeführt und die Weierstrass'schen Functionen $\wp u$ und σu benutzt. M.

J. A. Martins da Silva. Sur trois formules de la théorie des fonctions elliptiques. Teixeira J. IX. 173-176.

Abdruck aus Darboux Bull. (2) X; vergl. F. d. M. XVIII. 1886. 390.

W. Krimphoff. Ueber eine neue Curvengattung, welche aus der lemniskatischen Function entspringt. Diss. Münster. 34 S. 8°.

C. Hyperelliptische, Abel'sche und verwandte Functionen.

P. Baumert. Ueber die ultraelliptischen Integrale der dritten Ordnung. II. Pr. Progymn. Striegau. 20 S.

Fortsetzung der Abhandlung, über welche F. d. M. XIX. 1887. 481. berichtet wurde. Nachdem die Eigenschaften der betreffenden ϑ-Functionen mit der Charakteristik $(\varepsilon)\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \\ \varepsilon'_1 & \varepsilon'_2 & \varepsilon'_3 & \varepsilon'_4\end{pmatrix}$ festgestellt sind, werden die algebraischen Functionen bestimmt, die den ϑ-Quotienten entsprechen. Durch zwei Cardinalformen wird die Aufgabe gelöst, gegebene achtfach periodische Functionen der Veränderlichen v algebraisch durch die in den Punkten z_1, z_2, z_3, z_4 stattfindenden Werte von z, s darzustellen. Daran

schliesst sich die Bestimmung der Charakteristik ($\varkappa$), welche dem Constantensystem (k) entspricht, und die Ermittelung der Constanten C in den Cardinalformen. Zum Schluss wird noch kurz das Umkehrproblem in der Jacobi'schen Fassung behandelt.

M.

Toropoff. Ueber eine Transformation der hyperelliptischen Integrale. Charkow Ges. (2) I. 82-104.

Abdruck einer separat erschienenen Abhandlung, die schon F. d. M. XIX. 1887. 477. besprochen wurde.

Wi.

J. Ptaszycki. Ueber die Reduction einiger Abel'schen Integrale auf ihre Normalform. Prace mat.-fiz. II. 57-74. (Polnisch.)

Es sei

$$\int \frac{P dx}{Q \sqrt[m]{R}}$$

ein gegebenes Abel'sches Integral, P, Q und R sind ganze Functionen von x; es wird vorausgesetzt, dass der Grad der Vielfachheit jeder der λ Wurzeln der Function R die Zahl m nicht übersteigt.

Im I. Abschnitte dieser Arbeit wird das Abel'sche Verfahren für die Reduction der Integrale

$$\int \frac{x^\mu dx}{\sqrt[m]{R}}, \quad \int \frac{dx}{(x-b)^\mu \sqrt[m]{R}}$$

in einer für den Zweck der Abhandlung bequemeren Form dargestellt. Im II. Abschnitte untersucht der Verfasser den Ausdruck

$$\frac{X}{Y\sqrt[m]{R}} + \Sigma A \log W,$$

$$W = \varphi(\sqrt[m]{R}).\varphi^{\alpha}(\alpha\sqrt[m]{R}).\varphi^{\alpha^2}(\alpha^2\sqrt[m]{R})\ldots\varphi^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1}\sqrt[m]{R});$$

hier sind X und Y ganze Functionen von x, A eine Constante, α eine primitive Wurzel der Gleichung $x^m-1=0$, φ eine rationale Function. Auf Grund dieser Untersuchung beweist der Verfasser im III. Abschnitte: wenn das Integral

$$\int \frac{P_1 dx}{Q_1 \sqrt[m]{R}}$$

(P_1 und Q_1 sind ganze Functionen von x, der Grad der Function $\frac{P_1}{Q_1}$ ist nicht grösser als $\lambda-2$, die Gleichung $Q_1=0$ besitzt nur einfache Wurzeln und hat mit $R=0$ keine gemeinschaftliche Wurzel) auf eine endliche Form reducirt werden kann, so ist diese Form gewiss $\Sigma A \log W$. Das Integral ist aber auf diese Form nicht reducirbar, wenn der Grad von $\frac{P_1}{Q_1 \sqrt[m]{R}}$ grösser ist als -1, und auch nicht, wenn zwar dieser Grad kleiner als -1, aber gleichzeitig $Q_1=1$ ist. Im IV. Abschnitte folgt dann die Darstellung der Methode der Reduction, die mittels einfacher arithmetischer Operationen vollzogen wird. Im letzten Abschnitte sucht der Verfasser die Form der Function $\sqrt[m]{R}$, für welche das Integral

$$\int F(x, \sqrt[m]{R})\, dx$$

auf eine endliche Anzahl algebraischer Functionen reducirbar ist.

Dn.

E. Picard. Sur le nombre des intégrales abéliennes de première espèce. Darboux Bull. (2) XIV. 131-132.

Ist $f(x,y)=0$ die Gleichung einer Curve m^{ter} Ordnung mit d gewöhnlichen Doppelpunkten, so giebt es bekanntlich $p=\frac{(m-1)(m-2)}{2}-d$ zugehörige Integrale erster Gattung. Der Verfasser giebt einen Beweis dieses Satzes, der das Abel'sche Theorem zu Hülfe zieht. Das allgemeine Integral erster Gattung

wird durch das Integral $\int \frac{Q(x,y)\,dx}{f'_y}$ dargestellt, wo $Q(x,y)$ ein Polynom bedeutet, das, gleich Null gesetzt, eine durch die d Doppelpunkte laufende Curve $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung darstellt. Daraus folgt, dass es mindestens p linear unabhängige Functionen Q: $Q_1(x,y), Q_2(x,y), \ldots, Q_p(x,y)$ und dem entsprechend ebenso viele Integrale erster Gattung giebt. Würden nun mehr als p existiren, so könnte man durch p willkürliche Punkte $(x_1,y_1), (x_2,y_2), \ldots, (x_p,y_p)$ eine Curve $Q=0$ hindurchlegen, welche $f=0$ in weiteren $p-2$ Punkten begegnet. Durch die letzteren würde ein Büschel von Curven $Q=0$ hindurchlaufen, und indem man auf dieses das Abel'sche Theorem anwendet, würde man das Resultat erhalten, dass die Determinante $|Q_i(x_k,y_k)|$ $(i,k=1,2,\ldots,p)$ verschwindet. Dies ist aber widersinnig, da die Punkte (x_k, y_k) willkürlich sind. Hz.

H. S. White. Ueber zwei covariante Formen aus der Theorie der Abel'schen Integrale auf vollständigen singularitätenfreien Schnittcurven zweier Flächen. Math. Ann. XXXVI. 597-601.

Ausführlich in Nova Acta Leop. LVII. 1891; Ref. im nächsten Bande. Bdt.

Fr. Brioschi. Ueber die Reihenentwickelung der geraden Sigmafunctionen zweier Veränderlichen. Gött. Nachr. 236-238.

Die vorliegende Note enthält eine Transformation der Differentialgleichung für die geraden Sigmafunctionen zweier Veränderlichen, durch welche das Problem der Entwickelung einer solchen Function in eine Potenzreihe vollständig gelöst wird.

Zu dem gleichen Resultate ist Herr Wiltheiss am Schlusse seiner Abhandlung: „Ueber eine besondere Art von Covarianten bildender Operation", zweiter Teil (Math. Ann. XXXVI. 134) gelangt (s. S. 127 dieses Bandes). Kr.

F. Caspary. Sur une nouvelle méthode d'exposition de la théorie des fonctions thêta, et sur un théorème élémentaire relatif aux fonctions hyperelliptiques de première espèce. C. R. CXI. 225-227.

Die fünfzehn hyperelliptischen Functionen erster Ordnung sind beziehlich proportional den neun Coefficienten $a_{mn} (m, n = 1, 2, 3)$ eines orthogonalen Gleichungensystems von der Determinante $+1$ und den sechs daraus gebildeten Grössen:

$$p_h = -\sum_i a_{ik} da_{il}, \quad v_h = \sum_i a_{ki} da_{li}.$$
$$(h, k, l = 1, 2, 3;\ 2, 3, 1;\ 3, 1, 2).$$

Kr.

J. Schröder. Ueber den Zusammenhang der hyperelliptischen σ- und ϑ-Functionen. Diss. Göttingen. 79 S. 8°.

J. Schröder. Ueber den Zusammenhang der hyperelliptischen σ- und ϑ-Functionen. Hamb. Mitt. II. 162-172.

In seinen Untersuchungen über hyperelliptische Functionen hat Herr F. Klein neben den 2^{2p} von der jeweiligen Zerschneidung der Riemann'schen Fläche T abhängigen ϑ-Functionen 2^{2p} ihnen correspondirende σ-Functionen eingeführt, die von der Wahl des Querschnittsystems unabhängig sind. Die Definition dieser σ-Functionen findet man in § 9 der Abhandlung: „Ueber hyperelliptische Sigmafunctionen" (Zweite Abhandlung) Math. Ann. XXXII. 351 (cf. F. d. M. XX. 1888. 491). Der Zusammenhang einer ϑ-Function mit der ihr entsprechenden σ-Function wurde von Herrn Klein in § 14 der soeben genannten Abhandlung in der Form:

$$\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]((v)) = C_{\varphi\psi} e^{G((w))} \sigma_{\varphi\psi}((w))$$

mitgeteilt. In dieser Gleichung bedeutet $G((w))$ eine ganze rationale Function zweiten Grades der w, die Herr Klein S. 376 angegeben hat, $C_{\varphi\psi}$ aber eine Constante, für welche seitens des Herrn Klein nur erst eine sehr wahrscheinliche Vermutung vorlag. Aufgabe der beiden gegenwärtigen Abhandlungen, von denen die zweite einen Auszug der ersten enthält, ist es, diese Grösse

$C_{\varphi\psi}$ wirklich zu bestimmen. Es ergiebt sich dabei in Uebereinstimmung mit der von Herrn Klein ausgesprochenen Vermutung, dass $C_{\varphi\psi}$ den Wert:

$$C_{\varphi\psi} = \frac{\varrho}{2^\mu}\sqrt{\frac{A}{(2\pi)^p}}\sqrt[8]{\varDelta_\varphi\varDelta_\psi}$$

hat; dabei bezeichnen $\varDelta_\varphi$, $\varDelta_\psi$ die Discriminanten jener beiden Formen φ, ψ von den Graden $p+1-2\mu$, $p+1+2\mu$ beziehlich, in welche die Grundform f zum Zwecke der Bildung der vorliegenden σ-Function zerlegt wurde, ferner A die Determinante $\Sigma\pm\omega_{11}\omega_{22}\dots\omega_{pp}$ der Periodicitätsmoduln der Integrale erster Gattung w an den Querschnitten a, endlich ϱ eine noch unbestimmte achte Einheitswurzel.

Wie der Verf. selbst bemerkt, bedarf die angestellte Untersuchung nach zwei Richtungen der Vervollständigung. Erstens bleibt nämlich die so eben genannte achte Einheitswurzel ϱ noch zu bestimmen, und zweitens muss die Untersuchung von der besonderen Wahl des ihr zu Grunde gelegten Querschnittsystems befreit werden. Bezüglich dieses Querschnittsystems hat der Verf. in einer Fussnote zu § 1 bemerkt, dass es von dem von Herrn Klein früher benutzten verschieden ist, nicht aber hinzugefügt, dass es von Herrn Prym herrührt, der es seiner Arbeit: „Zur Theorie der Functionen in einer zweiblättrigen Fläche“ (Denkschr. d. schweiz. naturf. Gesellschaft Bd. XXII) zu Grunde gelegt hat. Kr.

H. Burkhardt. Untersuchungen aus dem Gebiete der hyperelliptischen Modulfunctionen. Erster Teil. Math. Ann. XXXVI. 371-434.

In den vom Verfasser unter dem Titel: „Grundzüge einer allgemeinen Systematik der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung“ veröffentlichten Vorlesungen des Herrn F. Klein (Math. Ann. XXXV. 198, vgl. F. d. M. XXI. 1889. 496) wurde eine Reihe von neuen Gesichtspunkten aufgestellt, deren Fruchtbarkeit zur Durchführung specieller Probleme an einem passenden Bei-

spiele, der Multiplicatorgleichung 40. Grades für die Transformation dritter Ordnung, in der vorliegenden Abhandlung dargethan wird (vgl. die Mitteilung der Resultate derselben in Gött. Nachr. 1889). Die Erreichung dieses Zieles war dem Verfasser aber nur dadurch möglich, dass vorher eine Reihe von Fragen über hyperelliptische Modulfunctionen eingehend behandelt wurden, die nebenbei ein Material zu Tage förderten, das auch für andere Probleme von Wichtigkeit ist.

Wir müssen uns auf eine kurze Inhaltsangabe der 7 Abschnitte beschränken, in welche die Abhandlung zerfällt, da eine detaillirte Beschreibung der Arbeit ohne Benutzung des Formelapparates nicht möglich ist.

Im ersten Abschnitte behandelt der Verfasser die Beziehung der Thetafunctionen zur Stufeneinteilung. Als Vermittelungsglied bei dem Uebergange von den Klein'schen Sigmafunctionen zu den Jacobi'schen Thetafunctionen treten die *Th*-Functionen (oder besser -Formen) auf, die Herr Wiltheiss (Math. Ann. XXXI. 33.) mehrfach benutzt hat. Die Quotienten zweier Jacobi'schen Thetafunctionen ergeben sich als Functionen achter Stufe, während ihre Quadrate Functionen vierter, ihre vierten und achten Potenzen Functionen zweiter Stufe sind. Im zweiten Abschnitte werden zwei Grenzfälle der hyperelliptischen Functionen studirt, d. h. es wird das Verhalten dieser Functionen untersucht, wenn die Argumente derselben an die Grenze des in den Grundzügen § 12 definirten natürlichen Bereiches herausrücken: dabei werden namentlich die algebraischen Argumente in Betracht gezogen.

Der dritte Abschnitt enthält die Transformation von Functionen höherer Stufe. Unter der Voraussetzung, dass der Transformationsgrad n eine ungerade Primzahl und die Stufenzahl s der zu transformirenden Function zu n relativ prim ist, werden zuerst die gewöhnlichen Repräsentanten durch andere ersetzt, und zwar so, dass die ihnen zugeordneten linearen Transformationen nach dem Modul s zur Identität congruent werden, wodurch man erreicht, dass die verschiedenen Werte einer Transformationsform, welche zu den so normirten Repräsentanten gehören, einer und derselben Gleichung genügen, die im

Rationalitätsbereich der Principaluntergruppe s^{ter} Stufe irreducibel ist.

Der vierte Abschnitt behandelt die Darstellung der rationalen symmetrischen Simultaninvarianten von zwei kubischen Binärformen durch die zugehörigen hyperelliptischen Thetanullwerte. Hier wird zunächst das volle System der „reinen" Modulformen des Rationalitätsbereiches neunter Stufe aufgestellt, welcher sich auf die Zerlegung der Grundform f_6 in zwei kubische Factoren φ_3 und ψ_3 stützt, Modulformen, die mit jenen rationalen ganzen Simultanformen von φ und ψ übereinstimmen, welche bei Vertauschung von φ und ψ ihre Werte nicht ändern. Diese Invarianten werden dann teils durch ϑ-, teils durch *Th*-Nullwerte dargestellt, in ihren Eigenschaften untersucht und schliesslich in Reihen entwickelt, die nach den Grössen

$$p = e^{\pi i \tau_{11}},\ r = e^{\pi i \tau_{13}},\ s = q + q^{-1} = e^{\pi i \tau_{12}} + e^{-\pi i \tau_{12}}$$

fortschreiten. Hieran schliesst sich im fünften Abschnitte die Reduction hyperelliptischer Integrale auf elliptische durch Transformation dritten Grades. Weierstrass und Picard (J. für Math. LXVII, Acta Math. IV, S. M. F. Bull. XI. 1883) haben die Bedingungen hierfür, welche die transcendenten Moduln der Thetafunctionen erfüllen müssen, in der Form angegeben: $\tau_{12} = \frac{1}{3}$. Ist diese Bedingung erfüllt, so gelangt man durch Transformation dritten Grades auf $\tau_{12} = 1$ und hierauf durch lineare Transformation auf $\tau_{12} = 0$, was dem im zweiten Abschnitte behandelten Grenzfalle entspricht. Diese Bedingung ersetzt der Verfasser an der Hand einer von Herrn Goursat (S. M. F. Bull. XIII. 1885. 155) gegebenen Normirung durch eine Relation zwischen den oben (Abschnitt IV) erwähnten Invarianten.

Abschnitt VI bringt die allgemeine Theorie der Multiplicatorgleichung für $\sqrt[4]{\Delta\varphi . \Delta\psi}$, wobei unter $\Delta\varphi$ und $\Delta\psi$ die Discriminanten der kubischen Formen φ und ψ verstanden sind. Da es gleichgültig ist, welche Form zweiter Stufe man als Wurzel der Multiplicatorgleichung wählt, so bedient sich der Verfasser, durch Rücksicht auf die Vereinfachung der Rechnung geleitet, des Quadrates des *Th*-Nullwertes $\sqrt[4]{\Delta\varphi\Delta\psi}$ $\left(Th_{\varphi,\psi} = \sqrt[8]{\Delta\varphi\Delta\psi\sigma_{\varphi\psi}}\right)$ und

untersucht nebeneinander die Eigenschaften der Gleichungen, welchen die Wurzeln

$$\sqrt[4]{D},\quad \sqrt[4]{\frac{D}{\bar{D}}},\quad \sqrt[4]{\frac{\bar{D}}{D^n}}$$

genügen, wobei D das ursprüngliche, $\bar{D}$ das transformirte Discriminantenproduct und n den Grad der Transformation bedeutet.

Der siebente Abschnitt endlich enthält die wirkliche Berechnung einiger Coefficienten der Multiplicatorgleichung für die Transformation dritten Grades, „da es“, wie der Verfasser mit Recht sagt, „wünschenswert schien, zu prüfen, ob die Untersuchung der allgemeinen Eigenschaften dieser Coefficienten tief genug eingedrungen sei, um ihre wirkliche Berechnung mit verhältnismässig geringem Rechnungsaufwand zu ermöglichen.“ Bm.

W. Wirtinger. Ueber eine Verallgemeinerung der Kummer'schen Fläche und ihrer Beziehungen zu den Thetafunctionen zweier Variabeln. Monatsh. f. Math. I. 113-128.

Es wird nachgewiesen, dass die Kummer'sche Fläche nur das erste einer Reihe von Gebilden ist, welche den Thetafunctionen von p Variabeln ebenso zugeordnet sind, wie jene denen von zwei Veränderlichen. An die Stelle der eigentlichen Kummer'schen Fläche tritt bei dieser Verallgemeinerung eine $M_p^m (m = p!\,2^{p-1})$, d. h. ein algebraisches Gebilde von p Dimensionen, welches von einem R_{N-p} $(N = 2^p-1)$ in m Punkten geschnitten wird. Dabei ist unter R_{N-p} des Raumes von N Dimensionen eine durch p lineare Gleichungen zwischen den homogenen Punktcoordinaten x_i desselben definirte lineare Mannigfaltigkeit zu verstehen. Bm.

E. Pascal. Sulla teoria delle funzioni σ abeliane pari a tre argomenti. (Mem. IV). Annali di Mat. (2) XVIII. 1-58.

E. PASCAL. Sopra le funzioni iperellittiche di 1ª specie (I ter Stufe) per $p = 2$. (Mem. V). Annali di Mat. (2) XVIII. 131-164.

E. PASCAL. L'equazione razionale della superficie di Kummer. (Mem. VI). Annali di Mat. (2) XVIII. 227-263.

Die erste Abhandlung beschäftigt sich mit der Bestimmung des zweiten Gliedes in der Reihenentwickelung der geraden Sigmafunctionen dreier Variabeln nach den Potenzen der Integrale erster Gattung. Die zweite Abhandlung schliesst sich an den § 20, die dritte an den § 21 der „Grundzüge einer allgemeinen Systematik der hyperelliptischen Functionen I. Ordnung. Nach Vorlesungen von F. Klein ausgearbeitet von H. Burkhardt" (Math. Ann. XXXV. 198, vergl. F. d. M. XXI. 1889. 496) an.

Kr.

H. AMSTEIN. Fonctions abéliennes du genre 3; un cas particulier. Bull. de la Soc. Vaudoise des Sciences Naturelles, vol. XXIV. no. 99 (1888). 74 p.

H. AMSTEIN. Suite. Ibid. vol. XXV. no. 101 (1890). 33 p.

Verf. betrachtet im Anschluss an die Schrift des Hrn. Weber: Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlechte 3 (F. d. M. VIII. 1876. 293) die Functionen, welche von der Gleichung $x^4+y^4+z^4 = 0$ oder (für $y:x = z\sqrt{i}$, $z:x = s\sqrt{i}$): $s = \sqrt[4]{1-z^4}$ abhängen. Er construirt zunächst die zugehörige Riemann'sche Fläche, versieht dieselbe mit einem kanonischen Querschnittsystem, bestimmt Normalintegrale erster Gattung und die numerischen Werte ihrer Periodicitätsmoduln; ferner die 28 Doppeltangenten und die Coordinaten ihrer Berührungspunkte. Er bestimmt dann die Charakteristiken aller 28 Doppeltangenten in Bezug auf das gewählte Querschnittsystem (wohl der erste Fall einer vollständigen Durchführung dieser Bestimmung), sowie die Nullpunkte einiger geraden Thetafunctionen. Den Schluss bildet das „Riemann'sche Problem", d. h. der Ausdruck der Thetaquotienten durch algebraische Functionen.

Die Fortsetzung enthält, nach einigen Andeutungen über das Jacobi'sche Umkehrproblem, die Durchführung des Riemann'schen Problems mit Hülfe elliptischer Functionen. Bdt.

K. Schleicher. Darstellung und Umkehrung von Thetaquotienten, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind. Pr. Gymn. Bayreuth. 26 S. 8°.

In der Abhandlung: Ueber Thetafunctionen, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind (Math. Ann. XXII. 416, cf. dieses Jahrbuch XIV. 419) hat der Referent diejenigen Thetafunctionen einer Veränderlichen, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind, einer systematischen Behandlung in der Hinsicht unterzogen, dass er die zwischen diesen Functionen bestehenden wesentlichen Beziehungen erforschte. Diese Untersuchungen haben in der vorliegenden, sorgfältig ausgeführten Abhandlung des Herrn Schleicher eine Fortsetzung gefunden, indem derselbe ihnen das Additionstheorem und das Umkehrproblem der aus diesen Functionen gebildeten Quotienten hinzufügte. Kr.

A. von Braunmühl. Ueber Gruppen von p-reihigen Charakteristiken, die aus n^{teln} ganzer Zahlen gebildet sind, und die Relationen zugehöriger Thetafunctionen n^{ter} Ordnung. Math. Ann. XXXVII. 61-99.

Nachdem der Referent in seiner Abhandlung: „Ueber Thetafunctionen, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind" (Math. Ann. XXII. 416, cf. dieses Jahrbuch XIV. 419), diese Functionen für den speciellen Fall $p = 1$ eingeführt und die zwischen ihnen bestehenden wesentlichen Beziehungen aufgestellt hatte, lag der Gedanke nahe, diese Untersuchungen auf den Fall der Thetafunctionen mehrerer Veränderlichen auszudehnen. Zu dem Ende hat der Verfasser in mehreren Abhandlungen (Erlang. Ber. XVIII. 37; München Abh. XVI_2, 327; Math. Ann. XXXII. 513, cf. dieses Jahrb. XVIII. 412; XIX.

496; XX. 490) insbesondere die Untersuchungen, welche Herr Frobenius über Charakteristiken, deren Elemente den gemeinsamen Nenner $r = 2$ besitzen, angestellt hatte, auf den Fall $r = 3$ übertragen. Die vorliegende Abhandlung beschäftigt sich mit der Ausdehnung der früher für $r = 3$ gewonnenen Resultate auf den Fall eines beliebigen r.

Was zunächst den auf die Charakteristiken bezüglichen ersten Abschnitt der Arbeit betrifft, so hat der Verfasser hierbei übersehen, dass die beabsichtigte Uebertragung nur in dem Falle, wo r eine Primzahl ist, geschehen kann, dass dagegen für den Fall, wo r keine Primzahl ist, die früher erhaltenen Resultate zum grossen Teile keine Geltung besitzen. So ist z. B. der Satz VII S. 66 falsch, wenn die Zahl r (von dem Verfasser mit n bezeichnet) keine Primzahl ist; es ist nämlich in diesem Falle $\Sigma r^{\varepsilon|\nu\zeta|} \neq n^p$, sobald für ε eine zu n nicht relativ prime Zahl gesetzt wird. Die gleiche Unrichtigkeit haftet natürlich allen Folgerungen aus dem Satze VII, insbesondere den Angaben des § 3 an. Wie man bei primzahligem r zu den Formeln für die Anzahlen der Charakteristiken von gleichem Charakter auf einfachem Wege gelangt, hat der Referent in diesem Jahrbuche (XIX. 497) gezeigt; für nicht primzahliges r existiren Formeln dieser Art überhaupt nicht.

Den Mittelpunkt des zweiten Abschnitts bildet die Formel (25) S. 94. Der Verfasser erwähnt, dass diese Formel und ihre Verallgemeinerung (25c) S. 96 für $\sigma = p$ in jene Formeln (Θ_2), (Θ'_2) übergehen, welche Herr Prym und der Referent (Acta Math. III. 271 u. 273, cf. dieses Jahrbuch XIV. 419) veröffentlicht haben; dagegen scheint es dem Verfasser entgangen zu sein, dass seine Formeln auch auf einfache Weise aus der Formel (Θ'_2) erhalten werden können, indem man darin an Stelle von $[\eta]$ der Reihe nach die n^λ Charakteristiken

$$(\varrho\nu_\beta), \quad \beta = 0, 1, 2, \ldots, n^\lambda - 1,$$

setzt und die n^λ so entstandenen Gleichungen, mit passenden Multiplicatoren versehen, zu einander addirt. Noch muss bemerkt werden, dass das im Anfange des § 4 angewandte Ver-

fahren der Constantenbestimmung nur für ungerades n zulässig ist, da nur in diesem Falle das eingeführte Symbol $\tau^{\frac{n-1}{2}|\varrho_\beta|}$ die für seine Anwendbarkeit unerlässliche Eigenschaft besitzt, ungeändert zu bleiben, wenn man die Charakteristik (ϱ_β) durch eine ihr congruente ersetzt. Für gerades n, speciell für $n = 2$, kann dieses Symbol die Wurzelzeichen des Herrn Frobenius keineswegs ersetzen; die Formeln (21), (22), (23) und (26) sind daher nur für ungerades n richtig. Kr.

F. Schottky. Zur Definition des Systems der 4^ϱ geraden und ungeraden Thetafunctionen. J. für Math. CVII. 117-134.

Die Thetafunctionen haben die Eigenschaft, dass sie sich bei Vermehrung ihrer Argumente um Halbperioden permutiren, abgesehen von einem allen gemeinschaftlichen Exponentialfactor und einer wechselnden vierten Einheitswurzel. Diese letzteren fallen auch noch heraus bei Quotienten der Form:

$$\Theta_a \Theta_{aL} \Theta_{aM} \Theta_{aLM} : \Theta_b \Theta_{bL} \Theta_{bM} \Theta_{bLM}.$$

Diese Eigenschaft beschränkt die constanten Factoren, welche noch unbestimmt bleiben, wenn man die Θ durch ihr Verhalten bei Vermehrung der Argumente um Ganzperioden definirt; Verfasser fragt, wie weit sie dadurch beschränkt seien. Er wählt zu diesem Zweck 2ϱ primitive Indices, durch welche alle übrigen sich ausdrücken lassen, und findet: man kann den Factor etwa von Θ willkürlich annehmen; dann bestimmen sich die von $\Theta_\varkappa$, $\Theta_{\varkappa\lambda}$, $\Theta_{\varkappa\lambda\mu}$ der Reihe nach bis auf achte, vierte, zweite Einheitswurzeln. Auch diese können willkürlich gewählt werden; dann aber sind die Factoren der übrigen Θ bestimmt. Ferner zeigt er: man kann statt dessen Vorzeichen $(\varkappa, \lambda, \mu)$ vorschreiben (mit gewissen Einschränkungen), welche auftreten, wenn man $\Theta_\lambda \Theta_\mu : \Theta\Theta_{\lambda\mu}$ in $\Theta_{\varkappa\lambda} \Theta_{\varkappa\mu} : \Theta_\varkappa \Theta_{\varkappa\lambda\mu}$ überführt; dann bleibt noch der Factor von Θ willkürlich, in denen der $\Theta_\varkappa$ vierte, in denen der $\Theta_{\varkappa\lambda}$ zweite Einheitswurzeln. Endlich giebt er zwei Arten an, wie die $(\varkappa, \lambda, \mu)$ übersichtlich gewählt werden können. Bdt.

F. Schottky. Ueber die charakteristischen Gleichungen symmetrischer ebener Flächen und die zugehörigen Abel'schen Functionen. J. für Math. CVI. 199-268.

Als „Functionen der Fläche G" hat Verf. früher (J. für Math. LXXXIII. 300-351, F. d. M. IX. 1877. 584) diejenigen Functionen einer complexen Grösse x bezeichnet, welche im Innern und in gewissem Sinne auch auf der Grenze eines zusammenhängenden Gebietes G der x-Ebene sich wie rationale Functionen verhalten und auf der Grenze reell sind. Sie lassen sich rational durch zwei p, q unter ihnen ausdrücken, zwischen denen eine Gleichung mit reellen Coefficienten vom Range ϱ besteht, wenn G $\varrho+1$ Randlinien besitzt; diese Gleichungen nennt Verf. mit Hrn. Weierstrass charakteristische Gleichungen der Fläche.

Ist die Fläche G symmetrisch zu einer Axe, so bezeichnet Verf. mit τ die Anzahl der Paare zu einander symmetrischer Randlinien und setzt $\varrho-\tau=\sigma$. Der Fall $\tau=0$ führt auf hyperelliptische Functionen und wird ausgeschlossen. Die Axe zerlegt G in zwei je $(\tau+1)$-fach zusammenhängende Teile G_1, G_2; die Functionen der Fläche G_1 sind zugleich auch Functionen der Fläche G; sie lassen sich rational durch zwei unter ihnen ausdrücken, die durch eine Gleichung vom Range τ: $G(p,q)=0$ verbunden sind. Die Functionen von G sind dann rational ausdrückbar durch p,q und eine Function s, deren Quadrat erst in p,q rational ist: $s^2=H(p,q)$. Der Grad von H ist im allgemeinen $2\sigma+2$. (§ 2).

Verf. betrachtet ferner „Integrale der Fläche", d. h. Functionen, welche innerhalb G nur durch reelle Perioden vieldeutig, und deren imaginäre Teile längs jeder einzelnen Randlinie constant sind. Die überall endlichen Integrale der Fläche lassen sich durch ϱ unabhängige ausdrücken; diese werden so normirt, dass $J_\alpha(x)$ bei Umkreisung der Randlinie L_β $(\beta=1,2,\dots,\varrho)$ um 0, resp. 1 zunimmt, je nachdem $\alpha\gtrless\beta$ oder $=\beta$. Für jene imaginären Constanten $\tau_{\alpha\beta}$ ist dann $\tau_{\alpha\beta}=\tau_{\beta\alpha}$; aber auch $\tau_{\alpha'\beta'}=\tau_{\alpha\beta}$, wenn α,α' und ebenso β,β' Indices von symmetrischen Randlinien sind (§§ 2-6). Infolge dessen zerfallen die mit

den Moduln $\tau_{\alpha\beta}$ gebildeten Thetareihen wie folgt:

$$\vartheta(u_1,\ldots,u_\varrho;\ \mu+\tfrac{1}{2}g,\nu+\tfrac{1}{2}h)$$
$$=\sum_{(e)}\varphi(v_1,\ldots,v_\sigma;\ \mu,\nu'+\tfrac{1}{2})\,\psi(w_1,\ldots,w_\tau;\mu''+g,\nu''+\tfrac{1}{2}(e+h)).$$

Dabei sind φ,ψ Thetafunctionen, deren Moduln und Argumente sich aus denjenigen von ϑ einfach zusammensetzen; und zwar sind es in je 4^τ dieser Formeln dieselben, so dass je 4^τ Functionen $\vartheta(u_1,\ldots,u_\varrho)$ als „verwandte" erscheinen. (§§ 7-9). Aber von den entstehenden 4^σ Systemen von je 4^τ Functionen $\vartheta(u_1,\ldots,u_\varrho)$ mit Halbercharakteristiken sind nur $2^{2\sigma-\tau}$ auch durch φ,ψ mit Halbercharakteristiken ausgedrückt; die Ausdrücke der andern 2^τ haben Viertelcharakteristiken. (§ 11).

Ausser diesen allgemeinen Resultaten enthält die Abhandlung noch eine ausführliche Untersuchung des Falles $\tau=1$. In diesem wird, wenn t das (geeignet normirte) überall endliche Integral der Fläche G_1 bezeichnet und $t_1,t_2,\ldots,t_{2\sigma}$ reelle Constanten, deren Summe $=0$ ist, $z=\sqrt{S(t)}\,.\,\vartheta^{-\sigma}(t)$, wo

$$S(t)=\vartheta(t-t_1)\vartheta(t-t_2)\ldots\vartheta(t-t_{2\sigma})$$

(§ 3). Ferner nehmen die Formeln für 4 verwandte Functionen $\vartheta(u_1,\ldots,u_\varrho)$ die einfache Form an:

$$\vartheta_m=\varphi_n\psi_r+\delta\varphi_{nn}\psi_{rn},\qquad \vartheta_{mn}=\varphi_n\psi_{rn}+\delta\varphi_{nn}\psi_r,$$
$$\vartheta_{m\omega}=\varphi_n\psi_r-\delta\varphi_{nn}\psi_{rn},\qquad \vartheta_{mn\omega}=\varphi_n\psi_{rn}-\delta\varphi_{nn}\psi_r;$$

darin sind die $\psi(w)=\vartheta(w|2\tau)$. (§ 12). Dann werden Wurzelfunctionen durch $\sqrt{dJ_m:d\eta}$ eingeführt, wobei dJ_m ein Differential ersten Grades mit paarweise zusammenfallenden Nullpunkten, η die von Herrn Klein so bezeichnete Function der Fläche ist; es ergiebt sich $\eta=\int\frac{dt}{\sqrt{S(t)}}$, und die allgemeine Form eines Integrals erster Gattung wird $J=\int(F(t)+c\sqrt{S(t)})d\eta$, unter $F(t)$ eine ϑ-Function vom Grade σ verstanden (§ 14). Diejenigen Wurzelfunctionen, für welche $c=0$ ist, haben die Form $\sqrt{P(t)}\,.\,Q(t)$; dabei ist $P(t)$ ein Factor von $S(t)$, dessen Grad $\equiv\sigma$ (mod. 2) ist, und $Q(t)$ ist eine Function, welche, durch ein bestimmtes ϑ-Product dividirt, eine elliptische Function der Perioden $1,\tau$ giebt

(§ 15). Diejenigen aber, für welche $c \gtreqless 0$ ist, haben die Form: $\sqrt{A(t)} + \sqrt{B(t)}$; A und B sind Producte, auf welche sich die 4σ Factoren $\vartheta(t - t_\alpha | 2\tau)$, $\vartheta_\nu(t - t_\alpha | 2\tau)$ in der Weise verteilen, dass von je 2 Factoren $\vartheta(t - t_\alpha | 2\tau)$, $\vartheta_\nu(t - t_\alpha | 2\tau)$ A den einen, B den andern enthält und die Anzahl der ϑ (ebenso der ϑ_ν) in A wie in $B \equiv \sigma (\text{mod. } 2)$ ist. ϑ ist die ungerade, ϑ_ν eine bestimmte gerade Thetafunction; demgemäss sind 3 Gruppen solcher Wurzelfunctionen zu unterscheiden (§ 16). Dann werden Ausdrücke für verwandte Wurzelfunctionen abgeleitet und aus ihnen u. a. der Satz gewonnen, dass für $\sigma = 4$ zwei, und nur zwei, der geraden ϑ-Functionen φ mit den Variabeln verschwinden (§§ 17, 18).

Endlich wird noch die Aufgabe behandelt: die Functionen zu bestimmen, in welche die ϑ-Functionen übergehen, wenn ihre Argumente durch einfache Integrale zwischen zwei Stellen t, t' der Fläche ersetzt werden. In den Formeln tritt ein nur durch sein Null- und Unendlichwerden bestimmter transcendenter Zusatzfactor E auf [derselbe würde durch die Primform Ω des Herrn Klein (Math. Ann. XXXVI; s. das folgende Referat) zu ersetzen sein, wenn statt der Wurzelfunctionen Wurzelformen benutzt würden. Ref.]. Eine Reihe von Fallunterscheidungen macht sich dabei notwendig; die Resultate sind in § 22 zusammengestellt.

Nach diesem Bericht über die Einzelresultate seien noch zwei principielle Gesichtspunkte hervorgehoben, die die Arbeit beherrschen: der eine ist die Hereinziehung der Realitätsverhältnisse in die Theorie der Abel'schen Functionen; der andere, dass auch zu solchen Thetafunctionen von σ Variabeln ein Zugang gewonnen wird, die nicht aus dem auf algebraische Gebilde vom Range σ bezüglichen Umkehrproblem entspringen. Bdt.

F. Klein. Zur Theorie der Abel'schen Functionen.
Math. Ann. XXXVI. 1-83.

Ausführliche Darstellung der Resultate, über welche in den

Lond. M. S. Proc. XX, Gött. Nachr. 1889, C. R. CVIII berichtet ist (vgl. F. d. M. XXI. 1889. 498, 506).

Verfasser knüpft an seine früheren Untersuchungen über hyperelliptische Functionen an (F. d. M. XX. 491) und sucht im allgemeinen Abel'schen Falle die vom algebraischen Gebilde ausgehende Definition der Thetafunctionen bis zu demselben Punkte zu führen, der bei jenen erreicht ist. Dies gelingt in der Hauptsache, so lange die Moduln des Gebildes als fest betrachtet werden; sollen sie als veränderlich gelten, so erwies sich die Beschränkung auf $p = 3$ einstweilen als notwendig. Dementsprechend zerfällt die Abhandlung in zwei Teile.

Im I. Teil wird zunächst auf die Existenztheoreme Bezug genommen, welche die Normalintegrale erster und dritter Gattung liefern (§ 1). Indem die Differentiale erster Gattung mit den Herren Weber und Noether zu „Formen φ" proportional gesetzt werden, wird einerseits die „Normalcurve der φ", eine C_{2p-2} im R_{p-1} eingeführt, andererseits von vornherein der Uebergang zum Gebrauch homogener Variabeln gewonnen, von dem Verfasser sagt: „ich entschliesse mich zu demselben nicht irgend welcher Tradition oder Gewöhnung zu Liebe, sondern um das Wesen der Sache, so wie ich dasselbe verstehe, klarer herauszustellen. Um nur von den nächsten Paragraphen zu reden, so ist es der Zielpunkt derselben, gewisse complicirtere Functionen der bisherigen Theorie aus einfacheren Elementen aufzubauen; dies würde ohne homogene Variable unmöglich sein, denn diese einfacheren Elemente existiren eben nur im Bereich der homogenen Variabeln". (§ 2). So gewinnt Verfasser eine nirgends 0 oder ∞ werdende Differentialform $d\omega$, mit ihrer Hülfe die Integrale zweiter Gattung, den Riemann-Roch'schen Satz, die Weierstrass'sche Zerlegungsformel und insbesondere eine Primform Ω, welche nirgends ∞ und nur einmal 0 wird (§ 3, 4), und aus der sich, eventuell unter Zuhülfenahme von nirgends 0 oder ∞ werdenden „Mittelformen" (§ 5), algebraische Formen mit vorgeschriebenen Nullstellen als Producte darstellen lassen. Indem andererseits als algebraische Formen δ^{ten} Grades auf einer Curve im R_{n-1} solche ganze algebraische Verbindungen Γ_δ der homogenen Coordinaten

z definirt werden, die, durch eine ganze rationale homogene Function δ^{ten} Grades dividirt, auf der Curve eindeutige Functionen geben (§ 7), erweisen sich als besonders bemerkenswert diejenigen Curven, bei welchen die Formen φ algebraische Formen in diesem Sinne sind; sie werden als kanonische Curven bezeichnet (§ 8) und im folgenden ausschliesslich der Darstellung zu Grunde gelegt, wobei zu beachten, dass sich jedes algebraische Gebilde in kanonische Form setzen lässt. Insbesondere werden auf den kanonischen Formen „Berührungsformen" μ^{ter} Stufe definirt, deren Nullpunkte zu je μ zusammenfallen und „Wurzelformen μ^{ter} Stufe", die μ^{ten} Wurzeln aus den ersteren (§ 11). Den letzteren kommen zunächst relative Charakteristiken zu, entsprechend den Factoren, welche ihre Quotienten bei Ueberschreitung der Querschnitte annehmen. Diese können in zwei Fällen durch absolute Charakteristiken ersetzt werden: einmal, wenn ein ausgezeichnetes System von Wurzelformen aus algebraischen Formen im Sinne von § 7 besteht; dann, wenn eine Wurzelform durch Multiplication mit Ω und Division mit einer algebraischen Form in eine Function (Form 0ter Dimension) übergeführt werden kann (Elementarcharakteristiken — Primcharakteristiken) (§ 12). Aus den bis dahin eingeführten Formen werden nun die Thetafunctionen aufgebaut, und zwar unter zwei verschiedenen Voraussetzungen über die Wahl der unteren Grenzen in den als Argumente auftretenden Integralsummen. Dabei bleibt nur ein von den Moduln des Gebildes abhängiger Factor noch zu bestimmen (§ 13, 14).

Im II. Teil wird dieser Factor für $p = 3$ bestimmt, indem untersucht wird, wann er verschwindet. Dabei werden zwei verschiedene Darstellungen des Gebildes $p = 3$ durch Raumcurven benutzt: die Geiser'sche durch die Umrisscurve einer Fläche dritter Ordnung (§ 17), bei der ein ungerades System, und die Hesse'sche durch die Kegelspitzencurve eines Netzes von Flächen zweiter Ordnung (§ 18), bei der ein gerades System von Berührungscurven dritter Ordnung ausgezeichnet ist. Beide Male werden die durch das Auftreten eines Doppelpunktes eintretenden Modificationen untersucht (§ 18-21), und der Vergleich der

Resultate mit den über das Verhalten der Thetafunctionen bekannten (§ 22, 23) liefert die Bestimmung des gesuchten Factors durch Invarianten der jeweils benutzten Darstellung (§ 24). Die letzten §§ (25-27) handeln von einer algebraischen Normirung der Integrale dritter Gattung und der damit im Zusammenhange stehenden Definition von „Sigmafunctionen"; endlich von den Reihenentwickelungen der letzteren, welche nach ganzen rationalen Covarianten der betreffenden Darstellung fortschreiten.

Bdt.

M. Noether. Zur Theorie der Abel'schen Differentialausdrücke und Functionen. Math. Ann. XXXVII. 417-460, 465-499.

Der I. Teil der Abhandlung ist rein algebraisch; er arbeitet nur mit algebraischen Mitteln, und zwar mit solchen, welche zugleich den Charakter der Invarianz in Bezug auf das ganze Gebiet der rationalen Transformationen haben, denen man die Grundcurve unterwerfen kann. Erreicht wird dies dadurch, dass wesentlich an der Normcurve $(2p-2)^{\text{ter}}$ Ordnung im Raume von $p-1$ Dimensionen operirt wird, wenn auch die Darstellung an eine bestimmte ebene Curve $f=0$ anknüpft. Diese Auffassung gestattet eine algebraische Normirung der Normalform dritter Gattung, unter Benutzung von p willkürlichen festen Punkten a_i von $f=0$, und damit die explicite Erledigung der beiden Probleme: Aufstellung aller Formen zweiter Gattung, welche Vertauschung von Parameter und Argument zulassen, und Darstellung beliebiger algebraischer Formen durch die Normalformen der drei Gattungen.

Der II. Teil verfolgt das Ziel: denjenigen Teil des Jacobi'schen Umkehrproblems, welcher sich aus den Differentialformeln selbst, d. h. ohne resp. vor Einführung der Periodicitätseigenschaften, entwickeln lässt, auszuscheiden und für sich durchzuführen. Zu diesem Ende werden zunächst die Differentialgleichungen des Abel'schen Theorems für die Integrale der drei Gattungen abgeleitet und die Umkehrung des Theorems für die Integrale erster Gattung in bemerkenswert einfacher Weise aus

dem Riemann-Roch'schen Satz gewonnen (da der Satz, dass eine unverzweigte*) Function, deren Periodicitätsmoduln verschwinden, eine algebraische Function ist, nicht benutzt werden sollte) (§ 14). Nachdem dann in § 15 die Eindeutigkeit des Jacobi'schen Umkehrproblems nach der Methode des Herrn Weierstrass bewiesen ist, wird in § 16 die Clebsch-Gordan'sche Transcendente $T_{\xi\eta}\binom{x}{c}$ als Summe von Integralen dritter Gattung eingeführt. Ihre Differentialquotienten nach den u (den Summen von Integralen erster Gattung) zerfallen in Differenzen je zweier Functionen, deren eine nur von p Grössen v, die andere von p Grössen w abhängt. So gelangt Verf. dazu, mit Herrn Weierstrass eine Function $\omega(v)$ einzuführen, deren partielle Differentialquotienten nach den v jenen ersten Bestandteilen der $\frac{\partial T}{\partial u}$ gleich sind. Einführung neuer Argumente V (neuer unterer Grenzpunkte der Integrale) und Zufügung einer Constanten verwandelt ω in eine Function $\Omega(V_1, V_2, \ldots, V_p)$, welche sich als unabhängig von gewissen in ω noch auftretenden Hülfsgrössen und zugleich als eine ungerade Function ihrer Argumente erweist (§ 17). Nachdem dann noch (§ 18) in einer Nebenuntersuchung einige s. Z. von Clebsch und Gordan benutzte Sätze abgeleitet sind, schliesst § 19 die Abhandlung mit dem Beweise des Satzes, dass $\mathrm{Al}(V) = e^{-\Omega(V)}$ sich in eine Reihe nach Potenzen der V mit positiven ganzen Exponenten entwickeln lässt, welche für alle endlichen Wertsysteme der V convergirt, während ihre Entwickelung nach periodischen Gliedern (als Thetafunction) ausserhalb des Rahmens bleibt, den Verfasser sich gesteckt hat.

Eine Mitteilung der expliciten Formeln, mit welchen Verfasser alles dieses durchführt, ist hier nicht thunlich; umsomehr muss ausdrücklich gesagt werden, dass es sich durchweg um solche explicite Formulirungen handelt. Bdt.

---

*) Verfasser schreibt „eindeutige" (p. 466 oben).

D. Kugel- und verwandte Functionen.

J. Dougall. On a certain expression for a spherical harmonic, with some extensions. Edinb. Math. S. Proc. VIII. 81-89.

Der für die Kugelfunction n^{ten} Grades gewählte Typus ist $(ax+by+cz)^n$ mit der Nebenbedingung $a^2+b^2+c^2=0$. Durch die Anwendung des Green'schen Satzes werden verschiedene bekannte Integralbeziehungen zwischen Kugelfunctionen hergeleitet. Die Methoden werden auf Functionen von p Veränderlichen ausgedehnt und dadurch Ergebnisse gewonnen, welche Hr. Cayley auf einem anderen Wege früher erhalten hatte (Ges. Werke I. 397). Auch auf Heine's Kugelfunctionen I ist Bezug genommen. Gbs. (Lp.)

Ch. Hermite. Sur les polynômes de Legendre. Palermo Rend. IV. 146-152.

1) Es wird gezeigt, dass man die sogenannten Integralsätze der Kugelfunctionen mittels des Integrals

$$J=\int_{-1}^{+1}\frac{x^p\,dx}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}$$

herleiten kann. Entwickelt man einmal die zu integrirende Function direct nach Potenzen von α, macht andererseits das Integral rational und entwickelt dann, so ergiebt die Vergleichung der Coefficienten von α^n in beiden Entwickelungen den bekannten Wert von

$$\int_{-1}^{+1}x^p X_n\,dx.$$

Daraus folgen die Werte von

$$\int_{-1}^{+1}X_m X_n\,dx \quad \text{und} \quad \int_{-1}^{+1}X_n X_n\,dx,$$

wenn man einen der Factoren unter dem Integralzeichen durch die entsprechende Potenzreihe ersetzt und beachtet, dass der Coefficient der höchsten Potenz $=\lim\frac{X_n}{x^n}$ für $n=\infty$ ist.

2) Dass in dem Laplace'schen Integral

$$\text{(a)} \qquad X_n = \frac{s}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+1}}$$

für den Factor s der Wert $+1$ oder -1 zu nehmen ist, je nachdem der reelle Teil von x positiv oder negativ ist, ergiebt sich daraus, dass in der Gleichung

$$\text{(b)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{At^2+2Bt+C} = \frac{s i\pi}{\sqrt{B^2-AC}}$$

die Grösse s, deren absoluter Wert 1 ist, das Vorzeichen des Coefficienten von i in dem Ausdruck

$$\frac{\sqrt{B^2-AC}}{A}$$

hat. (Vergl. Hermite, Cours d'Analyse de l'École Polytechn., Paris 1873, p. 290.)

3) Zu der Formel (a) kann man auch durch Betrachtung des Integrals

$$\frac{1}{2i\pi}\int \frac{dz}{z\left(x+\frac{z^2+1}{2z}\sqrt{1-x^2}\right)^{n+1}}$$

gelangen, wenn man dasselbe in der complexen z-Ebene längs der Peripherie eines Kreises vom Radius 1 erstreckt. Wn.

Ch. Hermite. Sur les polynômes de Legendre. (Extrait d'une lettre adressée à M. F. Caspary.) J. für Math. CVII. 80-83.

1) Herr Hermite zeigt, dass man nicht nur die Laplace'sche und Jacobi'sche Integraldarstellung der Kugelfunctionen aus der Formel

$$(1) \qquad \int_0^{\pi} \frac{d\omega}{A+B-(A-B)\cos\omega} = \frac{\pi}{2\sqrt{AB}}$$

ableiten kann, sondern dass aus derselben auch die Mehler'schen Integrale (cf. Heine „Handbuch der Kugelfunctionen", 2te Aufl., I. p. 44) folgen. Gleichung (1) lässt sich nämlich in die Form bringen

$$(2)\quad \int_x^y \frac{d\xi}{(1-\alpha\xi+\alpha^2)\sqrt{(y-\xi)(\xi-x)}} = \frac{\pi}{\sqrt{(1-2\alpha x+\alpha^2)(1-2\alpha y+\alpha^2)}},$$

wo $y > x$ ist; und wenn man in (2) $y = 1$, $\xi = \cos\varphi$ setzt, dann den Ausdruck

$$\frac{(1-\alpha)\cos\frac{1}{2}\varphi}{1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2}$$

nach steigenden Potenzen von α entwickelt und gliedweise integrirt, so führt die Vergleichung dieser Entwickelung mit der von $(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ zur ersten Mehler'schen Formel. Die zweite folgt auf ähnliche Art, wenn in (2) $x = -1$ gesetzt wird.

2) Für die Jacobi'sche Formel

$$(3)\quad \frac{D_x^{n-\nu}(x^2-1)^n}{(n-\nu)!} = \frac{(x^2-1)^\nu D_x^\nu P^n(x)}{(n+\nu)!}$$

wird ein neuer Beweis mitgeteilt, dessen Gedankengang folgender ist. Es lässt sich zeigen, dass, wenn man den Ausdruck

$$D_x^\nu P^n(x)\,.\,(x^2-1)^\nu \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

nach fallenden Potenzen von x entwickelt, die Entwickelung die Form hat:

$$\Pi(x) + \frac{\gamma}{x^{n-\nu+1}} + \frac{\gamma'}{x^{n-\nu+2}} + \cdots,$$

wo $\Pi(x)$ eine ganze Function bezeichnet. Dieselbe Form hat die Entwickelung des Ausdrucks

$$D_x^{n-\nu}(x^2-1)^n\,.\,\lg\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$
$$= (x^2-1)^{-\nu}\,.\,D_x^{n-\nu}(x^2-1)^n\,.\,(x^2-1)^\nu\,.\,\lg\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

Daraus folgt, dass sowohl $D_x^\nu P^n(x)$ als $(x^2-1)^{-\nu} D_x^{n-\nu}(x^2-1)^n$ den Nenner des $(n-\nu)^{\text{ten}}$ Näherungswertes der Kettenbruchentwicke lung von $(x^2-1)^\nu \lg\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ darstellen.

Die beiden Functionen $D_x^\nu P^n(x)$ und $(x^2-1)^{-\nu} D_x^{n-\nu}(x^2-1)^n$ sind daher bis auf einen constanten Factor gleich.

3) Mittels der Jacobi'schen Formel (3) kann man den Ausdruck $(x^2-1)^\nu D_x^\nu P^n(x)$ in eine nach Kugelfunctionen fortschrei-

tende Reihe entwickeln. Für $\nu = 2$ erhält man so:

$$\frac{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}{n(n-1)(n-1)(n+2)}(x^2-1)^2 D_n^2 P^n(x)$$
$$= (2n-1)P^{n+2}(x) - 2(2n+1)P^n(x) + (2n+3)P^{n-2}(x).$$

Wn.

F. Caspary. Sur quelques formules relatives aux fonctions sphériques. (Extrait d'une lettre adressée à M. Ch. Hermite à Paris.) J. für Math. CVII. 137-140.

Für die Kugelfunctionen erster und zweiter Art wird eine Anzahl recurrenter Relationen abgeleitet, die sich fast sämtlich in Herrn F. Neumann's Beiträgen zur Theorie der Kugelfunctionen finden (F. d. M. X. 1878. 333ff.). Aus einigen derselben ergiebt sich eine neuerdings von Hermite aufgestellte Gleichung (vergl. die letzte Gleichung des vorstehenden Referats). Bei der Ableitung der auf P^n bezüglichen Formeln wird, ausser von der bekannten (vergl. Heine Handbuch I. p. 91) Beziehung zwischen der Function $T = (1-2ax+a^2)^{-\frac{1}{2}}$ und ihrer Ableitung nach a, von der Beziehung zwischen T und der Ableitung von T nach x Gebrauch gemacht. Die für die Kugelfunctionen zweiter Art geltenden Relationen, welche dieselbe Form haben wie die für die Functionen erster Art aufgestellten, leitet der Verf. genau auf demselben Wege her wie Herr F. Neumann.

Wn.

R. Fujisawa. Note on a new formula in spherical harmonics. Tokio Math. Ges. IV$_1$. 7-8.

Wenn

$$\frac{1}{1-2a\cos\gamma+a^2} = Q_0 + Q_1 a^1 + \cdots + Q_n a^n + \cdots,$$

so ist

$$2\cos n\gamma = Q_n - Q_{n-2}.$$

E.

E. Beltrami. Quelques remarques au sujet des fonctions sphériques. C. R. CX. 931-938.

Herr Beltrami hatte bereits bei einer früheren Gelegenheit

(cf. F. d. M. XIX. 1887. 506) darauf aufmerksam gemacht, dass man die Differentialgleichung zweiter Ordnung, welcher die Function

$$(1) \qquad R_n = AP^n(x) + BQ^n(x),$$

genügt, in der die Constanten A und B von dem Index unabhängig sind, durch folgende zwei Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen R_n und R_{n-1} ersetzen kann:

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{dR_{n-1}}{dx} = x\dfrac{dR_n}{dx} - nR_n, \\ \dfrac{dR_n}{dx} = x\dfrac{dR_{n-1}}{dx} + nR_{n-1}{}^{*)}. \end{cases}$$

Hieran anknüpfend, zeigt der Verf., dass für die Function

$$(3) \qquad U_n = (1-x^2)^{\frac{1}{2}(n+1)} R_n,$$

wenn man noch $x = \cos\vartheta$, $z = \operatorname{cotg}\vartheta$ setzt, aus (2) die Recursionsformel

$$(4) \qquad U_n = -\frac{1}{n}\frac{dU_{n-1}}{dz}$$

und daraus weiter

$$(5) \qquad U_n = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{d^n U_0}{dz^n}$$

folgt. Es wird daher

$$(6) \qquad \sum_0^\infty \alpha^n U_n = U_0(z-\alpha),$$

wobei die rechte Seite der Wert ist, den U_0 annimmt, wenn man darin $z-\alpha$ an Stelle von z setzt. Ist $A = 1$, $B = 0$, so wird $U_0 = \sin\vartheta$, und die beiden Gleichungen (5), (6) gehen dann in die folgenden über:

$$(5^a) \qquad P^n(\cos\vartheta) = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{\sin^{n+1}\vartheta}\frac{d^n(\sin\vartheta)}{d(\operatorname{cotg}\vartheta)^n},$$

$$(6^a) \qquad \sum_0^\infty \alpha^n \sin^n\vartheta\, P^n(\cos\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\sin\vartheta\cos\vartheta+\alpha^2\sin^2\vartheta}}.$$

Zum Schluss werden die Functionen

$$\frac{R_{n-1}+R_n}{2} = S_n, \quad \frac{R_{n-1}-R_n}{2} = T_n$$

---

*) Im Original steht im letzten Gliede der zweiten Gleichung fälschlich R_n statt R_{n-1}.

betrachtet und aus (2) zwei Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen S_n und T_n abgeleitet, aus denen sich leicht die Gleichungen zweiter Ordnung ergeben, denen S_n und T_n für sich genügen.

Wird wieder $A = 1$, $B = 0$, $x = \cos\vartheta$ gesetzt, so folgt aus dem Dirichlet'schen Integral für $P^n(\cos\vartheta)$:

$$S_n = \frac{1}{\pi}\int_{\vartheta}^{\pi} \frac{\sin nu}{\sin\frac{1}{2}u} \frac{\sin u\, du}{\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos u)}},$$

und aus dieser Form kann man, wenn man Dirichlet's Untersuchungen über die Fourier'schen Reihen benutzt, unmittelbar schliessen:

$$\lim_{n=\infty} S_n = 0 \quad \text{für} \quad \pi < \vartheta < 0,$$
$$\lim_{n=\infty} S_n = 1 \quad \text{für} \quad \vartheta = 0.$$

Wn.

Ch. Hermite. Sur les racines de la fonction sphérique de seconde espèce. (Extrait d'une lettre à M. Lerch.) Toulouse Ann. IV. I. 1-10.

T.-J. Stieltjes. Sur les racines de la fonction sphérique de seconde espèce. Toulouse Ann. IV. J. 1-10.

Die Untersuchungen des Herrn Hermite beziehen sich nicht direct auf die Kugelfunction zweiter Art $Q^n(x)$, sondern auf diejenige Function $f(z)$, die, wenn der Modul von x grösser als 1 ist, aus $Q^n(x)$ durch Einführung der neuen Veränderlichen

$$z = \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

und Hinzufügung des Factors $(e^z-1)^n$ entsteht, so dass also

$$f(z) = (e^z-1)^n Q^n\left(\frac{e^z+1}{e^z-1}\right)$$

ist. Da diese Function holomorph ist, so kann man die Zahl der Wurzeln von $f(z) = 0$, die innerhalb eines von einer geschlossenen Curve begrenzten Teiles der complexen z-Ebene liegen, nach einem bekannten Satze von Cauchy bestimmen [vergl. Serret: Cours d'Algèbre supérieure, 4me édit., I p. 124,

wo der Satz allerdings nur für ganze Functionen bewiesen ist]. Herr Hermite wählt als geschlossene Curve den Umfang eines Rechtecks, von dem zwei Seiten der reellen Axe parallel sind und von dieser die Abstände $k\pi$ und $(k+1)\pi$ haben (k eine ganze Zahl), während die beiden anderen, der imaginären Axe parallelen Seiten zu beiden Seiten dieser Axe in sehr grosser Entfernung liegen. Es gelingt auch durch Benutzung bekannter Sätze über Kugelfunctionen, für die einzelnen Seiten des Rechtecks die Zahlen, die im Cauchy'schen Satze auftreten, zu ermitteln, und daraus ergiebt sich das Resultat:

Ist l irgend eine positive ganze Zahl oder Null, so liegen in dem Streifen, der von den Geraden $z = 2li\pi$ und $z = (2l+1)i\pi$ begrenzt wird, n Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$, während innerhalb des Streifens zwischen $z = (2l+1)i\pi$ und $z = (2l+2)i\pi$ keine Wurzel liegt. Die in dem erstgenannten Streifen liegenden Wurzeln sind, falls n eine gerade Zahl ist, so verteilt, dass einer Wurzel $g+ih$ eine andere $-g+ih$ entspricht; falls dagegen n ungerade ist, sind ausserdem rein imaginäre Wurzeln in ungerader Zahl in dem Streifen vorhanden. Solche Streifen der z-Ebene, die negativen Werten von l entsprechen, bedürfen keiner besonderen Betrachtung, da zu jeder Wurzel $z = t+iu$ eine Wurzel $z = -(t+iu)$ gehört.

Die Betrachtung lässt sich auf den Fall ausdehnen, dass der Modul der ursprünglichen Veränderlichen x kleiner als 1 ist. Man braucht für diesen Fall nur $Q^n(x)$ durch die Gleichung zu definiren

$$Q^n(x) = \tfrac{1}{2}P^n(x)\lg\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - R(x),$$

während die neue Variable z durch

$$z = \lg\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

bestimmt ist. Dann liegen n Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ in jedem Streifen zwischen den Geraden $z = (2l-1)i\pi$ und $z = 2li\pi$, während in dem Streifen zwischen $z = 2li\pi$ und $z = (2l+1)i\pi$ keine Wurzel liegt.

Es fragt sich nun: Was folgt aus diesen Resultaten, wenn man zu der ursprünglichen Variable x zurückgeht, und wie sind die Wurzeln der Gleichung $Q^n(x) = 0$ in der Ebene x verteilt? Der Beantwortung dieser Frage ist die Arbeit des Herrn Stieltjes gewidmet. Man hat dabei vor allem zu beachten, dass die Function $Q^n(x)$ wegen des in ihr auftretenden Logarithmus vieldeutig ist. Setzt man fest, dass der rein imaginäre Teil des Logarithmus zwischen $+\pi i$ und $-\pi i$ genommen werden soll, und verbindet ausserdem die Punkte $+1$ und -1 durch einen Querschnitt, so ist $Q^n(x)$ in der ganzen Ebene x eindeutig definirt, falls x den Querschnitt nicht überschreitet; dagegen ändert sich $Q^n(x)$ beim Ueberschreiten des Querschnitts um $\pi i P^n(x)$. Dem eindeutig definirten Zweige von $Q^n(x)$ entsprechen in der z-Ebene Werte von $f(z)$, deren Argument z zwischen den Geraden $z = +\pi i$ und $z = -\pi i$ liegt. In diesem Streifen liegen $2n+1$ Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$; aber $z = 0$ selbst ist eine $(2n+1)$-fache Wurzel, da einmal der Factor $(e^z - 1)^n$ die n-fache Wurzel $z = 0$ ergiebt, andererseits $Q^n\left(\frac{e^z+1}{e^z-1}\right)$ die $(n+1)$-fache $z = 0$ besitzt. Bezeichnet man also mit $Q^n(x)$ die durch die obigen Festsetzungen eindeutig definirte Function, so hat die Gleichung $Q^n(x)$ nur die $(n+1)$-fache Wurzel $x = \infty$, aber keine endliche Wurzel. Liegt z in dem Streifen zwischen $z = +\pi i$ und $z = 3\pi i$, so entspricht der Function $f(z)$ die Function $Q^n(x) + \pi i P^n(x)$. Die Gleichung $Q^n(x) + i\pi P^n(x) = 0$ hat demzufolge n Wurzeln, und zwar liegen alle in der unteren Hälfte der x-Ebene. Allgemein folgt ebenso, dass, wenn k irgend eine ganze Zahl, aber nicht Null ist, die Gleichung $Q^n(x) + ki\pi P^n(x) = 0$ gerade n Wurzeln hat, die in der unteren Hälfte der Ebene x liegen, wenn k positiv, in der oberen Hälfte, falls k negativ ist.

Dieselben Resultate ergeben sich auch, wie Herr Stieltjes weiter zeigt, wenn man, ohne die Function $f(z)$ in Betracht zu ziehen, den Cauchy'schen Satz direct auf die Function $Q^n(x)$ anwendet. Man muss dann nur den Teil der reellen Axe zwischen $x = +1$ und $x = -1$ durch eine dies Linienstück umgebende Curve ausschliessen und den Teil der x-Ebene zwischen der ge-

nannten Curve und einem mit einem sehr grossen Radius um den Anfangspunkt beschriebenen Kreise betrachten. Handelt es sich um die. Gleichung $Q^n(x)+\pi i P^n(x)=0$, so kommt der Teil der Ebene x in Betracht, der von der reellen Axe und einem unterhalb derselben gelegenen Halbkreis von sehr grossem Radius begrenzt wird; die Punkte ± 1 sind durch kleine Halbkreise auszuschalten.

Dass die Gleichung $Q^n(x)=0$ keine endlichen Wurzeln hat, folgt auch aus dem Neumann'schen Integral

$$Q^n(x)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{P^n(u)du}{x-u},$$

das nur für solche Werte von x einen Sinn hat, die nicht auf dem Querschnitt liegen. Denn wäre $Q^n(x)=0$, so müsste auch

$$\int_{-1}^{+1}\frac{[P^n(u)]^2du}{x-u}=0$$

sein, eine Gleichung, die weder für complexe x, noch solche reellen x, die dem Querschnitt nicht angehören, erfüllt werden kann. [Hinsichtlich der Wurzeln von $Q^n(x)=0$ für den Fall, dass x auf dem Querschnitt liegt, vergleiche das folgende Referat.] Wn.

T.-J. Stieltjes. Sur la valeur asymptotique des polynômes de Legendre. C. R. CX. 1026-1027.

T.-J. Stieltjes. Sur les polynômes de Legendre. Toulouse Ann. IV. G. 1-17.

In der ersten Arbeit teilt der Verfasser folgende Reihe für $P^n(\cos\vartheta)$ mit, mittels deren man jene Function für grosse Werte von n mit jeder beliebigen Näherung berechnen kann, und die daher eine wesentliche Erweiterung der bisher bekannten Näherungswerte von P^n bildet. Die Formel lautet:

$$(1)\quad P^n(\cos\vartheta)=C_n\Big[\frac{\cos(n\vartheta+\frac{1}{2}\alpha)}{\sqrt{2\sin\vartheta}}+\frac{1^2}{2.(2n+3)}\frac{\cos(n\vartheta+\frac{3}{2}\alpha)}{\sqrt{(2\sin\vartheta)^3}}+\frac{1^2.3^2}{2.4.(2n+3)(2n+5)}\frac{\cos(n\vartheta+\frac{5}{2}\alpha)}{\sqrt{(2\sin\vartheta)^5}}+\cdots\Big],$$

worin

$$C_n = \frac{4}{\pi}\frac{2.4.6\ldots(2n)}{3.5.7\ldots(2n+1)},\quad \alpha = \vartheta - \frac{\pi}{2},\quad 0 < \vartheta < \pi$$

ist. Die Reihe convergirt, falls $\sin\vartheta > \frac{1}{2}$ ist. Man kann aber die unendliche Reihe auch durch eine endliche Reihe mit Restglied ersetzen, und dann ergiebt sich, mag die Reihe convergiren oder nicht, dass das Restglied, absolut genommen, kleiner ist als das Product aus dem ersten nicht berücksichtigten Gliede, darin 1 statt des Cosinus gesetzt, und einem Factor M, dessen numerischer Wert zwischen 1 und 2 liegt.

Die zweite Arbeit enthält die Ableitung der eben angeführten Resultate. Daraus, dass $P^n(x)$ der Coefficient von $z^{-(n+1)}$ bei der Entwickelung von $(z^2-2xz+1)^{-\frac{1}{2}}$ nach fallenden Potenzen von z ist, folgt, dass man $P^n(x)$ durch das complexe Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{z^n dz}{\sqrt{z^2-2zx+1}}$$

darstellen kann, falls man als Integrationsweg eine geschlossene, die Punkte

$$\xi = x + \sqrt{x^2-1} \text{ und } \frac{1}{\xi} = x - \sqrt{x^2-1}$$

umschliessende Curve wählt. Durch passende Wahl dieser Curve ergiebt sich:

$$(2)\qquad P^n(x) = \frac{1}{\pi i}\left[\int_0^{\xi}\frac{z^n dz}{\sqrt{z^2-2zx+1}} - \int_0^{\frac{1}{\xi}}\frac{z^n dz}{\sqrt{z^2-2zx+1}}\right],$$

wobei die rechts stehenden Integrale auf geradlinigem Wege von 0 bis ξ resp. von 0 bis $\frac{1}{\xi}$ zu erstrecken sind. Formt man die Integrale durch die Substitution

$$z = \xi(1-u) \text{ resp. } z = \frac{1}{\xi}(1-u)$$

um, entwickelt dann einen Ausdruck der Form $\frac{1}{\sqrt{1-ku}}$ nach steigenden Potenzen von u, integrirt gliedweise und setzt endlich $x = \cos\vartheta$, so ergiebt sich die Reihe (1) nebst ihrem Convergenzbereich. Um die Reihe auch für den Fall, dass keine Conver-

genz stattfindet, benutzen zu können, wird $\frac{1}{\sqrt{1-ku}}$ durch das Integral

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{dv}{1-ku\sin^2 v}$$

ersetzt und die unter dem Integral stehende Function in eine endliche Reihe mit Restglied entwickelt. Die Discussion des Restgliedes führt auf das zweite der obigen Resultate.

Setzt man in Reihe (1) $\frac{\vartheta}{n}$ statt ϑ und geht zur Grenze für $n=\infty$ über, so ergiebt sich die semiconvergente Reihe für die Bessel'sche Function $J_0(\vartheta)$. Aus der Reihe mit Restglied werden noch mehrere bekannte Resultate abgeleitet, z. B., dass die k^{te} Wurzel der Gleichung $P^n(\cos\vartheta)=0$ zwischen $\frac{(2k-1)\pi}{2n+1}$ und $\frac{2k\pi}{2n+1}$ liegt. Aus der Integraldarstellung (2) lässt sich ferner die Entwickelung von $P^n(\cos\vartheta)$ nach Sinus der Vielfachen von ϑ ableiten.

Betrachtet man jedes der beiden in (2) auftretenden Integrale für sich, nachdem man dieselben rational gemacht hat, so ergiebt sich:

$$(3)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\xi \frac{z^n dz}{\sqrt{z^2-2zx+1}} = 2S^n(x)+\pi i P^n(x), \\ \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\xi}} \frac{z^n dz}{\sqrt{z^2-2zx+1}} = 2S^n(x)-\pi i P^n(x), \end{cases}$$

wo

$$S^n(x) = \tfrac{1}{2}P^n(x)\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - R^n(x)$$

die Kugelfunction zweiter Art ist. Man kann also S^n durch die Summe derselben Integrale ausdrücken, deren Differenz nach (2) $P^n(x)$ darstellt. Entwickelt man dann die Integrale auf dieselbe Art wie oben, so erhält man eine Reihe für $S^n(\cos\vartheta)$, die analog der Reihe (1) ist und sich nur dadurch von letzterer unterscheidet, dass rechts der Factor $-\frac{\pi}{2}$ hinzuzufügen, und

dass an Stelle von cosinus überall sinus in den Zählern der einzelnen Glieder zu setzen ist. Die Reihe für $S^n(\cos\vartheta)$ giebt nun zu ähnlichen Folgerungen Anlass, wie die Reihe (1). So ergiebt sich aus ihr eine semiconvergente Reihe für die Bessel'sche Function zweiter Art $K_0(\vartheta)$; ferner folgt, dass die $n+1$ Wurzeln der Gleichung $S^n(x)=0$ so liegen, dass zwischen je zweien dieser Wurzeln eine Wurzel von $P^n(x)=0$ enthalten ist.

Nebenbei werden in der Arbeit noch mehrere bekannte Formeln aus der Theorie der Kugelfunctionen auf neue Art abgeleitet. Wn.

J. Frischauf. Zur Theorie der Kugelfunctionen. J. für Math. CVII. 87-88.

Einfacher Beweis des Satzes, dass $P^n(\cos\gamma)$ verschwindet, wenn n und zugleich $n\gamma$ unendlich gross werden. Der Beweis geht aus von dem Mehler'schen Integral für $P^n(\cos\gamma)$ (cf. Heine, Handbuch der Kugelfunctionen, 2[te] Aufl., Bd. I p. 44), führt darin für $(n+\frac{1}{2})\varphi$ eine neue Integrationsvariable ein, teilt dann das Integral in Teilintegrale, deren Grenzen sich um $\frac{1}{2}\pi$ unterscheiden, und gewinnt dadurch für $P^n(\cos\gamma)$ eine Reihe, in der jedes folgende Glied, absolut genommen, grösser ist als das vorhergehende, während die Vorzeichen so abwechseln, dass auf je zwei negative Glieder je zwei positive folgen. Die Summe einer derartigen Reihe ist kleiner als der doppelte absolute Wert des letzten Gliedes. Für letzteres lässt sich eine obere Grenze angeben, woraus dann durch Uebergang zu $n=\infty$ der Satz folgt. Wn.

H. J. Sharpe. Note on Legendre's coefficients. Quart. J. XXIV. 383-386.

Der Verfasser gewinnt die Laplace'sche Näherungsformel von $P^n(x)$ für grosse n und $x^2<1$, indem er in der Differentialgleichung für $P^n(x)$

$$P^n(x)=e^z$$

setzt und das Integral der sich für z ergebenden Gleichung in eine nach fallenden Potenzen von n fortschreitende Reihe von

der Form

$$z = nz_{-1} + z_0 + \frac{1}{n} z_1 + \frac{1}{n^2} z_2 + \cdots$$

entwickelt. Diese Art der Ableitung zeigt allerdings, weshalb der in Rede stehende Näherungswert für $x^2 = 1$ nicht mehr gilt; aber aus der Ableitung geht nicht hervor, dass die Reihe wirklich $P^n(x)$ darstellt und nicht etwa eine andere lineare Function von $P^n(x)$ und $Q^n(x)$. Es wird dann angedeutet, wie man aus bekannten Reihen schliessen kann, dass

$$\lim_{n=\infty} P^n(\cos\vartheta)$$

den Wert 1 annimmt, falls $n \sin\vartheta$ von der Ordnung $\frac{1}{n}$ ist, dagegen gleich der Bessel'schen Function $J_0(\mu)$ wird, falls $\lim(n\vartheta) = \mu$ eine endliche Zahl ist. Weiter wird der eben erwähnte Zusammenhang zwischen den Functionen P^n und J_0 auf bekannte Weise aus den Integraldarstellungen von $P^n(\cos\vartheta)$ abgeleitet. Fndlich wird $P^n(\cos\vartheta)$ für grosse n durch die Substitution $n^2 \sin^2\vartheta = \mu^2$ auf die Form gebracht:

$$P^n(\cos\vartheta) = J_0(\mu) + \frac{1}{n} f_1(\mu) + \frac{1}{n^2} f_2(\mu) + \cdots,$$

und die Reihe für $f_1(\mu)$ wird berechnet. Wn.

G. Plarr. On the transformation of Laplace's coefficients. Edinb. Trans. XXXVI. 19-43.

Das Ziel der Arbeit ist die directe Bestätigung der wohl bekannten Gleichung

$$Z_n = P_n P'_n + \frac{2}{(n+1)n} \delta_x P_n \,.\, \delta_{x'} P'_n \,.\, yy' \cos\psi + \cdots,$$

in welcher Z_n die Legendre'sche Function n^{ter} Ordnung von $xx' + yy' \cos\psi$ $(x^2 + y^2 = 1,\ x'^2 + y'^2 = 1)$ ist und P_n, P'_n die Legendre'schen Functionen derselben Ordnung von x, x' bezw. sind. Dies erfordert die Bewahrheitung einer Reihe von Gleichungen:

$$A_0 = P_n P'_n, \ldots, A_s = \frac{1}{(n+s)(n+s-1)\ldots(n-s+1)} \delta_x^s P_n . \delta_{x'}^s P'_n, \cdots.$$

Der Verf. hebt mit dem allgemeinen Gliede A_s an, schreibt darin $y^2 = 1-x^2$, $y'^2 = 1-x'^2$, und vermittelst eines Summationsverfahrens für factorielle Ausdrücke (das mit Notwendigkeit ein schwieriges und verwickeltes ist) gelingt es ihm, dies in die verlangte Form eines numerischen Vielfachen von $\delta_x^s P_n . \delta_{x'}^s P_n'$ überzuführen. Cly. (Lp.)

D. W. Niven. On ellipsoidal harmonics. Lond. R. S. Proc. XLVIII. 1-4.

Auszug aus einer Abhandlung, die in Lond. Phil. Trans. 1891 veröffentlicht ist. Cly.

F. Klein. Zur Theorie der Lamé'schen Functionen. Gött. Nachr. 85-95.

Herr Klein erörtert zunächst die Frage nach der zweckmässigsten Definition der zu einem n-fach ausgedehnten Raume R_n gehörigen Lamé'schen Differentialgleichung und findet, dass man dabei am besten von dem verallgemeinerten System confocaler Cykliden, nicht von dem System confocaler Flächen zweiter Ordnung ausgeht. Bei Zugrundelegung jenes Cyklidensystems führen die Aufgaben der Potentialtheorie, wie für den Fall $n = 3$ zuerst von dem Referenten gezeigt ist, auf die Differentialgleichung:

$$(1) \qquad \frac{d^2E}{dt^2} = \left\{ \frac{2-n}{16(n+1)} f''(\lambda) + A\lambda^{n-2} + \cdots + N \right\} E,$$

wo

$$f(\lambda) = (\lambda-e_1)\dots(\lambda-e_{n+2}), \quad t = \int \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}$$

ist, während die Constanten $A, \dots, N$ beliebige Werte haben. Die Differentialgleichung (1) erscheint in neuem Lichte, wenn man, homogen machend,

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \lambda_1 : \lambda_2, \quad E(\lambda) = \lambda_2^{\frac{n-2}{4}} F(\lambda_1, \lambda_2), \\ f = (\lambda_1-e_1\lambda_2)\dots(\lambda_1-e_{n+2}\lambda_2) \end{array} \right.$$

setzt. Dann ergiebt sich nämlich für die Function F, die eine

homogene Function von λ_1 und λ_2 vom Grade $\frac{2-n}{4}$ ist (dieselbe wird als Lamé'sche Form bezeichnet), der Satz, dass die zweite Ueberschiebung der Formen f und F gleich dem Producte aus F und einer rationalen ganzen Function φ vom $(n-2)^{\text{ten}}$ Grade ist. Dies Resultat ist so einfach, dass es natürlich erscheint, dasselbe als Definition an die Spitze der Theorie der Lamé'schen Functionen zu stellen. Die einzigen singulären Stellen der so definirten Function F sind die Wurzeln von $f=0$, und zwar gehören, wenn alle Wurzeln verschieden sind, zu jeder einzelnen derselben die Exponenten $\frac{1}{2}$ und 0. Wenn man f mit beliebig vielfachen Wurzeln ausstattet und von F durch Hinzufügung irgend welcher Factoren zu Functionen von λ zurückgeht, so umfasst obige Definition sämtliche lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten. Ist f eine Form sechsten Grades mit getrennten Wurzeln, so ergeben sich solche Formen F vom Grade $-\frac{1}{2}$, die auf dem hyperelliptischen Gebilde $\sqrt{f}$ durchaus unverzweigt sind; und zwar sind diese F unter allen Formen, die einer linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten genügen, die einzigen, welche die genannte Eigenschaft besitzen. Bei höherem Grade von f trifft dies aber nicht mehr zu.

Weiter erinnert der Verfasser an die Resultate, zu denen er in einer früheren Arbeit (F. d. M. XIII. 1881. 407) in Betreff der gewöhnlichen Lamé'schen Functionen gelangt war, und dehnt dieselben auf die oben besprochenen Functionen F aus. Durch zweckmässige Verfügung über die in φ enthaltenen $n-1$ unbestimmten Constanten kann man es erreichen, dass die F in $n-1$ auf der λ-Axe gelegenen Segmenten je eine vorgeschriebene Anzahl von Nullstellen haben (Oscillationstheorem), und dadurch wird es möglich, die fundamentale Potentialaufgabe für solche Raumteile des R_n zu behandeln, die von $2n$ confocalen Cykliden begrenzt sind. Diese Aufgabe wird indessen nur angedeutet, nicht durchgeführt.

Zum Schluss bespricht Herr Klein, indem er λ als eine complexe Variable betrachtet, die conforme Abbildung, welche der

Quotient η irgend zweier Particularlösungen F_1, F_2 einer durch das Oscillationstheorem festgelegten Lamé'schen Differentialgleichung von der Halbebene λ entwirft. Der Halbebene λ entspricht in der η-Ebene ein Kreisbogenpolygon von $n+2$ Seiten, dessen Inneres keinen Windungspunkt einschliesst. Werden die Wurzeln von $f=0$ alle als reell und von einander verschieden angenommen, setzt man ferner noch voraus, dass die $n-1$ Segmente, von denen das Oscillationstheorem handelt, von je einem singulären Punkt e_i bis zum nächst folgenden e_{i+1} reichen, und dass die Particularlösungen F, welche den einzelnen Segmenten zugehören, an den Enden des Segments den Bedingungen $F=0$ oder $F'=0$ genügen, so lässt sich zeigen, dass bei gegebenem f, d. h. bei gegebenen $e_1, \dots, e_{n+2}$ das zugehörige Kreisbogenpolygon der η-Ebene völlig bestimmt ist. Dies Resultat, dem Herr Klein eine allgemeine Bedeutung für die Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zuschreibt, wird speciell auf den Fall angewandt, wo f vom 6ten Grade ist. Endlich wird noch bemerkt, dass, wenn man von λ zu den homogenen Variabeln λ_1, λ_2 zurückkehrt, λ_1 und λ_2 sich als eindeutige Formen $(-2)^{\text{ten}}$ Grades von F_1 und F_2 darstellen. Diese Formen bleiben bei unendlich vielen linearen Substitutionen von η ungeändert und werden deshalb als automorphe Formen bezeichnet.

Wn.

H. Weber. Zur Theorie der Bessel'schen Functionen.
Math. Ann. XXXVII. 404-416.

Der hauptsächlichste Zweck des Aufsatzes ist, die halbconvergenten Entwickelungen der Bessel'schen Functionen für unbeschränkt veränderliche (complexe) Werte des Arguments und beliebige reelle Werte des Index n zu untersuchen. Von früheren, denselben Gegenstand betreffenden Arbeiten, z. B. von der von Hankel (Math. Ann. I, vergl. F. d. M. II. 1869-1870. 257) unterscheidet sich die vorliegende durch die eigenartige Ableitung der Reihen, sowie die exacte Bestimmung des Restgliedes, die durch einen neuen Ausdruck für jenes Glied ermöglicht wird.

Herr Weber beginnt mit der Betrachtung der Functionen

$$(1)\qquad \begin{cases} S_1(x) = \dfrac{1}{\Pi(\alpha)}\displaystyle\int_0^\infty e^{-s} s^\alpha \left(1 - \frac{s}{2ix}\right)^\alpha ds, \\ S_2(x) = \dfrac{1}{\Pi(\alpha)}\displaystyle\int_0^\infty e^{-s} s^\alpha \left(1 + \frac{s}{2ix}\right)^\alpha ds, \end{cases}$$

wo α eine beliebige reelle Grösse bedeutet, die grösser als -1 ist, $\Pi(\alpha)$ die Gauss'sche Π-Function. Sollen S_1 und S_2 eindeutig bestimmte Functionen von x sein, so muss man die Ebene x durch einen Schnitt begrenzen, der vom Nullpunkte ins Unendliche verläuft. Aus (1) wird für S_1 die Recursionsformel

$$(2)\qquad S_1(x, \alpha-1) = S_1(x, \alpha+1) + \frac{2\alpha+1}{ix} S_1(x, \alpha)$$

abgeleitet und sodann gezeigt, dass S_1 der Differentialgleichung

$$(3)\qquad \frac{d^2 S_1}{dx^2} + 2i\frac{dS_1}{dx} - \frac{\alpha(\alpha+1)}{x^2} S_1 = 0$$

genügt. Für S_2 gelten analoge Formeln, die man aus (2) und (3) durch Vertauschung von $+i$ und $-i$ erhält. Aus (3) folgt, dass die Functionen

$$(4)\qquad u_1 = e^{ix} S_1(x) \text{ und } u_2 = e^{-ix} S_2(x)$$

die beiden particulären Lösungen der Differentialgleichung

$$(5)\qquad \frac{d^2 u}{dx^2} + \left[1 - \frac{\alpha(\alpha+1)}{x^2}\right] u = 0$$

sind. Damit ist der Zusammenhang zwischen S_1 und S_2 einerseits und den Bessel'schen Functionen andererseits ermittelt; denn $\frac{u_1}{\sqrt{x}}$ und $\frac{u_2}{\sqrt{x}}$ genügen der Differentialgleichung der Bessel'schen Functionen, falls der Parameter dieser Functionen $\alpha + \frac{1}{2}$ ist.

Die Entwickelung der Functionen S nach steigenden Potenzen von x knüpft an die Differentialgleichung (5) an; die Potenzreihen, welche, falls $\alpha + \frac{1}{2}$ keine ganze Zahl ist, der Gleichung (5) genügen, sind bekannt. Die Constanten, mit denen man diese Reihen multipliciren muss, um S_1 und S_2 zu erhalten, ergeben sich teils, indem man x den speciellen Wert Null giebt, teils durch Betrachtung der Aenderungen, welche die Integrale (1) erleiden, wenn x einen Umkreis um den Nullpunkt be-

schreibt. Setzt man in den so gewonnenen Formeln

$$\alpha + \tfrac{1}{2} = n + \beta,$$

wo n eine nicht negative ganze Zahl ist, und geht zur Grenze für $\beta = 0$ über, so ergeben sich folgende Ausdrücke der Bessel'schen Functionen erster und zweiter Art mit ganzzahligem Index n:

$$(6) \quad \begin{cases} 2i\pi\sqrt{\dfrac{x}{2\pi}}\,J_n(x) = S_1 \,.\, e^{ix} e^{-(2n-1)\frac{\pi i}{4}} - S_2 \,.\, e^{-ix} \,.\, e^{(2n-1)\frac{\pi i}{4}}, \\ 2\sqrt{\dfrac{x}{2\pi}}\,Y_n(x) = -\,S_1 \,.\, e^{ix} e^{-(2n-1)\frac{\pi i}{4}} - S_2 \,.\, e^{-ix} e^{(2n-1)\frac{\pi i}{4}}. \end{cases}$$

Die Ausdrücke der S durch Potenzreihen ergeben ferner Formeln, die $S_1(-x)$ und $S_2(-x)$ durch $S_1(+x)$ und $S_2(+x)$ ausdrücken, so dass es genügt, S_1 und S_2 nur für solche Werte von x zu betrachten, deren reeller Teil nicht negativ ist. Genügt x dieser Bedingung, so lässt sich aus (1) eine obere Grenze von S_1 und S_2 für den Fall ermitteln, dass der absolute Wert r von x über alle Grenzen wächst. Dieser Grenzwert ist

$$\frac{1 + \dfrac{2\alpha+3}{r}}{\left(1 - \dfrac{\alpha+2}{2r}\right)^{\alpha+3}}.$$

Schliesslich werden die halbconvergenten Reihen für S_1 und S_2 folgendermassen gewonnen: Da die Entwickelung von $\left(1 \mp \dfrac{s}{2ix}\right)^{\alpha}$ nach dem binomischen Satze nicht im ganzen Umfange des Integrals (1) gestattet ist, so nehme man von der binomischen Reihe nur die m ersten Glieder und setze diese in die auf der rechten Seite von (1) stehenden Integrale ein. Dadurch erhält man statt der Functionen $S_1(x)$, $S_2(x)$ zwei andere $R_1^m(x)$, $R_2^m(x)$, für welche zwei Differentialgleichungen gelten, die sich von der Differentialgleichung (3) nur dadurch unterscheiden, dass rechts $\dfrac{1}{(\mp 2ix)^{m+1}}$ mal einem constanten Factor an Stelle von Null steht. Die in Rede stehenden Gleichungen kann man daher mittels der Methode der Variation der Constanten integriren und erhält so

nach einigen Umformungen

$$(7)\qquad S_1(x)=\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{\Pi(\alpha+\nu)}{\Pi(\nu)\Pi(\alpha-\nu)}\frac{1}{(2ix)^\nu}$$
$$-\frac{2mi\Pi(\alpha+m)}{\Pi(m)\Pi(\alpha-m)}\int_0^\infty\frac{S_1(x)S_2(x+t)-e^{2it}S_2(x)S_1(x+t)}{[-2i(x+t)]^{m+1}}dt.$$

Eine eingehende Discussion des absoluten Wertes θ des in (7) auftretenden Restgliedes zeigt, dass θ mit wachsendem m über alle Grenzen wächst, dass aber, so lange $m<2r$ vorausgesetzt wird (r ist, wie oben, der absolute Betrag von x), θ unter einem Werte bleibt, der für nicht zu kleine m und r ungefähr mit

$$\sqrt{2m}\,e^{-m}$$

übereinstimmt. Wn.

E. Meissel. Ueber die Bessel'schen Functionen J_k^0 und J_k^1. Pr. Ob.-Realschule Kiel.

1) Der Verfasser reproducirt (ohne Beweis) mehrere Formeln, die er 1862 (Gewerbeschulprogramm Iserlohn) veröffentlicht hatte. Dieselben betreffen gewisse Integrale, die von den Bessel'schen Functionen erster und zweiter Art mit dem Index 0 abhängen, resp. Darstellungen der Functionen zweiter Art durch Reihen und Integrale. Wünschenswert wäre es gewesen, wenn Herr Meissel hinsichtlich der Definition der Functionen zweiter Art sich der sonst üblichen Bezeichnung angeschlossen oder wenigstens den Zusammenhang der von ihm gewählten Form mit der von anderen Autoren benutzten angegeben hätte.

2) Weiter enthält der Aufsatz eine Tafel für die ersten fünfzig Wurzeln der Gleichung

$$\frac{dJ_0(x)}{dx}=-J_1(x),$$

sowie für die zugehörigen Maximal- und Minimalwerte von $J_0(x)$. Die Formel, mittels welcher die Tafel berechnet ist, wird ohne Beweis mitgeteilt.

3) Es wird

$$J_0(x+\alpha)=P.J_0(x)+Q.J_0'(x)$$

gesetzt; sodann werden die Coefficienten P und Q nach fallenden Potenzen von x resp. von x und $x+\alpha$ entwickelt; die resultirenden Formeln sollen bei numerischen Rechnungen gute Dienste leisten.

4) Die semiconvergenten Reihen für $J_0(x)$ und $J_1(x)$ nehmen eine besonders einfache Gestalt an für

$$x = (n \pm \tfrac{1}{4})\pi.$$

5) Für rein imaginäre Argumente, deren absoluter Betrag gross ist, eignet sich zur Berechnung am meisten die Formel

$$J_0(ix) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \cdot \theta(x).$$

$\theta(x)$ genügt der Differentialgleichung

$$\theta''(x) + 2\theta'(x) + \tfrac{1}{4}\frac{\theta(x)}{x^2} = 0$$

und lässt sich durch die semiconvergente Reihe

$$\theta(x) = 1 + \frac{1^2}{2}\frac{1}{4x} + \frac{1^2.3^2}{2.4}\frac{1}{(4x)^2} + \frac{1^2.3^2.5^2}{2.4.6}\frac{1}{(4x)^3} + \cdots$$

darstellen.

6) Zum Schluss werden mehrere, auf die Function θ bezügliche Formeln mitgeteilt, von denen folgende hier Platz finden möge. Es ist

$$\int_0^{\infty} e^{-2\alpha x}\left[1 - \theta^2(x) + \frac{\theta^2(x)}{4x}\right] dx = \frac{1}{2\alpha} - \frac{E}{\alpha(2+\alpha)} + \frac{K}{2(1+\alpha)},$$

falls K und E die vollen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung für den Modul $\frac{1}{1+\alpha}$ sind. Wn.

O. Callandreau. Calcul des transcendantes de Bessel

$$J_n(a) = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^n}{1.2\ldots n}\left[1 - \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{1.(n+1)} + \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^4}{1.2.(n+1)(n+2)} - \cdots\right]$$

pour les grandes valeurs de a, au moyen de séries semi-convergentes. Darboux Bull. (2) XIV. 110-114.

Der Verfasser giebt für die bekannte semiconvergente Reihenentwickelung der Bessel'schen Function $J_n(a)$, eine Reihe, die

für $n = 0$ von Poisson, für andere ganzzahlige n von Jacobi aufgestellt ist, eine Ableitung, die im wesentlichen identisch ist mit der von Lipschitz für $n = 0$ durchgeführten, für andere n angedeuteten, ohne dass die Priorität von Lipschitz (J. für Math. LVI) oder die Arbeit von Hankel (Math. Ann. I), die jene Reihe auf beliebige n sowie auf complexe Werte von a ausdehnt, erwähnt werden. Sodann wird für die Haupteigenschaft der in Rede stehenden semiconvergenten Reihe ein neuer Beweis mitgeteilt. Es wird nämlich das von Lipschitz angegebene Integral, aus dem die Reihe für $J_n(a)$ folgt, in ein Doppelintegral umgeformt, und durch Entwickelung der unter dem Doppelintegral stehenden Function ergiebt sich, dass, wenn man die Reihe das eine Mal vor, das andere Mal nach dem Gliede $\pm T_p$ abbricht, die Summe der absoluten Werte der Restglieder gleich dem absoluten Werte von T_p ist.

Zum Schluss bestimmt der Verfasser die Ordnung des kleinsten Gliedes der semiconvergenten Reihe. Er zeigt durch Anwendung bekannter Sätze aus der Theorie der Γ-Functionen, dass jene Ordnung von dem Index n unabhängig, also für beliebige ganzzahlige n dieselbe ist wie für $n = 0$. Für diesen Fall aber ist die Frage bereits von Herrn Stieltjes gelöst (cf. F. d. M. XVIII. 1886. 197ff.). Wn.

Achter Abschnitt.

Reine, elementare und synthetische Geometrie.

Capitel 1.

Principien der Geometrie.

S. Lie. Ueber die Grundlagen der Geometrie. I, II. Leipz. Ber. XLII. 284-321, 355-418.

Beide Abhandlungen sind bestimmt, an einer oft bearbeiteten und für jeden Mathematiker anziehenden Aufgabe zu zeigen, was die von Lie selbst geschaffene Gruppentheorie zu leisten vermag.

Die Geometrie des euklidischen Raumes ist, ebenso wie die jedes nichteuklidischen, durch die Gruppe der in dem betreffenden Raume möglichen Bewegungen vollkommen bestimmt; für die Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie ist es daher jedenfalls ein sehr grosser Gewinn, wenn man solche möglichst einfachen Eigenschaften der genannten Gruppen von Bewegungen angeben kann, durch die diese Gruppen unter allen andern Gruppen von Transformationen ausgezeichnet sind. Der Aufsuchung solcher Eigenschaften sind die beiden Lie'schen Arbeiten gewidmet.

In der ersten Arbeit zeigt Lie, dass die Gruppen der euklidischen und der nichteuklidischen Bewegungen in sehr einfacher Weise charakterisirt werden können, wenn man den

Begriff der freien Beweglichkeit im Infinitesimalen einführt. Er sagt, dass eine Gruppe von reellen Transformationen des dreifach ausgedehnten Raumes R_3 freie Beweglichkeit im Infinitesimalen habe, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt: „Sobald ein reeller Punkt und ein reelles, durch ihn gehendes Linienelement festgehalten wird, ist vermöge der Gruppe immer noch continuirliche Bewegung möglich; wird jedoch ausserdem ein reelles Flächenelement festgehalten, das durch jenes Linienelement geht, so ist keine continuirliche Bewegung mehr möglich." Er beweist sodann, dass jede reelle continuirliche Gruppe des R_3, die innerhalb eines gewissen Bereiches überall freie Beweglichkeit im Infinitesimalen besitzt, durch eine reelle Punkttransformation dieses Raumes entweder in die Gruppe der euklidischen Bewegungen oder in eine der beiden Gruppen von nichteuklidischen Bewegungen übergeführt werden kann.

Diese Art und Weise, die genannten Gruppen von Bewegungen zu charakterisiren, empfiehlt sich nicht bloss durch ihre Einfachheit, die schwerlich übertroffen werden kann, sondern auch durch ihre leichte Uebertragbarkeit auf Räume von beliebig vielen Dimensionen. Lie führt diese Uebertragung vollständig aus, indem er den Schluss von n auf $n+1$ anwendet.

Erwähnt sei noch, dass im Verlaufe der Lie'schen Untersuchung eine ganze Reihe von Sätzen benutzt wird, die auch an und für sich beachtenswert sind, und dass Lie am Ende der Arbeit noch mehrere Sätze namentlich über projective Gruppen mitteilt, die mit dem Hauptgegenstande der Arbeit nicht in directem Zusammenhange stehen.

In seiner zweiten Arbeit stellt sich Lie auf einen ganz andern Standpunkt; er geht da nämlich von den Axiomen aus, die Herr von Helmholtz in seiner berühmten Arbeit: „Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen", benutzt hat, und untersucht, welche Folgerungen sich aus diesen Axiomen ziehen lassen, wenn man die bei v. Helmholtz noch nicht berücksichtigte Gruppeneigenschaft der Bewegungen hinzufügt. Er beschränkt sich dabei auf den Raum von drei Dimensionen.

Während Lie das Monodromieaxiom des Herrn v. Helmholtz

von vornherein bei Seite lässt, formulirt er dessen übrige Axiome folgendermassen:

A) Die Bewegungen des Raumes x, y, z bilden eine continuirliche Schar von unendlich vielen Transformationen.

B) Zwei Punkte $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$ besitzen allen Transformationen dieser Schar gegenüber eine Invariante:

$$\Omega(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2).$$

C) Es findet freie Beweglichkeit statt in dem Sinne, dass ein Punkt in jeden andern übergehen kann, dass nach Festhaltung eines Punktes x_1, y_1, z_1 jeder andere Punkt x_2, y_2, z_2 (von allgemeiner Lage) noch ∞^2 Lagen x'_2, y'_2, z'_2 annehmen kann, die der Gleichung:

$$\Omega(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2) = \Omega(x_1, y_1, z_1; x'_2, y'_2, z'_2)$$

genügen u. s. w.; endlich sollen nach Festhaltung dreier Punkte von allgemeiner gegenseitiger Lage überhaupt alle Punkte des Raumes in Ruhe bleiben.

Aus diesen Axiomen schliesst Lie zunächst, dass die Bewegungen des Raumes x, y, z eine sechsgliedrige Gruppe mit paarweise inversen Transformationen bilden. Indem er nun alle derartigen Gruppen bestimmt, die den Forderungen B) und C) genügen, findet er, dass es einen grossen Unterschied macht, wie man das Axiom C) der freien Beweglichkeit auffasst. Nimmt man nämlich an, dass das Axiom C) innerhalb eines gewissen Bereiches ausnahmelos gelten soll, lässt man also die eingeklammerten Worte „von allgemeiner Lage“ weg, so sind die Gruppe der euklidischen Bewegungen und die beiden Gruppen von nichteuklidischen Bewegungen die einzigen, die den Forderungen B) und C) genügen. Lässt man aber die eingeklammerten Worte stehen, so giebt es ausser den genannten Gruppen noch eine ganze Reihe von andern, die die Axiome B) und C) erfüllen.

Hieraus ergiebt sich, dass die Helmholtz'schen Axiome ausreichen, um die Gruppen der euklidischen und der nichteuklidischen Bewegungen zu charakterisiren, und dass das Monodromieaxiom jedenfalls dann überflüssig ist, wenn man das Axiom der freien Beweglichkeit in geeigneter Weise deutet.

Zum Schlusse sei noch erwähnt, dass die Hauptergebnisse

der beiden besprochenen Abhandlungen von Lie bereits 1886 veröffentlicht worden sind (Leipz. Ber. 1886, S. 337 ff.). Die ganze Untersuchung, zu der mittlerweile noch viel Neues hinzugekommen ist, wird dem Bd. III des Lie'schen Werkes über die Transformationsgruppen in neuer Gestalt einverleibt werden.

El.

R. De Paolis. Teoria dei gruppi geometrici e delle corrispondenze che si possono stabilire tra i loro elementi. Memorie della Società Italiana delle Scienze detta dei XL. (3) VII. 164 S.

Unserer Meinung nach ist die Abhandlung, über welche wir zu berichten haben, aus zwei Ideen entsprungen, welche seit einiger Zeit unter den Geometern mehr und mehr Boden gewinnen: 1) aus der Notwendigkeit, die Geometrie auf so feste Grundlagen zu stellen und nach so strengen Methoden zu entwickeln wie die Analysis, 2) aus dem Bestreben, die vorhandenen Begriffe der Analysis so viel als möglich für die Geometrie zu verwerten. Bei der Unmöglichkeit, hier die Besprechung in der Ausführlichkeit zu schreiben, welche die Arbeit verdient, beschränken wir uns auf eine Inhaltsübersicht derselben. (Näheres hierüber sehe man in Peano's Rivista I. 105-120.)

I. Um der Untersuchung eine ganz allgemeine Grundlage zu geben, fängt Herr De Paolis seine Arbeit mit einer Einleitung an, welche die Erklärung der „Mannigfaltigkeiten“ giebt, als der Bestimmungsweisen, deren ein Begriff fähig ist, sowie der „Gruppen“, welche aus ihren „Elementen“ gebildet werden. Die Elemente derselben Gruppe können durch ihre Vielfachheit unterschieden werden, während die Gruppen mittels ihres „Grades“ (endliche oder unendliche Zahl ihrer Elemente) klassificirt werden. Einen besonderen Wert besitzen die Gruppen („Gruppirungen“ genannt), deren Elemente einzelne Gruppen einer bestimmten Mannigfaltigkeit sind. Betrachtet man gleichzeitig mehrere verschiedene Gruppen, so ist es nicht selten, dass man sowohl ihre „Gesamtgruppe“, als die Gruppe, welche allen gemein ist, betrachten muss; aus diesem letzten Begriffe entspringt fer-

ner derjenige der „unter einander“ oder „mit derselben Gruppe verketteten Gruppen“.

II. Indem der Verfasser diese Erklärungen auf unseren gewöhnlichen Raum anwendet, bemerkt er, dass derselbe eine Mannigfaltigkeit unendlichen Grades sei, deren Elemente die Körper, die Flächen, die Linien oder die Punkte, dessen Gruppen die geometrischen Gebilde sind. Nachher wiederholt oder verallgemeinert er die Erklärungen, welche der gewöhnlichen Geometrie zu Grunde liegen, um ihre Verbindung mit den obigen allgemeinen Begriffen klar zu machen. Er spricht von der Erzeugung der geometrischen Gebilde durch Bewegung und von dem Begriffe „zusammenhängender Gruppen“; ferner nimmt er die Teilbarkeit einer Linie, einer Fläche oder eines Körpers in zusammenhängende Teile als Grundsatz an. Eine besondere Erwähnung finden ferner die Construction eines Gebildes durch unter einander verkettete Gebilde, die „Knoten“ der Linien und die „Knotenlinien“ der Flächen, womit die Unterscheidung von „geflochtenen“ und „aufgelösten“ Flächen zusammenhängt.

III. Im dritten Capitel, dessen Zweck die genauere Formulirung einiger allgemeinen Wahrheiten ist, tritt der Abstandsbegriff auf, ein nicht ausdrücklich erklärter Begriff, dessen Gebrauch in der Geometrie jedoch, nach Grassmann, möglich ist, nachdem man die mehr, gleich oder minder entfernten Punktpaare erklärt hat. Aus diesem Begriff fliessen sogleich die der („unendlich ausgedehnten“ oder) „unendlichen“ und „endlichen“ Gruppe, ferner der „beliebig nahen“ Gruppe, welche zur Darlegung vieler wichtigen Sätze Anlass geben.

IV. Die im vierten Capitel enthaltenen Lehrsätze betreffen die Teilung einer Gruppe in beliebig kleine Teile. Unter ihnen muss man als den wesentlichsten denjenigen ansehen, welcher die Teilbarkeit einer geradlinigen Strecke in beliebig kleine gleiche Teile lehrt. Um denselben zu beweisen, muss man den Satz annehmen, welchen Dedekind „Grundsatz der Stetigkeit der Geraden“ genannt hat, einen Satz, welcher im Anfange des genannten Capitels ausgedrückt wird und im Laufe desselben viele wichtige Folgerungen ergiebt.

V. Ein Punkt heisst „Grenzpunkt" einer Gruppirung, wenn diese unendlich viele Punkte enthält, welche jenem Punkte beliebig nahe sind; wenn die Gruppirung mehrere Grenzpunkte enthält, so bilden alle diese die „Grenzgruppe" der Gruppirung. Die Sätze, welche aus dieser Erklärung gefolgert werden können, führen auf eine natürliche Weise zum Begriffe der „convergirenden Gruppe" und zu den folgenden Sätzen, welche in algebraischer Form durch Herrn Weierstrass in seinen Vorlesungen bewiesen worden sind: Eine Gruppe, welche unendlich viele verschiedene Punkte enthält, hat mindestens einen Grenzpunkt; eine gegebene Gerade oder Ebene enthält wenigstens einen Grenzpunkt einer endlichen Gruppe, wenn diese Punkte enthält, welche der Geraden oder der Ebene beliebig nahe sind.

VI. Die Gesamtheit der Grenzpunkte einer Gruppe wird nach Herrn G. Cantor „abgeleitete Gruppe" genannt; enthält diese Gruppe unendlich viele Elemente, so kann man auch eine aus ihr abgeleitete Gruppe betrachten, welche die „zweite abgeleitete" in Rücksicht auf die gegebene Gruppe heisst. Fährt man so fort, so kann man eine dritte, vierte u. s. w. abgeleitete Gruppe betrachten. Jede abgeleitete Gruppe ist in der vorigen abgeleiteten Gruppe enthalten, während die ursprüngliche entweder in ihrer ersten abgeleiteten enthalten ist (sie heisst dann „in sich dicht"), oder mit ihrer ersten abgeleiteten keinen Punkt gemein hat (sie heisst dann „isolirt"), oder endlich alle Punkte ihrer ersten abgeleiteten enthält (sie heisst dann „geschlossen"); wenn ferner die Gruppe zugleich in sich dicht und geschlossen ist, so heisst sie „perfect". Die gewöhnliche Geometrie bietet zahlreiche Beispiele dieser Gruppenarten dar, Beispiele, welche die Nützlichkeit der Einführung dieser Begriffe in die Ausdehnungswissenschaft darthun, welche Begriffe nach G. Cantor's Vorschlag in die Zahlenwissenschaft schon aufgenommen worden sind. Nützlich ist auch der Begriff der „zusammenhängenden" Gruppe; ist eine solche Gruppe zugleich geschlossen, so wird sie als „stetig" bezeichnet; stetig sind der Raum und alle die Figuren, welche die Geometer gewöhnlich betrachten.

VII. Im siebenten Capitel stellt der Verf. die Erklärungen

der „Trennbarkeit“ auf, führt die Untersuchung der Trennbarkeitsbedingungen aus und macht einige Anwendungen der erhaltenen Resultate.

VIII. Die in den vorigen Capiteln auseinandergesetzten Eigenschaften können auf die „elementaren Linien“ ausgedehnt werden, d. h. auf die zusammenhängenden, endlichen, aufgelösten, in zwei Punkten endenden und durch jeden ihrer Punkte in zwei vollkommene Teile teilbaren Linien. Eine solche Linie wird durch $n-1$ ihrer Punkte in n elementare Linien geteilt; umgekehrt ist jede zusammenhängende, endliche, aufgelöste und in eine endliche Zahl elementarer Teile zerlegbare Linie elementar. Fast alle Sätze, welche vorher für die Gerade bewiesen wurden, können auf elementare Linien ausgedehnt werden.

Mit der Betrachtung der elementaren Linien hängt die der geschlossenen aufgelösten Linie zusammen, einer Linie, welche nicht nur zusammenhängend endlich und aufgelöst ist, sondern auch durch zwei beliebige ihrer Punkte in zwei vollkommene und zusammenhängende Teile zerlegt wird. Elementare wie geschlossene aufgelöste Linien können auf jeder beliebigen Fläche enthalten sein: nach dem Verf. ist es nützlich, die Gesamtheit aller in fünf Kategorien einzuteilen.

IX. Im Raume kann als Analogon der Elementarlinie die „Elementarfläche“ betrachtet werden, eine zusammenhängende, endliche, aufgelöste, in einer geschlossenen, aufgelösten Linie endende Fläche, welche durch jede auf ihr liegende und in ihrem Umfang endende Elementarlinie in zwei zusammenhängende und vollkommene Teile zerlegt wird. Eine Elementarfläche wird in zwei Elementarteile durch jede Elementarlinie der besagten Art zerschnitten, aber durch jede ihrer geschlossenen aufgelösten Teile in zwei zusammenhängende und vollkommene Teile, von denen nur einer elementar ist. Sieht man von diesem letzten ab, so erhält man eine „Elementarfläche mit einer Oeffnung“; auf eine ähnliche Weise kann man eine „Elementarfläche mit mehreren Oeffnungen“ bilden.

Eine Elementarfläche kann immer in eine endliche Zahl beliebig kleiner zusammenhängender Teile zerlegt werden; in

vielen Fällen sind diese Teile elementar; der Verf. nimmt ausdrücklich an, dass sie immer elementar seien: in Folge dessen kann er auf die Elementarflächen viele der obigen Sätze ausdehnen.

X. Durch Verkettung elementarer Linien oder Flächen erhält man eine Linie oder Fläche; der Verf. nimmt an, jede Linie oder Fläche könne man auf diese Weise erhalten denken. Auf Grund dieser Voraussetzung untersucht er, wie der Begriff der „Umgebung eines Punktes" auf jede beliebige Linie oder Fläche übertragen werden kann, und kommt zu dem Schlusse, dass in jedem Punkte einer Linie oder Fläche verschiedene „Umgebungsgruppen" betrachtet werden können: jetzt führt er die Einschränkung ein, nur Linien oder Flächen zu betrachten, welche weder irgendwo unstetig sind, noch einen mit unendlich vielen Umgebungsgruppen versehenen Punkt enthalten.

XI-XII. Nachdem der Verf. die Umgestaltungen auseinandergesetzt hat, deren einige der vorigen Betrachtungen bedürfen, wenn man eine Gruppe auf eine Linie oder Fläche legt, so hält er es für nötig, die „orientirten" Linien oder Flächen einzuführen. Eine Linie ist orientirt, wenn sie aus einer endlichen oder unendlichen Zahl elementarer Teile besteht, welche zu zwei in ihren Enden zusammenhängen; und eine Fläche ist orientirt, wenn sie aus einer endlichen oder unendlichen Zahl elementarer Teile zusammengesetzt wird, welche zu zwei in einer endlichen oder unendlichen Zahl von Punkten ihrer Umfänge zusammenhängen. Nachher treten die „einfach" und die „zweifach zusammenhängenden", die „einseitigen" und die „zweiseitigen" Flächen auf; ferner der Begriff der „Verflechtung" erster oder zweiter Art; endlich die „Normalfläche" mit ω Oeffnungen, p Handhaben, p' Verflechtungen erster und p'' zweiter Art. Wie man diese Fläche herstellen kann, wird in der Originalarbeit gelehrt.

XIII. Das dreizehnte Capitel, welches eine neue Darstellung der Theorie des Zusammenhangs der Flächen enthält, fängt mit einer Reihe von Bemerkungen an über die Veränderungen, welche eine Linie oder Fläche durch in ihr ausgeführte Schnitte er-

leidet; Bemerkungen, die es dem Verfasser ratsam scheinen lassen, sich auf die Flächen zu beschränken, welche nicht nur die schon erwähnten Bedingungen befriedigen, sondern auch die, dass sie und alle ihre durch eine endliche Zahl von Schnitten erhaltenen Teile in eine endliche Zahl einfach zusammenhängender Teile zerlegt werden können.

Eine Gruppe G bestehe aus einer beliebigen endlichen Zahl s von Flächen; durch einige Schnitte werden sie in eine endliche Zahl α zusammenhängender Teile zerlegt: von diesen Schnitten haben τ_1 (erster Art) ihre Enden in denselben Umfangsteilen einer der gegebenen Flächen; τ_2 haben ihre Enden in zwei verschiedenen Umfangsteilen, und τ_4 seien Elementarlinien, jede in einer der Flächen enthalten; die übrigen Schnitte seien entweder Elementarlinien, welche nur ein Ende auf dem Umfange haben, oder geschlossene aufgelöste Linien. Unter dieser Voraussetzung ist die Zahl $k = \tau_1 + \tau_2 - \tau_4 - \alpha$ von der Zerlegungsweise unabhängig; sie hängt nur von der Structur der Flächengruppe ab, wird „Grundzahl“ derselben genannt und mit k bezeichnet. Bezeichnet man mit $k_1, k_2, \ldots, k_s$ die Grundzahlen der Flächen der s-gliedrigen Gruppe, so hat die Gleichung

$$k = k_1 + k_2 + \cdots + k_s - 2s + 2$$

statt. Wichtig und nicht schwer ist die Bestimmung der Veränderungen, welche die Grundzahl einer Fläche erleidet, wenn man in derselben Schnitte ausführt. Bemerkenswert ist, dass die Grundzahl einer Fläche nie negativ wird, Null nur, wenn die Fläche offen ist, und dass sie gleich Eins ist, wenn die Fläche einfach zusammenhängend ist.

Bei einer zweiseitigen, offenen oder geschlossenen Fläche mit $\omega \geqq 0$ Umfangsteilen kann man ferner die Zahl p betrachten, welche die grösste Zahl der Schnitte ausdrückt, die erster Art oder geschlossen sind, welche man in einer Fläche machen kann, ohne sie zu zerstückeln: sie heisst „Geschlecht“ der Fläche und ist mit der Grundzahl durch die Gleichung $k = 2p + \omega$ verbunden. Selbst bei einer einseitigen Fläche kann man ein Geschlecht betrachten; bezeichnet man dasselbe mit π, so hat man $\pi = k - \omega$.

Eine dritte Zahl pflegt man bei einer ein- oder zweiseitigen Fläche zu betrachten, nämlich die „Zusammenhangsordnung" oder kürzer den „Zusammenhang" Γ der Fläche. Es ist $\Gamma = k+2$, wenn diese geschlossen, und $\Gamma = k$, wenn sie offen ist. Ist die Fläche zweiseitig, und hat sie das Geschlecht p, so ist $\Gamma = 2(p+1)$, wenn sie geschlossen, und $\Gamma = 2p+\omega$, wenn sie ω Umfangsteile besitzt. Ist sie einseitig, so hat man in den entsprechenden Fällen $\Gamma = \pi+2$ oder $\Gamma = \pi+\omega$.

Die Veränderungen, welche in dem Geschlechte und Zusammenhange einer Fläche die in ihr ausgeführten Schnitte verursachen, und viele damit verbundene Sätze findet der Leser in der Originalarbeit.

XIV. Mit dem besprochenen Capitel schliesst der erste Abschnitt der zum Bericht stehenden Arbeit, derjenige, welcher die Eigenschaften der Punktgruppen behandelt. Der zweite beginnt mit den Erklärungen der „ein-eindeutigen" (oder (1,1)) Verwandtschaft, der „directen" und der „umgekehrten" Verwandtschaft u. s. w. und mit einer neuen Darlegung jener bekannten wichtigen Sätze, welche G. Cantor aus dem Begriff der Mächtigkeit einer Mannigfaltigkeit abgeleitet hat.

XV. Unter den Verwandtschaften verdienen den Ehrenplatz diejenigen, welche teilweise oder gänzlich die Eigenschaft der Stetigkeit besitzen. Sie werden im fünfzehnten Capitel der Arbeit des Herrn De Paolis untersucht, besonders unter der Voraussetzung, dass die Gebiete, welche in Verwandtschaft stehen, ein- oder zwei-dimensional seien.

XVI. Die im XV. Capitel auseinandergesetzten Untersuchungen sind einer grossen Erweiterung fähig; man kann nämlich allgemein statt der (1,1)-Verwandtschaften, die (m, n) betrachten. Um dieselben zu studiren, führt der Verfasser die Riemann'schen Flächen ein; und in der Einführung der Riemann'schen Flächen in die Behandlung geometrischer Fragen, deren Möglichkeit auf diese Art streng bewiesen ist, liegt einer der wichtigsten Fortschritte, welche die Geometrie der in Rede stehenden Arbeit verdankt: wir wollen ausdrücklich die Aufmerksamkeit unserer Fachgenossen auf diesen Punkt lenken. Die höchst natürliche

Weise, auf welche somit eine berühmte Zeuthen'sche Formel (Math. Ann. III. 150) eine bedeutende Erweiterung erfährt, kann als Beweis der Nützlichkeit dienen, welche der methodische Gebrauch der Riemann'schen Flächen in der Geometrie erlangen wird.

XVII. Auf den letzten Seiten seiner bemerkenswerten Arbeit untersucht der Verf. die Verwandtschaften, welche man zwischen beliebig vielen Gebieten herstellen kann, und von welchen die trilineare Verwandtschaft ein ganz besonderer Fall ist. Hier führt er Untersuchungen aus, welche Ausdehnungen derjenigen unter den obigen bilden, die sich auf Verwandtschaften zwischen zwei Gebieten beziehen.

Schliesslich wollen wir den Leser auf einige Einschränkungen oder Veränderungen aufmerksam machen, welche man in den Sätzen oder Beweisen der besprochenen Arbeit schon als nötig gefunden hat: Peano, Rivista I, S. 109 und 110; Veronese, Fondamenti di Geometria, Padova 1891, § 138. La.

R. de Paolis. Sulle corrispondenze $[m_1, m_2, \dots, m_r]$ continue che si possono stabilire tra i punti di r gruppi. Annali di Mat. (2) XVIII. 93-117.

Wer den vorigen Bericht gelesen hat, weiss, dass die „Teoria“ von Herrn De Paolis aus zwei Teilen besteht; der eine betrifft die Punktgruppen, während der andere von den Verwandtschaften handelt, welche man unter denselben herstellen kann. Diese zwei Teile sind jedoch nicht unabhängig von einander, da man in dem zweiten einen breiten Gebrauch von einigen Begriffen und Sätzen des ersten macht, von einigen, aber nicht von allen. Da die Anwendungen des zweiten viel zahlreicher als die des ersten sind, besonders wenn die Verwandtschaften als stetig vorausgesetzt werden, so ist es eine sehr natürliche und wichtige Aufgabe, den zweiten Teil, wenn auch nicht ganz frei, so doch von dem ersten so wenig als möglich abhängig zu machen. Diese Aufgabe hat Herr De Paolis in der Arbeit gelöst, welcher diese Zeilen gewidmet sind. Die Gegenstände der vier ersten Abschnitte sind die folgenden: I. die Mannigfaltig-

keiten, ihre Elemente, ihre Gruppen und Gruppirungen; II. der Raum und seine geometrischen Elemente; III. die stetigen geometrischen Gruppen; IV. einige Folgerungen aus der Stetigkeit des Raumes, der Ebene und der Geraden. Diese Abschnitte dienen als Einleitung zum Hauptteil der Abhandlung, d. h. zu dem Teil, in welchem die stetigen Verwandtschaften $[m, n]$ zwischen den Punkten zweier Gruppen und die stetigen Verwandtschaften $[m_1, m_2, \dots, m_r]$ zwischen den Punkten von r Gruppen behandelt werden.

Die Ausführlichkeit des vorigen Referats erlaubt es uns, in diesem so kurz zu sein, weil das Thema der in Rede stehenden Arbeit und die in ihr angewandte Methode unzählige Berührungspunkte mit der „Teoria" bieten. La.

F. Klein. Zur nichteuklidischen Geometrie. Math. Ann. XXXVII. 544-572.

Nach einer fast zwanzigjährigen Pause (vgl. F. d. M. III. 1871. 231 und V. 1873. 271) kehrt Herr Klein auf die nichteuklidische Geometrie zurück, um zu seinen berühmten Aufsätzen Erklärungen zu geben oder sie durch anderweitige Ideen zu bereichern, sowie auch, um einige Unrichtigkeiten zu verbessern, welche sich in einigen aus denselben hervorgegangenen Arbeiten befinden. Der Hauptinhalt des neuen Aufsatzes kann etwa folgendermassen dargelegt werden.

I. „Ueber Clifford's Ideen von 1873". Es sei eine Fläche zweiten Grades F_2 gegeben; man betrachte diejenigen Collineationen des Raumes, welche nicht nur die Fläche als solche in sich überführen, sondern auch jedes der beiden Systeme der auf ihr verlaufenden Geraden; unter ihnen sind zwei („Schiebungen" erster oder zweiter Art genannt) bemerkenswert: bei einer Schiebung erster oder zweiter Art bleiben, allgemein zu reden, zwei Erzeugende erster (oder zweiter) Art der Fläche punktweise fest, und es schreitet also jeder Raumpunkt auf derjenigen geraden Linie fort, die durch ihn so gelegt werden kann, dass sie diese beiden Erzeugenden trifft. Mit jeder Schiebung ist daher eine bestimmte lineare Congruenz verbunden, welche

erster oder zweiter Art genannt werden soll. Zwei Schiebungen verschiedener Art sind vertauschbar; jede der oben erwähnten Collineationen der F_2 in sich selbst kann als Product von zwei solchen Schiebungen angesehen werden. Die Schiebungen können durch höchst bemerkenswerte Formeln dargestellt werden, wie der Leser aus der Originalarbeit ersehen kann.

Mit den vorstehenden Entwickelungen ist die Grundlage der neuen Parallelentheorie gegeben, welche Clifford auf folgende Erklärung gründete: als „nichteuklidische Parallelen" werden solche (windschiefe) gerade Linien bezeichnet, welche der nämlichen Congruenz (der einen oder anderen Art) angehören, d. h. welche dieselben beiden imaginären Erzeugenden derselben Art treffen; sie sind reell im elliptischen, imaginär im hyperbolischen Raum. Betrachtet man eine Fläche zweiten Grades, welche mit der Fundamentalfläche F_2 ein geradliniges Vierseit gemein hat, so sind ihre Erzeugenden jeder Art im Clifford'schen Sinne unter einander parallel. Das Krümmungsmass der Fläche ist constant und gleich Null; die Gesamtfläche hat einen endlichen Flächeninhalt: so wird bewiesen, dass eine unbegrenzte Mannigfaltigkeit verschwindender Krümmung eine endliche Ausdehnung besitzen kann, was mit den gewöhnlichen Vorstellungen zu widerstreiten scheint.

II. „Von den verschiedenen (euklidischen oder nichteuklidischen) Raumformen". Herr Klein wiederholt zuerst die Bemerkung, welche er in seinem ersten Aufsatz über die nichteuklidische Geometrie gemacht hat, dass seine elliptische Geometrie sich nicht mit der sphärischen Geometrie deckt; er beweist ferner, dass die Bezeichnung „Polarform" des sphärischen Raumes, welche Herr Killing (vgl. F. d. M. XVII. 1885. 508) für den elliptischen Raum vorgeschlagen hat, unzutreffend ist. Endlich nimmt er folgendes Problem in Angriff: alle Zusammenhangsarten anzugeben, welche bei geschlossenen Mannigfaltigkeiten irgend welches constanten Krümmungsmasses überhaupt auftreten können. Er löst dasselbe für zweidimensionale Mannigfaltigkeiten vollständig; für dreidimensionale aber begnügt er sich mit der Bemerkung, dass es durch analoge Ueberlegungen

aufgelöst werden kann, und mit dem Ausspruch des Wunsches, dass die Fragestellung von anderer Seite aufgenommen werde.

III. „Von der rein projectiven Begründung der analytischen Geometrie“. Der Zweck des vorliegenden Abschnittes ist die Beseitigung eines Missverständnisses, welches die Entwickelungen des Verfs. in Math. Ann. IV u. VI verursacht haben. Die Herren Ball und Cayley sprachen ihre Bedenken folgendermassen aus: „In that theory (the non-euclidian Geometry) it seems as we try to replace our ordinary notion of distance between two points by the logarithm of a certain anharmonic ratio. But this ratio itself involves the notion of distance measured in the ordinary way. How than we can supersede the old notion of distance by the non-euclidian notion, inasmuch as the very definition of the latter involves the former?“ (Ball, on the Theory of Contents; vergl. F. d. M. XX. 1888. 515). „It must however be admitted that in applying this theory of v. Staudt's to the theory of distance, there is at least the appearance of arguing in a circle“ (Cayley, Collected Papers, T. II, S. 605).

Wenn man die meisterhaft klare Darstellungsart berücksichtigt, welche Herr Klein in allen seinen Arbeiten angewandt hat, so kann man den Ursprung dieses Missverständnisses nur in der zu geringen Verbreitung finden, welche die Methoden und die Begriffe Staudt's erlangt haben; wir hoffen, dass die neuen Entwickelungen nicht nur Sätze wie die obigen in Zukunft ausschliessen, sondern auch die Geometer auf die unsterbliche „Geometrie der Lage“ und ihre „Beiträge“ zurückführen werden!

IV. „Von der principiellen Bedeutung der projectiven Geometrie, nebst allgemeinen Bemerkungen über die geometrischen Axiome“. Diese Ueberlegungen, welche meistens psychologischer Natur sind, können in wenigen Sätzen nicht wiederholt werden. Man muss sie lesen und über sie nachdenken! La.

M. Simon. Die Elemente der Geometrie mit Rücksicht auf die absolute Geometrie. Strassburg. Verlagsanstalt vorm. R. Schultz u. Co. IV u. 74 S. 8°.

Das Werkchen ist kein vollständiges Lehrbuch, sondern nur eine Skizze des vortrefflichen Lehrganges des Verfassers. Herr Simon nimmt den empirischen Ursprung der Geometrie an; er beginnt seine Auseinandersetzung mit einer „Einleitung", deren sämtliche Paragraphen Worterklärungen oder Thatsachen der Anschauung oder beides zugleich enthalten, soweit nicht ausdrücklich auf andere Nummern zur Begründung verwiesen wird. Das erste Capitel (welches den Titel „Congruenz" trägt) enthält die wichtigsten Sätze über die Gleichheit der einfachsten ebenen Gebilde; Ordnung und Ausdruck derselben sind von der euklidischen Fassung verschieden, weil der Verfasser als Ausgangspunkt folgende Betrachtung nimmt: Die überall gleichförmige Ebene wird durch jede Gerade in zwei Halbebenen zerlegt; die Halbebenen können durch Drehung um die Gerade als „Axe" zur Deckung gebracht werden, dabei fällt jeder Punkt der einen Halbebene mit einem Punkte der anderen zusammen. In Folge dessen erscheinen alle die obengenannten Sätze als solche, welche die ebene Symmetrie betreffen. Dieses (auch sonst in Deutschland benutzte) Verfahren scheint uns sehr lobenswert, nicht nur weil es eine bessere Einsicht in den inneren Zusammenhang unter den verschiedenen Sätzen gewährt, sondern auch weil es sehr früh ein Beispiel einer geometrischen Verwandtschaft und ihrer Anwendung bietet. Einleitung und I. Capitel sind vom Parallelenaxiom unabhängig. Die Gründe der Annahme desselben werden von Herrn Simon in den ersten Zeilen des II. Capitels sehr klar dargelegt. Setzt man den besagten Grundsatz als richtig voraus, so kann man die Sätze über parallele Linien, Streifen, Rechtecke, Dreiecke, Parallelogramme, gewöhnliche und überschlagene Trapeze beweisen und viele bezügliche Aufgaben lösen: diese Lehrsätze und Aufgaben sind alle bekannt, werden jedoch in einem neuen Zusammenhange dargestellt. Im III., dem Kreise gewidmeten, Capitel werden viele Theoreme gelehrt, welche Eigenschaften des Kreises über-

haupt oder Beziehungen unter Kreisen und anderen Gebilden aussprechen. Weil nicht in allen das Parallelenaxiom vorausgesetzt werden soll, so merkt der Verfasser alle die an, welche von denselben unabhängig sind. Das IV. Capitel trägt die Ueberschrift „Streifensysteme“ und ist in drei Abschnitte gesondert. Im ersten („Satzgruppe des Pythagoras“) werden die wichtigsten Sätze über die Flächengleichheit der Dreiecke und Rechtecke bewiesen, um zuletzt die „Eselsbrücke“ zu erreichen; im zweiten („Teilung und Messung“) wird die Arithmetik der (commensurabeln oder incommensurabeln) Strecke und ihre Anwendung auf die Flächenrechnung gelehrt; im dritten endlich werden die ersten Umrisse der Aehnlichkeit gezeichnet, insbesondere in Bezug auf die ähnlichen Dreiecke, welche der Verfasser, nach Bolzano, „als solche“ erklärt, „bei denen durch Vergleich der Stücke desselben Dreiecks sich kein Unterschied ergeben würde, sondern nur beim Uebergang von einem Dreiecke zum andern“. Zum Schlusse giebt der Verfasser einen kurzen Ueberblick über das Pensum der Untersecunda.

Hat Herr Simon im Texte die dogmatische Form gebraucht, so wählt er in den Anmerkungen, in denen er seine Methode und Ansichten gegen mögliche Angriffe verteidigt, eine ganz andere; so z. B. werden die ersten Worte der Einleitung („Fläche, Linie, Punkt sind Begriffe, welche aus der Anschauung der Körper hergeleitet werden“), die Erklärungen von Gerade, Winkel u. s. f. gerechtfertigt. Sehr richtig macht er ferner auf das Folgende aufmerksam: „Die absolute Geometrie unterscheidet sich von der euklidischen dadurch, dass jene eine Hypothese weniger enthält als diese und sie daher als Specialfall unter sich fasst. Es ist im Grunde traurig, dass 70 Jahre, nachdem Gauss die Resultate der absoluten Geometrie bis zu ihrer letzten Consequenz gezogen hat, die absolute Geometrie noch als Verirrung bezeichnet werden kann, während sie die wahre Consequenz der Methode Euklid's bildet“. Um diese falsche Meinung auszurotten, braucht Herr Simon eine vortreffliche Methode; er beweist nämlich, dass der Lehrgang, welchen er für die Geometrie Euklid's vorgeschlagen hat, die absolute Geometrie, so weit sie

ohne Trigonometrie zugänglich ist, einfach abzuleiten gestattet. Diese und andere Entwickelungen, welche die allgemeine Geometrie betreffen, die strenge Begründung bezüglicher Sätze wie auch etliche Verbesserungen von sehr bekannten Arbeiten geben den Simon'schen Elementen eine vorzügliche Stelle in der geometrischen Litteratur. Nur der Vollständigkeit wegen führen wir die Reye'sche Bemerkung an (Schlömilch Z. XXXV. 1891), dass der Beweis des Satzes: „Zwei Nichtschneidende haben einen kürzesten Abstand; von ihm aus nehmen die Abstände der Punkte der einen von denen der anderen nach beiden Seiten symmetrisch zu“, nicht bündig ist. La.

M. SIMON. Elementar-geometrische Ableitung der Parallelenconstruction in der absoluten Geometrie. J. für Math. CVII. 84-86.

Die Construction des Parallelenstrahls durch einen gegebenen Punkt zu einem gegebenen Strahle ist von Bolyai und Lobatschewsky trigonometrisch abgeleitet worden. Herr Frischauf, welcher diese Construction geometrisch rechtfertigen wollte (vgl. Elemente der absoluten Geometrie § 67), beging einen Fehler. Um denselben zu verbessern, leitet Herr Simon dieselbe Construction aus einem wahrscheinlich neuen Satze ganz elementar planimetrisch ab. La.

T. BRODÉN. Om geometriens principer. Pedagogisk Tidskrift. Halmstad 1890. 36 S.

Der Aufsatz enthält den (zum Teil nur andeutungsweise gegebenen) Nachweis, dass man eine wirklich scharfe Formulirung der Fundamentalsätze der dreidimensionalen euklidischen Geometrie, als logisches System betrachtet, folgendermassen gestalten kann: Als undefinirte Grundbegriffe nehme man nur „Punkt“ und „Entfernungsgleichheit“ (oder eigentlich nur den Begriff $AB = AC$) an. Mit Anwendung dieser Begriffe kann man zuerst eine Charakterisirung der „geraden Linie“ als einer speciellen unendlichen Punktmenge von der zweiten „Mächtig-

keit“ (nach G. Cantor's Terminologie) gewinnen; im Zusammenhange hiermit den allgemeinen Begriff $AB = CD$ und den Satz: Wenn $AB = EF$, $CD = EF$, so ist $AB = CD$. Hiernach kann man die „Ebene“ folgendermassen beschreiben: 1) Durch zwei beliebige Punkte eines ebenen Systems geht eine Gerade. 2) Jede Gerade bestimmt eine eindeutige, symmetrische Correspondenz, bei der alle Abstände unverändert bleiben, und alle Punkte jener Geraden, aber nur diese, sich selbst entsprechen. 3) Eine solche Correspondenz ist eindeutig durch zwei entsprechende Punkte bestimmt. 4) Die sich selbst entsprechende Gerade bildet den vollständigen Ort gleicher Entfernung von zwei correspondirenden Punkten. Die Sätze 2), 3), 4) haben vollständige Analoga bei der geraden Linie; für diese ist ausserdem ein Satz erforderlich, aus welchem die Mächtigkeit 2 hervorgeht. Die Ebene fordert dagegen, dass man die pseudosphärische Geometrie ausschliesst, was, wie folgt, geschehen kann. 5) Der vollständige Ort zweier entsprechenden Punkte, welche von einander eine gegebene Entfernung haben, bildet zwei Gerade; endlich gewinnt man den „dreidimensionalen Raum“ durch folgende Bestimmungen: 1) Durch drei Punkte, welche nicht in gerader Linie liegen, geht eine Ebene. 2) Das zweien Ebenen Gemeinsame kann nicht einen einzelnen Punkt ausmachen. (Dies schliesst die vierte Dimension aus.)

Diese Bestimmungen sind hinreichend, weil sie zu der Entfernungsformel

$$r = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}$$

führen. Inwieweit sie auch notwendig (von einander unabhängig) sind, muss vorläufig dahingestellt bleiben.

Der Aufsatz enthält übrigens einige Betrachtungen philosophischer und pädagogischer Natur. Bdn.

G. Veronese. Il continuo rettilineo e l'assioma V d'Archimede. Rom. Acc. L. Mem. (4) VI. 603-624.

Ueber diese Abhandlung werden wir uns ganz kurz fassen und jeder Kritik enthalten, da sie mit einem so eben (Ende 1892)

erschienenen Werke des Verfassers eng zusammenhängt und folglich nur als eine vorläufige, unvollständige Mitteilung angesehen werden darf.

Herr Veronese definirt das „absolute Continuum" als ein Grössensystem Σ, welches den folgenden fünf Principien gehorcht:

Pr. I. Sind A, B irgend zwei Grössen von Σ, so gilt eine und nur eine der folgenden Relationen:

$$A = B, \quad A > B, \quad A < B.$$

Ferner ist für $A = B$ und $B = C$ auch $A = C$;

für $A = B$ und $B > C$ ist $A > C$.

Pr. II. Sind A, B irgend zwei Grössen von Σ, so bezeichnet $A+B$ eine und nur eine Grösse desselben Systems, und es ist:

$$A+(B+C) = (A+B)+C = A+B+C, \quad A+B > A, \quad A+B > B.$$

Ist $A < B$, so existiren in Σ solche (nicht notwendig gleiche) Grössen X, X', dass

$$A+X = B, \quad X'+A = B.$$

Ist $A = A'$, $B = B'$, so ist $A+B = A'+B = A+B' = A'+B'$.

Pr. III. Sind die Grössen von Σ ihrer Grösse nach geordnet, so giebt es kein kleinstes Intervall.

Pr. IV. Nimmt ein Intervall (XX') von Σ, dessen Grenzen in entgegengesetztem Sinne variiren, unbeschränkt ab, so enthält es immer ein Element Y, welches von X und X' verschieden ist.

Pr. V. Sind α, β irgend zwei Intervalle von Σ, so existirt immer ein solches Multiplicitätssymbol η, dass $\alpha\eta > \beta$.

Ist η eine gewöhnliche ganze Zahl, so reducirt sich das Pr. V auf das sogenannte Archimedische Axiom, und Σ heisst ein „gewöhnliches Continuum" („continuo ordinario").

Ein Intervall von Σ heisst ein „Segment", wenn man auf seine Lage in Σ Rücksicht nimmt; die Gleichheit von Segmenten wird durch $\equiv$ bezeichnet. Die Summe zweier Segmente (AB), $(B'C')$ wird durch $(AB) + (B'C') \equiv (AC)$ definirt, wenn $(B'C') = (BC)$; diese Gleichung besteht selbst dann, wenn (AB) und (BC) entgegengesetzten Sinn haben.

Sind im Systeme Σ zwei gleiche und entgegengesetzte Seg-

mente vorhanden (Pr. VI), so heisst Σ ein „stetiges, eindimensionales, in seinen Teilen gleichgelagertes System“ („sistema continuo ad una dimensione identico nella posizione delle sue parti“). Vi.

D. Varisco. Complementi di pangeometria. Batt. G. XXVIII. 181-192.

G. Vivanti. Osservazioni sulla Nota del Dott. D. Varisco. Daselbst. 240.

Herr Varisco behauptet, die Pangeometrie führe zu zwei merkwürdigen Widersprüchen, und will daraus curiose Folgerungen ziehen. Die vermeinten Widersprüche rühren aber bloss von Fehlschlüssen her, wie Referent in seiner Note in Batt. G. nachgewiesen hat. Vi.

W. Fr. Schüler. Ueber das Axiom (den Satz) von der Winkelsumme im Dreieck. Pr. Realsch. Ansbach. Fock's Verlag. Leipzig. 51 S.

Den Kern dieser Abhandlung bildet folgender Versuch, das Parallelenaxiom zu beweisen. Gehen in einer Ebene drei Kreislinien durch einen Punkt O, so bilden die zwischen den drei anderen Schnittpunkten liegenden Bogen ein Dreieck, dessen Winkel am Punkte O wiederkehren und dort die Winkelsumme $2R$ geben. Der Verf. lässt nun O in den unendlich fernen Punkt der Ebene rücken, wodurch die Kreise in Gerade übergehen, während der Satz von der Winkelsumme erhalten bleibt. Der Punkt O kann aber als vereinigter Schnittpunkt der drei Kreislinien nur dann in unendliche Entfernung rücken, wenn man die Ebene als eine im Unendlichen geschlossene Kugelfläche betrachtet, und das unendlich ferne Dreieck der Gegenpunkte des gegebenen Kugeldreiecks als unendlich klein, d. h. als jenen Schnittpunkt O ansieht. Der Beweis des Axioms wird also nur unter gleichen Umständen in eine in unendlicher Entfernung befindliche unendlich kleine Figur verlegt, wodurch die principielle Schwierigkeit nicht beseitigt, sondern nur umgangen er-

scheint. Um diesen Beweis gruppiren sich Studien über mathematische Grundbegriffe, lineare Gleichungen und Dreieckstransversalen. S. 21 lesen wir: „Drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, nennt man ein Dreieck. Die Punkte selbst heissen Ecken". Auf dem Wege von dem allgemeinen Titel des Programms bis zum Separattitel der Abhandlung hat sich das „Axiom" in einen „Satz" verwandelt. Auch sonst noch machen sich Spuren der Eile bemerklich. Schg.

G. Tarry. Géométrie générale. La ligne droite.
Assoc. Franç. Limoges. XIX. 152-185.

In einer früheren von uns ausführlich besprochenen Arbeit desselben Titels (cf. F. d. M. XXI. 1889. 527) hatte Herr T. ein System aufgebaut, in welchem imaginäre Punkte und Gerade an wirklich existirenden Elementen zum Vorschein kamen. Seine Arbeit schloss mit Definitionen für Strecke und Winkel ab. In dieser neuen Schrift wird nun das System weiter ausgebaut und gezeigt, dass das neue Grössengebiet sich den Sätzen der Elementargeometrie anpasst. So bleiben, wie ausführlich gezeigt wird, die Congruenz- und Aehnlichkeitssätze, der verallgemeinerte Pythagoreische Lehrsatz und anderes mehr vollkommen erhalten. Hätten vielleicht diese Untersuchungen hie und da bedeutend abgekürzt werden können, so erscheint dem Referenten eine Ergänzung derselben nach einer anderen Seite hin unerlässlich. Zu der Erweiterung des Gebietes der reellen Punkte und Geraden hat doch nur der Umstand Veranlassung gegeben, dass gewisse Hauptconstructionsaufgaben im Gebiete der reellen Geraden und Punkte nicht immer lösbar sind. Es hätte also wenigstens in den wichtigsten Fällen gezeigt werden müssen, dass diesem Uebelstand durch die vorgenommene Erweiterung abgeholfen wird. So wäre z. B. zu zeigen, dass von einem rechtwinkligen Dreieck die eine Kathete und die Hypotenuse willkürlich gewählt werden können.

In einem zweiten Abschnitt der Arbeit wird der Begriff des Coordinatensystems eingeführt und die Gleichung der geraden

Linie aufgestellt. In einem dritten Abschnitt wird erörtert, was unter u^v zu verstehen ist, wenn u und v complexe Zahlen sind. Mit der Art, wie Herr T. hier die Worte gleich und identisch verwendet, kann sich der Referent nicht befreunden. E. K.

A. DEL RE. Escursioni matematiche diverse. Batt. G. XXVIII. 257-282.

Es ist der erste Abschnitt einer Sammlung geometrischer Sätze, die teils bewiesen, teils nur ausgesprochen sind, teils Anwendungen der Theorie der Operationen mit geometrischen Transformationen und teils Fortsetzungen früherer Arbeiten desselben Verfassers bilden. Aus den sieben Abschnitten, in welche der Aufsatz zerfällt, wählen wir einige Resultate aus.

I. „Zur Theorie der ebenen Polarsysteme". Geometrische Ableitung der Bedeutung des Verschwindens der Invariante $\Sigma\alpha_{ik}b_{ik}$ zweier ebenen Polarsysteme $\Sigma a_{ik}x_iy_k = 0$, $\Sigma b_{ik}x_iy_k = 0$, wo $|\alpha_{ik}|$ und $|a_{ik}|$ reciproke Determinanten sind.

II. „Zur Theorie der quadratischen Verwandtschaften im ternären Gebiete". Sätze, welche die eindeutigen ebenen Verwandtschaften erster und zweiter Ordnung betreffen; besondere Fälle derselben, welche in der metrischen Geometrie vorkommen.

III. „Zur Theorie der räumlichen Polarsysteme". Neuer Beweis der Möglichkeit, durch correlative Bündel die Ordnungsfläche eines beliebigen Polarsystems zu erzeugen. Zwei Sätze über die Transformation eines Nullsystems in sich selbst; diese Sätze sollen als Verallgemeinerungen bekannter Eigenschaften angesehen werden.

IV. „Zur Theorie der linearen und Cremona'schen räumlichen Verwandtschaften". Neue Bemerkungen über die Congruenzen, welche die gemeinschaftlichen Tangenten zweier in einem schiefen Vierseit sich schneidenden Quadriflächen bilden. Construction eindeutiger Verwandtschaften dritten Grades, deren Punktepaare auf die Strahlen einer Congruenz oder eines Complexes ersten Grades verteilt sind; ähnliche Constructionen der

Transformationen bei einem Grade $n > 3$; Ausdehnung auf einen beliebigen Raum.

V. „Zur Theorie einer gewissen Klasse von Flächen, welche die Ordnung $3n+2$, eine Doppelcurve $\{n(3n+2)\}^{\text{ter}}$ Ordnung und n^2 dreifache Punkte haben“. Jede Fläche dieser Klasse kann durch eine Congruenz (3,1) und ein Flächennetz n^{ter} Ordnung erzeugt werden, wenn die besagten Gebilde in projectiver Beziehung sind.

VI. „Zur Theorie der lineo-linearen Connexe von Ebenen und Geraden“. Ein Connex von Ebenen und Geraden im Raume ist eine solche Verwandtschaft unter Ebenen und Geraden des Raumes, dass jeder Ebene ein Liniencomplex m^{ten} Grades entspricht und jeder Geraden eine Fläche r^{ter} Klasse. Ist insbesondere $r = m = 1$, so hat man einen lineo-linearen Connex, welcher vom Verf. schon untersucht wurde (vergl. den Aufsatz „Il connesso lineo-lineare di piani e rette e le superficie polari congiunte rispetto ad esso e ad una superficie algebrica fondamentale“, Napoli 1889), und von welchem hier andere Eigenschaften analytisch bewiesen werden.

VII. „Zur Theorie der adjungirten Polarflächen“. Sind ein Connex C von Ebenen und Geraden, welcher durch die Zahlen m und r charakterisirt sei (m. s. oben), ferner eine Fläche F, welche die Ordnung n habe, und endlich ein Punkt A gegeben: so ist der Ort der Punkte P, welche die Eigenschaft haben, dass die Polarebene von P in Bezug auf F die Fläche berühre, die der Geraden PA in Bezug auf C entspricht, eine Fläche, welche die Ordnung $r(n-1)+m$ hat und den Namen „adjungirte Polarfläche“ (superficie polare congiunta) von A in Bezug auf C und F trägt (m. s. Rendiconto dell' Accademia di Napoli 1888). Auf den letzten Seiten der besprochenen Arbeit beschäftigt sich der Verf. mit dem besonderen Falle $r = m = 1$.

La.

J. Kofler. Die Axiome der Geometrie und die Lehre vom Raume. Brixen. 15 S.

N. J. Lobatscheffsky. Collection de ses oeuvres géométriques. Tome II: Ouvrages en langues française et allemande. Kasan.

Capitel 2.

Continuitätsbetrachtungen (Analysis situs, Topologie).

W. Dyck. Beiträge zur Analysis situs II. Math. Ann. XXXVII. 273-316.

Die auf die Charakteristiken geometrischer Mannigfaltigkeiten bezüglichen Untersuchungen, über welche zuletzt im Jahrgang 1888 dieses Jahrbuchs berichtet wurde, werden hier auf Mannigfaltigkeiten von n Dimensionen ausgedehnt. Auch hier wird zunächst trotz der notwendigen analytischen Formulirung eine geometrische Betrachtungsweise gewählt, während weiterhin durch die analog wie früher erfolgende Zurückführung der charakteristischen Zahlen auf Kronecker'sche Punktcharaktere auch die analytische Seite der Frage zu ihrem Rechte kommt. Von den drei Abschnitten der Arbeit behandelt der erste die Umformung und Abzählung der Elementar-Mannigfaltigkeiten nebst Definition der charakteristischen Zahlen. Erläutert werden die Abzählungen an den sphärischen und projectiven, sowie an einer besonders wichtigen Klasse von Mannigfaltigkeiten vierten Grades. — Im zweiten Abschnitt erfolgt die Zurückführung der Abzählungen auf Kronecker'sche Charakteristiken, unter Voraussetzung einfacher continuirlicher Entstehungs- und Umformungsprocesse der Gebilde, mit Hülfe der singulären Stellen. In Ermangelung kanonischer Formen für die mehrdimensionalen verschiedenen Mannigfaltigkeiten liefert jene Zurückführung bis jetzt den einzigen Beweis für die Unabhängigkeit der charakteristischen Zahlen von der Entstehungsweise dieser Gebilde. — Der dritte Abschnitt ist den quadratischen Mannigfaltigkeiten gewidmet, für welche die Bestimmung der Charakteristik besonders einfach

ausfällt. Ausblicke auf die Fortsetzung dieser Untersuchungen sind dem zweiten Abschnitt angefügt. Schg.

E. Bortolotti. Alcune osservazioni sulla definizione di connessione. Bologna Rend. 1889-90. 132-155.

Nach einer kurzen Erwähnung der älteren topologischen Untersuchungen, insbesondere der Euler'schen Studien über Polyeder, geht der Verfasser auf die Besprechung der Arbeiten von Riemann (Inauguraldissertation und Theorie der Abel'schen Functionen) und von Listing (Der Census räumlicher Complexe oder Verallgemeinerung der Euler'schen Sätze von den Polyedern, Gött. Abh. X, 1861) über den Zusammenhang der Flächen ein. Darauf bemerkt er, dass eine schärfere Charakterisirung der Flächen durch Angabe ihrer „Art" („specie") erhalten wird; die Art wird durch ein Zahlenpaar $[m, n]$ dargestellt, d. i. durch die Anzahl m der geschlossenen Linien, welche man auf der Fläche ziehen kann, ohne dieselbe zu zerstückeln, und durch die Anzahl n der Stücke, aus welchen die Begrenzung der Fläche besteht. Eine Fläche von der Art $[m, n]$ ist $(m+n)$-fach zusammenhängend. Der Begriff der Art behält seine Bedeutung auch für solche Flächen bei, welche die Anwendung der Riemann'schen Theorie des Zusammenhanges nicht zulassen, wie z. B. die einseitigen Flächen. Vi.

A. Tonelli. Sulla connessione degli spazi. Rom. Acc. L. Rend. (4) VI_1. 139-142.

Ein neuer Beweis des folgenden Satzes: Ist ein System von n t-dimensionalen geschlossenen Räumen gegeben, welche weder für sich noch zusammengenommen einen linear zusammenhängenden $(t+1)$-dimensionalen Raum einschliessen, welche aber zusammen mit jedem anderen t-dimensionalen geschlossenen Raume die vollständige Begrenzung eines linear zusammenhängenden $(t+1)$-dimensionalen Raumes bilden, ist ferner ein anderes System von m t-dimensionalen geschlossenen Räumen gegeben, welches dieselbe Eigenschaft besitzt, so ist $n=m$. Vi.

A. Bravais. Abhandlungen über symmetrische Polyeder (1849). Uebersetzt und in Gemeinschaft mit P. Groth herausgegeben von C. und E. Blasius (Ostwald's Klassiker 17). Leipzig. W. Engelmann. 50 S. 8°. Mit 1 Taf.

Enthält die Uebersetzung der Abhandlungen: „Note sur les polyèdres symétriques de la géométrie" und „Mémoire sur les polyèdres de forme symétrique". Zu Grunde gelegt ist die unter dem Titel Études cristallographiques 1866 in Paris erschienene Ausgabe von Bravais' krystallographischen Schriften.

In der kurz gehaltenen historischen Anmerkung wäre jedenfalls darauf hinzuweisen gewesen, dass Bravais die Aufgabe, alle überhaupt möglichen Typen von symmetrischen Polyedern aufzustellen, nicht erschöpfend gelöst hat. Sfs.

C. Reinhardt. Einleitung in die Theorie der Polyeder. Pr. Fürstenschule St. Afra. Meissen.

Die Arbeit giebt zum ersten Mal einige allgemeinere Kriterien dafür, wann ein Polyeder zu der von Möbius aufgedeckten Klasse der „einseitigen" Polyeder gehört. Die Resultate knüpfen sich im wesentlichen an solche Gebilde an, die sich aus den Polyederkanten zusammensetzen lassen.

Solcher Gebilde werden dreierlei betrachtet. Zu den von Möbius eingeführten beiden Arten von Kantencyklen, welche die auf einander folgenden Kanten einer Fläche oder Ecke darstellen, fügt der Verfasser eine dritte ihm eigentümliche Cyklengattung. Sie wird von solchen Kanten gebildet, von denen je zwei benachbarte derselben Fläche angehören, aber drei auf einander folgende weder derselben Fläche noch derselben Ecke. Diese Cyklen werden Kantenperioden genannt, sie stellen räumliche Polygone dar. Man kann ihnen natürlich auch Flächenperioden und Eckenperioden zur Seite stellen. Es wird gezeigt, wie man, wenn die Kantencyklen der einen Art gegeben sind, diejenigen, welche den anderen beiden Arten entsprechen, in bestimmter Weise ableiten kann.

In den Kantencyklen, welche die Ecken, Flächen und Kantenperioden darstellen, kommt jede Kante zweimal vor; je nachdem die Kante beidemal in verschiedener Richtung oder in gleicher Richtung durchlaufen wird, unterscheidet der Verfasser im Anschluss an Möbius zwischen Kanten erster und zweiter Art. Diese Unterscheidung trifft zwar keine bleibende Eigenschaft jeder einzelnen Kante, da man in jedem Kantencyklus die Reihenfolge umdrehen kann; es giebt aber einige Sätze allgemeiner Art über diese Kantenarten, die für jede Festsetzung gelten. Die einfachsten sind, dass von jeder Ecke keine oder eine gerade Zahl von Kanten zweiter Art ausgeht, und dass sämtliche Kanten zweiter Art in einen oder mehrere geschlossene Linienzüge zerfallen. Besonders wichtig ist, dass sich die Kantenunterscheidung auch zur Trennung der Polyeder benutzen lässt. Bei einem zweiseitigen Polyeder lassen sich nämlich die Kantencyklen, welche die Flächen und Ecken darstellen, immer so schreiben, dass sie keine Kanten zweiter Art enthalten, bei einem einseitigen Polyeder dagegen treten mindestens drei Kanten zweiter Art auf.

Ein weiteres Unterscheidungsmerkmal bilden die Kantenperioden. Jede Kantenperiode enthält mindestens vier Kanten. Ordnen sich alle k Kanten in dieselbe Periode, so besteht sie aus $2k$ Gliedern. Die Zahl der Glieder einer Kantenperiode kann auch ungerade sein; solche Kantenperioden müssen offenbar in gerader Zahl auftreten. Polyeder, die Kantenperioden von ungerader Gliederzahl enthalten, sind stets einseitig. Besitzt das Polyeder nur eine Kantenperiode, so ist es zweiseitig oder einseitig, je nachdem die geradstelligen (resp. ungeradstelligen) Glieder der Kantenperiode sämtlich verschieden sind, oder nicht. Besitzt das Polyeder endlich mehrere Kantenperioden von gerader Gliederzahl, so ist es zweiseitig, wenn die Kantenperioden so geschrieben werden können, dass ihre geradstelligen Glieder sämtlich verschieden sind; wenn nicht, so ist es einseitig. Sfs.

E. DE JONQUIÈRES. Note sur un point fondamental de la théorie des polyèdres. C. R. CX. 110-115.

Beweis, dass der Euler'sche Polyedersatz $e+f=k+2$ für jedes Polyeder gilt, welches sich durch successives Wegnehmen von Tetraedern mit ununterbrochenem Flächenzusammenhang auflösen lässt. Ringflächen, wie sie z. B. derjenige Körper zeigt, der durch Aufsetzen einer kleinen fünfseitigen Pyramide auf eine Würfelfläche entsteht, brauchen dabei nicht, wie der Verf. meint, in mehrere Polygone zerlegt zu werden; vielmehr genügt es zur Gültigkeit des Satzes, eine solche zweifach zusammenhängende Fläche durch einen beliebigen Schnitt von Ecke zu Ecke, der als Kante zählt, in eine einfach zusammenhängende zu verwandeln. Die wechselnden Ansichten über den Geltungsbereich des Satzes werden der Reihe nach vorgeführt und beleuchtet. Schg.

R. PERRIN. Sur une généralisation du théorème d'Euler relatif aux polyèdres. C. R. CX. 273-275.

Ausdehnung der Euler'schen Polyederformel auf polyedrale Körper von beliebigem Zusammenhang. Bezeichnet man als „Index" einer p-fach zusammenhängenden Fläche die Zahl $2-p$, resp. $3-p$, je nachdem es sich um eine ebene oder eine geschlossene Fläche handelt, so lautet die allgemeine Formel

$$\Sigma i+S=A+\Sigma J,$$

und zwar bedeuten S die Zahl der Ecken, A die Zahl der Kanten, J_1, J_2, ... die Indices der verschiedenen den Körper begrenzenden Oberflächen, i_1, i_2, ... die Indices der einzelnen Grenzflächen.

Für ein einfaches Euler'sches Polyeder ist Σi gleich der Zahl der Flächen und ΣJ gleich zwei.

Der Beweis stützt sich auf eine Formel, die der Verfasser in einer im Jahre 1882 erschienenen Arbeit über die Theorie der „Aspecte" aufgestellt hat (F. d. M. XIV. 152). Sfs.

V. Eberhard. Ein Satz aus der Topologie. Math. Ann. XXXVI. 121-133.

Die Arbeit enthält die Verallgemeinerung der von Steiner, Euler, Cauchy, Listing aufgestellten Sätze über polyedrale Raumteilungen auf Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung.

Es seien zunächst n in allgemeiner Lage vorausgesetzte lineare Mannigfaltigkeiten $(p-1)^{\text{ter}}$ Dimension gegeben

$$f_i(x) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ip}x_p + c_i = 0,$$

und es sei φ_h die Zahl der durch sie bestimmten Teilgebiete h^{ter} Dimension, d. h. die Zahl derjenigen Teilgebiete des p-dimensionalen Raumes, deren Elemente x in genau je $p-h$ Mannigfaltigkeiten $f_i(x) = 0$ liegen, so hat für jedes System solcher n Mannigfaltigkeiten der Ausdruck

$$\varphi_p - \varphi_{p-1} + \varphi_{p-2} - \cdots \pm \varphi_0$$

einen von p und n unabhängigen invarianten Zahlenwert, nämlich den Wert 1. Dieser Satz enthält die Erweiterung der Cauchy-Listing'schen Formeln. Beschränkt man sich auf ein solches Teilgebiet, welches das p-dimensionale Analogon eines einfachen Polyeders darstellt, so ergiebt sich die Verallgemeinerung der Euler'schen Formel; in einem beliebigen durch n lineare Mannigfaltigkeiten bestimmten p-dimensionalen Polyeder ergiebt die Zahl der Grenzgebiete unpaarer Dimension, vermindert um die Zahl der Grenzgebiete paarer Dimension den Wert 0 oder 2, je nachdem p gerade oder ungerade ist. Ferner erweist sich für solche Polyeder auch die Zahl der Grenzgebiete h^{ter} Dimension von der Lage der begrenzenden Mannigfaltigkeiten unabhängig, also constant für alle durch n $(p-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeiten begrenzte Polyeder. Im besondern folgt, dass ein von n Ebenen in allgemeiner Lage begrenztes Polyeder $3n-6$ Kanten und $2n-4$ Ecken besitzt.

Der erste der genannten Sätze kann auf beliebige Mannigfaltigkeiten ausgedehnt werden. Es fragt sich nur, wie man die Teilgebiete richtig zu definiren hat. Zu diesem Zweck nimmt man einen Punkt a beliebig, im übrigen aber fest an, und fasst, wenn x irgend ein Punkt ist, die Strecke

$$a_1 + \vartheta(x_1 - a_1), \ldots, a_p + \vartheta(x_p - a_p)$$

ins Auge. Je nachdem dieselbe der Mannigfaltigkeit $f_i(x) = 0$ in einer geraden oder ungeraden Zahl von Punkten begegnet, hat man den Punkt x auf derselben Seite von $f_i(x) = 0$ liegend anzunehmen, wie a, oder nicht. Hierdurch sind für jede Mannigfaltigkeit zwei verschiedene Seiten definirt. Für jeden Punkt x können daher in Bezug auf jede Mannigfaltigkeit p ihm eigentümliche Vorzeichen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p$ angegeben werden, und jeder Vorzeichencombination entspricht ein Teilgebiet. Zu beachten ist, dass die Teilgebiete aus getrennten Bestandteilen bestehen können.

Die aus getrennten Teilen bestehenden Teilgebiete kommen für den verallgemeinerten Satz in Betracht. Er lautet folgendermassen: Werden die n Mannigfaltigkeiten in eine bestimmte Reihe $f_1, f_2, \dots, f_n$ gebracht, wird ferner in dem System der $n-k$ Mannigfaltigkeiten $f_{k+1}, \dots, f_n$ die Anzahl $\chi_{h,n-k}$ derjenigen mehrteiligen h-dimensionalen Teilgebiete bestimmt, von deren getrennten Bestandteilen ein Teil ganz innerhalb, ein Teil ganz ausserhalb $f_k = 0$ liegt, und wird die Grösse

$$\chi_{p,n-k} - \chi_{p-1,n-k} + \cdots \pm \chi_{0,n-k} = X_{n-k}$$

gesetzt, so hat die Summe

$$X_{n-1} + X_{n-2} + \cdots + X_1$$

einen von der ursprünglichen Anordnung der n Mannigfaltigkeiten unabhängigen Betrag, nämlich den Wert

$$\varphi_p - \varphi_{p-1} + \cdots \pm \varphi_0 - 1.$$

Der Satz bleibt übrigens auch bei specieller Lage der Mannigfaltigkeiten gültig, ebenso der analoge Satz über lineare Mannigfaltigkeiten.

Die Beweise stützen sich meist auf den Schluss von n auf $n+1$. Sfs.

V. Eberhard. Eine Klassification der allgemeinen Ebenensysteme. J. für Math. CVI. 89-120.

Die von Steiner aufgeworfene Frage nach der durch n beliebige Ebenen bewirkten Teilung des Raumes nimmt der Verfasser nach der Richtung wieder auf, dass er insbesondere die

Structur des bezüglichen vollständigen n-Flachs ins Auge fasst. Werden die einfachsten Teilkörper als Primärkörper bezeichnet, so handelt es sich in der Hauptsache darum, ein System wohl definirter Primkörper aufzustellen, welches ein das n-Flach bestimmendes Fundamentalsystem repräsentirt. Dabei ist zu bemerken, dass im Gegensatz zu Steiner und im Einklang mit der projectiven Vorstellungsart auch Zusammenhang durch das Unendliche zugelassen wird.

Zu jedem Primärkörper sind dreierlei Arten anderer Primärkörper benachbart; sie haben mit ihm entweder eine Fläche oder eine Kante oder eine Ecke gemein und werden resp. Seitenkörper, Kantenkörper, Scheitelkörper genannt. Ihre Zahl beträgt, wenn der Ausgangskörper ein m-Flach ist, resp. m, $2m-4$, $3m-6$. An diese Begriffsbestimmungen knüpft der Verfasser zunächst folgende Frage: Umfasst das System der unmittelbaren und mittelbaren Seitenkörper, der Kantenkörper oder der Scheitelkörper eines Primärkörpers die Gesamtheit aller Primärkörper des n-Flachs oder nur einen Teil derselben? Dabei ist evident, dass die erste Frage zu bejahen ist.

Für die Beantwortung der anderen beiden Fragen ist es zweckmässig, zunächst die analoge Untersuchung in der Ebene durchzuführen, d. h. also das durch n beliebige Geraden bestimmte vollständige n-Seit ins Auge zu fassen. Für jedes derartige n-Seit bildet die Gesamtheit der Primärflächen bei ungeradem n ein einziges System von Scheitelflächen, bei geradem n dagegen zerfällt es in zwei einander ausschliessende Systeme von Scheitelflächen mit irgend zwei eigentlichen Seitenflächen als Grundflächen. Die vollständigen n-Seite sondern sich also in solche gerader und ungerader Ordnung. Die demselben Wert von n entsprechenden n-Seite werden nach ihrem Charakter, d. h. nach der durch sie bewirkten Zerlegung der Ebene in Einzelgebiete, unterschieden. Von Dreiseiten, Vierseiten, Fünfseiten giebt es nur je eine Art. Für $n \geqq 6$ giebt es mehrere Arten; sie sind durch das in ihnen enthaltene System von Primärdreiseiten bestimmt, von denen jedes vollständige n-Seit mindestens n besitzt. Als n-Seite vom einfachsten Charakter ergeben sich

sogenannte Normal-n-Seite; sie enthalten genau n Dreiseite und ausserdem noch $\frac{n.n-3}{2}$ Vierseite.

Für das System der Kantenkörper eines allgemeinen n-Flachs gilt ein analoger Satz wie für die Scheitelkörper des n-Seits; sie bilden, je nachdem n ungerade oder gerade ist, ein einziges oder zwei verschiedene Systeme. Nicht so einfach lauten die Sätze über die Scheitelkörper. Ist n zunächst gerade, so umfasst das vollständige System der Scheitelkörper alle Primärkörper, und zwar bildet der Grundkörper mit den Scheitelkörpern gerader Stellenzahl das eine System von Kantenkörpern, während das andere aus den Scheitelkörpern ungerader Stellenzahl besteht. Ist n ungerade, so ist zu unterscheiden, ob es mindestens eine unter den n Ebenen giebt von der Art, dass die übrigen $n-1$ Ebenen in ihr ein $(n-1)$-Seit bestimmen, in welchem jedes der beiden Systeme von Scheitelflächen Flächen ungerader Ordnung enthält oder nicht. Im ersten Fall bilden die sämtlichen Primärkörper ein einziges System von Scheitelkörpern. Im zweiten Fall dagegen, wenn also in jeder Ebene das durch die anderen $n-1$ Ebenen erzeugte vollständige n-Seit von der Art ist, dass das eine System von Scheitelflächen alle Flächen ungerader Ordnung, das andere nur Flächen gerader Ordnung enthält, besteht die Gesamtheit aller Primärkörper aus zwei sich ausschliessenden Systemen von Scheitelkörpern, und zwar so, dass in jedem beliebigen Durchschnittspunkte dreier Ebenen ein Körperpaar des ersten Systems und drei Körperpaare des zweiten Systems zusammenstossen. Die bezüglichen Ebenensysteme werden als solche erster und zweiter Species bezeichnet.

Was die Structur der n-Flache betrifft, so sind wiederum drei vorhanden, die invarianten Charakter besitzen, nämlich das Vierflach, das Fünfflach und das Sechsflach. Ist $n > 6$, so treten je nach der Lage der n Ebenen n-Flache verschiedenen Charakters auf. Für sie folgt, analog zu den Eigenschaften der n-Seite, dass das System ihrer Primärvierflache für ihren Charakter entscheidend ist, und zwar enthält jedes n-Flach mindestens n solcher Vierflache. Hiermit ist die Anfangs aufgewor-

fene Frage beantwortet. Im besonderen lässt sich wieder die Existenz von gewissen Normal-n-Flachen beweisen, die genau n Primärvierflache enthalten. Das vollständige Normal-n-Flach ungerader Ordnung ist ein Ebenensystem zweiter Species in dem oben genannten Sinn, und zwar gehören alle seine n Primärvierflache zu einem und demselben System von Scheitelkörpern.

Sfs.

E. Hess. Beiträge zur Theorie der räumlichen Configurationen. Ueber die Klein'sche Configuration (60_{15}, 30_6) und einige bemerkenswerte aus dieser ableitbare räumliche Configurationen. Nova Acta Leop.-Carol. Akad. LV. 97-167.

Die Arbeit enthält eine eingehende Erörterung der zahlreichen Configurationsgebilde, die aus den bekannten sechs Klein'schen Fundamentalcomplexen abgeleitet werden können. Es gelingt dem Verfasser, den von Klein und Veronese gefundenen Resultaten einige neue Theoreme hinzuzufügen.

Den Ausgangspunkt bildet, wie bei Veronese, ein System conjugirter desmischer Tetraeder, das reell vorausgesetzt wird. Construirt man auf jeder der 18 gemeinsamen Tetraederkanten dasjenige Punktepaar, das zu den beiden auf dieser Kante liegenden Punktepaaren harmonisch liegt, so bestimmen bekanntlich diese 18 Punktepaare die neun imaginären Tetraeder, die mit den ursprünglichen sechs Tetraedern die 15 Fundamentaltetraeder der Configuration darstellen. Die Ecken, Flächen und Kanten dieser Tetraeder bilden die Configuration 60_{15}, 30_6. Von den mit ihnen zusammenhängenden Gebilden werden die beiden von Klein nachgewiesenen Gruppen von resp. 320 und 360 Geraden besonders in Betracht gezogen; nämlich eine Gruppe von 320 Geraden f, deren jede drei Tetraederecken enthält und in drei Tetraederebenen liegt, und eine Gruppe von 360 Geraden g, die sämtlich durch je zwei Tetraederecken laufen und in zwei Tetraederebenen enthalten sind.

Bei der Betrachtung der Kummer'schen Configuration K

geht der Verfasser über die bisher geläufigen Gesichtspunkte hinaus, indem er eine aus der Configuration ableitbare Gruppe von 240 neuen Punkten und Ebenen in den Kreis der Untersuchung zieht. Die in jeder der 16 Configurationsebenen liegenden sechs Punkte bestimmen nämlich 15 Verbindungsgeraden, die sich ihrerseits — ausser in den sechs Punkten — noch in 45 anderen Punkten zu je zweien schneiden; und jeder dieser Punkte ist Schnitt von dreien der 16 Configurationsebenen. Ebenso ergeben sich durch jeden Configurationspunkt 45 neue Configurationsebenen, deren jede drei Configurationspunkte enthält. Die so bestimmten 240 Punkte und Ebenen zerfallen nun ihrerseits in 15 Gruppen von je 16 Punkten und Ebenen, deren jede eine Kummer'sche Configuration K' darstellt. Jede dieser Configurationen ist einem der 15 Fundamentaltetraeder zugeordnet und bildet mit der ursprünglichen Kummer'schen Configuration eine Configuration 32_9, 24_4. Die Gesamtheit der 240 Punkte und Ebenen bildet eine Configuration 240_{18}, 120_6, und zwar sind die 120 Geraden mit den 120 Configurationsgeraden der ursprünglichen Configuration identisch.

Es folgt eine genauere Betrachtung derjenigen speciellen Configuration, bei der die Kummer'sche Fläche ein sogenanntes Tetraedroid ist. Ihr Kennzeichen ist, dass jede Configurationsebene durch eine Ecke eines Fundamentaltetraeders geht, und zwar laufen die 16 Ebenen zu je vieren durch die vier Ecken eines und desselben Tetraeders. Die Ecken und Flächen dieses Tetraeders sind die zu je vieren zusammenfallenden Punkte und Ebenen einer der 15 obengenannten Configurationen K'. Dieser Specialfall kann nach Klein auch so definirt werden, dass in der ursprünglichen Kummer'schen Configuration K die in jeder Ebene liegenden sechs Punkte zugleich ein Pascal'sches und Brianchon'sches Sechseck bilden, und zwar ist der Brianchon'sche Punkt der bezügliche Tetraedereckpunkt. Weitere Specialfälle ergeben sich, wenn dieses Sechseck auf mehr als eine Art zugleich ein Brianchon'sches Sechseck darstellt. Es kann ein zweifach, dreifach, vierfach und sechsfach Brianchon'sches Sechseck sein; es reduciren sich alsdann resp. zwei, drei, vier, sechs

der Configuration K' auf je eines der 15 Fundamentaltetraeder. Hieran schliesst sich noch die Betrachtung zweier degenerirten Kummer'schen Configurationen. Die erste entspricht dem Fall, dass eine der Configurationsebenen durch eine der 30 Directrixgeraden der Configuration K hindurchgeht; alsdann artet die Kummer'sche Fläche bekanntlich in eine Linienfläche aus, und die Configuration reducirt sich auf die Figur 8_5, 2_4. Die zweite degenerirte Configuration ist eine Configuration 16_7, 8_4; sie entsteht, wenn die Configurationspunkte in eine der 10 Fundamentalflächen fallen, die Kummer'sche Fläche also in die doppeltzählende Fundamentalfläche ausartet.

Mit den eben genannten speciellen Configurationen steht eine Reihe bisher unbekannter Configurationen in enger Beziehung, die sich aus den oben genannten Nebengebilden der allgemeinen Klein'schen Configuration, nämlich den 320 Geraden f und den 360 Geraden g zusammensetzen. Von den Geraden f liegen in jeder Configurationsebene je 16. Durch jeden der 12 Configurationspunkte dieser Ebene gehen je vier; sie schneiden sich ausserdem zu je zweien in 48 Punkten, von denen jede Gerade je sechs enthält, und jeder dieser Punkte ist Schnitt von je sechs Configurationsebenen. Die Gesamtheit dieser 480 Punkte bildet eine Configuration 480_3, 320_6; sie zerfällt in 15 Gruppen von 2.16 Punkten, deren jede eine tetraedroidische Configuration K mit sechsfach Brianchon'schem Dreieck bildet. Von den 360 Geraden g liegen in jeder Ebene 12; sie bestimmen ausser den Configurationspunkten noch 64 weitere Punkte, durch welche je vier Configurationsebenen hindurchlaufen. Die so bestimmten 960 Punkte bilden eine Configuration 960_{27}, 360_8; sie zerfallen in 10 Gruppen von je 96 Punkten, die wieder sechs Systeme tetraedroidischer Configurationen K mit vierfach Brianchon'schem Sechseck darstellen.

Zum Schlusse werden diejenigen Raumfiguren erörtert, die von den in die Fundamentalflächen fallenden Punkten, den auf ihnen liegenden Geraden, resp. den eventuellen Berührungsebenen abgeleitet werden können. Auch für sie ergeben sich einige bisher unbekannte Eigenschaften. Sfs.

H. Maschke. Ueber eine merkwürdige Configuration gerader Linien im Raume. Math. Ann. XXXVI. 190-215.

Genügen die sieben Grössen $x_0, x_1, \dots, x_6$ den beiden Gleichungen

$$\Sigma x_i = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma x_i^2 = 0,$$

so können sie nach Herrn Klein als überzählige Liniencoordinaten betrachtet werden. Eine lineare Gleichung $\Sigma \alpha_i x_i = 0$ definirt einen linearen Complex; im besondern kann man auch hier je $x_0 = 0$, $x_1 = 0, \dots$ als die sieben Fundamentalcomplexe auffassen.

Unterwirft man die sieben Coordinaten x_i irgend einer Permutation, so geht aus einer Geraden im allgemeinen eine neue Gerade hervor. Aus einer beliebigen Geraden entsteht so durch die 7! Permutationen eine Configuration von 7! Geraden, die bei allen 7! Permutationen in sich übergeht; und zwar bedeutet jede gerade Vertauschung der x_i eine Collineation, jede ungerade dagegen eine dualistische Transformation des Raumes.

Der Verfasser untersucht im besondern eine specielle Configuration, und zwar diejenige, bei welcher jede Gerade von möglichst vielen anderen Geraden geschnitten wird. Analytisch ist sie so definirt, dass für jede ihrer Geraden zweimal drei Coordinaten einander gleich werden; abgesehen von einem Proportionalitätsfactor, haben die Coordinaten die Werte

$$3, \quad \lambda, \lambda, \lambda, \quad \mu, \mu, \mu,$$

wo λ und μ Wurzeln der Gleichung

$$z^2 + z + 2 = 0$$

bedeuten. Die Zahl dieser Geraden beträgt 140; jede von ihnen wird von 36 anderen Geraden geschnitten. Ausserdem giebt es 120 Configurationspunkte und Configurationsebenen; in jeder Ebene sind 21 Punkte und 7 Gerade enthalten, und durch jeden Punkt gehen 21 Ebenen und 7 Gerade hindurch. Die wichtigste Eigenschaft der Configuration besteht darin, dass sie einen einfachen Zusammenhang mit der Gruppe der Jacobi'schen Modulargleichung vom achten Grade besitzt. Die 120 Punkte lassen sich nämlich in 30 Octupel von je acht sondern, und die acht

Punkte jedes Octupels substituiren sich durch dieselbe Gruppe von 168 Substitutionen in einander, die in der Theorie der genannten Modulargleichungen auftritt. Sfs.

J. DE VRIES. Ueber die Configuration, welche durch die Aehnlichkeitspunkte und Aehnlichkeitsgeraden von n Kreisen der Ebene gebildet werden. Schlömilch Z. XXXV. 61-64.

Auf n von 1 ausgehenden Geraden nehme man die Punktepaare $1i$ und $(1i)$ willkürlich an und bezeichne mit ik und (ik) die Schnittpunkte der Geraden

$$1i,\ 1k;\ (1i)(1k) \text{ bez. } 1i(1k);\ (1i)1k,$$

so sind bei passender Wahl der Bezeichnungen die Punkte ik die äusseren, die Punkte (ik) die inneren Aehnlichkeitspunkte zweier bestimmten von n Kreisen. Man hat so die Configuration

$$\sigma_n = \left(2\binom{n}{2}_{2(n-2)},\ 4\binom{n}{3}_3\right)$$

unabhängig construirt, welche aus den Aehnlichkeitspunkten und Aehnlichkeitsaxen eines Systems von n Kreisen besteht. Im Anschluss an frühere Entwickelungen giebt nun Herr V. ohne Beweis eine Reihe von Eigenschaften der σ_n. E. K.

J. DE VRIES. Over eene groep van regelmatige vlakke configuraties en eenige daarmede samenhangende vlakke configuraties van punten en krommen. Amst. Versl. en Meded. (3) VII. 75-96.

J. DE VRIES. Nieuwe eigenschappen der harmonische configuratie $(24_3, 18_4)$. Amst. Versl. en Meded. (3) VII. 177-191.

J. DE VRIES. Cyclische veelhoeken op vlakke kubische krommen. Amst. Versl. en Meded. (3) VII. 430-461.

Diese Abhandlungen sind als Fortsetzungen früherer Studien des Verfassers über die ebenen Configurationen zu betrachten (siehe F. d. M. XXI. 1889. 538).

Die erste handelt von einer Gruppe von regelmässigen

ebenen Configurationen und einigen damit zusammenhängenden ebenen Configurationen von Punkten und Curven. Dabei werden auch die sogenannten Burmeister'schen Constellationen aufgenommen. Ferner werden noch mit Hülfe der Projectionsmethode einige zusammengesetzte Configurationen abgeleitet vermittelst des Schnittes einer K_2 mit einer Curve höheren Grades.

Die zweite Arbeit behandelt eingehender eine bestimmte Configuration und giebt eine Auseinandersetzung ihrer merkwürdigen Eigenschaften. Zunächst ist hier die Rede von der Lage der Eckpunkte auf Kegelschnitten und biquadratischen Curven.

Die dritte Abhandlung ist anderer Natur. Es handelt sich hier um cyklische Vielecke auf ebenen kubischen Curven, und der Verfasser benutzt dabei die von Bobek (Einleitung in die Theorie der elliptischen Functionen) entwickelten Beziehungen in θ-Functionen zwischen den homogenen Coordinaten der kubischen Curve. Bei den hier behandelten Polygonen geht jede Seite durch den Tangentialpunkt des vorhergehenden Eckpunktes, wobei sich ergiebt, dass die Ecken eines solchen cyklischen Polygons bekannten involutorischen Gruppen angehören. Der zweite Teil der Abhandlung enthält eine Untersuchung der cyklischen Polygone, für welche der Tangentialpunkt des i^{ten} Eckpunkts in der Geraden liegt, welche den $(i+2)^{\text{ten}}$ und den $(i+3)^{\text{ten}}$ Eckpunkt verbindet. Im dritten Teil kommen schliesslich die Fälle in Betracht, wenn der Tangentialpunkt auf der gegenüberstehenden Seite oder für eine gerade Anzahl Seiten auf einer der beiden gegenüberstehenden Seiten liegt.

G.

A. Schönflies. Ueber eine specielle Klasse von Configurationen auf den elliptischen Normalcurven n^{ter} Ordnung. Math. Ann. XXXV. 527-540.

Auf einer C_3 giebt es, wie der Verfasser gefunden hat, unendlich viele Configurationen, bestehend aus Cyklen von Polygonen, die einander gegenseitig ein- und umbeschrieben sind.

Dieser Satz wird hier auf elliptische Normalcurven $(n+1)^{ter}$ Ordnung im n-dimensionalen Raume (R_n) übertragen. Die Configuration m_{n+1} besteht aus m Räumen (R_{n-1}) und m Curvenpunkten, von denen jeder in $(n+1)$ Räumen liegt, während in jedem Raume $(n+1)$ Punkte liegen. Verschwindet die Determinante des Systems linearer Gleichungen, von welchen diese Configurationen abhängen, so reduciren sich dieselben auf Cyklen von n-dehnigen $(n+1)$-Ecken. Schg.

C. N. Little. Alternate ± knots of order 11. Edinb. Trans. XXXVI. 253-255.

Auf Veranlassung des Hrn. Tait hat der Verf. es unternommen, aus Hrn. Kirkman's Polyeder-Abbildungen die abwechselnden ± Knoten von elf Kreuzungen abzuleiten, indem er somit für die Ordnung 11 leistete, was Hr. Tait für die Ordnungen 8, 9, 10 ausgeführt hatte. Der Verf. findet 357 solcher ± Knoten mit 1595 Gestalten. Eine Gestalt jeder der Arten wird auf den beiden beigegebenen Tafeln abgebildet, d. h. die Tafeln weisen 357 Gestalten auf. Cly. (Lp.)

P. J. Heawood. Map-colour theorem. Quart. J. XXIV. 332-338.

Das „Map-colour theorem“ betrifft die den Kartographen erfahrungsgemäss geläufige Thatsache, dass genau vier Farben hinreichend und notwendig sind, um eine Gebietseinteilung einer Ebene so zu färben, dass zwei verschiedene Gebiete, die in einer Linie an einander grenzen, von verschiedener Farbe sind.

In Bd. II S. 193 des American Journ. (vergl. auch Baltzer, Leipz. Ber. 1885, F. d. M. XVII. 518. Red.) hat B. Kempe einen Beweis des Theorems mitgeteilt, der sich auf folgende Momente stützt. 1) In jeder mit vier Farben hergestellten Landkarte bilden die an einander grenzenden Gebiete, die nur zwei Farben zeigen, z. B. rot und grün, eine oder mehrere geschlossene Regionen. Vertauscht man in irgend einer dieser Regionen die Farben grün und rot, so entspricht die neue Färbung der Landkarte noch immer den Anforderungen des Satzes. 2) Stossen

in einem Punkte vier oder fünf Gebiete an einander, — mehr als fünf zusammenstossende Gebiete brauchen nicht berücksichtigt zu werden —, so kann man durch die eben genannten Vertauschungsprocesse eine solche Färbung der Landkarte erzielen, dass in diesen Gebieten nur drei verschiedene Farben auftreten. Bei vier zusammenstossenden Gebieten genügt eine Vertauschung, bei fünf dagegen sind in manchen Fällen zwei nötig, die zugleich vorgenommen werden müssen.

Der Verfasser führt ein Beispiel an, in dem das Kempe'sche Verfahren nicht zum Ziele führt. Es beruht darauf, dass die gleichzeitige Ausführung von zwei Farbenvertauschungen, von denen jede einzeln für sich zulässig ist, nicht immer möglich zu sein braucht.

Es wird dann weiter auch der Fall mehrfach zusammenhängender Flächen untersucht, sowie der Fall, dass die einzelnen Gebiete aus verschiedenen Teilen bestehen können. Ist n die Zahl der Gebiete, A_n die Durchschnittszahl der Grenzlinien für jedes Gebiet, so besteht im einfachen Fall die Gleichung

$$A_n = 6 - \frac{12}{n}.$$

Hierfür tritt, wenn jedes Gebiet in r getrennte Teile zerfällt, die Gleichung

$$rA_n = 6r\left(1 - \frac{2}{n}\right)$$

ein, und wenn es sich um eine k-fach zusammenhängende Fläche handelt, so ergeben sich die Gleichungen

$$A_n = 6\left(1 + \frac{k}{n}\right) \quad \text{resp.} \quad rA_n = 6r\left(1 + \frac{k}{n}\right).$$

Aus diesen Formeln lässt sich eine obere resp. untere Grenze für die Durchschnittszahl herleiten. Es findet sich, dass beide Zahlen — vom einfachen Fall abgesehen — identisch werden. Im einfachen Fall ergeben sich zunächst die Zahlen 4 und 6, die sich aber sofort durch 4 und 5 ersetzen lassen. Ob 4 wirklich die ausreichende Zahl, lässt der Verfasser in der Schwebe.

Sfs.

G. W. OEHLER. Ueber die Anwendung der Neumann'schen Flächenorte zur Darstellung der Formen des regelmässigen Systems. Pr. Gymn. Freiberg.

Capitel 3.

Elementare Geometrie (Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie).

W. SCHULZ. Die Harmonie in der Baukunst. Nachweisung der Proportionalität in den Bauwerken des griechischen Altertums. I. Teil. Mathematische Grundlagen des angewendeten Proportionirungssystems. Mit 60 Holzschnitten. Hannover-Linden. C. Manz. VIII u. 124 S. 4°.

Ausgehend von der Erklärung Vitruv's, dass die Harmonie eines Bauwerks durch die Proportion (analogia) bedingt sei, giebt der Verfasser eine Theorie, nach der die Proportionirung der griechischen Bauten sowohl im Ganzen als in den Teilen bewusst erfolgt sein soll. Hiernach ging die Proportionirung stets aus von dem grössten Rechteck (z. B. Grundrissrechteck). Die Anwendung der zehn griechischen Formen der Proportion auf die Rechteckselemente (Seiten, Seitendifferenz, Diagonale u. s. w.) liefert eine Anzahl von „harmonischen" Rechtecksformen, die in Beziehung zu den regulären Vielecken stehen, und unter denen das (dem regulären Fünfeck und Zehneck zugeordnete) „goldene" Rechteck eine hervorragende Rolle spielt. Für das Grundrechteck wurde eine solche harmonische Rechtecksform gewählt, deren Gestaltungsgesetz dann auf die weitere Gliederung des Baus übertragen wurde. Hinsichtlich der Beobachtungsthatsachen beschränkt sich der vorliegende I. Teil auf die Feststellung der harmonischen Grundrechtecksform bei fünf Beispielen

von dorischen Tempeln. Ein Urteil über die Theorie wird sich erst bilden lassen, nachdem die Fortsetzung des Werkes die Vervollständigung des Beweismaterials, namentlich auch hinsichtlich der Detailgliederung, geliefert haben wird. Hk.

P. G. Laurin. Lärobok i geometri. I. Plangeometri. 132 S. II. Rymdgeometri. 36 S. Lund.

Nach dem Vorworte ist dieses kurze, aber sehr inhaltreiche Lehrbuch ein Versuch, eine möglichst einfache und praktische Darstellung der Elemente der Geometrie zu geben, ohne die Gründlichkeit zu opfern; dies ist wohl so zu verstehen, dass nur wirklich evidente Thatsachen aus der Erfahrung ohne logische Vermittelung Aufnahme finden sollen (die rein logische Tiefe kommt mit Recht nicht in Frage). Das Werk giebt ausser den üblichen Sätzen der Planimetrie und Stereometrie auch die Anfangsgründe der Trigonometrie und der analytischen Geometrie nebst zahlreichen Uebungsbeispielen. Bdn.

H. Lorberg. Lehrbuch der Elementarmathematik für höhere Unterrichtsanstalten. Strassburg. Schmidt. VII + 152 S. 8°.

Ein kurz gefasster Leitfaden für das auf höhere Schulen gehörende Pensum der Elementarmathematik. Einige Verbesserungen sind bei der Parallelentheorie und bei der Rechnung mit Brüchen angebracht, insofern der Schüler auf diese Art etwas leichter, als es vielfach sonst geschieht, in die Sache eingeführt wird. Die äussere Ausstattung des Buches ist befriedigend. Mz.

F. Roese. Elementargeometrie. Wismar. Hinstorff. 98 S. 8°.

Das Buch enthält die Planimetrie von den Elementen an bis zur Ausmessung des Kreises einschliesslich. Die Darstellung ist klar, übersichtlich und ohne weitläufige Auseinandersetzungen, die dem Anfänger die Sache nur erschweren würden. An-

leitungen zur Lösung von Aufgaben, sowie Musteraufgaben sind beigegeben. Druck und Figuren sind sehr deutlich und gut.

Mz.

F. ROESE. Vorschule der Geometrie. Wismar. Eberhardt'sche Buchdruckerei. 16 S. 8°.

Die Fundamentalsätze und Aufgaben über Gerade und Kreis, wahrscheinlich zum Gebrauch beim propädeutischen Unterricht für seine Schüler vom Verfasser zusammengestellt. Lg.

Weitere Lehrbücher.

J. R. BOYMANN. Lehrbuch der Mathematik für Gymnasien, Realschulen und andere höhere Lehranstalten. 1. Teil. Geometrie der Ebene. 13. Aufl. besorgt von Vering. Düsseldorf. Schwann. VI + 206 S. 8°.

F. HALLER VON HALLERSTEIN. Lehrbuch der Elementar-Mathematik. Nach dem Lehrplan für das königlich preussische Kadettencorps bearbeitet von K. Strübing und B. Hülsen. I. Teil: Pensum der Quarta und Unter-Tertia. 5. Aufl. Berlin. Nauck & Co. VI + 184 S. 8°.

H. HEILERMANN u. J. DIEKMANN. Grundlehren der Trigonometrie und Stereometrie. 2. Teil: Stereometrie. Essen. Baedeker. III + 43 S. 8°.

H. HEILERMANN. Lehr- und Uebungsbuch für den Unterricht in der Mathematik an Gymnasien, Real- und Gewerbeschulen. I. Teil: Geometrie der Ebene. 4. Aufl. Frankfurt a. M. Jaeger. VI u. 163 S. 8°.

W. HOLLMANN. Lehrbuch der Geometrie. Neu bearbeitet von K. Holl. 2. Aufl. X u. 156 S. mit Figuren. Auflösungen zu den Aufgaben. 2. Aufl. 64 S. mit Figuren. Stuttgart. Kohlhammer. 8°.

H. KÖSTLER. Leitfaden der ebenen Geometrie für höhere Lehranstalten. 3. Heft. Die Aehnlichkeit der Figuren. 2. Aufl. Halle a. S. Nebert's Verlag. 64 S. Mit Holzschn. 8°.

F. KUNSTMANN. Planimetrie, Stereometrie und darstellende Geometrie. Gera. Nugel. 62 S. Mit 8 Taf. 8°.

W. LÁSKA. Lehrbuch der sphärischen Trigonometrie. Bearbeitet nach System Kleyer. Stuttgart. Jul. Maier. VIII + 187 S. Mit 55 Fig. 8°.

H. H. LÜBSEN. Ausführliches Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Ebene und körperliche Geometrie. 27. Aufl. Leipzig. Fr. Brandstetter. IV + 179 S. 8°.

H. H. LÜBSEN. Ausführliches Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. 15. Aufl. Leipzig. Brandstetter. IV u. 115 S. 8°.

H. C. E. MARTUS. Raumlehre für höhere Schulen. 1. Teil: Ebene Figuren. Bielefeld. Velhagen u. Klasing. VII + 159 S. 8°.

W. MINK. Lehrbuch der Geometrie als Leitfaden beim Unterrichte an höheren Lehranstalten. 8. Aufl., bearbeitet von E. Arndt. I. Teil: Planimetrie. VI + 96 S. II. Teil: Trigonometrie und Stereometrie. VI u. 126 S. Berlin. Wiegand u. Schotte. 8°.

Cav. F. DE MOČNIK. Trattato di geometria ad uso delle classi superiori delle scuole medie. Prima versione italiana di E. Manegazzi. Triest. Dase. VI + 300 S. 8°.

H. MÜLLER. Die Elementar-Planimetrie. Ein methodisches Lehrbuch für den Schul- und Selbstunterricht. Berlin. Springer. VIII + 187 S. 8°.

H. MÜLLER. Leitfaden zum Unterricht in der elementaren Mathematik, mit einer Sammlung von Aufgaben. 10. Aufl. Neu bearbeitet von M. Zwerger. 3 Abtlgn. 1. Arithmetik. VIII u 171 S. 2. 3. Geometrie und Trigonometrie. VIII u. 215 S. München. Lindauer. 8°.

H. MÜLLER. Die Elemente der ebenen Trigonometrie, mit einer Sammlung von Aufgaben und deren Lösungen. 2. Aufl. Metz. Scriba. VII u. 40 S. 8°.

K. Noack. Leitfaden der Elementar-Mathematik. 2. Aufl. Berlin. Springer. VII + 104 S. 8°.

A. Reich. Die Hauptlehren der Mathematik, mit einer Sammlung ausführlich gelöster und Anhängen ungelöster Aufgaben mit ihren Resultaten: 19.—24., 48.—49. Lieferung = 3. Heft: Stereometrie. Hanau. Reich. IV u. 132 S. 8°.

C. Rossmanith. Die Elemente der Geometrie in Verbindung mit dem geometrischen Zeichnen. Lehr- und Uebungsbuch für die II., III. u. IV. Realklasse. 2. Aufl. neu bearbeitet von K. Schober. Wien. Pichler's Wittwe u. Sohn. VIII + 204 S. Mit 1 Tafel. 8°.

J. Sachs. Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). 3. Teil: Die geometrischen Gebilde und Lagen-Veränderungen. Die einfachen Vielecke. Bearbeitet nach System Kleyer. Stuttgart. Jul. Maier. VIII u. 335 S. mit 343 Figuren. 8°.

P. Scholim. Lehrbuch der Geometrie für höhere Lehranstalten. 2 Teile. Kreuzburg. Thielmann. VIII u. 97, IV u. 65 S. 8°.

Th. Spieker. Lehrbuch der ebenen Geometrie mit Uebungsaufgaben für höhere Lehranstalten. 19. Aufl. Potsdam. Stein. IV u. 279 S. 8°.

C. Spitz. Lehrbuch der Stereometrie nebst einer Sammlung von 350 Uebungsaufgaben. Anhang: Die Resultate und Andeutungen zur Auflösung der Aufgaben. 6. Aufl. Leipzig. Winter. XII u. 201 u. 39 S. 8°.

Lacroix. Éléments de géométrie, suivis de notions sur les courbes usuelles. 24e éd. revue par Prouhet. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

H. Deighton. Elements of Euclid. Book I. New edition, revised. London. George Bell and Sons. [Nature XLII. 389.]

J. H. Morris. Practical plane and solid geometry. London. Longmans, Green, and Co. [Nature XLII. 636-637.]

V. MURER. Trattato elementare di trigonometria piana. Torino. Paravia.

TESTI. Corso di Matematiche speciali per gli Istituti Tecnici. Livorno. Giusti.

G. PEANO. Les propositions du cinquième livre d'Euclide réduites en formules. Mathesis X. 73-75.

E. BOURGEOIS. Eureka! ou supplément aux éléments de géométrie. Paris. 119 S. 8°.

G. HEINE und A. WESTRICK. Rechenbuch nebst Aufgaben zur ersten Einführung in die Geometrie für höhere und mittlere Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht. Münster. Aschendorff. VIII + 288 S. Mit Figuren. 8°.

K. JÜDT. Aufgaben aus der Stereometrie und Trigonometrie. Für Gymnasien und Realschulen bearbeitet. 4. Aufl. Ansbach. Seybold's Buchh. 63 S. 8°.

E. R. MÜLLER. Lehrbuch der planimetrischen Constructionsaufgaben, gelöst durch geometrische Analysis. I. Teil: Aufgaben, gelöst ohne Anwendung der Proportionenlehre. Bearbeitet nach System Kleyer. Stuttgart. Jul. Maier. XII u. 235 S. Mit 214 Figuren. 8°.

H. MÜLLER. Ueber den ersten planimetrischen Unterricht. Pr. Augusta-Gymn. Charlottenburg.

W. FUHRMANN. Synthetische Beweise planimetrischer Sätze. Berlin. L. Simion. XXIV u. 190 S. mit 14 Tafeln. 8°.

Das Buch soll Schülern und namentlich angehenden Lehrern als Wegweiser dienen beim Studium geometrischer Aufgaben und tritt daher in Concurrenz mit den Werken von Gandtner und Junghans, Lieber und v. Lühmann, Petersen u. a. Es unterscheidet sich aber von diesen dadurch, dass es neben den Aufgaben auch Lehrsätze bringt und planmässig in die Methodik des Beweisens einführt, indem es die Beweise anfangs ganz ausführlich, später gekürzt wiedergiebt und die Gründe anführt,

weshalb diese oder jene Schlussfolgerung gemacht, weshalb gewisse Hülfslinien gezogen wurden. Ferner enthält das Buch die wichtigsten der in den letzten Jahrzehnten gefundenen Sätze, die in der sogenannten Brocard'schen Geometrie ihren Abschluss finden, und welche kein Lehrer der Mathematik heute mehr bei Seite lassen kann. Verfasser steht ja unter den Bearbeitern dieses Gebietes mit in erster Reihe und weiss trotz der vorhandenen einschlägigen Arbeiten dem Gegenstande immer neue Seiten abzugewinnen. Ueber den Inhalt giebt ein ausführliches Register von 24 Seiten Auskunft. Die Hauptabschnitte enthalten: I. Angabe allgemeiner Ziele und Regeln; die verschiedenen Methoden und Hülfsmittel bei den Beweisen. II. Erläuterung der Beweismethoden durch Beispiele. Hierin ist besonders wichtig und interessant die dritte Unterabteilung, in welcher alle möglichen Hülfsmittel, trigonometrische Functionen, harmonische und projectivische Gebilde, zur Darstellung von zusammenhängenden Eigenschaften der Figuren benutzt werden. Der Anhang giebt I. die grundlegenden und elementaren Eigenschaften der Brocard'schen Geometrie, II. Sätze aus derselben, welche sich vorzugsweise auf bestimmte Kegelschnitte beziehen. Auf 14 Tafeln sind 81 sorgfältige Figuren beigegeben. Lg.

E. Schülke. Sammlung planimetrischer Aufgaben für den Gebrauch an höheren Schulen. Leipzig. B. G. Teubner. 54 S. 8°.

Die Sammlung ist methodisch geordnet und kann neben jedem Lehrbuch sehr gut benutzt werden. Sie enthält für alle Capitel die wichtigsten Aufgaben (im ganzen 890) bis zu denjenigen über ausgezeichnete Punkte, harmonische Teilung, Potenz, Aehnlichkeit, Polarität und solche, welche auf quadratische Gleichungen führen. Lg.

G. Noss. Zur Analysis planimetrischer Constructionen, welche die Anwendung der Proportionalität erfordern. Schluss der Abhandlung von 1889. Pr. (Nr. 182) Gymn. Jauer. 10 S. 4°. [Vergl F. d. M. XXI. 554.]

Es werden noch Dreiecksaufgaben gestellt und analysirt, bei denen 1) Aehnlichkeit oder der Apollonische Kreis in Anwendung kommt, 2) die Summe oder Differenz der Quadrate zweier Seiten, 3) das Product zweier Seiten, 4) der Inhalt gegeben ist. Lg.

F. J. BROCKMANN. Berichtigung eines Irrtums. Hoffmann Z. XXI. 343-344.

Der Lehrsatz Nr. 209 S. 50 aus Gandtner und Junghans „Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben", Teil II. Aufl. 2 (1870), ist in der dortigen Aufstellung irrtümlich. Lp.

G. DE LONGCHAMPS. Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

Vergl. F. d. M. XXI. 1889. 556. Die Schrift ist aus einer Anzahl von Artikeln entstanden, welche vom Verf. im J. de Math. élém. et spéc. erschienen sind. Eine Notiz „Un erratum à la géométrie de la règle" im J. de Math. spéc. (3) IV. 135-136 bezieht sich auf den Artikel „Quelques problèmes de géométrie pratique" von Bd. II (1888) desselben Journals. Lp.

O. HERWEG. Kleinigkeiten aus dem mathematischen Unterricht. Pr. (Nr. 39) Gymn. Neustadt i. Westpr. 14 S. 4°.

Mannigfache pädagogische Winke. Zuerst ist die Rede vom Lehrsatz, dem Voraussetzen und dem Behaupten, z. B. was die Voraussetzung eigentlich (didaktisch betrachtet) dem Schüler sein soll, nämlich die Angabe dessen, was dem Inhalte des Lehrsatzes gemäss der Reihe nach gezeichnet werden muss. Dann spricht der Verfasser vom Beweisen, und zwar erst vom directen, dann vom indirecten Beweisen; zuletzt vom Citatenschatz. So nennt er die Summe von Wahrheiten, die dem Mathematiker, der einen Satz beweisen oder eine Aufgabe lösen soll, zur Verfügung stehen muss. Beispiele mit den zugehörigen Figuren dienen zur Erläuterung des Gesagten. (Vergl. F. d. M. XVII. 1885. 48.) Mz.

A. Reum. Die Behandlung der geraden regelmässig vierseitigen Säule im Anschauungsunterricht. Pr. Städt. evang Realsch. Barmen-Wupperfeld 11 S. 4°.

Der Verfasser sagt zu Anfang dieser Arbeit, dass mancherlei Schriften erschienen seien, welche einen vorbereitenden geometrischen Unterricht bezwecken, dass aber meist nur das Zeichnen von Figuren mit Lineal und Zirkel angegeben oder gelehrt wird. Im Gegensatze hierzu wählt er einen Körper, und zwar einen ziemlich einfachen, um an ihm zu zeigen, dass stereometrische Betrachtungen vielleicht eine bessere Vorbereitung zur Geometrie abgeben als nur das Zeichnen planimetrischer Figuren.

Mz.

Moroff. Das Winkelfeld und die andern ebenen Felder. Pr. Hof. 21 S. 8°.

Das Programm teilt den Lehrgang des Verfassers für den Anfangs-Unterricht in der Planimetrie mit. Aus dem Titel geht schon hervor, dass der Winkel als das unendlich grosse ebene Feld definirt wird. Den Anhang bildet eine Einleitung in das Rechnen mit algebraischen Zahlen. F.

J. C. V. Hoffmann. Neues zur Lehre vom Winkel. Hoffmann Z. XXI. 248-260.

I. Welche Merkmale sind für die Bestimmung des Begriffs „Winkel“ wesentlich und also notwendig, und welche sind nebensächlich? II. Zur Entstehung des Winkels aus der parallelen Lage zweier Geraden. Die Begriffe „Neigung“ und „Abweichung“ als Wechselbegriffe (Correlata). Lp.

Adrian. Die Richtung einer geraden Linie als mathematische Grösse betrachtet. Ein Beitrag zur Elementargeometrie. Centralorg. Realsch. XVIII.

R. BRODIE. Prof. Kelland's problem on superposition. Edinb. Trans. XXXVI. 307-311.

Von einem gegebenen Quadrate wird ein Viertel abgeschnitten. Den übrig bleibenden Teil in vier derartige Teile zu zerschneiden, dass sie sich zu einem Quadrate zusammenfügen lassen (vgl. Edinb. Trans. XXI. 271). Andere Aufgaben derselben Art.

Cly. (Lp.)

J. CERNESSON. Sur le pentagone régulier. J. de Math. élém. (3) IV. 49-50.

Ist $AB = a$ Seite und AD die Diagonale des regulären Fünfecks im Kreise mit dem Radius r, so ist

$$AD^2 = \frac{a^2(4r^2-a^2)}{r^2} = \frac{a^2(3r^2-a^2)^2}{r^4},$$

indem AD einmal als Sehne des doppelten, einmal als Sehne des dreifachen zu a gehörigen Bogens erscheint. Die positiven Wurzeln der aus diesen Ausdrücken entstehenden Gleichung $a^4-5r^2a^2+5r^4=0$ sind die Seiten zweier regelmässigen Fünfecke.

Lg.

A. DENYS. Sur l'ennéagone régulier. Mathesis X. 162-164.

F. PATERNÒ. Una dimostrazione di corso intorno ai noti problemi sui poligoni regolari. Besso Per. mat. V. 178-180.

Beziehungen zwischen den Elementen der regelmässigen Polygone von n und $2n$ Seiten, welche einem Kreise ein- und umgeschrieben werden.

La.

A. D'ARZILLA FONSECA. Dois theoremas de Geometria. Coimbra Inst. XXXVIII.

Beweise der beiden Sätze: 1) Die Fusspunkte der Lote von einem Punkte des Umkreises eines Dreiecks auf die drei Seiten liegen in einer Geraden. 2) Die gemeinsamen Tangenten einer

Ellipse und eines concentrischen Kreises bilden mit den Axen der Ellipse gleiche Winkel. Tx. (Lp.)

R. Hoppe. Vielecke, deren Höhenlote sich in einem Punkte schneiden. Hoppe Arch. (2) VIII. 447-448.

Es werden einige Eigenschaften dieser Figuren abgeleitet und die Bedingungen ihrer Herstellung besprochen. Schg.

S. Catania. Teoremi sui triangoli isobaricentrici. Besso Per. mat. V. 106-112.

Ist in einer Ebene ein Dreieck gegeben, so giebt es ∞^4 Dreiecke, welche mit ihm den Schwerpunkt gemein haben. Verschiedene mit diesen Dreiecken gebildete Reihen wurden in einigen Aufsätzen der Herren Besso, Pesci und Panizza untersucht, welche in den vorigen Jahrgängen des Periodico veröffentlicht und im Jahrbuch seiner Zeit besprochen worden sind. In dem zu betrachtenden Aufsatze hat sich der Verfasser einige Fragen gestellt bezüglich der Anzahl solcher Dreiecke, die verschiedenen gegebenen Bedingungen genügen. Z. B. findet er: wenn zwei Ecken gegeben sind, so ist ein Dreieck bestimmt, welches denselben Schwerpunkt wie das gegebene Dreieck hat. Ferner beschäftigt er sich mit den Dreiecken, welche dem gegebenen eingeschrieben sind und denselben Schwerpunkt haben, und bemerkt, dass unter ihnen ein einziges dem gegebenen ähnlich ist, während sechs von ihnen die Seiten durch drei gegebene Punkte schicken. Endlich betrachtet er die Dreiecke, welche dem gegebenen umgeschrieben sind und denselben Schwerpunkt haben: jedes ist durch die Richtung einer Seite bestimmt, während sechs derselben eine Ecke auf einer gegebenen Geraden haben. — Diese und ähnliche Resultate werden vom Verfasser teils durch elementare Betrachtungen, teils aber durch Anwendung von Sätzen bewiesen, welche der projectiven Geometrie angehören. Werden diese letzteren von den Schülern verstanden, an welche der Periodico sich besonders wendet? La.

F. VIAGGI. Sulla similitudine di triangoli appartenenti a due serie. Batt. G. XXVIII. 113-131.

Es kann hier nur angegeben werden, von welcher Schar von Dreiecken in dieser Arbeit die Rede ist, da das Weitere einer Reproduction der Arbeit gleich käme. Es sei also ein Dreieck ABC gegeben; auf den Seiten AB, BC, CA sind Punkte resp. C', A', B' so angenommen, dass

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{CB'}{B'A} = \frac{AC'}{C'B} = m,$$

wo m eine positive oder negative Zahl bedeutet. Zuerst wird gezeigt, dass, solange m reell ist, AA' und BB' nicht parallel sein können, ebenso wenig BB' und CC', ferner AA' und CC'. Es wird nun das Dreieck betrachtet und auf einfache Weise construirt, dessen Seiten gleich AA', BB', CC' sind. Von diesem Dreiecke, das $A_1B_1C_1$ sei, wird ganz auf dieselbe Weise ein neues $A_2B_2C_2$ abgeleitet, wie $A_1B_1C_1$ aus ABC abgeleitet wurde; ferner aus $A_2B_2C_2$ ebenso wieder ein neues $A_3B_3C_3$ u. s. f. Man erhält so eine ganze Schar von Dreiecken, die aus ABC abgeleitet sind. Hat das erste die Seiten a, b, c (also $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$) und das folgende $A_1B_1C_1$ die Seiten a_1, b_1, c_1; das nächste $A_2B_2C_2$ die Seiten a_2, b_2, c_2 etc., so werden die Formeln bewiesen:

$$a_k^2 = -\frac{1}{(1+m)^{2k}}(P_k a^2 + Q_k b^2 + R_k c^2),$$

$$b_k^2 \doteq -\frac{1}{(1+m)^{2k}}(R_k a^2 + P_k b^2 + Q_k c^2),$$

$$c_k^2 = -\frac{1}{(1+m)^{2k}}(Q_k a^2 + R_k b^2 + P_k c^2),$$

und für P_k, Q_k, R_k hat man die Recursionsformeln:

$$P_k = -mP_{k-1} + (1+m)Q_{k-1} + m(1+m)R_{k-1},$$
$$Q_k = m(1+m)P_{k-1} - mQ_{k-1} + (1+m)R_{k-1},$$
$$R_k = (1+m)P_{k-1} + m(1+m)Q_{k-1} - mR_{k-1}$$

mit den Anfangswerten:

$$P_1 = m, \quad Q_1 = -m(1+m), \quad R_1 = -(1+m).$$

So treten eigentümliche Functionen von m auf, die näher studirt

werden; mit diesen und noch anderen von ihnen abhängenden Functionen, sowie mit den definirten Dreiecken beschäftigt sich dann die Abhandlung. Mz.

F. R. J. Hervey. Solution of question 10015. Ed. Times LII. 106-107.

Die in den Schnittpunkten der Seiten eines Dreiecks *A* mit einer Transversale *T* errichteten Lote zu den Seiten bilden ein zweites Dreieck *B*. Es schneiden sich die Umkreise *X*, *Y* von *A* und *B* rechtwinklig; der Abstand zwischen ihren Höhenschnitten wird durch *T* gehälftet. Einem gegebenen Orthogonalkreise *Y* entsprechen die Transversalen *T*, *S*. Beschreibt der Mittelpunkt *P* von *Y* einen Kreis vom Radius *k* um den von *X*, so umhüllen die zugehörigen Transversalen eine dreispitzige Hypocykloide. Variirt *k*, so ist der Ort des Mittelpunktes der letzteren die Mittelsenkrechte des Umkreismittelpunktes und des Höhenschnittes von *A*. Beschreibt *P* eine beliebige Curve, so beschreibt der Schnittpunkt von *S* und *T* eine Orthogonal-Projection einer ähnlichen Curve. Lp.

R. E. Allardice. On some properties of the quadrilateral. Edinb. Math. S. Proc. VIII. 27-29.

Drei Beweise des Satzes: Wenn *L* und *M* die Seiten *AB*, *DC* eines Vierecks *ABCD* in demselben Verhältnisse $l:m$ teilen, so ist der Ort eines Punktes *P*, der *LM* in einem gegebenen Verhältnisse teilt, eine Gerade. Dieser Satz wird dann benutzt, um zu zeigen, dass die Mittelpunkte der drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits in einer Geraden liegen. Gbs. (Lp.)

A. Mannheim, W. J. Greenstreet, G. Darboux. Solution of question 10145. Ed. Times LII. 48.

E. Catalan. Sur un théorème de M. Mannheim. Rom. Acc. P. d. N. L. Mem. VI. 223-233.

Eine von Hrn. Mannheim in den Educational Times zur Lösung

gestellte Aufgabe wird in die Form gebracht: Sind A', B', C' drei Punkte auf den Seiten BC, CA, AB eines Dreiecks ABC, so gehen die drei Kreise $B'C'A$, $C'A'B$, $A'B'C$ durch einen Punkt R. Zieht man ferner durch einen Punkt M die Sehnen AME, BMF, CMG, dann liegen die fünf Punkte R, M, E, F, G auf einem Kreise. An den Beweis des Satzes schliessen sich Bemerkungen, Berechnung und Construction der wichtigsten Linien und Winkel der Figur. Lg.

M. Fouché. Remarques sur la méthode des périmètres pour calculer le nombre π. S. M. F. Bull. XVIII. 135-138.

Bedeutet p_n den Umfang eines regelmässigen n-Ecks, welches einem Kreise mit dem Radius $r = 1$ eingeschrieben ist, so ist p_{2n} durch die Grössen $\alpha_n = \sqrt{1+\frac{p_n}{2n}}$ und $\beta_n = \sqrt{1-\frac{p_n}{2n}}$ in der Form darstellbar $\frac{1}{p_{2n}} = \frac{1}{p_n}\frac{\alpha_n+\beta_n}{2}$, der Umfang P_n des umgeschriebenen regelmässigen n-Ecks ist aber mit ihnen durch die Gleichung verbunden $\frac{1}{P_n} = \frac{1}{p_n}\alpha_n\beta_n$. Stellt man α_{2n} und β_{2n} in ihrem Zusammenhange mit α_n und β_n dar, so folgt

$$\alpha_{2n} = \sqrt{1+\frac{\alpha_n-\beta_n}{2}};\quad \beta_{2n} = \sqrt{1-\frac{\alpha_n-\beta_n}{2}},$$

und mit Hülfe dieser recurrenten Formeln lässt sich zur Berechnung von π die Formel aufstellen

$$\frac{1}{2\pi} = \lim \frac{1}{p_n}\cdot\frac{\alpha_n+\beta_n}{2}\cdot\frac{\alpha_{2n}+\beta_{2n}}{2}\cdot\frac{\alpha_{4n}+\beta_{4n}}{2}\cdots.$$

Für $n=2$ ist $p_2 = 4$; $\alpha_2 = \sqrt{2}$; $\beta_2 = 0$, und für $\frac{\pi}{2}$ erfolgt die Darstellung (vergl. Seidel, J. für Math. LXXIII. 273. Red.):

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots.$$

Schn.

E. Lakenmacher. Verwandlung einer Kreisfläche in ein annähernd gleich grosses Quadrat. Hoppe Arch. (2) IX. 214-215.

Der Verfasser giebt folgende Construction an: In einem Kreise sei *ab* Durchmesser, *c* Mitte des Kreises, *cd* der zu *ab* senkrechte Radius, *e* Mitte von *cd*, *f* Mitte von *ed*; *af* treffe den Kreis ausser in *a* noch in *i*, und *ae* treffe den Kreis ausser in *a* noch in *y*. Von *i* und *y* fälle man die Lote *ih* und *yl* auf *ab*, und es sei *k* Mitte von *ch*. Zieht man dann *dy* und trägt von *k* aus auf *ab* nach *b* hin die Strecke $ks = dy$ ab, so ist *as* die Seite des dem Kreise an Fläche annähernd gleichen Quadrates. Die Annäherung wird ziffernmässig bestimmt. Mz.

Holzhey. Construction zur möglichst genauen Bestimmung des Umfanges und Inhaltes eines gegebenen Kreises. W. Oest. Ing. u. Arch. XIV. 224. (1889.)

AOB und *DOC* seien zwei sich senkrecht schneidende Durchmesser eines Kreises. Ein mit *CO* um *C* beschriebener Kreis möge den ersteren in *F* und *E* schneiden, die Gerade *FE* den Radius *OC* in *L*. Ein mit *CL* um *C* beschriebener Kreis schneide den ursprünglichen Kreis in *H* und *G*, die gerade Verbindungslinie *HG* soll *OC* in *J* schneiden. In *J* errichte man ein Lot zur Verbindungslinie *AJ*, welches *AB* in *K* schneidet. Diesen Punkt *K* verbinde man mit dem Schnitte *M* der Tangente in *A* und der Linie *FE*; in *M* errichte man ein Lot zu *KM*, welches *AB* in *N* trifft. Nun verlängere man *OB* über *B* hinaus um sich selbst bis *P*. Dann ist nach bekannten elementar geometrischen Sätzen

$$PN = \frac{355}{113} r = 3{,}141\,59292 r,$$

d. h. sehr angenähert der Umfang des Halbkreises.

Der Inhalt wird durch Umwandlung des Rechtecks aus *PN* und *r* in ein Quadrat gewonnen. F. K.

A. E. Pellet. Division d'un arc de cercle dans un rapport donné, au moyen de la règle et du compas. J. de Math. spéc. (3) IV. 101-103.

Vergl. F. d. M. XIX. 1887. 543, XX. 1888. 544.

A. E. Pellet. Rectification approximative de l'arc de cercle. J. de Math. spéc. (3) IV. 121-122.

Benutzung der Formel von Nicolaus Cusanus (vergl. S. 48 dieses Bandes) für den angegebenen Zweck. Lp.

J. Bridge. On a problem in practical geometry. Nature XLII. 415.

Eine angenäherte Construction, um einen Bogen und seine Sehne (oder Tangente) in proportionale Stücke zu teilen. Lp.

G. Pesci. Dei circoli circoscritti ai triangoli formati da n rette poste in un piano. Besso Per. mat. V. 120-127.

Vier beliebige Geraden einer Ebene bestimmen vier Dreiecke; die Peripherien der bezüglichen Umkreise gehen, wie bekannt, durch denselben Punkt, während ihre Mittelpunkte auf einem anderen Kreise liegen. Daher werden durch vier beliebige Geraden einer Ebene ein Punkt und ein Kreis bestimmt, in Folge dessen durch fünf beliebige Geraden einer Ebene fünf Punkte und fünf Kreise. Jene liegen auf einem neuen Kreise, und diese gehen durch denselben Punkt; daher bestimmen auch fünf beliebige Geraden einer Ebene einen Punkt und einen Kreis. Fährt man so fort, so schliesst man endlich, dass n beliebige Geraden einer Ebene n durch denselben Punkt gehende Kreise und eben soviele auf einem Kreise liegende Punkte bestimmen (vgl. Clifford, Math. Papers S. 38ff.). Vermöge einer geometrischen, durch Einfachheit und Eleganz ausgezeichneten Methode beweist der Verf. diesen letzten Satz für

den Fall $n = 4$ und dehnt seine Resultate auf ein beliebiges n durch das Bernoulli'sche Verfahren der vollkommenen Induction aus. Er schliesst seinen Aufsatz mit der Bemerkung, dass im Falle $n = 4$, und nur in diesem, die Peripherie des in Frage stehenden Kreises durch den besagten Punkt geht. La.

A. MANNHEIM. Note de géométrie à propos d'un théorème de M. Stewart. Mess. (2) XIX. 178-180.

Indem der Verf. durch reciproke Radien die Formel umwandelt, welche das Verhältnis der Diagonalen eines Kreisvierecks durch seine Seiten ausdrückt, erhält er für das Kreisviereck $ABCD$ und einen beliebigen Punkt O im Raume die Beziehung:

$$AB.BC.AC.(OD)^2 + AC.CD.AD.(OB^2) = AB.BD.AD.(OC)^2 + BC.CD.BD.(OA)^2.$$

Dieselbe enthält mehrere bekannte Sätze, unter ihnen den Stewart'schen, dass für drei Punkte A, B, C einer Geraden und einen beliebigen Punkt O die Gleichung gilt:

$$AB.BC.AC + AC.(OB)^2 = AB.(OC)^2 + BC.(OA)^2.$$

Der Verf. beweist auch, dass, wenn A, B, O drei beliebig gegebene Punkte sind, der Ort eines Punktes C, für welchen

$$\frac{\sin COA}{OA.OC} + \frac{\sin BOC}{OB.OC} = \text{const.},$$

ein Kreis ist, der den Umkreis des Dreiecks ABO in O berührt.

Glr. (Lp.)

G. DE LONGCHAMPS. Sur les triangles caractérisés. J. de Math. élém. (3) IV. 203, 234, 252.

Ein Dreieck mit den Seiten a, b, c heisst hier charakterisirt durch die Grössen α, β, γ, wenn die Gleichung $\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 = 0$ erfüllt ist; so ist das rechtwinklige durch 1, —1, —1, das gleichschenklige durch 0, 1, —1 charakterisirt. Es werden allgemeine Sätze über diese Art von Dreiecken aufgestellt mit Benutzung der trigonometrischen Functionen der Dreieckswinkel.

Lg.

E. LAUVERNAY. Sur un problème de géométrie. J. de Math. élém. (3) IV. 265-269.

Die Ecken A, B, C eines Dreiecks sind Mittelpunkte dreier Kreise mit den Radien $s-a$, $s-b$, $s-c$, welche sich gegenseitig berühren; dann sind die Radien r_1 und r_2 der Kreise, welche diese drei Kreise berühren, Wurzeln der Gleichung

$$(T^2-16\Delta^2)p^2x^2-4pT\Delta^2x+4\Delta^4 = 0,$$

wo $T = a(s-a)+b(s-b)+c(s-c)$ und Δ der Inhalt des Dreiecks ist, und die Centrale ist bestimmt durch $d^2=(r_1-r_2)^2+16r_1r_2$. Aehnliche Gleichungen erhält man für die Kreise mit den Radien $s, s-a, s-b$; $s, s-a, s-c$ und $s, s-b, s-c$. Die vier Centralen dieser vier Kreispaare schneiden sich im Gegenpunkte des Höhenpunkts in Bezug auf das Umkreiscentrum. Lg.

E. VIGARIÉ. Le 176[me] porisme d'Euclide et ses conséquences. J. de Math. élém. (3) IV. 83-86.

Der betreffende Satz von Euklid lässt sich kurz so aussprechen: „Dreht sich der eine Schenkel eines gleichschenkligen Kreistrapezes mit constantem Basiswinkel ω um einen festen Punkt Ω, so dreht sich auch der andere um einen festen Punkt Ω'“. Er kann dann als Ausgangspunkt für die Brocard'schen Sätze vom Dreieck dienen. Dies wird hier gezeigt. S. 151 giebt E. Lauvernay einen einfachen Beweis des obigen Satzes. Lg.

P. J. HELWIG J. AZ. De hoektransversalen van den vlakken driehoek. Nieuw Archief. XVII. 217-228.

Enthält einige Betrachtungen über die Ecktransversalen, d. h. über die durch die Eckpunkte eines Dreiecks gezogenen Transversalen. Dabei wird die Ecktransversale als von der n^{ten} Ordnung bezeichnet, wenn sie die gegenüberliegende Seite in Abschnitte teilt, die der n^{ten} Potenz der anliegenden Seiten proportional sind. Auf analytischem Wege werden viele Eigenschaften dieser Ecktransversalen abgeleitet. G.

E. LAUVERNAY. Théorèmes sur les transversales. J. de Math. élém. (3) IV. 11-14, 51-53.

Sind a, b, c die Seiten und a', b', c' die Lote von einem Punkte O auf dieselben; α, β, γ die Abschnitte einer durch O gezogenen Geraden zwischen O und den Seiten; a'', b'', c'' die Abstände der Ecken von den Transversalen (alle Strecken algebraisch genommen), so sind die Formeln

$$\frac{aa'}{\alpha}+\frac{bb'}{\beta}+\frac{cc'}{\gamma}=0 \quad \text{und} \quad \frac{aa'}{b''c''}+\frac{bb'}{c''a''}+\frac{cc'}{a''b''}=0$$

allgemein gültig, lassen sich auf jedes beliebige Vieleck ausdehnen und erhalten einfache Form für besondere Lagen von O. Herr Bénézech giebt S. 53-55 eine Verallgemeinerung des Satzes in anderer Form. Lg.

H. NAWRATH. Das Mittendreieck. Pr. (No. 190) Kath. Gymn. Neisse. 19 S. mit 3 Figurentafeln.

Im wesentlichen eine Bearbeitung der bei Spieker ohne Beweis angeführten Aufgaben und Lehrsätze, welche sich auf den dem Mittendreieck eingeschriebenen Kreis beziehen. Die Arbeit ist durch die Litteratur der letzten 10 Jahre überholt, kann aber den Schülern des Verfassers, für welche sie hauptsächlich geschrieben ist, immer noch gute Dienste leisten. Lg.

M. MILNE. Le théorème de Feuerbach. J. de Math. élém. (3) IV. 3-5.

Der sehr einfache und elegante Beweis stützt sich auf den Hülfssatz: Es sei NB eine feste Tangente an einen Kreis K. Durch einen äusseren Punkt D werde eine Gerade gezogen, welche AB in E trifft, und auf derselben ein Punkt M so gewählt, dass $DE.DM$ gleich der Potenz von D in Bezug auf K ist. Dann ist der Ort für M ein Kreis, welcher durch D geht und K berührt. In der Anwendung ist K der Inkreis, D die Mitte der Dreiecksseite BC, die feste Tangente die Symmetrische zu BC in Bezug auf die Winkelhalbirende AJ, M die Mitte von AC oder BC. Lg.

E. Lauvernay. Le théorème de Feuerbach. J. de Math. élém. (3) IV. 193-195.

Die Gleichung zwischen der Centrale des Feuerbach'schen und des Inkreises und den zugehörigen Radien $NJ = \frac{1}{2}r - \varrho$ wird bewiesen mit geschickter Benutzung des Dreiecks NJE, wo E der Berührungspunkt des Inkreises mit einer Dreiecksseite ist. Lg.

J. Casey. Géométrie élémentaire récente. Traduit de l'anglais par Fr. Falisse; avec une préface de M. J. Neuberg. Gand, Hoste. Paris, Gauthier-Villars et Fils. 80 S. gr. 8°.

Dieses Bändchen enthält die Uebersetzung des Ergänzungscapitels zu „A sequel to Euclid" von Casey, welche in Mathesis IX. 5-70 (F. d. M. XXI. 1889. 565) zuerst veröffentlicht ist, nebst einem Anhange, der gleichfalls in Mathesis X (1890) schon erschienen ist. Der Inhalt ist in F. d. M. XXI. 565 angegeben. Die Vorrede hebt die hauptsächlichen Förderer der neueren Geometrie mit Ausnahme von Hrn. Neuberg hervor. Mn. (Lp.)

J. Casey. Complément de la théorie des polygones harmoniques. Mathesis X. 96-114.

Nachtrag zur „neueren elementaren Geometrie" in Mathesis IX. 5-70 (F. d. M. XXI. 1889. 565). Mn.

A. Gob. Sur la droite et le cercle d'Euler. Liège Mém. V. 7 S.

A. Gob. Sur les cercles de Neuberg. Liège Mém. V. 14 S.

Beiträge zur neueren Dreiecksgeometrie, deren kurze Wiedergabe schwierig ist. Mn. (Lp.)

E. Vigarié, W. S. McCay. Solution of question 10239. Ed. Times LII. 73-74.

Ist G der Schwerpunkt eines Dreiecks ABC, und schneiden die Geraden AG, BG, CG den Umkreis bezw. in A', B', C', so liegt der Lemoine'sche Punkt des Dreiecks $A'B'C'$ auf dem Durchmesser, welcher durch den Steiner'schen und den Tarry'schen Punkt des Dreiecks ABC geht. Lp.

A. Boutin. Exercices. J. de Math. spéc. (3) IV. 41-42.

A. Boutin. Problèmes sur le triangle. Ibid. 265-269.

J. Neuberg. Note sur l'article précédent. Ibid. 269-270.

Aufgaben aus der neueren Dreiecksgeometrie. Lp.

R. Tucker. Isoscelian hexagrams. London M. S. Proc. XXI. 4-29.

Die in Rede stehenden Sechsecke werden erzeugt, indem man, von einem Punkte L auf der Seite BC eines Dreiecks ABC ausgehend, $\angle BLN' = B$, $CLM' = C$, $M'NA = A$, $BNL' = B$, $L'MC = C$ macht. L, L', M, M', N, N' liegen dann auf einem Kreise und bilden in dieser Reihenfolge ein positives, in der Folge $LM'NL'MN'$ ein negatives Sechseck. Ueber beide Arten werden besondere Untersuchungen angestellt, deren wichtigste Resultate folgende sind: $L'N$ und $M'L$ mögen sich in A'' schneiden etc., dann gehen AA'', BB'', CC'' durch einen Punkt T. Ist A' der Schnittpunkt von LN' und ML' etc., dann gehen auch AA', BB', CC' durch T und ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$ sind perspectivisch. $L'M'N'$ ist ähnlich ABC, LMN ähnlich dem Fusspunktdreieck von ABC. Der Schnittpunkt P der Winkelhalbirenden von $AM'N$ und $AN'M$ liegt auf dem Umkreis des Sechsecks und auf der Seite B_1C_1 des Dreiecks $A_1B_1C_1$, dessen Seiten die Mittellote der oberen Höhenabschnitte in ABC sind; Entsprechendes gilt für die ähnlich construirten Punkte P, Q, R. PL, QM, RN gehen durch den Höhenpunkt H; H ist auch Höhenpunkt von PQR, Inkreiscentrum von LMN und Umkreiscentrum von $A_1B_1C_1$. — Es folgen Ausdrücke für Längen, Winkel und Umhüllungscurven verschiedener Linien der Figur. Lg.

J. GRIFFITHS. Notes in connexion with the papers on „Isoscelians" and on „Isoscelian hexagrams". Lond. M. S. Proc. XXI. 453-456.

Noten zu den bezüglichen Aufsätzen des Herrn R. Tucker in den Bänden XIX und XXI der Proc. (Vgl. F. d. M. XX. 1889. 554 u. das vorangehende Referat.) Lp.

W. FUHRMANN. Sur un nouveau cercle associé à un triangle. Mathesis X. 105-111.

Die Winkelhälftenden eines Dreiecks *ABC* treffen den Umkreis in drei Punkten, deren Symmetralpunkte in Bezug auf die entsprechenden Seiten A_2, B_2, C_2 sind. Der Umkreis von $A_2B_2C_2$ hat zahlreiche, von Herrn Fuhrmann ermittelte Eigenschaften.

Mn. (Lp.)

A. POULAIN. Sur quelques séries de points remarquables dans le triangle. Mathesis X. 246-251.

Punkte, deren barycentrische Coordinaten denselben Potenzen der Sinus, oder der Cosinus, oder der Tangenten der Winkel des Dreiecks, oder ihrer Differenzen u. s. w. proportional sind.

Mn. (Lp.)

A. GOB. Sur quelques transformations de figures. Assoc. Franç. XIX. Limoges (1890). 1-18.

Sind über den Seiten des Dreiecks *ABC* drei ähnliche Dreiecke P_aBC, AP_bC, ABP_c errichtet, so ist $AP_b.AP_c = AB.AC$. Zufolge dieser Analogie mit der Gleichung einer geradlinigen Involution heissen P_b und P_c entsprechende Punkte zweier „involutorischen Figuren" φ_b und φ_c, deren Mittelpunkt *A* ist. Die Geraden AP_a, BP_b, CP_c und die Kreise P_aBC, AP_bC, ABP_c schneiden sich in *Q*, dessen inverser *P* sei. Durchläuft P_a die Figur φ_a, so beschreiben *P* und *Q* die „transformirten Figuren" φ und ψ. Sind Q_a, Q_b, Q_c die inversen Punkte von P_a, P_b, P_c, so sind P_aQ_a, P_bQ_b, P_cQ_c parallel zu *PQ*; BP_c und CP_b schneiden sich in

Q_a etc. — Aus P_a, P_b, P_c und P oder Q werden rückwärts A, B, C construirt. — Beschreibt P_a einen Kreis D_a durch A, so ist der Ort für P eine Gerade d und der für Q ein dem Dreieck ABC umgeschriebener Kegelschnitt. Beschreiben ebenso P_b, P_c zwei solche Kreise durch B bezw. C, dass zu ihnen dieselbe Gerade als Ort für P gehört, so ergeben sich aus besonderen Lagen von d bemerkenswerte Resultate, z. B.: die Mittellote von AP_a, BP_b, CP_c schneiden BC, CA, AB in drei Punkten, deren Verbindungslinien mit den Ecken A, B, C durch einen Punkt auf dem Umkreis gehen. Haben die Dreiecke P_aBC, AP_bC, ABP_c denselben Brocard'schen Winkel wie ABC, so beschreiben P_a, P_b, P_c die Neuberg'schen Kreise etc. — Es werden dann noch die Doppelpunkte F_a und F'_a der Involution betrachtet, welche auf der Halbirungslinie des Winkels BAC so liegen, dass

$$AF_a = AF'_a = \sqrt{AB.AC}$$

ist, und Folgerungen daraus gezogen. Lg.

C. A. Laisant. Propriétés du triangle. Orientation moyenne — Points équisegmentaires. Assoc. Franç. XIX. Limoges (1890). 23-29.

Die drei Geraden, welche man erhält, wenn man von je zwei Ecken eines Dreiecks aus die eingeschlossene Seite auf den anstossenden abträgt und die Endpunkte verbindet, sind parallel, ihre gemeinsame Richtung wird „orientation moyenne" des Dreiecks genannt. Dieselbe ist senkrecht auf der Verbindungslinie des Inkreis- und Umkreiscentrums und parallel der Geraden von Jérabek, d. h. der Geraden, welche die Punkte J_1, J_2 mit den barycentrischen Coordinaten $\frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{a}$ und $\frac{1}{c}, \frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ verbindet. — Sind $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ je zwei Punkte auf den Seiten BC, CA, AB eines Dreiecks, so dass

$$BA' = CB' = AC' = u = CA'' = BC'' = AB''$$

und u die (einzige) reelle Wurzel der Gleichung

$$(a-u)(b-u)(c-u) = u^3$$

ist, so schneiden sich AA', BB', CC' und AA'', BB'', CC'' in den

Punkten S_1 und S_2, points équisegmentaires. $S_1 S_2$ ist parallel $J_1 J_2$. — Für den speciellen Fall, dass die mittlere Seite das harmonische Mittel zu den beiden andern ist, d. h. $\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$, wird $u = \frac{1}{2}b$; S_1 und S_2 liegen dann auf der zu b gehörigen Mittellinie, welche parallel zu $J_1 J_2$ ist. Lg.

E. Lemoine. Sur les triangles orthologiques et sur divers sujets de la géométrie du triangle. Assoc. Franç. XIX. Limoges (1890). 111-146.

Wenn zwei Dreiecke so liegen, dass die von A, B, C auf $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ gefällten Lote sich in einem Punkte O schneiden, so gehen auch die von $A'B'C'$ auf BC, CA, AB gefällten Lote durch einen Punkt O', wie schon Steiner (J. für Math. II. 287) gezeigt hat. Zwei derartige Dreiecke werden hier „orthologisch" genannt. Ihre Eigenschaften sowie die derjenigen, welche „dreifach orthologisch und perspectivisch" sind, werden untersucht, wobei sich einige neue Sätze ergeben, z. B.: Ist M ein Punkt auf der Lemoine'schen Geraden, so sind ABC und alle diejenigen Dreiecke, deren Seiten denjenigen des Fusspunktendreiecks von M parallel sind, dreifach orthologisch. Die mehrfach perspectivischen Dreiecke sind schon von andern Autoren behandelt, z. B. von Schröter in den Math. Annalen II. Da der Verfasser diese Arbeiten nicht vorher eingesehen hat, so fehlen Angaben, wie weit sich die gefundenen Sätze bei jenen finden. In § 3 folgen verschiedene zum Teil bekannte Sätze, welche Bezug haben auf die Kiepert'sche Hyperbel, den Feuerbach'schen Kreis, den Kreis durch die drei Berührungspunkte eines angeschriebenen Kegelschnitts, die gemeinschaftlichen Tangenten und die Berührungspunkte einiger eingeschriebenen Kegelschnitte. § 4 handelt über die Schnittpunkte der Kegelschnitte, welche zwei Ecken eines Dreiecks zu Brennpunkten haben, und welche durch die dritte Ecke gehen. Diese Schnittpunkte dienen zur Lösung mancher Aufgaben, welche nach Meinung des Verfassers bisher nur angedeutet wurden. Er findet durch Rechnung praktische Lösungen; die benutzten Formeln

drücken Dreiecksstücke durch s, r, ϱ, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c aus und sind am Schluss zusammengestellt. Lg.

R. Lachlan. On the properties of some circles connected with a triangle formed by circular arcs. Lond. M. S. Proc. XXI. 263-272.

Wenn ABC ein aus drei Kreisbogen gebildetes Dreieck ist, und die vollständigen Kreise sich zum zweiten Male in A', B', C' schneiden, so entstehen drei zu ABC „associirte" Dreiecke $A'BC$, $AB'C$, ABC', und vier Dreiecke $A'B'C'$, $AB'C'$, $A'BC'$, $A'B'C$, welche, in Bezug auf den die gegebenen Kreise rechtwinklig schneidenden Kreis, die „inversen" Dreiecke von ABC und seinen associirten Dreiecken sind. Jedes dieser Dreiecke besitzt einen umschriebenen, einen eingeschriebenen und einen dem Feuerbach'schen Kreise entsprechenden Kreis. — Der Verfasser entwickelt mit möglichster Vollständigkeit die descriptiven und metrischen Eigenschaften dieser Kreisgruppen im Anschluss an eine in dem Quarterly Journal, XXI. 1-59 (F. d. M. XVII. 1885. 542) von ihm veröffentlichte Arbeit und im Anschluss an seine Abhandlung „On systems of Circles and Spheres" (Phil. Trans., CLXXVII. 481-625, F. d. M. XVIII. 1886. 491). Wbg.

E. Knabl. Die Winkelgegenpunkte und ihre Beziehungen zu den Kegelschnitten, insbesondere zum Brocard'schen Kreis. Pr. Niederöstr. Landes-Real- u. Ober-Gymn. zu Horn. 39 S. mit 1 Figurentafel.

Es sei E ein Punkt in der Ebene des Dreiecks ABC (Einheitspunkt), A der Mittelpunkt eines involutorischen Strahlenbüschels, welcher durch AB und AC als entsprechende Strahlen und AE als Doppelstrahl vollständig bestimmt ist; dann heissen irgend zwei involutorisch zugeordnete Strahlen m und m' dieses Büschels „Gegentransversalen"; Entsprechendes gilt für die Ecken B und C. Verbindet man einen Punkt M mit A, B, C, so laufen die zugehörigen Gegentransversalen ebenfalls durch einen Punkt

M', den „Winkelgegenpunkt" von M, dessen Lage natürlich von der Wahl des Einheitspunktes E abhängig ist. Ist E das Inkreiscentrum von ABC, so bilden m und m' mit AB und AC entgegengesetzt gleiche Winkel (Höhe und Umkreisradius); ist E der Schwerpunkt, so liegen die Fusspunkte von m und m' auf BC symmetrisch. [Diese beiden Arten der Zuordnung hat schon Kiehl in seinem Programm Bromberg 1881 als Winkel- und Seitengegentransversale unterschieden. Ref.] Reciproke Sätze ergeben sich, wenn man eine beliebige Gerade f als Einheitsgerade, B und C als entsprechende Punkte und den Schnittpunkt F von f mit BC als Doppelpunkt einer involutorischen Reihe ansieht. — Einem Punkte P_1 mit den trimetrischen Coordinaten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ werden ferner die Punkte $P_2 = (\alpha_2\alpha_3\alpha_1)$, $P_3 = (\alpha_3\alpha_1\alpha_2)$ als „Punkte mit cyklisch vertauschten Coordinaten" und

$$\Pi_1 = (\alpha_1\alpha_3\alpha_2),\quad \Pi_2 = (\alpha_3\alpha_2\alpha_1),\quad \Pi_3 = (\alpha_2\alpha_1\alpha_3)$$

als „Punkte mit teilweis vertauschten Coordinaten" zugeordnet und hieraus u. a. folgende interessante Beziehungen hergeleitet: Jedes Dreieck $P_1P_2P_3$ liegt dreifach perspectivisch zu ABC, und die drei Situationspunkte sind die drei Winkelgegenpunkte der zu einer Ecke gehörigen Punkte Π_1, Π_2, Π_3. — Die sechs Punkte $P_1, P_2, P_3, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$ liegen stets auf einem Kegelschnitte, der nur dann ein Kreis ist, und zwar der Brocard'sche, wenn P_1 mit dem Grebe'schen Punkte zusammenfällt. — Zum Schluss wird der geometrische Ort eines Punktes untersucht, dessen Winkelgegenpunkt für den Einheitspunkt E eine Gerade durchläuft; derselbe ist ein dem Fundamentaldreieck umschriebener Kegelschnitt K, und umgekehrt. Als Specialfälle ergeben sich: Ist K der Umkreis und E der Schwerpunkt, so ist l die Seitengegengerade der Polare des Grebe'schen Punktes; ist E dagegen das Inkreiscentrum, so liegt l im Unendlichen; verbindet l das Umkreiscentrum mit dem Grebe'schen Punkte und ist E wieder das Inkreiscentrum, so ist K die gleichseitige Hyperbel der zehn Punkte. Lg.

W. Heymann. Das Problem der Winkelhalbirenden. Schlömilch Z. XXXV. 254-256.

An Stelle des bisher ungelösten Problems wird das andere gesetzt: Ein Dreieck $A_1A_2A_3$ aus den drei Abschnitten s_1, s_2, s_3 zu berechnen, welche der Umkreis auf den Winkelhalbirenden bestimmt. Bildet der von A_1 ausgehende Durchmesser d mit s_1 den Winkel α_1, so ist

$$s_1 = d\cos\alpha_1,\quad d^3-(s_1^2+s_2^2+s_3^2)d+2s_1s_2s_3 = 0,\quad A_1 = \tfrac{2}{3}(R-\alpha_1+\alpha_2).$$

Die Aufgabe erfordert also ausser der Auflösung einer kubischen Gleichung die Dreiteilung eines Winkels, weswegen eine rein algebraische Lösung ohne Hülfswinkel zu verwickelten Rechnungen führen muss. Lg.

F. J. van den Berg. Over de bepaling van een driehoek, waarvan de deellijnen der drie supplementaire hoeken gegeven zijn. Nieuw Archief XVII. 191-205.

Fortsetzung eines früheren Aufsatzes des Autors über den nämlichen Gegenstand (siehe F. d. M. XXI. 576), die Bestimmung eines Dreiecks, von dem die Längen der Winkelhalbirenden gegeben sind; jetzt handelt es sich um die Bestimmung des Dreiecks, wenn die Halbirenden der drei Supplementswinkel gegeben sind. Anders, als man erwarten durfte, ergiebt sich, dass die Lösung dieses Problems einfacher ist als die des ersteren. Das ursprüngliche fordert die Lösung einer nicht zu reducirenden Gleichung des sechzehnten Grades; das neue Problem dagegen erfordert hauptsächlich nur die Lösung einer Gleichung des dritten Grades. Es wird dies näher dargethan, die Gleichung aufgestellt und mit einigen einfachen Zahlenbeispielen erläutert. Schliesslich wird von dem besonderen Falle gehandelt, wenn zwei der drei äusseren Winkelteillinien einander gleich sind, was in diesem Falle nicht notwendig zur Folge hat, dass das Dreieck gleichschenklig sei. G.

H. Hartl. Lehrbuch der ebenen Trigonometrie für den Gebrauch an höheren Gewerbeschulen und für das Selbststudium. Wien. A. Hölder. 91 S. 8°.

In diesem Buche wird die elementare ebene Trigonometrie mit vielseitiger Heranziehung von Beispielen, die in der Praxis wichtig sind, gelehrt. Zuerst wird das rechtwinklige, dann das gleichschenklige Dreieck, hierauf das reguläre Polygon, der Rhombus und zuletzt das schiefwinklige Dreieck behandelt. Ausserdem sind goniometrische Formeln hergeleitet, und die Anwendung der Logarithmen ist berücksichtigt. Mz.

G. H. WARD. Examination papers in trigonometry. London. George Bell and Sons. [Nature XLII. 567.]

E. LAKENMACHER. Trigonometrische Formeln zur annähernden Bestimmung der Sinuswerte. Hoppe Arch. (2) IX. 215-216.

Der Verfasser giebt ohne Beweis einige Formeln, aus denen die Sinus der Winkel annähernd berechnet werden können.

Ist $a = \frac{90}{30-\varphi} - 2$ für die Winkel von 0° bis 15°,

dann $a = \frac{90}{\varphi} - 2$ „ „ „ „ 15° „ 30°,

dann $a = \frac{180}{\varphi} - 2$ „ „ „ „ 30° „ 45°,

und $b = \sqrt{2^a - a} + a$,

so ist

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{8b} - \sqrt{\frac{3}{8b}}} \text{ für } 0^\circ \text{ bis } 15^\circ,$$

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{1}{2b}} \text{ für } 15^\circ \text{ bis } 30^\circ,$$

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{2}{b} - \frac{1}{b^2}} \text{ für } 30^\circ \text{ bis } 45^\circ.$$

Mz.

G. EGIDI. Sulla trasformazione di alcune formole trigonometriche. Rom. Acc. P. d. N. L. XLIII. 147-153.

In dieser Note sind nur Formeln enthalten, die der elemen-

taren Trigonometrie angehören. Es wird gezeigt, wie man, vom Sinussatz und Gleichungen wie $a = b\cos\gamma + c\cos\beta$ ausgehend, durch einfache Umformungen zu solchen Relationen gelangt, die sich für logarithmische Rechnung besser eignen als die anfänglich gegebenen. Mz.

H. Hartl. Die trigonometrische Auflösung des Dreiecks und der auf Dreiecke zurückzuführenden Figuren. Wien. A. Hölder. 33 S. 8°.

In diesem kleinen Buche wird die trigonometrische Behandlung des Dreiecks gelehrt; dabei werden nur die trigonometrischen Zahlen, nicht ihre Logarithmen verwandt; auch bleiben die rein goniometrischen Beziehungen und Formeln unberücksichtigt. Dagegen sind praktische Aufgaben, die in die Mechanik, Baukunst u. s. w. hinüberspielen, beigefügt.

Behandelt sind das rechtwinklige, das schiefwinklige Dreieck und das reguläre Polygon; auch findet sich eine trigonometrische Tafel am Ende des Buches. Mz.

D. Gambioli. Alcune formole relative al triangolo. Besso Per. mat. V. 42-46.

Es seien $AA' = h$, $BB' = h'$, $CC' = h''$ die Höhen eines Dreiecks ABC, und D, E, F ihre Schnittpunkte mit dem Umkreise des Dreiecks. Ferner sei $A'' \equiv AA'.BC$, $B'' \equiv BB'.CA$, $C'' \equiv CC'.AB$; $AA'' \equiv \alpha$, $BB'' \equiv \beta$, $CC'' \equiv \gamma$; $A'D \equiv d$, $B'E \equiv e$, $C'F \equiv f$. Zwischen den Längen α, β, γ, d, e, f, h, h', h'', den Seiten des Dreiecks, den Inhalten der Dreiecke und den Radien der In- und Umkreise der Dreiecke ABC, $A'B'C'$ finden zahlreiche Beziehungen statt, welche man einfach durch trigonometrische Rechnungen beweisen kann, und unter denen der Verfasser mehrere elegante ermittelt. La.

C. Franke. Anschauung in der Trigonometrie. Pr. (No. 203) Gymn. Waldenburg i. Schl. 16 S. 8° mit Figurentafel.

Die hauptsächlichsten goniometrischen Formeln werden an-

schaulich an der Figur hergeleitet, wie dies in den Lehrbüchern (abgesehen von Mehler) mit $\sin(\alpha+\beta)$ und $\cos(\alpha+\beta)$ geschieht.

Lg.

F. Lucke. Leitfaden der Stereometrie für den Schulunterricht. Leipzig. B. G. Teubner. X u. 204 S. 8°. Mit 9 Tafeln.

Verfasser hatte schon in der Vorrede der von ihm herausgegebenen „Genetischen Geometrie“ von Heinze (s. F. d. M. XVIII. 485) die Abfassung eines Leitfadens der Stereometrie nach denselben Grundsätzen in Aussicht gestellt. Seinen Bedenken gegen jene Grundsätze hat Ref. in Hoffmann Z. XVIII. 81 Ausdruck gegeben. Um so mehr ist er erfreut, das nun vorliegende Werk frei von den gefürchteten Einseitigkeiten zu finden und es als ein treffliches Lehrbuch empfehlen zu können. Es ist als „Hülfsbuch für den Schulunterricht“ gedacht. Dementsprechend sind leichtere Beweise häufig nur angedeutet, Zusätze in Frageform gekleidet, u. s. w. Die Auswahl und Gliederung des Stoffes ist zweckmässig, die Darstellung klar, der Beweisgang durchsichtig. Die Körperberechnung, für welche die Heinze'sche Körperlehre als Uebungsmaterial dient, ist auf dem Cavalieri'schen Satze aufgebaut, der als „Grundsatz“ eingeführt wird. In dem anhangsweise beigefügten Uebungsstoff (243 Aufg.), der geschickt angeordnet ist, wird der constructiven Seite der Stereometrie ausgiebig Rechnung getragen. (Vor No. 22 wünschte Ref. noch die Fundamentalaufgaben der Bestimmung des Schnittpunktes einer Geraden mit einer Ebene und der Schnittlinie zweier Ebenen eingeschaltet.)

Hk.

Karl Schultze. Leitfaden für den trigonometrischen und stereometrischen Unterricht an höheren Bürger- und Realschulen. Leipzig. Teubner. VIII. 72 u. 60 S. 8°.

a) Trigonometrie. Gemäss den Zielen, welche das Buch nach seinem Titel verfolgt, beschränkt sich der Inhalt in zweckmässiger Auswahl auf das Notwendige zur Lösung leichter Aufgaben über Dreiecke, Vierecke, regelmässige Vielecke, den Kreis

und über Höhen- nebst Distanzbestimmungen. Sinus und Cosinus werden — zunächst für die Winkel 30° und 60° — als Zahlen definirt, mit denen die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks zu multipliciren ist, um die Katheten zu erhalten. Die Verbindung zwischen Trigonometrie und Planimetrie, welche der Verfasser auf diese Weise am besten herzustellen glaubt, kann aber eben so gut gewonnen werden, wenn man, von den Aehnlichkeitssätzen ausgehend, jene Functionen als Seitenverhältnisse erklärt; welche Erkenntnis im vorliegenden Buche für das allgemeine rechtwinkelige Dreieck erst durch Analogie erlangt wird. Sehr zu loben ist das über die ungleichmässige Veränderung der Functionen eines gleichmässig wachsenden Winkels und über die Berechnung trigonometrischer Tafeln Gesagte; dagegen ist die Ableitung von $\sin(\alpha+\beta)$ gekünstelt. Das Buch ist versehen mit einer genügenden Zahl von Uebungsbeispielen, Tafeln der trigonometrischen Functionen, pythagoreischer Dreiecke; zu besonderer Empfehlung gereicht ihm der beigegebene kurze Abriss der Geschichte der Trigonometrie.

b) Stereometrie. Dieses Buch ist dem vorigen in seinen Zielen ähnlich, in der Ausführung vielfach noch vorzuziehen. Aus der Anschauung am Würfel werden die verschiedenen Lagenbeziehungen von Ebenen und Geraden abgeleitet; die Flächen- und Inhaltsformeln werden in gewöhnlicher Weise entwickelt; ein kleiner Excurs über stereographische Projection, an der Karte von Deutschland erörtert, verdient lobende Erwähnung. In dem geschichtlichen Abriss sollte das Problem der Würfelverdoppelung erwähnt werden; die Auswahl der Aufgaben ist praktisch. Einige sinnstörende Druckfehler bei Cavalieri's Satz und der Definition der Kugel („Ebene" statt „Körper" und „nicht" statt „in") hätten vermieden werden sollen. Mh.

R. B. Hayward. The elements of solid geometry. London.

J. H. Morris. Practical plane and solid geometry, including graphic arithmetic. London. 260 S.

G. DELITALA. Ricerche di Stereometria. Sassari. G. Dessi. X u. 76 S.

Von diesem ganz elementaren Werkchen, welches bloss für die Anwendungen der Mathematik auf die Ingenieurwissenschaft Interesse zu bieten scheint, lassen wir nur die Titel der einzelnen Abschnitte hier folgen:

I. Ueber das abgestumpfte Prisma und das vierseitige Prismatoid.

II. Die prismatischen und cylindrischen Stücke.

III. Ueber die Messung des Inhalts der natürlichen Wasserbehälter.

IV. Ueber die cylindrischen Körper, die schiefe Ebene und den Keil. La.

SCHOLIM. Stereometrische Oerter und Constructionsaufgaben. I. Teil. Pr. Gymn. Kreuzburg i. O.-S.

Eine reichhaltige Zusammenstellung von Oertern und Aufgaben aus der construirenden elementaren Stereometrie, für Schüler berechnet und ohne den Anspruch, wissenschaftlich Neues zu bieten. Scht.

O. RÜTHNICK. Sammlung von Aufgaben aus der Stereometrie, zum Gebrauche in Prima. Pr. (No. 68) Ritterak. Brandenburg a. H. 12 S. 4°.

Da Sammlungen stereometrischer Aufgaben nach der Meinung des Verfassers weniger vorhanden sind, als solche anderer Aufgaben, so hat er diese Sammlung herausgegeben. Constructionsaufgaben befinden sich nicht in ihr, dagegen eine grosse Zahl (99) Rechenaufgaben aus der Stereometrie (Kugel, Kegel, Prisma, Pyramide, reguläre Körper) mit Angabe der Resultate.

Mz.

FR. HARTMANN. Musterbeispiele zu stereometrischen Aufgaben (für Schüler der oberen Gymnasialklassen). Pr. (No. 361) Realgymn. u. Gymn. Hagen. 13 S. 4°.

Der Verfasser behandelt mehrere stereometrische Aufgaben, die sich im Unterricht gewissermassen von selbst darbieten, und deren selbständige Lösung von der Mehrzahl der Schüler erwartet werden kann. So z. B.: einen Punkt zu construiren, der von vier nicht in einer Ebene liegenden Punkten gleich weit entfernt ist; oder aus den Grundkanten, der Höhe und zwei Seitenkanten die dritte Seitenkante einer dreiseitigen Pyramide zu finden, u. a. m. Auch Lehrsätze mit vollständigem Beweis und ausgeführter Rechnung werden gegeben. Die beigefügten Figurentafeln sind sehr deutlich und erleichtern das Verständnis.

Mz.

Fr. Roth. Beiträge zur Stereometrie. Pr. (No. 324) Realgymn. Buxtehude. 26 S. 4°.

Der Verfasser erinnert zu Anfang an die mannigfachen Bestrebungen der Geometer, Sätze aus der Planimetrie auf die Stereometrie zu übertragen, und behandelt dann als eigentliches Thema der Arbeit die räumlichen Analoga zu den Sätzen über Winkelsummen von Polygonen. Er bringt, von Leichterem zu Schwererem übergehend, mehrere interessante Sätze mit ihren Beweisen. Zuletzt zeigt er, dass in jedem Polyeder, dessen Grenzflächen, beliebig erweitert, den Körper selbst nicht schneiden, die Summe der zu den Ecken gehörigen Polarecken gleich einer Kugel ist. Die zahlreichen beigegebenen Figuren sind sehr deutlich und gut. Mz.

E. Lauvernay. Sur le deuxième cas de la résolution des trièdres. J. de Math. élém. (3) IV. 217-218.

Eine hübsche directe Construction des Dreikants aus den drei Winkeln, ohne Benutzung des Polardreikants. Lg.

F. Haluschka. Die dreiseitige Körperecke. Währing. 22 S.

G. Riboni. Contributo allo studio del tetraedro. Besso Per. mat. V. 1-9.

Es seien ein Tetraeder und im Innern desselben ein Punkt gegeben; man projicire den Punkt aus den Ecken auf die gegenüberliegenden Flächen und aus den Kanten auf die bezüglichen Gegenkanten. Die gegebenen und die so entstandenen Punkte bestimmen eine grosse Anzahl Strecken, unter denen viele Beziehungen bestehen als Folge der Gleichung

$$\frac{AO}{OA'} = \frac{AB'}{B'C} + \frac{AC'}{C'B}$$

zwischen den Projectionen A', B', C' eines Punktes O aus den Ecken eines Dreiecks ABC auf die Gegenseiten. Aus diesen Beziehungen leitet der Verfasser viele Sätze ab, welche Eigenschaften von Tetraedern besonderer Art aussprechen; unter ihnen wählen wir die folgenden als die bemerkenswertesten aus:

1. Ist in einem Tetraeder die Summe der Quadrate der Gegenkanten constant, so gehen die Höhen des Tetraeders durch einen und denselben Punkt.

2. Ist in einem Tetraeder das Product der Gegenkanten constant, so gehen die Höhen durch denselben Punkt wie die Geraden, welche die Ecken des Tetraeders mit den Mittelpunkten der Inkreise der Flächen verbinden.

3. Ist in einem Tetraeder die Summe der Gegenkanten constant, so berühren die Kanten eine Kugel, und es giebt sechs andere Kugeln, von denen jede eine Kante des Tetraeders und die Verlängerungen der vier anderen mit ihr zusammenstossenden Kanten berührt.

4. Gehen in einem Tetraeder die Geraden, welche die Eckpunkte mit den Berührungspunkten der Gegenflächen mit der Inkugel verbinden, durch denselben Punkt, so sieht man aus diesen Berührungspunkten die Kanten unter einem und demselben Winkel.

Die Bestimmung des Schwerpunktes der Oberfläche eines beliebigen Tetraeders bildet den Schluss des Aufsatzes.

La.

G. Delitala. Dimostrazione della formola che dà il volume d'un tetraedro in funzione degli spigoli. Besso Per. mat. V. 113-115.

Bei diesem Beweise benutzt der Verf., wie u. a. Salmon in seiner Geometry of three dimensions, zur Berechnung einer Höhe h des Tetraeders die bekannte Gleichung, welche die Entfernungen von vier beliebigen Punkten einer Ebene verbindet; die Rechnung wird auf eine solche Weise durchgeführt, dass h^2 durch einen Bruch ausgedrückt wird, dessen Zähler, bis auf einen numerischen Factor, das Quadrat des gesuchten Inhalts darstellt.

La.

R. Hoppe. Höhenschnitt-Tetraeder mit rationalen Kanten. Hoppe Arch. (2) IX. 434-444.

Zwei Gegenkanten-Paare eines Tetraeders mit Höhenschnittpunkt werden als Functionen des dritten und noch zweier variabeln Parameter dargestellt. Dann werden die Bedingungen erörtert, unter welchen ein System von drei solchen Parametern nur ein Tetraeder liefert. Hierauf beruht eine Einteilung der erhaltenen Tetraeder in spitze und flache. Beiläufig ergiebt sich der Satz, dass die Fusspunkte der Höhen eines Höhenschnitt-Tetraeders die Höhenschnittpunkte der Seiten sind.

Schg.

J. Wolstenholme. Solution of question 9697. Ed. Times LII. 38-39.

Sind A_1, A_2, A_3, A_4 die Flächeninhalte der vier Seiten eines Tetraeders, und bezeichnet man die Winkel, wie F. d. M. XX. 1888. 562 beschrieben ist, so folgt aus jeder Gleichung von der Form $\alpha_1+\alpha_2 = \alpha_3+\alpha_4$ eine Relation $A_1 \pm A_2 \pm A_3 \pm A_4 = 0$. Wenn diese Gleichung von den Wurzelzeichen befreit wird, so ist das Ergebnis symmetrisch in den Indices 1, 2, 3, 4. Daher sind die Gleichungen $\alpha_1+\alpha_2 = \alpha_3+\alpha_4$ u. s. w. nicht unabhängig von einander. Gilt das Gleichungssystem $\alpha_1+\alpha_2 = \alpha_3+\alpha_4$, $\beta_1+\beta_2 = \beta_3+\beta_4$, $\gamma_1+\gamma_2 = \gamma_3+\gamma_4$, so ist die zwischen den

Flächeninhalten geltende Beziehung $A_1+A_2 = A_3+A_4$. Bedeuten nun S_1, S_2, S_3, S_4 die Inhalte der Dreiecksflächen, σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 die halben Summen der ebenen Winkel in den Ecken des Tetraeders, so ist das Gleichungssystem

$$\alpha_1+\alpha_2 = \alpha_3+\alpha_4,\quad \beta_1+\beta_2 = \beta_3+\beta_4,\quad \gamma_1+\gamma_2 = \gamma_3+\gamma_4,$$
$$\sigma_1+\sigma_2 = \sigma_3+\sigma_4,\quad \sigma_1-\beta_1 = \sigma_4-\beta_4,\quad \sigma_1-\gamma_1 = \sigma_3-\gamma_3,$$
$$\sigma_2-\beta_2 = \sigma_3-\beta_3,\quad \sigma_2-\gamma_2 = \sigma_4-\gamma_4,\quad S_1+S_2 = S_3+S_4$$

derartig, dass, wenn irgend eines derselben gilt, jedes andere auch stattfindet. Lp.

G. de Longchamps. Sur le tétraèdre orthocentrique. Mathesis X. 49-53, 77-82.

Das „orthocentrische" Tetraeder ist dasjenige, dessen Höhen sich in einem Punkte, dem „Orthocentrum", schneiden. Der Verf. erinnert an seine schon bekannten Eigenschaften und ermittelt neue auf analytischem Wege. Er sucht den Wert des Quadrates einer Kante, den kürzesten Abstand zweier Gegenkanten, den Flächeninhalt einer Seite, das Volumen, die conjugirte Kugel, die Umkugel, die beiden Kugeln der zwölf Punkte u. s. w.

Mn. (Lp.)

H. Seipp. Ueber Transversalenschnittpunkte, Transversalenteilwinkel und Transversalenteilstrecken im ebenen Dreieck und Tetraeder. Hoppe Arch. (2) IX. 375-392.

Die bekanntesten Sätze über Ecktransversalen im ebenen Dreieck und ihre Analogien beim Tetraeder werden mit Dreiliniencoordinaten hergeleitet. Lg.

F. Lucke. Ueber die sogenannte gerade Pyramide. Hoffmann Z. XXI. 494-496.

J. Fürst. Ueber die rationalen Verhältnisse des Kubikinhaltes einiger Körper des tesseralen Systems. Casop. XIX. 20. (Böhmisch.)

Entwickelt und vergleicht einige diesbezügliche Formeln, wobei er das Verhältnis

$$V_6 : V_{24} : V_4 : V_{12} : V_{48} : V_8 = 60:30:20:15:12:10$$

herausbringt. Std.

A. D. VAN DER HARST. Algemeene bewijzen voor eenige belangrijke formules uit de goniometrie en de bolvormige driehoeksmeting. Nieuw Archief. XVII. 176-187.

A. D. VAN DER HARST. Pool drievlakkige hoek en pooldriehoek. Nieuw Archief. XVII. 188-190.

In dem ersten Aufsatze giebt der Autor allgemeine Beweise für einige wichtige Formeln der Goniometrie und sphärischen Trigonometrie, wobei er besonders dem positiven oder negativen Zeichen der goniometrischen Grössen in den verschiedenen Quadranten Beachtung schenkt. Es wird damit die allgemeine Gültigkeit der Grundformeln der Goniometrie und sphärischen Trigonometrie dargethan.

In dem zweiten giebt er eine elementare, aber strenge Ableitung der zwischen supplementaren körperlichen Dreikanten und zwischen Poldreiecken auf der Kugel bestehenden Hauptbeziehungen. G.

C. STOLP. Het oppervlak van den boldriehoek. Nieuw Archief. XVII. 235-236.

Ableitung der bekannten Formel für die Oberfläche des sphärischen Dreiecks, durchaus nach der Weise des Cavalieri'schen Beweises, nur ohne Anwendung des vorhergehenden Hülfssatzes, dass zwei Gegendreiecke gleiche Oberfläche haben.

G.

C. CAMURRI. Cilindri e sfere. Loro circonferenza, area della sezione e volume per i diversi diametri. Tavole prontuarie. Mendrisio. 128 S. 8°.

G. Kase. Beziehungen zwischen den Radien der einem sphärischen N-eck ein- und umbeschriebenen Kreise und ihrer Centralentfernung. Halle. 49 S.

Capitel 4.

Darstellende Geometrie.

P. Kramer. Die darstellende Geometrie im Realgymnasium. Pr. Realgymn. d. Fr. St. Halle a. S. 32 S.

Verfasser geht bei Beantwortung der Frage, wie die darstellende Geometrie im Realgymnasium zu behandeln sei, von dem auch sonst vertretenen Standpunkte aus, dass dieser Lehrgegenstand nicht die Stellung eines selbständigen Unterrichtsfaches, sondern nur eines Hülfsmittels für andere Fächer, nämlich für das Zeichnen, die Stereometrie und die Geographie einnehme und demgemäss nur soweit, als es die Zwecke jener Fächer verlangen, nicht aber in systematischem Lehrgang zu betreiben sei. Diese Auffassung muss notwendig in das Dilemma geraten, dass sie entweder viel zu viel verlangt (z. B. mit Isophotenlehre und freier Perspective), oder einer bedenklichen Oberflächlichkeit Vorschub leistet. Man muss aber den Ausführungen des Verfassers Recht geben, dass man dazu durch die für preussische Anstalten gültigen Bestimmungen, namentlich durch die Unterordnung der darstellenden Geometrie unter den Zeichenunterricht gedrängt wird. Die leidige Folge davon ist, dass man dort in der schulgemässen Ausbildung dieses Lehrgegenstandes gegenüber Süddeutschland, Oesterreich und der Schweiz zurückgeblieben ist, wo darstellende Geometrie und Linearzeichnen längst an den Universitäten vertreten und an den Schulen grundsätzlich in die Hand des (in diesen Fächern geprüften) Mathematiklehrers gelegt sind. Hk.

W. Pözl. Elemente der darstellenden Geometrie zum Schulgebrauche zusammengestellt. München. Th. Ackermann. VII u. 107 S. 8°.

Der vorliegende Leitfaden erstreckt sich auf die Constructionen in Grund- und Aufriss mit Punkten, Geraden und Ebenen, von Polygonen, Dreikanten und Polyedern, nebst deren ebenen Schnitten und gegenseitigen Durchdringungen. Disposition und Einzelausführung ist im allgemeinen gut. Nur der Behandlung der metrischen Aufgaben mittels Transformation (ev. unter Benutzung von schiefwinkligen Systemen) kann Ref. nicht seinen Beifall zollen. Man ist von den Uebertreibungen der Olivier'schen Methode (auch in Frankreich) längst wieder abgekommen. Bei den Polygonen fühlt der Verfasser selbst das Bedürfnis, nachträglich den Begriff „Umklappung" einzuführen. Aber es heisst denn doch etwas weit mit der Kirche ums Dorf gegangen, wenn dieser sich direct darbietende einfache Begriff (S. 56) durch Vermittelung eines neu eingeführten schiefwinkligen Systems abgeleitet wird. Eine Aenderung in dieser Richtung, sowie in Beziehung auf die schlimmen Figuren 83, 91a, 102, 109 dürfte dem Buche bei einer neuen Auflage zum Vorteil gereichen. — Ausgiebiges Uebungsmaterial ist teils in zweckmässiger Weise dem Lehrgang eingestreut, teils in einem Anhang zusammengestellt.

Hk.

C. F. A. Leroy. Traité de stéréotomie. 12e éd. revue et annotée par E. Martelet, augmentée d'un supplément: Théorie et construction de l'appareil hélicoïdal des arches biaises, par J. de La Gournerie, rédigées par E. Lebon. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

E. Desportes. Traité élémentaire de géométrie descriptive. Paris. 465 S.

H. Diesener. Darstellende Geometrie (für Bautechniker). 2. Aufl. Halle a. S. Hofstetter. VI + 146 S. Mit 300 Holzschn. 8°.

G. Delabar. Anleitung zum Linearzeichnen, mit besonderer Berücksichtigung des gewerblichen und tech-

nischen Zeichnens. 3. Heft: Die weitere Ausführung der rechtwinkligen Projectionsart etc. 2. Aufl. Neuer Abdruck der Tafeln. Freiburg i. Br. Herder. 222 S. Mit 40 Tafeln. Quer gr. 8°.

F. Dicknether. Leitfaden der darstellenden Geometrie. München. Lindauer. III + 67 S. 8°.

T. H. Eagles. Descriptive geometry, with more than 200 examples. London. 334 S.

J. H. Morris. Geometrical drawing for art students. London. Longmans, Green, and Co. [Nature XLII. 543.]

N. Charruit. Problèmes et épures de géométrie descriptive. Partie I. Paris.

J. Neuberg. Sur les projections et contre-projections d'un triangle fixe et sur le système de trois figures. Bruxelles. XVI + 86 S.

Fr. Graberg. Ueber Axenbünde des Massraumes. Wolf Z. XXXV. 52-79. Mit 1 Taf.

Die Abhandlung bezweckt, einen Ueberblick über die Axenbünde und Regale des Massraumes zu geben. „Windschiefe Axen, durch einfache Strahlen verbunden, bilden einen Axenbund und tragen denselben Massstab. Die verbindenden Strahlen stellen einen Strahlverband her, welcher als Masszeichen dient. Der Massstab ist einteilig oder linear, wenn der bewegliche Strahl mit einem festen eine bestimmte Länge misst. Der Massstab auf jeder von zwei Axen eines Paarbundes ist zweiteilig, indem die Strahlenpaare auf jener Massverhältnisse von Längenpaaren anzeigen," u. s. w. „Durch die stetige Bewegung der Strahlen nach Leitaxen entstehen Regelflächen, Regale, welche durch Curven miteinander verbunden sind und im Verein mit den Axenbünden den Massraum bilden, einen gegliederten Raum der Vorstellung, der sich zum wirklichen Raum unserer Bewegungen verhält wie der Massstab zur Zeichnung." Hk.

Fr. Graberg. Gliederung des Massraumes durch seine Flächen. Wolf Z. XXXV. 257-290. Mit 1 Taf.

Verfasser fasst die Grundzüge seiner Anschauungsweise in folgende Sätze zusammen: „Wählt man das Zeilregal (windschiefes Paraboloid) zur Massfläche des Reliefs, so kann jede Gliedfläche gemessen werden durch die Schar der zum Plan parallelen Schichtstrahlen oder durch die Schar Leitaxen, an welchen sich die Schichtstrahlen verschieben. Dieses Masszeichen deutet zugleich die Verbindungsweise der Gliedflächen mit dem allgemeinen Regal an. Wenn man Flächen messend verbindet, ergeben sich deren Massverhältnisse, welche durch die Bindecurven bezeichnet sind. Die Gliederung des Massraumes durch seine Flächen nach deren Bindecurven mit einer Massfläche gewährt deshalb einen Ueberblick über die Gestaltung der Flächen nach Massverhältnissen.“ Hk.

A. Beck. Ueber die Fundamentalaufgabe der Axonometrie. J. für Math. CVI. 121-124.

Der vorliegende Beweis des Pohlke'schen Satzes, bezw. die constructive Lösung der Aufgabe, das Originalaxenkreuz aus seinem Bilde zu ermitteln, beruht auf dem schon mehrfach, wie auch von Pohlke selbst, verwerteten Gedanken, dass die aus dem Mittelpunkte des Originalaxenkreuzes mit der Axenlänge beschriebene Kugel sich als Umhüllungsellipse der drei Ellipsen projicirt, die je zwei Strecken des Bildaxenkreuzes zu conjugirten Durchmessern haben. Indem nun der Verfasser zur Construction der Axen jener Umhüllungsellipse die Chasles'sche (auf die Theorie der confocalen Flächen zweiter Ordnung gegründete) Lösung des Axenproblems einer Fläche zweiter Ordnung heranzieht, gelangt er zu einer Lösung der gestellten Aufgabe von bemerkenswerter Einfachheit. Hk.

C. Seidelin. Axonometrisk afbildning. Nyt Tidss. for Math. I. 49-55.

Der Verfasser erweitert und vereinfacht die von Hrn. A. Weiler eingeführten Methoden zur Lösung von Aufgaben in der axonometrischen Abbildung. V.

A. D'ARZILLA FONSECA. Notas explicativas aos n°s 249, 251 e 252 da Geometria descriptiva de Lagournerie. Coimbra Inst. XXXVII.

Bemerkungen über die Secanten der Kegelschnitte, den Schnitt zweier Oberflächen zweiter Ordnung, die Schnittpunkte einer Geraden mit den Oberflächen zweiter Ordnung, u. s. w.

Tx. (Lp.)

A. D'ARZILLA FONSECA. Sobre a segunda nota ao n° 258 da Geometria descriptiva de Lagournerie. Coimbra Inst. XXXVII.

Analytische Untersuchung der Schnittcurve zweier Ellipsoide.

Tx. (Lp.)

H. P. DU MOTEL. Note de géométrie descriptive. Nouv. Ann. (3) IX. 46-49.

Eine weitere descriptive Lösung der Aufgabe: die zwei Geraden zu bestimmen, welche vier gegebene Geraden schneiden (s. F. d. M. XXI. 1889. 589), mittels Zurückführung auf den Schnitt eines Hyperboloids und eines Paraboloids, die zwei Leitlinien gemein haben. Hk.

C. BURALI-FORTI. Le linee isofote delle rigate algebriche. Palermo Rend. IV. 57-62.

Die Abhandlung giebt eine elegante synthetische Ableitung der wichtigsten allgemeinen Eigenschaften der Isophoten einer algebraischen Regelfläche, betreffend die Natur der Curven, ihre Beziehungen zu einander, zu den Erzeugenden der Regelfläche, zur Strictionslinie, zu der Curve der grössten relativen Helligkeit auf den Erzeugenden, etc. Hk.

F. Paternò. Sulla determinazione diretta dei piani bisettori di un angolo diedro. Atti del Collegio degli Ingegneri e degli Architetti di Palermo. XII. 25-26. (1889.)

Bemerkung, welche die darstellende Geometrie betrifft.

La.

A. Laussedat. Note sur la construction des plans, d'après les vues du terrain obtenues de stations aériennes. C. R. CXI. 729-732.

Bei photogrammetrischen Aufnahmen vom Luftballon oder fliegenden Drachen aus bereitet die Festlegung der verschiedenen Augpunkte (Luftstandpunkte) und demzufolge die Ermittelung der gegenseitigen Orientirung der Photographien bei der Construction des Grundrisses Schwierigkeiten. Das vom Verfasser mitgeteilte einfache Verfahren ist anwendbar unter der Voraussetzung, dass das aufgenommene Gelände eine Wasserfläche enthält, so dass man eine Anzahl von Hauptpunkten hat, die in der nämlichen Horizontalebene liegen. Man transformirt dann die mit schiefer Bildebene aufgenommenen Bilder mittels ebener Collineation auf eine horizontale Bildebene und verwendet die transformirten Hauptpunkte zur Orientirung. Hk.

Kozloff. Diagrammomètre, auxiliaire mécanique pour les études des courbes. C. R. CXI. 166-168.

Soweit aus der Beschreibung ohne Abbildung ersichtlich ist, besteht der Apparat aus einer verticalen Tafel mit aufgezeichneten horizontalen Linien in gleichen Abständen. Vor dieser befindet sich eine Reihe verticaler Fäden, die zusammen mit den horizontalen Linien der Tafel ein Coordinatennetz bilden. Auf den Fäden sind Ringe verschiebbar, durch welche einzelne Punkte irgend einer Curve markirt werden. Jeder Ringordinate y entspricht eine verticale (gleichmässig oder variabel profilirte) Kette, die an einem Wagbalken hängt und diesen durch ihr (mit y oder $\varphi(y)$ proportionales) Gewicht beeinflusst. Damit stehen verschie-

dene Zeigerwerke in mechanischer Verbindung, welche die Werte von verschiedenen Functionen, wie

$$\int y\,dx,\ \int y^2 dx,\ \int +\sqrt{(y-y_0)^2}\,dx,\ \int\sqrt{1+y'^2}\,dx,\ \int xy\,dx,\ \int x\varphi(y)\,dx$$

u. s. w. anzeigen. Der Apparat scheint sich übrigens mehr zu überschlägigen (statistischen) als zu exacten geometrischen Untersuchungen zu eignen. Hk.

Capitel 5.

Neuere synthetische Geometrie.

A. Allgemeines.

C. Juel. Ueber einige Grundgebilde der projectiven Geometrie. Acta Math. XIV. 1-30.

Die Hauptresultate der Untersuchungen, mit denen wir uns jetzt zu beschäftigen haben, sind schon in der Doctordissertation des Verfassers zu finden (Kopenhagen 1885, vergl. F. d. M. XXI. 1889. 595); doch ist die Begründung verschieden, insbesondere bleiben alle algebraischen Betrachtungen sorgfältig ausgeschlossen.

„Die zweidimensionale Kette“. Durch diesen Namen und das Symbol k^{II} wird eine solche in einer imaginären Ebene liegende Punktsammlung bezeichnet, dass, wenn A, B, A', B' vier beliebige ihrer Punkte sind, auch der Punkt $AB.A'B'$ ein solcher ist. Eine Gerade, welche mit k^{II} eine „einfache Kette k^I“ (d. h. eine Kette im Sinne Staudt's) gemein hat, nennt man zur Kette „adjungirt“. Durch eine Involution von Punktepaaren, welche in einer in k^{II} enthaltenen einfachen Kette liegt, werden zwei Punkte bestimmt, welche durch die Kette „harmonisch getrennt“ oder in Bezug auf dieselbe „symmetrisch“ genannt werden sollen. Die Trägercongruenz der Punkte einer zweidimensionalen Kette wird aus den reellen Doppeltangenten eines reellen Torsus dritter Klasse gebildet. Eine zweidimensionale Kette ist eindeutig be-

stimmt durch 1) vier Punkte, 2) drei Punkte und eine adjungirte Gerade, 3) einen Punkt und drei adjungirte Geraden, 4) vier adjungirte Geraden; oder wenn sie zwei Punkte enthalten und zwei andere harmonisch trennen, oder endlich zwei Punktepaare harmonisch trennen soll. Schliesst man die in eine Gerade zerfallenden Ketten ganz von der Betrachtung aus, so sind in projectiver Beziehung alle Ketten gleich berechtigt; in nicht projectiver Beziehung finden sich specielle Ketten: um eine Klassification derselben zu geben, stützt sich der Verfasser auf die Lage der Kette in Bezug auf die reelle Axe u seiner (imaginären) Ebene. Er zählt daher folgende drei Fälle auf: I. Die reellen Punkte von u gehören alle der Kette an; II. u ist der Kette adjungirt; III. u hat einen und nur einen Punkt mit der Kette gemein. Diese Einteilung findet sofort eine Anwendung auf die Frage, durch wie viele centrische Projectionen sich vier allgemeine Punkte einer imaginären Ebene in vier reelle Punkte einer anderen Ebene übertragen lassen: die gesuchte Zahl ist höchstens drei oder zwei, je nachdem sämtliche Projectionscentren reell sein sollen oder nicht. Zwei zweidimensionale Ketten haben im allgemeinen einen oder auch drei Punkte, sowie bezw. eine oder auch drei adjungirte Geraden gemein; haben sie nur einen Punkt gemein, so giebt es zwei Punkte, welche durch beide Ketten harmonisch getrennt sind. Wenn zwei Ketten mehr als drei Punkte gemein haben, so bestehen die gemeinsamen Punkte aus allen Punkten einer einfachen Kette und noch einem isolirten Punkte.

„Die zwei einfachsten Punkttransformationen einer Ebene.“ Nach Staudt (Beiträge Nr. 215) werden zwei einförmige Gebilde zu einander projectiv genannt, wenn sie so auf einander bezogen sind, dass jedem Elemente des einen Bildes ein Element des anderen entspricht, und überdies je zwei homologe Würfe, was den Sinn anbelangt, von einerlei Art sind. Lässt man diese letzte Bedingung fallen, so erhält man eine neue Verwandtschaft, welche der Verfasser „symmetral“ oder auch eine „Symmetralität“ zu nennen vorschlägt. Eine solche Beziehung ist durch vier Paare entsprechender Punkte bestimmt. Wenn sie auf den

Punkten einer Geraden betrachtet wird, so werden entweder zwei oder auch kein Punkt des Trägers in sich transformirt: im zweiten Falle giebt es ein und nur ein Paar Punkte, die sich vertauscht entsprechen. Eine „involutorische" Symmetralität ist durch zwei Punktepaare bestimmt, insofern diese einer und derselben Kette angehören, und hat keinen oder alle Punkte einer einfachen Kette als selbstentsprechend. Jede symmetrale Verwandtschaft kann durch drei, eine projective dagegen durch vier involutorische Symmetralitäten ersetzt werden. Die Schnittpunkte entsprechender Geraden in zwei symmetral-gepaarten Strahlenbüscheln bilden, wenn diese eine entsprechende Gerade gemein haben, eine zweidimensionale Kette.

Andere Eigenschaften der Symmetralitäten neben den den Projectivitäten entsprechenden findet der Leser in der Originalarbeit selbst. La.

C. Segre. Un nuovo campo di ricerche geometriche. Saggio. Torino Atti XXV. 276-301, 430-457; XXVI. 35-71, 592-612.

Die Geschichte der Mathematik bietet so zahlreiche Beispiele gleichzeitiger, von einander unabhängiger Untersuchungen über denselben Gegenstand, identischer Resultate, welche verschiedene Forscher erlangt haben, dass man sich nicht gerade wundern wird bei der Wahrnehmung der überaus grossen Aehnlichkeit, welche zwischen den zu besprechenden Forschungen nebst ihren Ergebnissen und denen von Herrn Juel besteht, von welchen der gegenwärtige (vergl. das vorangehende Referat) und der vorige (S. 595) Band der F. d. M. Nachricht geben. Die Hinzufügung, dass diese Aehnlichkeit ganz zufällig ist, kann überflüssig erscheinen; nicht unnütz ist umgekehrt die Bemerkung, dass, während Herr Juel nur die ersten Eigenschaften der Gebilde bewiesen hat, mit denen er die projective Geometrie bereichert, die Untersuchungen des Herrn Segre eine ausführliche Theorie ausmachen, welche in fast alle Gebiete der Mathematik eindringen dürfte.

„Allgemeine Eigenschaften der antiprojectiven Verwandtschaften oder Antiprojectivitäten". Betrachtet man die Verwandt-

schaften zwischen zwei Grundgebilden erster Stufe, welche die Eigenschaften besitzen, vier harmonische Elemente in vier andere überzuführen, und beschränkt man sich auf die reellen Elemente, so kann man beweisen, dass eine solche durch drei Paare entsprechender Punkte eindeutig bestimmt ist. Sieht man aber von dieser Beschränkung ab, so kann man beweisen, dass es zwei Verwandtschaften der genannten Art giebt. Die eine ist die gewöhnliche Projectivität, die andere wird durch Herrn Segre „Antiprojectivität" genannt; dieselbe deckt sich mit der Juel'schen Symmetralität. Sie ist durch drei Paare entsprechender Punkte eindeutig bestimmt; das Product von *n* Antiprojectivitäten ist eine Projectivität oder eine Antiprojectivität, je nachdem *n* eine gerade oder ungerade Zahl ist; zwei entsprechende Würfe sind entweder beide neutral oder entgegengesetzten Sinnes.

Zwei Gebilde zweiter oder dritter Stufe heissen „antiprojectiv" (bezw. „anticollinear" oder „antireciprok"), wenn zwischen ihren Elementen eine solche eindeutige, stetige, nicht-projective Beziehung besteht, dass je zwei ungleichnamige incidente Elemente der einen zweien ungleichnamigen incidenten Elementen der anderen entsprechen. In zwei solchen Gebilden sind auch die untergeordneten Gebilde erster Stufe antiprojectiv und zwei entsprechende Würfe conjugirt. Die Antireciprocität unter zwei Gebilden zweiter oder dritter Stufe ist durch vier oder fünf Paare entsprechender Punkte bestimmt und kann in einer ganz ähnlichen Weise construirt werden, wie gewöhnlich eine Projectivität construirt wird.

Die bemerkenswerteste Antireciprocität zwischen den Elementen derselben Gebilde ist die „Conjugation" (conjugio), bei welcher jedes Element seinem imaginär-conjugirten entspricht. Die Bemerkung, dass jede Antiprojectivität als das Product einer Projectivität und der Conjugation gelten darf, kann sehr oft zur Entdeckung oder zum Beweise von Sätzen über die Antiprojectivitäten dienen (vgl. Nr. 6 und 54). Der Verf. macht jedoch von derselben einen sehr spärlichen Gebrauch, um nicht den Antiprojectivitäten einen untergeordneten Platz in Bezug auf die Projectivitäten zu geben. Auf die Antiprojectivitäten, welche zwei Kegelschnitte, Quadri-

flächen oder Raumcurven dritter Ordnung in einander überführen, weist er besonders hin. In einer Antiprojectivität kann man die Ordnungselemente und auch die involutorischen Punktepaare (Punkte, welche sich gegenseitig entsprechen) betrachten. Hierauf gründet der Verf. eine Einteilung der Antiprojectivitäten in den Gebilden erster, zweiter oder dritter Stufe; der Kürze wegen wollen wir jedoch die Beschreibung der verschiedenen Arten unterdrücken. Endlich wird die analytische Darstellung der betrachteten Beziehungen erläutert: in einer Anticollineation sind die Coordinaten eines Elementes linearen Formen der Conjugirten der Coordinaten der entsprechenden Elemente proportional; eine Antireciprocität wird dagegen durch eine gleich Null gesetzte bilineare Form dargestellt, in welcher die Veränderlichen die Coordinaten eines Elementes und die imaginär-conjugirten der Coordinaten eines mit dem entsprechenden Gebilde incidenten Elementes sind.

„Die Antinvolutionen und die Ketten". Eine Antinvolution ist eine Antiprojectivität, welche mit ihrer inversen zusammenfällt; eine Antiprojectivität in einem Gebilde r^{ter} Stufe ist involutorisch, wenn sie k Paare wechselseitig entsprechender Punkte und $r+2-2k$ Doppelpunkte enthalten soll, wo k eine der Zahlen 0, 1, ... sein kann. Hat eine Antinvolution $n+2$ Doppelpunkte, so hat sie unendlich viele; dieselben bilden eine „Kette r^{ter} Stufe" oder „r-fache Kette". Die projective Geometrie einer Kette r^{ter} Stufe ist von der projectiven Geometrie eines Gebildes r^{ter} Stufe nicht verschieden. Eine Kette r^{ter} Stufe ist durch alle Punkte gebildet, welche in Bezug auf $r+2$ gegebene Elemente eines Gebildes r^{ter} Stufe reelle Coordinaten haben. Daraus folgt eine einfache analytische Darstellung der Elemente einer Kette, welche sehr natürlich auf die ausgearteten Ketten führt. Nach einer Digression zur Erläuterung der Anwendung der ausgearteten Kette auf die Theorie der Berührungen unter Gebilden, welche aus unendlich vielen Punkten bestehen, kehrt der Verf. zur Hauptsache zurück, indem er der Reihe nach die Gebilde erster, zweiter und dritter Stufe erforscht, um die wichtigsten Eigenschaften der bezüglichen Antiprojectivitäten zu beweisen: Wir

wollen nur bemerken, dass in solchen Untersuchungen die Notwendigkeit des Begriffs der Kette im klarsten Lichte erscheint.

„Die Antipolaritäten, die Hyperkegelschnitte und die Hyperquadrifläche". Als Analoga der ebenen und räumlichen Polarität im antiprojectiven Gebiete kann man eine gewisse Verwandtschaft betrachten, welche der Verf. „Antipolarität" nennt, und auf dieselbe die gewöhnlichen Benennungen übertragen. Eine mit einem Ordnungspunkte versehene ebene Antipolarität hat ∞^3 Ordnungspunkte, welche einen „Hyperkegelschnitt" bilden. Ihre Berührungslinien sind die Polaren ihrer Punkte; durch jeden Punkt der Ebene geht eine oder gehen ∞^1 eine Kette bildende Berührungslinien eines Hyperkegelschnitts. Im ersten Falle betrachtet man den Punkt als „innerhalb", im zweiten als „ausserhalb" desselben. Eine mit einem Ordnungspunkte versehene räumliche Antipolarität hat ∞^5 Ordnungspunkte, welche eine „Hyperquadrifläche" bilden. Enthält diese eine Gerade, so erhält sie als Folge hiervon ∞^4 und wird „geradlinig" genannt; in jedem Falle sind ihre Berührungsebenen die Polaren ihrer Punkte. Der Verf. sucht danach die Eigenschaften, welche aus der gleichzeitigen Betrachtung der Antinvolutionen und der Antipolaritäten sich ergeben, und dehnt die Sätze der gewöhnlichen Lehre der Polarität bezüglich eines Kegelschnitts oder einer Quadrifläche auf die neuen durch ihn eingeführten Gebilde aus; wir würden die Grenzen eines Berichtes überschreiten, wenn wir alle so erhaltenen Resultate anführen wollten. Doch darf das Folgende nicht unerwähnt bleiben: bezeichnet man allgemein durch $\bar{z}$ die imaginär-conjugirte Zahl zu z, so kann man eine Antipolarität durch eine Gleichung in der folgenden Form darstellen:

$$(1) \qquad f \equiv \sum a_{ik} x_i \bar{y}_k = 0, \quad \text{wo} \quad a_{ik} = \bar{a}_{ki},$$

und den bezüglichen Hyperkegelschnitt oder die Hyperquadrifläche als

$$(2) \qquad \varphi \equiv \sum a_{ik} x_i \bar{x}_k = 0;$$

die Berührungs-Linien oder Ebenen derselben genügen der Gleichung $\sum \alpha_{ik} \xi_i \bar{\xi}_k = 0$, wo die Determinanten $|a_{ik}|$ und $|\alpha_{ik}|$ reciprok sind.

Als kanonische Form einer Antipolarität kann gelten:

$$\Sigma a_i x_i \bar{y}_i = 0,$$

wo die a_i reell sind: haben sie nicht dasselbe Zeichen, so bestimmt diese Relation einen Hyperkegelschnitt oder eine Hyperquadrifläche, welche durch die Gleichung

$$\Sigma a_i |x_i|^2 = 0$$

dargestellt wird.

„Lineare Systeme und Durchschnitte von Hyperkegelschnitten und Hyperquadriflächen". Sind $f_0 = 0$, $f_1 = 0, \ldots, f_r = 0$ $r+1$ Gleichungen des Typus (1), welche also ebenso viele Polaritäten in einem Gebilde zweiter oder dritter Stufe darstellen, so wird durch sie ein System von ∞^r Polaritäten bestimmt. Jede derselben ist durch eine Gleichung wie

$$(3) \qquad \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_r f_r = 0$$

dargestellt, wo die λ beliebige reelle Zahlen sind. Setzt man in dieser letzten Gleichung $y = x$, so erhält man ein System von ∞^2 Hyperkegelschnitten oder Hyperquadriflächen. Nimmt man an, dass den λ complexe Werte beigelegt werden können, so erhält man aus (3) ein ∞^{2r} Antireciprocitäten-System, in welchem das besagte ∞^r System mitbegriffen ist. Jede Antipolarität des Systems (3) ist durch k ($\leqq \frac{1}{2} r$) Paare entsprechender Punkte und $r-2k$ Ordnungspunkte des Systems im allgemeinen eindeutig bestimmt.

Die Ordnungspunkte einer nicht-involutorischen, ebenen oder räumlichen Antireciprocität bilden, wenn sie existiren, die Grundmannigfaltigkeit eines Büschels von Hyperkegelschnitten oder Hyperquadriflächen. Umgekehrt kann jede solche Mannigfaltigkeit auf diese Weise erzeugt gedacht werden. Daraus folgt: a) In der Ebene erzeugen zwei antiprojective Strahlenbüschel die Basis Q eines Büschels von Hyperkegelschnitten. b) Im Raume erzeugen zwei antireciproke Bündel oder zwei anticollineare Ebenenbüschel die Basis Γ eines Büschels von Hyperquadriflächen.

Die Eigenschaften der Mannigfaltigkeiten Q und Γ werden sorgfältig untersucht in dem Abschnitte (Nr. 42-49), welcher die

Büschel methodisch behandelt. Inbesondere begründet der Verf. ihre Einteilung in Arten und zählt die speciellen Fälle derselben ab.

Der letzte Abschnitt der in Rede stehenden Arbeit ist den „Hyperkegelschnitt-Netzen" gewidmet. Sind drei ebene Antipolaritäten gegeben:

$$(4) \qquad \Sigma a_{ik} x_i \bar{y}_k = 0, \quad \Sigma b_{ik} x_i \bar{y}_k = 0, \quad \Sigma c_{ik} x_i \bar{y}_k = 0,$$

wo

$$a_{ik} = \bar{a}_{ki}, \quad b_{ik} = \bar{b}_{ki}, \quad c_{ik} = \bar{c}_{ki},$$

welche nicht demselben Büschel angehören, so ist dadurch ein Netz von Antireciprocitäten und eines von Antipolaritäten mitbestimmt. Zwei in Bezug auf die Antipolaritäten (4) reciproken Punkte sind reciprok auch in Bezug auf alle Antipolaritäten des Netzes. Fallen sie zusammen, so geben sie einen Grundpunkt des Netzes, einen singulären Punkt für eine Antireciprocität des Netzes. Es kann geschehen, dass jeder Punkt der Ebene einen reciproken Punkt in Bezug auf alle Antipolaritäten des Netzes hat. Im allgemeinen aber bilden die Punkte, welche diese Eigenschaft besitzen, eine kubische Mannigfaltigkeit γ, welche durch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \Sigma a_{i1} x_i & \Sigma a_{i2} x_i & \Sigma a_{i3} x_i \\ \Sigma b_{i1} x_i & \Sigma b_{i2} x_i & \Sigma b_{i3} x_i \\ \Sigma c_{i1} x_i & \Sigma c_{i2} x_i & \Sigma c_{i3} x_i \end{vmatrix} = 0$$

dargestellt wird. Das Netz giebt ferner zu zwei hyperalgebraischen symmetrischen Verwandtschaften, Ω und Π, unter den Punkten von γ Anlass. Zwei Punkte sind in einer derselben Ω entsprechend, wenn sie in Bezug auf alle Antipolaritäten des Netzes reciprok sind; in der zweiten Π, wenn sie die Centren der Paare von den in dem Netze enthaltenen antiprojectiven Büschelpaaren sind. Die Ordnungspunkte der Verwandtschaft Ω sind die Grundpunkte des Netzes; wenn sie überhaupt existiren, so bilden sie eine einfach-unendliche Mannigfaltigkeit, welche vom Verf. durch den Namen „kubischer Faden" oder „Faden dritter Ordnung" bezeichnet wird. Bemerkenswert ist, dass die Verwandtschaft Π immer einen aus Ordnungspunkten bestehenden kubischen

Faden enthält; sie kann ferner immer als eine Verwandtschaft Ω angesehen werden. Man kann weiter beweisen, dass jede γ, welche einen kubischen Faden enthält, zu einer reellen kubischen ebenen Curve projectiv ist. Daraus folgt, dass der kubische Faden einen oder zwei Zweige haben kann. Andere wichtige Resultate, welche die eindeutigen Beziehungen zwischen den Punkten einer ebenen Curve dritter Ordnung behandeln, welche daher die Segre'sche Untersuchung mit anderen über die Anwendung der elliptischen Functionen auf die Geometrie verbinden, findet der Leser in der Original-Arbeit.

Wenn wir uns entschliessen, hier unseren Bericht abzuschliessen, so ist es keineswegs in der Ueberzeugung, alles gesagt zu haben, was gesagt zu werden verdiente. Es genügt, die metrischen Sätze, die Ausdehnung der obigen Resultate auf beliebig ausgedehnte Räume und die vielfachen vom Verf. angedeuteten Beziehungen zwischen seiner Methode und algebraischen sowie functionentheoretischen Fragen zu nennen, um dem Leser zu beweisen, dass die Segre'sche Abhandlung sehr viel mehr enthält, als aus dem obigen Berichte sich ergiebt. Wenn der Leser durch unsere Ausführungen zur Lectüre des Saggio des Herrn Segre geführt werden sollte, so wird er gewiss die Bemerkung machen, dass die Wurzeln der Betrachtung in den durch Staudt eingeführten Begriffen und Methoden liegen; er wird sich daher mit uns der Sätze erinnern und auf Staudt anwenden, welche Kummer als Schluss seiner Allgemeinen Theorie der geradlinigen Strahlensysteme schrieb: „Es zeigt sich auch hierin, wie die von Gauss in die Wissenschaft eingeführten Begriffe durchgängig denjenigen Charakter wahrer Allgemeinheit an sich tragen, durch welchen sie ihren Einfluss weit über die Gebiete hinaus erstrecken, in denen sie ursprünglich entstanden sind" (J. für Math. LVII. 230). La.

A. Ameseder. Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der Collineationen und Reciprocitäten. (I. Mitteilung.) Monatsh. f. M. I. 371-416.

Die mit der „rein-geometrischen Theorie der Darstellung binärer Formen durch Punktpruppen auf der Geraden" von H. Wiener (vgl. F. d. M. XVII. 1885. 592ff.) vertrauten Leser dürften sehr leicht erkennen, dass Herr Ameseder dieselbe als Ausgangspunkt gewählt hat. Nach einer allgemeinen Entwickelung der Sätze über die cyklischen Reihen einer Projectivität (im eindimensionalen Gebiete) und ihre „conjugirte" Involution (dieselbe, welche wir früher nach Herrn Segre „Ordnungsinvolution" genannt haben; F. d. M. XVIII. 1886. 548), von welchen Sätzen etliche aus der oben angeführten Wiener'schen Arbeit entlehnt sind, beschäftigt sich der Verfasser mit den Beziehungen, welche zwischen einer Geraden und einem Kegelschnitte, zwei Kegelschnitten oder zwei durch ein Paar windschiefer Geraden gehenden Flächen zweiter Ordnung statt haben. Den bezüglichen Sätzen giebt er einen solchen Ausdruck, dass sie in keinem Falle ihre Geltung verlieren. Es würde ganz überflüssig sein, diejenigen anzuführen, welche als verallgemeinerte Schnittsätze angesehen werden können. Aber wir glauben eine Pflicht zu erfüllen, wenn wir auf die Erweiterung der Kenntnisse bezüglich derjenigen bemerkenswerten Lagen hinweisen, welche drei lineare Congruenzen besitzen können. Die erste ist durch die folgende Eigenschaft gekennzeichnet: durch einen Punkt des Raumes gehen drei Congruenzstrahlen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, welche drei Ebenen $\gamma_2\gamma_3$, $\gamma_3\gamma_1$, $\gamma_1\gamma_2$ bestimmen; diese Ebenen enthalten drei weitere Strahlen $\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3$, die sich in einer vierten Ebene befinden, so dass die Strahlenpaare $\gamma_1\gamma'_1, \gamma_2\gamma'_2, \gamma_3\gamma'_3$ sich in einer vierten Ebene befinden. Ausser dieser („tetraedral" genannten) Lage von drei Congruenzen lässt sich eine andere nachweisen, bei welcher die zu den Congruenzen gehörigen, gescharten Collineationen in einer Regelschar, deren Leitschar den Congruenzen gemeinsam ist, drei Involutionen erzeugen, von denen jede zu den beiden anderen harmonisch ist.

Wenn auch einige der obigen Sätze die Ebene und den Raum betreffen, so sind sie doch aus der methodischen Erforschung der Gebilde erster Stufe entsprungen, welche den Gegenstand des ersten Abschnittes der in Rede stehenden Ab-

handlung bildet. Im zweiten werden die Collineationen im zwei- und drei-dimensionalen Gebiete gründlich untersucht, um die ausgezeichneten Elemente einer (allgemeinen) Collineation zu bestimmen und daraus eine Einteilung dieser Verwandtschaften in Arten zu gründen: Herr A. findet das wohl bekannte Resultat wieder, dass es zwei Arten ebener und vier räumliche allgemeine Collineationen giebt. Wie und welche anderen ausgezeichneten Elemente man in einer Collineation entdecken und ihre Eigenschaften aufstellen kann, mag der Leser aus der Originalarbeit selbst entnehmen.

Da der Verfasser durch die zwei besprochenen Abschnitte die Grundeigenschaften der im gewöhnlichen Raume sich darbietenden Collineationen erschöpft zu haben meint, so wendet er sich im dritten zu Systemen von Collineationen. Nach einem Hülfssatz über Projection und Schnitt eines Vierecks behandelt er der Reihe nach ein durch eine ebene Collineation bestimmtes Collineationsnetz und ein analoges, durch eine ebene Collineation bestimmtes Collineationsgebüsch, ferner Collineationssysteme höherer Stufe u. s. w., endlich die (Hermite'schen, durch Herrn Sturm schon geometrisch untersuchten) Collineationen, welche eine Fläche zweiten Grades in sich selbst überführen. Wenn wir alle diese Gegenstände nur flüchtig berühren, so geschieht dies, weil die meisten der erzielten Resultate schon bekannt sind. Die Ableitungsmethode, welche sich auf eine consequente Verwendung der cyklischen Reihen gründet, ist zwar neu; aber es ist unmöglich, hier die Einzelheiten zu verfolgen. Nur mag bemerkt werden, dass der Verfasser seinen Zweck: „für die Collineation eine reingeometrische Theorie, und zwar mit besonderer Berücksichtigung ihrer ausgezeichneten Elemente, zu geben“, vollkommen erreicht zu haben scheint.

Es ist leicht zu sehen, dass der Gedankengang und die Methode des Herrn A. auch auf die Reciprocitäten passt; die Ueberschrift des besprochenen Aufsatzes bietet ein beweiskräftiges Zeugnis, dass Herr A. sich dessen vollkommen bewusst war. Ein zu früher und höchst bedauerlicher Tod hat es verhindert, dass das darin enthaltene Versprechen von dem genannten Geo-

meter gehalten werde. Da die angedeutete Aufgabe uns sehr interessant scheint, so können wir diesen Bericht nicht schliessen, ohne den Wunsch auszusprechen, die schönen Untersuchungen von anderer Seite fortgeführt und zu Ende gebracht zu sehen.

La.

F. Nicoli. Intorno agli elementi uniti di due forme geometriche collineari. Modena Mem. (2) VII. 253-280. Mit 2 Tafeln.

§ I. „Gebilde zweiter (nicht erster wie der Text sagt) Stufe."

„Ist O ein Ordnungspunkt zweier projectiven, conjectiven, nicht-homologen Punktfelder, und sind r, r' zwei durch O gehende entsprechende Geraden, so gehen die Geraden, welche die entsprechenden in r, r' liegenden Punkte verbinden, durch denselben Punkt P; der Ort des Punktes P ist eine Gerade." Aus diesem Satze leitet der Verfasser den folgenden ab: „ABC und $A'B'C'$ seien zwei beliebige in derselben Ebene π liegende Dreiecke und O ein Punkt von π; man bestimme die sechs Punkte $A_1 \equiv OA.BC, \dots, C_1' \equiv OA'.B'C'$ und die drei $AA'.A_1A_1'$, $BB'.B_1B_1'$, $CC'.C_1C_1'$; dann liegen diese letzten auf einer bestimmten Geraden o." Daraus folgt, dass durch die gegebenen Dreiecke eine eindeutige Verwandtschaft zwischen den Punkten O und der Geraden o von π bestimmt ist. Fällt O auf die Gerade BC, so geht o durch A' u. s. w.; fällt O in A, so fällt o in $B'C'$ u. s. w. Beschreibt O eine Gerade, so hüllt o einen AA', BB', CC' berührenden Kegelschnitt ein; setzt man insbesondere voraus, dass A', B', C' resp. in B, C, A oder C, A, B fallen, so wird o die Polare von O in Bezug auf das Dreieck ABC. Im allgemeinen Falle kann man das Entsprechen zwischen den Ecken der zwei Dreiecke auf sechs verschiedene Weisen herstellen; in Folge dessen ist jeder Punkt O von π mit sechs Geraden verbunden: diese berühren einen Kegelschnitt. Da endlich die Ecken eines gegebenen Sechsecks auf zehn Arten als die Ecken zweier Dreiecke angesehen werden können, so kann man jedem Punkte O von π 6×10 Geraden entsprechen lassen, welche zu je sechs einen Kegelschnitt berühren.

§ II. „Gebilde dritter Stufe.“

Um die obigen Betrachtungen auf den Raum auszudehnen, stellt der Verfasser zuerst den folgenden Satz auf: „Ist O ein Ordnungspunkt zweier projectiven, conjectiven, nicht-homologen Räume, und sind r, r' zwei durch O gehende entsprechende Geraden, so gehen die Geraden, welche die entsprechenden in r, r' liegenden Punkte verbinden, durch denselben Punkt P; der Ort des Punktes P ist eine Ebene.“ Daraus fliesst: „$ABCD$ und und $A'B'C'D'$ seien zwei beliebige Tetraeder und O ein willkürlicher Punkt; man bestimme die acht Punkte $A_1 \equiv OA.BCD$, ..., $D'_1 \equiv OD'.A'B'C'$ und danach die vier $AA'.A_1A'_1$, ..., $DD'.D_1D'_1$; dann liegen diese letzten auf einer bestimmten Ebene ω.“ Durch die gegebenen Tetraeder wird daher eine eindeutige Verwandtschaft zwischen den Punkten O und den Ebenen ω hergestellt. Fällt O auf die Ebene BCD, so geht ω durch A' u. s. w.; fällt O in A, so fällt ω mit $B'C'D'$ zusammen u. s. w. Beschreibt O eine Gerade, so hüllt ω eine abwickelbare Fläche dritter Klasse ein; setzt man insbesondere voraus, dass A, B, C, D resp. mit $B'C'D'A'$ zusammenfallen, so wird ω die Polarebene von O in Bezug auf das Tetraeder $ABCD$. Da endlich die Ecken eines gegebenen Achtecks auf 35 Weisen als die Ecken zweier Tetraeder angesehen werden können, so entsprechen je dem Punkte O im ganzen $35 \times 1.2.3.4 = 840$ Ebenen ω, welche in 140 sechsgliedrige Gruppen zerfallen; jede Gruppe enthält sechs Berührungsebenen eines Quadrikegels.

Dies sind etwa die hauptsächlichsten Resultate der geometrischen Untersuchung des Herrn Nicoli: andere Sätze sind bekannt, oder durch das Reciprocitätsgesetz aus den angeführten ableitbar, oder endlich besondere durch die metrische Geometrie dargebotene Fälle. Viele werden auf die Auflösung von Aufgaben angewandt.

La.

B. Klein. Theorie der Elemententripel einstufiger Elementargebilde. Teil I. Das Tripelnetz. Annali di Mat. (2) XVIII. 213-226.

Die vom Verfasser in einer früheren Schrift [S. F. d. M.

XIII. 1881. 464] behandelte trilineare Verwandtschaft zwischen drei einstufigen Gebilden liefert, wenn die drei Gebilde denselben Träger erhalten und die Gleichung symmetrisch in den drei Variabeln ist, das sogenannte Tripelnetz. In der vorliegenden Arbeit zeigt der (inzwischen verstorbene) Verfasser, wie die Theorie des letzteren auch direct entwickelt werden kann, und zwar mit Hülfe gewisser Sätze über Kegelschnitte und die ihnen eingeschriebenen Dreiecke. Hieran schliesst sich der Beweis des zwischen zwei conjugirten (apolaren) Tripeln bestehenden Reciprocitätsgesetzes und die Construction des sechsten Punktes zweier conjugirten Tripel, von denen die übrigen fünf gegeben sind. Schg.

T. Brodén. Ueber die Doppelpunkte bei der projectiven ebenen Correspondenz. Hoppe Arch. (2) IX. 225-249.

Fallen zwei collinear verwandte Ebenen zusammen, so ergeben sich drei Doppelpunkte, d. h. Punkte, die sich selbst entsprechen. Die Lage dieser Doppelpunkte wird nun in der Weise untersucht, dass die Frage beantwortet wird, welche zwei Punkte nebst einem gegebenen Punkte Doppelpunkte werden können, wenn die zusammenfallenden Punktfelder in einer bestimmten Verwandtschaft stehen. Es handelt sich wesentlich um die Auffindung der Punkte, deren Abstände von einem gegebenen Punkte bei der Transformation unverändert bleiben. Die zu untersuchende Abstandscurve ist vom vierten Grade und einfach circular. Die Methode der Untersuchung ist analytisch. Scht.

H. Schröter. Eine Construction für das Chasles'sche Problem der Projectivität. Schlömilch Z. XXXV. 59-61.

In der Ebene seien fünf Punkte A, B, C, D, E gegeben, von denen keine drei in einer Geraden liegen, sowie fünf Punkte A', B', C', D', E', die auf einer und derselben Geraden liegen. Einen Punkt O in der Ebene zu bestimmen, sodass OA, OB, OC, OD, OE projectiv zu A', B', C', D', E' werden. Dieses Chasles'sche Problem hatte nur Lösungen (Chasles, C. R. 1853; Cremona,

Curve piane, art. 62) erfahren, die zwar leicht in Worten auszusprechen sind, aber in der wirklichen Construction sehr umständlich werden. Schröter löst die Aufgabe hier nach denselben Principien, aber zugleich so, dass die Ausführung der Construction wesentlich einfacher wird. Scht.

A. Adler. Ueber die zur Ausführung geometrischer Constructionsaufgaben zweiten Grades notwendigen Hülfsmittel. Wien. Ber. XCIX. 846-859. Mit 1 Taf.

In der von Mascheroni (Pavia 1797) und von Steiner (Berlin 1833) angebahnten Untersuchungsrichtung über die zur Lösung von geometrischen Constructionsaufgaben entbehrlichen bezw. notwendigen Hülfsmittel ist hier eine beachtenswerte Arbeit verfasst, welche zeigt, dass jede mit Zirkel und Lineal lösbare Aufgabe auch lösbar ist, wenn weiter keine Hülfsmittel gestattet sind als entweder nur das Lineal (zwei Parallele in constantem Abstande) oder nur der rechte Winkel (etwa aus Holz) oder nur ein bestimmter spitzer Winkel (etwa aus Holz). Da wir durch die Arbeit von Steiner wissen, dass durch alleinige Anwendung des Lineals nur dann jede Aufgabe zweiten Grades lösbar ist, wenn ein fester Kreis in der Ebene mit benutzt werden darf, so ist natürlich die Anwendung des Lineals im Sinne des Herrn Adler anders zu verstehen als bei Steiner, nämlich so, dass dasselbe auch gestattet, zu einer Geraden eine Parallele im *festen* Abstande (Breite des Lineals) zu ziehen. Ebenso soll die Anwendung des Holzwinkels z. B. auch gestatten, in einer Geraden den Punkt zu suchen, von dem aus eine feste Strecke unter dem Winkel des Holzwinkels erscheint. So ist also gezeigt, dass in der „Praxis“ jedes von den vier wichtigsten Zeichen-Hülfsmitteln (Zirkel, Lineal, rechter Winkel, spitzer Winkel) allein ausreicht, um alle Aufgaben zweiten Grades zu lösen. Am Schluss wird noch bewiesen, dass durch Schieben von mehreren rechten Winkeln auch Aufgaben dritten und vierten Grades lösbar werden. Von solchen Aufgaben wurde früher einmal von Kortum gezeigt, dass sie allein mit dem Lineal lösbar werden, wenn ein festgezeich-

neter Kegelschnitt mit benutzt werden darf. Wem die Originalschriften von Mascheroni und Steiner nicht zu Gebote stehen, der kann den wesentlichen Inhalt derselben in Frischauf's gediegener Schrift: „Die geometrischen Constructionen von Mascheroni und Steiner“ (Graz 1869) finden. Scht.

C. A. Laisant. Remarques au sujet du théorème de Carnot. Nouv. Ann. (3) IX. 5-20.

Der Verfasser beweist auf einfachste Weise das Theorem von Carnot in dem allgemeinen Falle, dass die p Seiten eines allgemeinen Polygons von einer Curve n^{ter} Ordnung geschnitten werden. Dieselben Betrachtungen führen dann auch zu der der Carnot'schen analogen Relation zwischen den Schnittpunkten, welche eine Fläche n^{ter} Ordnung auf den Seiten eines räumlichen Polygons ausschneidet. Weiter ergiebt sich, dass, während die Umkehrung des Carnot'schen Satzes in der Ebene für $n = 1$ und $n = 2$ Bedeutung hat, sie im Raume für $n = 1$, $n = 2$ und $n = 6$ passt. Für $n = 6$ erhält man folgenden Satz: „Auf jeder der 14 Seiten eines räumlichen 14-Seits $ABC\dots L$ seien sechs Punkte $P_1, P_2, \dots, P_6$, ferner $Q_1, Q_2, \dots, Q_6$ etc. gelegen, und zwar derartig, dass

$$\alpha_1 . \alpha_2 \dots \alpha_{14} = 1$$

ist, wenn

$$\alpha_1 = \frac{P_1B}{P_1A} \cdots \frac{P_6B}{P_6A}, \quad \alpha_2 = \frac{Q_1C}{Q_1B} \cdots \frac{Q_6C}{Q_6B}, \quad \dots, \quad \text{bis } \alpha_{14} = \cdots.$$

Dann liegen die 84 Punkte $P_1, \dots, P_6$, $Q_1, \dots, Q_6$ etc. auf einer und derselben Fläche sechsten Grades, während doch eine solche punktallgemein gedachte Fläche schon durch 83 Punkte eindeutig bestimmt ist.“ Weitere Betrachtungen des Verfassers geben Analoga des Carnot'schen Satzes für Flächen gegebener „Klasse“.

Scht.

W. Stahl. Ueber projective involutorische Gebilde. J. für Math. CVII. 179-188.

Eine Punktreihe

$$x_i = a_i + \lambda b_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

liegt mit einem zu ihr projectivischen Ebenenbüschel

$$x_i = \alpha_i + \lambda\beta_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

involutorisch, wenn

$$(a\beta) - (b\alpha) = 0; \quad (a\beta) = \sum_{i=1}^{4} a_i\beta_i$$

ist. Die Ebenenbüschel, welche zu allen Punktreihen eines linearen Systems n^{ter} Stufe

$$x_i = \sum p^{(\tau)} a_i^{(\tau)} + \lambda \sum p^{(\tau)} b_i^{(\tau)} \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

involutorisch liegen, bilden daher eine lineare Mannigfaltigkeit der Stufe $6-n$; und es tritt hier der merkwürdige Dualismus analytisch zu Tage, den Herr Reye für die linearen Mannigfaltigkeiten aus projectivischen Ebenenbüscheln aufgedeckt hat. Sind eine Punktreihe und ein Ebenenbüschel zweiter Ordnung

$$x_i = a_i + 2b_i\lambda + c_i\lambda^2, \quad u_i = \alpha_i + 2\beta_i\lambda + c_i\lambda^2 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

projectiv auf einander bezogen, so sind auch die Osculanten der beiden Gebilde zu einander projectiv. Jede Osculante des Ebenenbüschels liegt zu einer Osculante der Punktreihe involutorisch. Indem man zweitens jeder Ebene des Büschels den so definirten Punkt der Punktreihe zuordnet, erhält man eine projectivische Umformung derselben in sich. Die beiden Gebilde liegen in Involution, wenn die so entstandene Beziehung eine involutorische ist. Die analytische Bedingung dafür ist folgende:

$$(a, \gamma) - 2(b, \beta) + (c, \alpha) = 0.$$

Dieselbe drückt offenbar aus, dass zu einer n-fachen linearen Mannigfaltigkeit projectiver Punktreihen zweiter Ordnung eine $(10-n)$-fache lineare Mannigfaltigkeit projectiver Ebenenbüschel in Involution liegt. Da durch die Beziehung der Osculanten der Punktreihe auf die entsprechenden Osculanten des Ebenenbüschels eine ganz bestimmte collineare Beziehung der Ebene der ersteren auf den Ebenenbüschel der letzteren zu Stande kommt, so liegt gleichzeitig mit einer n-fachen linearen Mannigfaltigkeit collinearer Ebenen eine $(10-n)$-fache lineare Mannigfaltigkeit collinearer Ebenenbündel in Involution. Wiederum tritt hier der Dualismus zu Tage, den Herr Reye an den Mannigfaltigkeiten S_n und S_{10-n} collinearer Ebenenbündel beobachtet hatte. Die Geometrie der

n-fachen Mannigfaltigkeit collinearer Ebenen deckt sich mit der der $(10-n)$-fachen Mannigfaltigkeit collinearer Bündel. Ein Ebenenbüschel dritter Ordnung liegt mit einer Punktreihe dritter Ordnung in Involution, wenn unter den Constanten ihrer Gleichungen

$$x_i = a_i+3b_i\lambda+3c_i\lambda^2+d_i\lambda^3 \text{ und } u_i = \alpha_i+3\beta_i\lambda+3\gamma_i\lambda^2+3\delta_i\lambda^3$$
$$(i = 1, 2, 3, 4)$$

die Beziehung

$$(a\delta)-3(b\gamma)+3(c\beta)-(d\alpha) = 0$$

besteht. Es liegt dann wieder mit einer linearen Mannigfaltigkeit n^{ter} Stufe projectivischer Punktreihen eine lineare Mannigfaltigkeit $(14-n)^{\text{ter}}$ Stufe projectivischer Ebenenbüschel involutorisch. Erwägt man, dass zwei projectivische Gebilde dritter Ordnung eine reciproke Beziehung ihrer Räume unzweideutig festlegen, so zeigt sich damit der Reye'sche Satz evident gemacht, dass die Theorie der n-fachen Mannigfaltigkeit collinearer Punkträume sich mit der der $(15-n)$-fachen Mannigfaltigkeit collinearer Ebenenräume deckt.

Im Raume n^{ter} Dimension hat man als Bedingung für die involutorische Lage einer Reihe

$$x_i = a_i+n_1a_i'\lambda+n_2a_i''\lambda^2+\cdots+a_i^{(n)}\lambda^n$$

und eines zu ihr projectivischen Büschels

$$u_i = \alpha_i+n_1\alpha_i'\lambda+n_2\alpha_i''\lambda^2+\cdots+\alpha_i^{(n)}\lambda^n$$

die Bedingung $0=$

$$(a\alpha^{(n)})-n_1(a'\alpha^{(n-1)})+n_2(a''\alpha^{(n-2)})-n_3(a'''\alpha^{(n-3)})+\cdots+(-1)^n(a^{(n)}\alpha).$$

E. K.

F. Aschieri. Sulle omografie di 2ª specie. Lomb. Ist. Rend. (2) XXIII. 312-319.

Projicirt man jeden Punkt einer Ebene Ω von drei festen Sehnen x, y, z einer Raumcurve dritter Ordnung C^3 aus auf diese, so erhält man die Tripel X, Y, Z einer Homographie zweiter Stufe oder trilinearen Beziehung Ω_2. Die Schnittpunkte der Ebene mit C^3 sind die dreifachen Punkte der trilinearen Beziehung. Herr Aschieri zeigt, wie man bei einer gegebenen

Ω_2 ein solches System von Axen x, y, z zu construiren hat. Man lege nämlich durch zwei der Axen, y, z, und die C^3 die Fläche zweiten Grades und beziehe, mittels ihrer C^3 einmal treffenden Geraden, C^3 auf den Kegelschnitt C_2, den sie auf Ω ausschneidet. Auf diese Art muss den Schnittpunkten von y, z mit Ω das eine neutrale Paar der zweiten und dritten Reihe von Ω_2 entsprechen, ein Punktepaar also, welches mit einem beliebigen Punkte von C^3 zusammen als X ein Tripel der Homographie bildet. Die Ebenen, welche das andere neutrale Paar gleicher Art von y und z aus projiciren, enthalten den Schnittpunkt zwischen Ω und x. E. K.

V. Martinetti. Sul genere delle curve Ω nelle involuzioni piane di classe qualunque. Palermo Rend. IV. 30-42, 126-142.

Bei einer Involution von der Klasse ν gehört zu jedem Punkte P eine Curve Ω der $(2\nu+1)^{\text{ten}}$ Ordnung aus einem Netze (Ω) zweiter Stufe als Ort der ν Paare entsprechender Punkte, die auf einer von P ausgehenden Geraden liegen. Wenn die h (von einander verschiedenen) Fundamentalpunkte r_1-, r_2-, ..., r_k-fach in der Curve vorkommen, die der allgemeinen Geraden entspricht, und λ_1-, λ_2-, ..., λ_k-fach in der sich selbst entsprechenden Curve Γ, so enthalten die Ω dieselben $(r_1-\lambda_1)$-, $(r_2-\lambda_2)$-, ..., $(r_k-\lambda_k)$-fach; ausserdem gehen dieselben noch durch die isolirten sich selbst entsprechenden Punkte und haben $\varDelta$ Paare gemeinsamer Richtungen in den Fundamentalpunkten, und zwar hat man

$$2\varDelta = \Sigma(a_{ii}-\lambda_i),$$

wo a_{ik} anzeigt, wie oft die (i) entsprechende Fundamentalcurve durch (k) hindurchgeht.

Es sei nun c die Anzahl der linearen Bedingungen, denen, wenn die erwähnten Bedingungen von einander unabhängig sind, die Ω noch zu genügen haben; bestehen unter den erwähnten Bedingungen hingegen γ Abhängigkeiten, so sei $c+\gamma$ die Anzahl der Bedingungen, denen die Ω noch genügen. Alsdann zeigt Herr Martinetti, dass

$$p+c = 2\nu+1 \quad \text{und} \quad p \geqq \nu+\gamma-\varDelta$$

ist. Da sich nun zeigen lässt, dass sowohl ν als auch γ positiv sind, so ist sicher

$$2\nu+1 > p > \nu-\Delta.$$

Für die Fälle $\Delta = 1$, 2 lässt sich noch zeigen, dass

$$p > \nu+1, \quad p > \nu+2$$

ist. Wir wollen bemerken, dass für das Beweisverfahren die Untersuchung der Curven Φ besonders wichtig ist, welche das Verhalten der Ω zu den Fundamentalpunkten teilen, aber weiteren Bedingungen nicht genügen. Das Netz (Φ) wird nämlich durch die Involution in sich selbst übergeführt, und es müssen für die Mannigfaltigkeiten sich selbst entsprechender Φ die bekannten allgemeinen Gesetze gelten. E. K.

Ch. Steinmetz. Ueber die durch ein lineares Flächensystem n^{ter} Ordnung definirten mehrdeutigen involutorischen Raumverwandtschaften. Schlömilch Z. XXXV. 219-236, 272-292, 354-375.

Der Verfasser stellt sich die Aufgabe, die mehrdeutige Verwandtschaft zu untersuchen, welche in einem Flächengebüsch n^{ter} Ordnung durch die Abhängigkeit je n^3 associirter Punkte von einander bestimmt ist. Diese Untersuchungen sind bekanntlich von Herrn Reye angebahnt worden, und für $n = 2$ hat derselbe hieraus die Strahlensysteme zweiter Ordnung construirt.

Einem Punkte entsprechen alle ihm associirten Punkte. Es werden dann folgende Sätze bewiesen.

Einer Geraden l entspricht eine Curve C_l $(n^3-1)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Einer Ebene E entspricht eine Fläche $(n^3-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, allgemein einer Fläche m^{ter} Ordnung eine solche $m(n^3-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Die sich selbst entsprechenden Punkte liegen auf einer Fläche („Kernfläche") $4(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Es folgt dann die Definition eines Complexes, dessen Strahlen je zwei einander associirte Punkte verbinden. Der Verfasser findet für seinen Grad die Zahl $2(n-1)(n^2+n-3)$. Dies ist nicht richtig; der Grad des Complexes ist vielmehr gleich $2n(n-1)(n-2)$. In der That hat Herr Reye gezeigt, dass für

$n=2$ die Verbindungslinien associirter Punkte keinen Complex, sondern ein Strahlensystem bilden. Alle Folgerungen, welche der Verfasser in § 10 aus der Ordnung des Complexes zieht, sind hinfällig.

Für die Strahlencongruenz, deren Strahlen je zwei unendlich nahe associirte Punkte verbinden, wird als Ordnung $2(n-1)(2n^2-n+1)$, als Klasse $6(n-1)^2$ gefunden. Es hätte hier oder wenigstens bei späteren Beispielen bemerkt werden müssen, dass für $n=2$ diese Congruenz aus einer doppelt zählenden Congruenz siebenter Ordnung, dritter Klasse besteht.

In der Fortsetzung wird die Degeneration der Verwandtschaft bei Annahme fester Grundpunkte und Fundamentalcurven untersucht. Zum Schlusse werden specielle Verwandtschaften betrachtet. Immer ziehen sich die Folgerungen aus der falschen Bestimmung des Complexgrades hindurch, was besonders in den Beispielen, wo $n=2$ ist, zu auffallenden und unrichtigen Sätzen führt. W. St.

G. Castelnuovo. Massima dimensione dei sistemi lineari di curve piane di dato genere. Annali di Mat. (2) XVIII. 119-128.

G. Jung. Un' osservazione sul grado massimo dei sistemi lineari di curve piane algebriche. Annali di Mat. (2) XVIII. 129-130.

Die Untersuchungen des Herrn Castelnuovo, wie die des Herrn Jung (vgl. F. d. M. XX. 1888. 601 ff., XXI. 1889. 668 ff.), aus denen die vorliegenden entsprungen sind, behandeln die linearen Systeme von ∞^k algebraischen ebenen Curven, die durch ihre Grundpunkte bestimmt und der Bedingung unterworfen sind, dass die Curven des Systems, welche durch einen Punkt gehen, in Folge dessen nicht alle durch die anderen Punkte gehen. Aus diesen Voraussetzungen folgt, dass unter den Zahlen p (Geschlecht einer beliebigen Curve des Systems), k (Dimension des Systems) und D (Grad des Systems, d. h. Zahl der beweglichen Schnittpunkte zweier Curven des Systems) folgende Ungleichheiten statt haben:

$$k > p+1, \quad D > 2p.$$

Setzt man ferner $p > 0$ und $k > p+2$ voraus, so bilden alle Curven des Systems, welche zweimal durch denselben Punkt gehen, ein System, welches das Geschlecht $p-1$, die Dimension $k = 3$ und den Grad $D = 4$ hat. Allgemeiner, setzt man $p > r-1$ und $k > p+2r$, so bilden alle Curven des Systems, welche zweimal durch r gegebene Punkte gehen, ein System, welches das Geschlecht $p-r$, die Dimension $k-3r$ und den Grad $D-4r$ hat. Daraus folgt, dass in einem linearen System von Curven, deren Geschlecht $p > 1$ ist, die Dimension nicht grösser als $3p+5$ und der Grad nicht grösser als $4p+4$ sein kann. Diese zwei Zahlen sind keine obere Grenze, sondern wirkliche Maxima, weil in einem System von Curven der Ordnung n und des Geschlechts p mit einem $(n-2)$-fachen Punkte und beliebig vielen Doppelpunkten man eben $k = 3p+5$ und $D = 4p+4$ hat: auf diese Weise wird ein Resultat des Herrn Jung (Annali di Mat. (2) XVI. 315) verschärft. Ein lineares System von Curven, deren Geschlecht $p > 1$ und deren Dimension $k = 3p+5$ ist, besteht entweder aus hyperelliptischen Curven, oder kann auf ein System ebener Curven vierter Ordnung $(p = 3)$ reducirt werden. Im ersten Falle kann das System mittels einer Cremona'schen Transformation in eins der folgenden Systeme kleinster Ordnung übergeführt werden: 1) Curven $(p+3)^{\text{ter}}$ Ordnung mit einem gewöhnlichen $(p+1)$-fachen Punkte und einem Doppelpunkte; 2) Curven $(p+2+\mu)^{\text{ter}}$ Ordnung $(\mu = 0, 1, \ldots, p)$ mit einem $(p+\mu)$-fachen Punkte, dem μ Doppelpunkte unendlich nahe sind.

Herr Jung bespricht in seiner Bemerkung die Vervollkommnung, welche seine eigenen Resultate durch die Castelnuovo'sche Arbeit erhalten. La.

J. Finsterbusch. Beitrag zur synthetischen Geometrie ebener Kreissysteme und damit im Zusammenhange stehender höherer Curven. I. Abschnitt: Die Kreisverwandtschaft in perspectivischer Lage. II. Abschnitt: Inversion. (Fortsetzung.) Pr. Realsch. Werdau.

In Fortsetzung einer früheren Abhandlung (cf. F. d. M. XX. 1888. 584) giebt hier der Verfasser eine genaue Unter-

suchung der Gesetze der Inversion, wobei besonders auf Curven und Curvensysteme geachtet wird, die zu sich selbst invers hinsichtlich eines oder mehrerer Kreise sind. Zu bemerken ist, dass Herr F. die Bezeichnung „Kreisbüschel" in anderem Sinne braucht, als dies üblich ist, ebenso wie schon früher das Wort Kreisbündel. Nach der üblichen Bezeichnung gehören zu einem Bündel die Kreise eines linearen Systems

$$\lambda K_1 + \mu K_2 + \nu K_3 = 0.$$

Je nach den Realitätsverhältnissen handelt es sich um Kreise, die einen Kreis orthogonal schneiden oder einen Durchmesser eines Grundkreises zur Sehne haben. In der Lehre der Inversion hat man mit dem Verfasser das zweite System als die Gesamtheit der Kreise zu bezeichnen, die hinsichtlich des Grundkreises negativ-selbstinvers sind; das erste System aber kann bezeichnet werden entweder als das System der Kreise, die hinsichtlich des Grundkreises positiv-selbstinvers sind, oder hinsichtlich deren der gegebene Grundkreis positiv-selbstinvers ist. Offenbar ist es nun ein falscher Analogieschluss, wenn Herr F. als ein Bündel auch die Mannigfaltigkeit von Kreisen bezeichnet, hinsichtlich deren ein gegebener negativ-selbstinvers ist, und die also Sehnen desselben zu Durchmessern haben. Von den sechs einfachen Kreis-Mannigfaltigkeiten, die Herr F. als Büschel bezeichnet, und von denen jeder aus den gemeinsamen Kreisen zweier Bündel besteht, verdienen nur zwei wirklich diesen Namen, während die anderen nicht lineare Kreis-Mannigfaltigkeiten sind.

E. K.

V. Retali. Sopra due particolari trasformazioni piane quadratiche. Bologna Mem. (4) X. 653-671. Mit 1 Fig.-Taf.

Bekanntlich ist ein zu einem gegebenen Kegelschnitte conjugirter, das heisst hinsichtlich dessen zu sich selbst polarreciproker Kegelschnitt mit jenem in doppelter Berührung und durch den „Pol der Berührung" oder den Punkt eindeutig festgelegt, in dem die beiden gemeinsamen Tangenten sich schneiden. Man kann nun die Frage aufwerfen: Welche Curve H_y^x durchläuft der Pol

der Berührung P, wenn der Pol einer Geraden r hinsichtlich des conjugirten Kegelschnittes über eine Curve C_m^n von der n^{ten} Ordnung und m^{ten} Klasse geführt wird. Es zeigt sich, dass der Ort eine $H_{2(n+m)}^{2n}$ mit $6n(n-1)$ Wendepunkten ist, welche die Schnittpunkte von r mit dem Grundkegelschnitt zu n-fachen Punkten hat, für deren übrige Singularitäten also die Anzahlen aus den Plücker'schen Formeln folgen. Wird andererseits P über eine gegebene C_m^n geführt, so durchläuft der Pol von r eine S_{2n+m}^{2n} mit $3m$ Wendepunkten, die den Pol von r hinsichtlich des Grundkegelschnittes zum n-fachen Punkte hat. Von den beiden Transformationen zweiten Grades, die Herr R. vorzugsweise zur Entwickelung benutzt, ist nur die eine rational.

E. K.

J. Neuberg. Sur les figures affinement variables. Liège Mém. V. 12 S.

Euler und Möbius nennen zu sich selbst affin die aus drei Punkten M_1, M_2, M_3 mit den Massen m_1, m_2, m_3 und aus ihrem Schwerpunkte gebildete Figur. Der Verf. ermittelt die Eigenschaften einer solchen beweglichen Figur. Folgendes ist einer der Sätze, zu denen er gelangt. Wenn eine ebene Figur sich bewegt, indem sie immer sich selbst ähnlich bleibt, so ist der von dem Fahrstrahle eines ihrer Punkte erzeugte Flächeninhalt der Potenz dieses Punktes bezüglich eines festen Kreises proportional. Alle Punkte, deren Fahrstrahlen denselben Flächeninhalt beschreiben, gehören einem und demselben Kreise an.

Mn. (Lp.)

P. H. Schoute. Sur les figures planes directement semblables. C. R. CXI. 499-501.

Eine Ebene enthalte zwei direct ähnliche Systeme F_1 und F_2. Einem Punkte A_1 in einem System entspreche ein Punkt A_2 im anderen System. Wählt man das Segment A_1A_2 zur Basis eines Dreiecks $A_1A_2A_3$, welches mit einem gegebenen Dreieck $B_1B_2B_3$ direct ähnlich ist, so beschreibt A_3 ein drittes, mit F_1 und F_2

direct ähnliches System F_3, wenn A_1 und A_2 die Punkte der Systeme durchlaufen, denen sie angehören. Von den Systemen F_1, F_2, F_3 haben je zwei denselben Punkt O zum Doppelpunkte. Dieses allgemeine Theorem dient zum Ausgangspunkte für eine Reihe von Relationen, welche zwischen diesen ähnlichen Systemen bestehen. Auf sie im einzelnen einzugehen, darauf muss an dieser Stelle verzichtet werden. Schn.

P. H. Schoute. Théorèmes généraux par rapport aux figures planes directement semblables. Delft. Ann. de l'Éc. Pol. VI. 51-71.

Der Aufsatz handelt von den Figuren, die durch die Eckpunkte eines sich derart bewegenden Dreiecks beschrieben werden, dass die Grösse veränderlich, die Form aber unveränderlich ist, während zwei Eckpunkte Figuren von gleicher Form beschreiben. Andere Mathematiker (Baltzer, Casey, Petersen, Burmester) haben schon viele bezügliche Eigenschaften entdeckt und beschrieben; jetzt werden diesen einige neue zugefügt. Sie werden in sieben Lehrsätze zusammengefasst, die zu umfangreich sind, als dass sie hier angeführt werden könnten. Aus jedem dieser Lehrsätze leitet der Verfasser andere Eigenschaften ab, welche er an Figuren verdeutlicht.

Der letzte und wichtigste dieser Sätze lautet wie folgt: In der Ebene zweier Figuren F_1 und F_2 von gleicher Form und der Punkte Q_1 und R_2 giebt es immer eine mit F_1 und F_2 gleichgestaltete Figur F_μ und einen Punkt P_μ derart, dass der geometrische Ort des Punktes A_μ, welcher das Stück A_1A_2 der Geraden, welche die Projection A_1 von Q_1 auf die Tangente der Curve F_1 mit der Projection A'_2 von R_2 auf die übereinstimmende Gerade t_2 von F_2 verbindet, im Verhältnis μ teilt; die Fusspunktcurve ist die übereinstimmende Curve C_μ von F_μ in Beziehung auf P_μ.

Wenn μ sich verändert, so beschreibt der Punkt P_μ eine circulare und unicursale Curve der dritten Ordnung. Die den Punkten P_μ von F_μ entsprechenden Punkte von F_1 und F_2 durch-

laufen die über Q_1R_1 und Q_2R_2 als Sehnen beschriebenen Kreise, welche einen Winkel gleich dem Winkel zwischen Q_1R_1 und Q_2R_2 fassen. G.

H. Küpper. Collineationen, durch welche fünf gegebene Punkte des Raumes in dieselben fünf Punkte transformirt werden. Diss. Münster. 78 S. 8°.

Bekanntlich ist durch fünf Paare entsprechender Punkte eine räumliche Collineation festgelegt. Lässt man nun fünf gegebenen Punkten, von denen keine vier in einer und derselben Ebene liegen, dieselben Punkte in anderer Reihenfolge bezüglich entsprechen, so liefert jede der 120 möglichen Permutationen eine Collineation. Doch sind diese nicht alle durchaus verschieden, sondern es giebt nur sieben wesentlich verschiedene Collineationen. Stellt man diejenigen von den fünf Punkten, welche cyklisch in einander übergehen sollen, jedesmal in einer Klammer zusammen, so lassen sich die sieben Fälle in folgender Weise darstellen: 1) (1)(2)(3)(4)(5), 2) (1)(2)(3)(45), 3) (12)(34)(5), 4) (123)(4)(5), 5) (123)(45), 6) (1234)(5), 7) (12345). Der erste Fall lässt die fünf gegebenen Punkte, also alle Elemente des Raumes ungeändert, bietet daher kein Interesse. Die übrigen Fälle werden eingehend synthetisch behandelt. Bei den vorangeschickten Hülfssätzen ergeben sich Berührungspunkte mit Arbeiten von Lüroth (Math. Ann. XI), Reim (Diss. Breslau 1879), Ameseder (Wiener Sitzungsberichte XCVIII), Schröter (Oberfl. II. Ordnung, S. 410), Sturm (Math. Ann. XXVI), Reye (Geom. d. Lage, Abt. II, S. 138). Ebenso finden sich in den Resultaten, auf welche der Verfasser bei der Behandlung der sechs Fälle kommt, Berührungspunkte mit Arbeiten der genannten Mathematiker. Scht.

A. Pepoli. Su alcuni enti generati da tre sistemi riferiti l'uno all' altro per mezzo di trasformazioni cremoniane. Atti del Collegio degli Ingegneri e degli Architetti di Palermo. Anno XII. 1889. 1-6.

Drei Grundgebilde zweiter Stufe, welche eindeutig auf ein-

ander bezogen sind, können zur Erzeugung einer Curve, einer Fläche oder eines Strahlensystems angewandt werden. Es entsteht eine Curve, wenn man zwei Punktfelder oder Ebenenbündel und einen Strahlenbündel hat und die Punkte betrachtet, von welchen jeder auf einem Strahl des Bündels und auch auf der Geraden liegt, welche die zwei entsprechenden Punkte der Felder verbindet, oder in welchen die zwei entsprechenden Ebenen der Bündel sich schneiden. Durch einen Strahlenbündel, ein Punktfeld und ein Strahlenfeld wird eine Fläche erzeugt, wenn man jeden Punkt betrachtet, welcher in einem Strahl des Bündels und in der Ebene liegt, welche die entsprechenden Punkte und Geraden verbindet. Endlich kann man ein Strahlensystem erzeugen entweder durch einen Ebenenbündel, ein Punktfeld und ein Strahlenfeld, wenn man die Geraden betrachtet, in welchen die Ebenen des Bündels durch die Ebenen geschnitten werden, welche die entsprechenden Elemente der zwei anderen Gebilde bestimmen; oder durch zwei Strahlenbündel und einen Ebenenbündel, wenn man die Spuren von zwei entsprechenden Strahlen der zwei ersten Bündel auf den bezüglichen Ebenen des dritten Bündels verbindet. Einige Grundeigenschaften der fünf eben erklärten geometrischen Figuren werden vom Verf. bewiesen. Dem Leser dürften die vielen, gewiss zufälligen Berührungspunkte nicht entgehen, die zwischen der besprochenen Arbeit und der des Ref. bestehen, über welche in diesem Jahrbuch (F. d. M. XIX. 1887. 594) schon vor drei Jahren berichtet worden ist. La.

Th. Reye. Ueber lineare Mannigfaltigkeiten projectiver Ebenenbüschel und collinearer Bündel und Räume I-VI. J. für Math. CIV. 211-240; CVI. 30-47, 315-329; CVII. 162-178; CVIII. 89-124; ferner Berl. Ber. (1889.) 833-839.

Eine lineare Mannigfaltigkeit ϱ^{ter} Stufe ist durch die Forderung charakterisirt, alle die linearen Mannigfaltigkeiten zu enthalten, die aus beliebig vielen ihrer Elemente sich bilden lassen, so dass zwei Mannigfaltigkeiten V_μ und V_ν derselben sich in einer dritten Mannigfaltigkeit durchdringen müssen,

deren Stufenzahl mindestens $\mu+\nu-\varrho$ ist, wenn diese Zahl nicht negativ ist. Da also jede lineare Mannigfaltigkeit durch wiederholtes Büschelbilden hergestellt werden kann, so werden wir, um aus unter einander projectiven, bez. collinearen Ebenen-Büscheln, bez. -Bündeln und -Räumen als Elementen lineare $V^{(n)}$ zu bilden, nur zu fixiren haben, was unter dem Büschel projectiver Ebenenbüschel (u_1), bez. collinearer Ebenen-Bündel (S_1) oder -Räume (Σ_1) zu verstehen ist. Diese Definition wird aus der Forderung abgeleitet, dass je zwei Gebilde desselben Büschels dasselbe Strahlengebilde als Erzeugnis ergeben sollen, so dass also sämtliche Ebenenbüschel eines Büschels (u_1) zu derselben hyperboloidischen Regelschar, sämtliche Ebenenbündel eines Büschels (S_1) zu derselben Congruenz erster Ordnung dritter Klasse (Sehnenschar einer Raumcurve dritter Ordnung), sämtliche Ebenen-Räume eines Büschels (Σ_1) zu demselben Reye'schen Complex perspectiv sind. Wie man sieht, erhält man aus in verschiedenen Individuen eines (u_1), (S_1) oder (Σ_1) unter einander homologen Ebenen Ebenenbüschel; alle diese verschiedenen Büschel sind unter einander projectivisch. Man erhält so je eine zweite lineare Mannigfaltigkeit projectivischer Büschel, welche auf die erste „sich stützt"; auf (u_1) stützt sich ein zweiter Büschel projectivischer Ebenenbüschel, auf (S_1) eine lineare Mannigfaltigkeit zweiter Stufe, ein Bündel (u_2) projectiver Ebenenbüschel; endlich stützt sich auf (Σ_1) ein Gebüsch (u_3), eine lineare Mannigfaltigkeit dritter Stufe projectiver Ebenen-Büschel. Dieses gegenseitige Stützen zweier linearen Mannigfaltigkeiten der betrachteten Art findet sich auch in der Folge durchgängig vor.

Da man insgesamt ∞^7 zu einem gegebenen projectivische Ebenenbüschel construiren kann, so bieten sich ausser den bereits definirten (u_1), (u_2), (u_3) der Betrachtung noch die linearen Mannigfaltigkeiten (u_4), (u_5) und (u_6) dar. Als Hauptresultat der ganzen Untersuchung ist nun die Aufdeckung eines merkwürdigen Dualismus zu betrachten, der zunächst zwischen (u_0) und (u_6), (u_1) und (u_5), (u_2) und (u_4) zu Tage tritt. (u_4) ist durch fünf zu einander projective Büschel bestimmt und stützt sich auf eine einfache Mannigfaltigkeit $(\varepsilon_{4,1})$ collinearer (ε_4).

Jede Ebene des Raumes kommt in (s_4) unendlich oft vor, und es werden die Mannigfaltigkeiten (s_4) nur in übertragenem Sinne als collinear bezeichnet. Eine Gerade des Raumes ist im allgemeinen Axe eines Büschels von (u_1). Besondere Geraden hingegen senden einen ganzen Büschel (u_1) in die (u_4), dessen sämtliche projective Büschel zwei Ebenen entsprechend gemein haben. Diese letzteren bilden einen Büschel γ^3 dritter Ordnung, der projectiv auf die Büschel von (u_4) und folglich auf die Reihe der (s_4) bezogen ist. Er vermittelt zugleich die Beziehung dieser Mannigfaltigkeiten auf einander. Auf den beiden (s_4) und $(s_4)_1$ entsprechenden Ebenen γ und γ_1 von γ^3 schneide man mittels der Axen von γ^3 zwei collineare Felder aus. Alsdann entsprechen den Ebenen von (s_4), die irgend eine Gerade f_1 von γ_1 enthalten, die Ebenen von $(s_4)_1$, welche die entsprechende Gerade f von γ enthalten. Hiernach sind die ∞^1 Büschel von (u_4) unzweideutig festgelegt, bei denen die in (s_4) gehörende Ebene mit einer gegebenen zusammenfällt. Genau so, wie (u_2) durch eine Punktreihe auf einer Raumcurve dritter Ordnung, als Gesamtheit der zu ihr perspectivischen Büschel, eindeutig festgelegt ist, erscheint (u_4) völlig bestimmt durch einen einer Raumcurve dritter Ordnung umschriebenen Ebenenbüschel.

Eine analoge Verwandtschaft tritt zwischen (u_1) und (u_5) hervor. Beide sind völlig bestimmt durch je eine Regelschar. Jede einzelne Gerade sendet in eine (u_5) einen Büschel coaxialer Ebenenbüschel mit zwei entsprechend gemeinsamen Ebenen. Diese umhüllen eine gewisse Fläche zweiten Grades Φ_2, deren eine Geradenschar aus Axen f besteht, die je ∞^2 Büschel zu (u_5) beitragen. Die andere Geradenschar ist projectiv auf die Büschel von (u_5) und auf die Mannigfaltigkeit $(s_{5,1})$ bezogen, auf welche (u_5) sich stützt. Gehören zu den Mannigfaltigkeiten (s_5) und $(s_5)_1$ von $(s_{5,1})$ die Geraden w und w_1, so dreht sich eine Ebene von $(s_5)_1$ um einen Punkt von w, wenn sich die gegebene Ebene von (s_5) um einen Punkt von w_1 dreht. Zwei so zusammengehörige Punkte liegen allemal auf derselben Geraden der ersteren Regelschar. Es geht hieraus hervor, dass (u_5), genau so wie (u_1), durch eine Regelschar bestimmt wird.

In jedem (u_6) giebt es eine Axe t, deren sämtliche (∞^3) Ebenenbüschel in (u_6) vorkommen. t enthält eine auf die einzelnen Büschel von (u_6) projectiv bezogene Punktreihe von der Art, dass, falls eine Ebene von (s_6) sich um den $(s_6)_1$ entsprechenden Punkt dreht, die entsprechende Ebene von $(s_6)_1$ sich um den (s_6) entsprechenden Punkt dreht. Hieraus geht hervor, dass jeder Büschel von (u_6) auf t eine zu der gegebenen Punktreihe involutorisch liegende Punktreihe ausschneidet (Herr R. giebt an, dass er dieses Resultat Herrn W. Stahl verdanke); so dass (u_6) wie (u_6) beide durch eine Axe und ein festes Elementargebilde, Ebenenbüschel bez. Punktreihe, festgelegt sind. Allgemein steht die Geometrie der linearen Mannigfaltigkeit μ^{ter} Stufe aus projectivischen Punktreihen in innigster Beziehung zu der eines linearen Systems $(6-\mu)^{\text{ter}}$ Stufe aus projectivischen Ebenenbüscheln. Man kann letztere als die Gesamtheit der Ebenenbüschel definiren, die zu allen Punktreihen der ersten Mannigfaltigkeit zugleich involutorisch liegt.

Auch von den linearen Mannigfaltigkeiten (S_λ), die aus collinearen Strahlenbündeln sich zusammensetzen, liegen die ersten, grösstenteils durch frühere Untersuchungen des Herrn Verfassers, bereits vor. (S_1) besteht, wie wir bereits erwähnten, aus den collinearen Bündeln, von denen je zwei dasselbe Sehnensystem einer Raumcurve dritter Ordnung erzeugen; der Bündel (S_2) collinearer Ebenenbündel hat eine Fläche dritter Ordnung zum Ordnungsgebilde und stützt sich auf einen zweiten Bündel (S_2). Zu (S_3) gehört eine von Herrn Schur untersuchte Curve c^6 als Ordnungsgebilde, als Ort der Punkte, in denen ein System homologer Ebenen aller Bündel von (S_3) zusammentrifft. Sie hat zu Doppelsehnen die Axen aller der Büschel, die als Entartungen von (S_3)-Bündeln aufgefasst werden können. (S_3) stützt sich auf einen Bündel $(s_{3,2})$ collinearer Räume.

Die Mannigfaltigkeit (S_4) stützt sich auf eine Mannigfaltigkeit collinearer $(s_{4,2})$. Es existiren 10 Punkte K, deren jeder einem ganzen System homologer Ebenen gemeinsam ist. ∞^2 Bündel von (S_4) arten in Ebenenbüschel aus; die Axen derselben bilden insgesamt ein Strahlensystem dritter Ordnung sechster

Klasse (d'_2), welches die Verbindungslinien der K enthält und aus jedem dieser Punkte einen Kegel dritter Ordnung erhält. Jeder Mannigfaltigkeit (ε) von $(\varepsilon_{4,2})$ kann ein Strahl d' von (d'_2) zugewiesen werden. Je solche Bündel von (S_4), die in (ε_4) dieselbe Ebene φ senden, erzeugen eine Curve dritter Ordnung, die in d' und einen Kegelschnitt in φ zerfällt. Die Ebenen γ und γ_1, durch deren collineare Beziehung man die Abhängigkeit von (ε_4) und $(\varepsilon_4)_1$ feststellen kann [vergl. das über (u_4) Gesagte] müssen die Geraden d' und d'_1 enthalten.

Die Mannigfaltigkeit (S_5) besitzt eine dreifache Mannigfaltigkeit in Büschel ausartender Bündel; ihre Axen bilden einen Complex d^3 dritten Grades; die von einem Punkte ausgehenden Axen bilden den Ordnungskegel für die ∞^2 Bündel von (S_5), die den Punkt zum Centrum haben. In (d^3) kommen Mannigfaltigkeiten von ∞^3 Regelscharen Φ^2 und $\mathfrak{F}^2$ vor, deren Leitscharen merkwürdiger Weise dasselbe Strahlensystem dritter Ordnung ergeben. Die einen Regelflächen erhält man, wenn man aus der (S_5) Mannigfaltigkeiten (u_6) homologer projectiver Ebenenbüschel heraushebt und nach dem Obigen die Axen aufsucht, die ∞^2 Büschel in eine solche (u_6) senden. Andererseits erzeugen die Bündel, welche in (ε_5) irgend eine feste Ebene φ senden, ausser φ eine Fläche $\mathfrak{F}^2$ zweiter Ordnung, deren eine Regelschar die Axen der entarteten Bündel des betreffenden Netzes enthält. Jeder einzelnen (ε_5) gehört also in (d^3) eine solche Regelschar zu. Die Beziehung irgend zweier (ε_5) der Mannigfaltigkeit $(\varepsilon_{5,2})$ geschieht mit Hülfe der $(\varepsilon_{5,1})$ und (u_5), die sie aus (S_5) herausheben.

Insgesamt giebt es ∞^{11} zu einem gegebenen collineare Bündel, so dass also noch die Mannigfaltigkeiten (S_6), (S_7), (S_8), (S_9) und (S_{10}) zu betrachten sind. Ein analoger Dualismus, wie er bereits bei den (u_μ) zu beobachten war, ordnet nunmehr dem (S_λ) einen $(S_{10-\lambda})$ zu. Die Analogie von (S_4) und (S_6) tritt darin zu Tage, dass (S_6) in innigster Beziehung zu einem Strahlensystem dritter Klasse und sechster Ordnung mit zehn singulären Ebenen steht. Während nämlich eine Gerade im allgemeinen einen Büschel entsendet, der als Ausartung eines Bündels von (S_6)

betrachtet werden kann, senden die Strahlen der Congruenz ∞^1 solche Büschel aus, und die 10 singulären Ebenen, deren Existenz analytisch nachgewiesen wird, sind Ebenen, auf die je ein Bündel von (S_6) sich reducirt.

Wie (S_3) auf eine Raumcurve c^6, so ist (S_7) auf einen Ebenenbüschel γ^6 bezogen. Die Ebenen desselben sind diejenigen, auf welche sich ein Bündel von (S_7) reduciren kann. Genau so, wie (S_2) zu einer Fläche dritter Ordnung in Beziehung steht, so ergiebt sich für (S_8) eine Fläche dritter Klasse, in deren Tangentialebenen Bündel von (S_8) ausarten. Während ferner (S_1) sich auf eine Curve dritter Ordnung stützt, erhalten wir in (S_9) einen Ebenenbüschel dritter Ordnung, dessen einzelne Ebenen je ∞^1-mal als Ausartung eines Bündels von (S_9) erscheinen. Endlich wird (S_{10}) durch eine siebenfach lineare Mannigfaltigkeit collinearer Strahlenfelder auf einer Ebene bestimmt und besteht aus den Ebenenbündeln, die alle diese Felder projiciren.

Auch im Gebiet der collinearen Räume, die insgesamt eine lineare Mannigfaltigkeit (Σ_{15}) bilden, gelingt es, teils durch geometrische, teils durch einfache analytische Betrachtungen, eine dualistische Beziehung zwischen dem (Σ) und (Σ_{14-i}) hervortreten zu lassen. Hierzu bedient sich Herr R. ebenfalls der Ausartungen, die in (Σ_n) vorkommen. Ein Raum kann sich auf einen Ebenen-Bündel, einen -Büschel oder endlich auf eine Ebene reduciren, also einfach, zweifach, dreifach singulär sein. Wir begegnen nun in (Σ_1) vier einfach singulären Räumen, in (Σ_{13}) vier Ebenen, auf deren jede ∞^3 Räume sich reduciren. Während (Σ_2) eine Kerncurve c^6 aufweist als Ort für die Centren einfach singulärer Räume, besitzt (Σ_{12}) einen Büschel γ^6, auf dessen Ebenen sich je ∞^2 Räume reduciren. (Σ_3) besitzt eine Fläche vierter Ordnung für die Centren singulärer Räume, (Σ_{11}) eine Fläche vierter Klasse, auf deren Ebenen sich ∞^1 Räume reduciren. (Σ_4) und (Σ_{10}) führen auf Curven bezw. Büschel zehnter Ordnung c^{10} und γ^{10}; jeder Punkt von c^6 tritt als Centrum von ∞^1 singulären Räumen auf, gehört je einem ganzen System von ∞^4 homologen Ebenen an. Auf jede Ebene von γ^{10} reduciren sich ∞^1 dreifach singuläre Ebenen von (Σ_{10}). In (Σ_5) und (Σ_9) treten 20 Punkte bezw. Ebenen auf,

auf die sich ∞^3 einfach bezw. ∞^1 dreifach singuläre Räume zurückführen lassen. In (Σ_7) ergiebt sich ein Complex vierten Grades für die Axen zweifach singulärer Räume, (Σ_6) und (Σ_8) sind endlich durch Congruenzen sechster Ordnung zehnter Klasse und zehnter Ordnung sechster Klasse charakterisirt. Der erstere enthält die Axen der zweifach singulären Räume von (Σ_6), der andere die Axen, welche ∞^1 zweifach singuläre Räume in (Σ_8) hereinsenden.

Auf diese Beziehungen näher einzugehen, müssen wir uns leider versagen. E. K.

T. A. Hirst. On the correlation of two spaces, each of three dimensions. Lond. M. S. Proc. XXI. 92-118.

Schon im Jahre 1875 hatte der Verfasser vorläufige Mitteilungen über seine Untersuchungen hinsichtlich zweier correlativen Räume veröffentlicht. [S. die Referate F. d. M. VII. 374 (1875) und IX. 445 (1877).] In der vorliegenden Arbeit giebt er eine ausführlichere und verschiedentlich vereinfachte Darstellung desselben Gegenstandes. Er unterscheidet zunächst als Formen der Ausartung centrale, planare und axiale Correlationen, entsprechend den in der Theorie der reciproken Polaren vorkommenden Ausartungen einer Fläche zweiter Ordnung in Kegel, Kegelschnitt und Ebenenpaar. Die Anzahlen dieser Correlationen werden bezw. mit π, ω, ψ bezeichnet. Für die 15 Bedingungen, welche eine endliche Anzahl von Correlationen bestimmen, werden folgende neue, vereinfachte Formeln aufgestellt und discutirt:

$$2\mu = \nu + \omega; \quad 2\varrho = \nu + \pi; \quad 2\nu = \mu + \varrho + \psi.$$

Hierin ist durch μ, ϱ, ν die Anzahl derjenigen Correlationen ausgedrückt, welche 14 Bedingungen genügen und gleichzeitig bezw. ein Paar gegebener Punkte, Ebenen oder Geraden in beiden Räumen als conjugirte Elemente bestimmen. — Durch weiteres Zerfallen der oben genannten Ausartungen entstehen höhere Specialformen der Correlation, die als central-planare, planar-axiale und central-axiale bezeichnet werden, weil es sich in den analogen, auf die Fläche zweiter Ordnung bezüglichen Fällen

jedesmal um zwei unter den drei degenerirten Formen: Punktepaar, Geradenpaar, Ebenenpaar handelt. Von diesen „Correlationen zweiter Ordnung" ist die erste durch 14, jede der beiden andern durch 13 Bedingungen bestimmt. — Endlich entsteht als Correlation dritter Ordnung mit 12 Bedingungen die central-planar-axiale, welche die Eigenschaften der vorigen in der Weise in sich vereinigt, dass sie in jedem der beiden Räume einen singulären Punkt (Centrum), eine durch ihn gehende singuläre Gerade (Axe) und eine durch diese Gerade gehende singuläre Ebene besitzt. Es werden sodann die Anzahlen aller so bestimmten Correlationen, von der speciellsten zu den allgemeineren fortschreitend, aufgesucht, und die erhaltenen Zahlen tabellarisch zusammengestellt. Schg.

G. Jung. Delle famiglie associate di sistemi lineari e delle superficie univocamente rappresentabili sul piano. Palermo Rend. IV. 253-260.

Es ist bekannt, dass unter den Eigenschaften der linearen Systeme (ebener algebraischer Curven) und denen der (auf eine Ebene eindeutig abbildbaren, d. h.) rationalen Flächen eine so innige Beziehung herrscht, dass, wenn alle die linearen Systeme, deren Ordnung durch keine Cremona'sche Transformation verkleinert werden kann und deren Geschlecht p ist, bekannt wären, sogleich alle die rationalen Flächen bekannt sein würden, deren ebene Schnitte das Geschlecht p haben, und umgekehrt. Will man daher alle die kleinsten linearen Systeme bestimmen, deren Geschlecht p ist, so kann man entweder die Aufgabe direct zu lösen versuchen, ohne auf die durch die gesuchten Systeme dargestellten Flächen Rücksicht zu nehmen, oder vorher die rationalen Flächen bestimmen, deren ebene Schnitte das Geschlecht p haben, und dann die kleinste ebene Abbildung derselben suchen: diese zweite Methode hat den nicht zu übersehenden Nachteil, auf diejenigen linearen Systeme nicht zu führen, welche keine Fläche darstellen. Will man umgekehrt alle die irreductibeln algebraischen rationalen Flächen bestimmen, deren ebene Schnitte das Geschlecht p haben, so kann man ent-

weder die Gesamtheit dieser Flächen ohne Rücksicht auf ihre ebene Abbildung bestimmen, oder mit der Bestimmung aller Systeme, deren Geschlecht p ist, und für diejenigen, welche Flächen darstellen können, die Eigenschaften der dargestellten Flächen aufsuchen. Auch dieses zweite Verfahren hat einen Nachteil: es kann nämlich geschehen, dass zwei ganz verschiedene lineare Systeme zwei Flächen darstellen, von denen die eine ein besonderer Fall der andern ist; dann hätte man zwei nicht wesentlich verschiedene Flächen, welche durch zwei wesentlich verschiedene Systeme dargestellt sind. Um diesem Nachteile zu entgehen, schlägt Herr Jung den folgenden Weg vor.

Man erinnere sich, dass (vgl. Annali di Mat. (2) XV u. XVI; F. d. M. XX. 1888. 605ff.), wenn r_1, r_2, r_3 die höchsten Vielfachheiten der Grundpunkte eines linearen Systems kleinster Ordnung sind, das System „erster Klasse" heisst, wenn $r_1+r_2+r_3 \leqq p$, „zweiter Klasse" im entgegengesetzten Falle; „allgemein", wenn seine Grundpunkte verschieden sind, „speciell", wenn einige unendlich nahe sind. Nun kann jedes specielle System zweiter Klasse σ_2 als besonderer Fall (Umformung) eines bestimmten Systems erster Klasse nicht kleinster Ordnung Σ_1 angesehen werden; Σ_1 hat dasselbe Symbol $[a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_f^{n_f}]$ wie σ_2, ohne die Bedingung zu erfüllen, dass die Grundpunkte $a_2, a_3, \dots, a_f$ unendlich nahe an a_1 sind. Sieht man von dieser Bedingung ab, so hört das betrachtete System auf, kleinster Ordnung zu sein, und tritt in die erste Klasse ein, wo es in eine gewisse Familie eingereiht wird. Ist σ_1 das System kleinster Ordnung dieser Familie, so nennt man σ_2 zu σ_1 „associirt". Aehnlich wird ein specielles System erster Klasse zu demjenigen „associirt", welches dasselbe Symbol hat, dessen Grundpunkte doch nicht unendlich nahe sind. „Associirte Familien" sind diejenigen, welche zwei associirten Systemen entsprechen. Jedem Normaltypus erster Klasse entspricht eine allgemeine Fläche F; seinen abgeleiteten Typen entsprechen Flächen F', deren Ordnungen kleiner als die von F sind, welche wie F allgemein, aber aus dieser durch gewisse geometrische Operationen ableitbar sind. Endlich stellen die

Systeme, welche zum Normaltypus associirt sind, Flächen dar, welche besondere Fälle von F und F' sind.

Wendet man diese Schlussfolgen an, so erhält man insbesondere den folgenden Satz: Es giebt zwei, und nur zwei, Arten auf einer Ebene abbildbarer Flächen der Ordnung $4p+4$, deren ebene Schnitte hyperelliptische Curven vom Geschlechte $p>1$ sind; sieht man von den abgeleiteten Flächen ab, so besitzen sie p besondere Fälle; jede dieser $p+2$ Flächen enthält ∞^1 Kegelschnitte, durch jeden Punkt der Fläche geht einer derselben.

La.

Cl. Servais. Sur les involutions cubiques conjugnées. Belg. Bull. (3) XX. 272-280.

C. Le Paige. Rapport. Ibid. 232-233.

Einfacher Beweis von Eigenschaften dieser Involutionen, die von den Herren Em. Weyr und C. Le Paige ermittelt sind, und neue Eigenschaften.

Mn. (Lp.)

A.-E. Pellet. Rectification approximative d'un arc de courbe. C. R. CX. 778, Assoc. Franç. (Limoges) XIX_1. 154.

Wenn man von einem Punkte A einer Curve aus gleiche Strecken auf der in A berührenden Tangente abträgt, bis P und P', dann auf der in A gezogenen Normale das Dreifache des Krümmungsradius abträgt bis C, dann CP und CP' zieht, welche Linien die Curve in M und M' schneiden, so ergiebt sich für den Curvenbogen MM' eine Länge, die sich von der Länge von PP' so wenig unterscheidet, dass der Unterschied kleiner als $\frac{1}{60}\cdot R\cdot\left(\frac{\vartheta}{2}\right)^5$ wird, wo R den grössten von den Krümmungsradien bedeutet, die den zwischen M und M' liegenden Punkten zugehören, und wo ϑ die Total-Krümmung des Bogens MM' bedeutet.

Scht.

B. Besondere ebene Gebilde.

A. ADLER. Zur Theorie der Mascheroni'schen Constructionen. Wien. Ber. XCIX. 910-916. Mit 1 Tafel.

Die von Mascheroni in seinem berühmten Werke (La geometria del compasso, Pavia 1797) gelehrten Constructionen, welche zeigen, dass jede Constructionsaufgabe zweiten Grades mit alleiniger Anwendung des Zirkels gelöst werden kann, werden hier vermittelst des Princips der reciproken Radien einheitlich gestaltet und vereinfacht. Die Umbildung der von Steiner gelehrten linealen Constructionen (Berlin 1833) nach diesem Princip bezüglich des von Steiner zu Grunde gelegten festen Kreises ergiebt, dass man jede Constructionsaufgabe zweiten Grades nicht allein mit blosser Anwendung des Zirkels lösen, sondern dass man auch noch die Bedingungen innehalten kann, dass alle dabei vorkommenden Kreise durch einen und denselben willkürlichen Punkt hindurchgehen. Scht.

J. NEUBERG. Sur les figures symétriques successives. Assoc. Franç. (Limoges.) XIX. 18-23.

Herr N. stellt sich die Aufgabe, zwei Polygone zu finden, von denen eines, $A_1 A_2 \dots A_n$, n gegebene Gerade als Lote in den Seitenmitten besitzt, ein zweites, $d_1 d_2 \dots d_n$, dieselben Geraden zu Winkelhalbirenden hat. Indem er bemerkt, dass im ersten Falle A_1, im zweiten Falle d_1 durch die Folge der Spiegelungen an den Geraden in sich selbst übergeht, führt er die Frage auf die Aufsuchung der Doppelpunkte und -Geraden einer collinearen Beziehung zurück. Diese Beziehung ist congruent bezw. symmetrisch collinear, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Im Fall eines geraden n giebt es daher im allgemeinen ein Polygon der ersten und kein Polygon der zweiten Art. Für ein ungerades n ist die erste Aufgabe unlösbar, die zweite hat eine Lösung. In speciellen Fällen, namentlich, wenn alle Geraden durch einen Punkt gehen, modificiren sich die Resultate. Dies wird genauer untersucht. E. K.

A. del Re. A propos d'un problème sur le billard circulaire. Mathesis X. 217-219.

Mit Hülfe der projectiven Formen wird die Lösung der folgenden Aufgabe bewirkt: Welchen Weg muss ein Ball auf einem kreisförmigen Billard verfolgen, um nach zwei auf einander folgenden Reflexionen zum Ausgangspunkte zurückzukehren. Bibliographie der Frage. Mn. (Lp.)

L. Maleyx. Étude géométrique des propriétés des coniques d'après leur définition. Nouv. Ann. (3) IX. 240-258, 318-337, 424-435, 481-495, 596-613; (3) X. 37-59, 91-102, 125-133, 163-171.

Aus der Definition der Kegelschnitte als ebener Schnitte eines über einem Kreise stehenden Kegels werden alle Eigenschaften der Kegelschnitte geometrisch abgeleitet. In der deutschen Litteratur sind mehrere Bücher vorhanden, welche mit eben solcher Vollständigkeit die Kegelschnitt-Eigenschaften auch elementar-geometrisch ableiten. Scht.

Aug. Morel. Étude sur la géométrie élémentaire des sections coniques. J. de Math. élém. (3) IV. 15, 29, ..., 269.

Es werden die Haupteigenschaften der Kegelschnitte nach ihrer gemeinsamen Entstehungsart aus Brennpunkt und Leitlinie rein geometrisch behandelt. Harmonische Beziehungen werden nicht herangezogen, darum fehlen auch Pol und Polare, ebenso die Sätze von Pascal und Brianchon. Lg.

F. H. G. Fischer. Ausgewählte Abschnitte aus einer synthetischen Geometrie der Kegelschnitte. Pr. Städt. Realsch. Leipzig.

Aus der Definition der Kegelschnitte als ebener Schnitte eines Kreiskegels wird zunächst der Carnot'sche Satz, und aus diesem werden dann die Eigenschaften der Kegelschnitte abge-

leitet. Als bekannt werden dabei die Sätze über das Doppelverhältnis von vier Punkten oder Strahlen und die Sätze über die Punkt- und Strahlen-Involution vorausgesetzt. Scht.

STRÜBING. Beitrag zur Kegelschnittslehre. Hoffmann Z. XXI. 266-267.

C. HILDEBRANDT. Bemerkung zu Prof. Strübing's „Beitrag zur Kegelschnittslehre". Hoffmann Z. XXI. 575-577.

Die Construction nach Quetelet-Dandelin wird für den Unterricht empfohlen. (In Oesterreich steht dieselbe schon längst in allen Lehrbüchern. D. Ref.) Hr. Hildebrandt fügt einige Figuren zur Ausführung der Construction nach den Methoden der darstellenden Geometrie hinzu. Lp.

J. J. MILNE and R. F. DAVIS. Geometrical conics. Part I. The parabola. London. Macmillan and Co. [Nature XLII. 518.]

P. SOULIER. Démonstration des théorèmes de Pascal et de Brianchon sur les hexagones inscrits et circonscrits. Nouv. Ann. (3) IX. 529-530.

Man denke sich ein räumliches Sechsseit, dessen Gegenseiten sich in drei Punkten *a*, *b*, *c* begegnen. Durch die sechs Ecken des Sechsseits lege man alle möglichen Kegel zweiten Grades. Die Scheitel derselben bilden eine Fläche, welche die durch *a*, *b*, *c* gelegte Ebene in einer Curve schneidet. Projicirt man von einem Punkte dieser Curve das Sechsseit auf eine beliebige Ebene, so liegen die Projectionen der sechs Ecken auf einem Kegelschnitte und die Projectionen der Punkte *a*, *b*, *c* auf einer Geraden. Damit ist aber ein Beweis des Pascal'schen Satzes geliefert. Analog wird auch der Brianchon'sche Satz bewiesen. Scht.

E. Hedelius. Om homologa trianglar och koniska sektioner. Göteborg. 69 S.

Im Anschluss an eine frühere Arbeit über ein- und mehrdeutig homologe Dreiecke („Bidrag till teorin för en - och flertydigt homologa trianglar". Göteborg 1888) behandelt der Verf. Beziehungen zwischen Systemen homologer Dreiecke und Kegelschnitte, wobei die Umkehrung des bekannten Pascal'schen Satzes den Ausgangspunkt bildet. Bdn.

W. Fiedler. Geometrische Mitteilungen. X. Kegelschnittconstructionen. XI. Die regelmässigen Polyeder. Wolf Z. XXXV. 322-366.

In X (Art. 1-10) bringt der Verfasser eine ganze Reihe von Einzelheiten aus der Kegelschnittlehre zur Darstellung, und zwar handelt er in den Art. 1-6 von Kegelschnitten, zu deren Bestimmungsstücken die Polinvolutionen auf zwei Durchmessern gehören. Im Art. 7 knüpft Herr F. an den folgenden früher bewiesenen Satz an: Man lege von einem beliebigen Punkte einer Directrix und von ihrem Schnittpunkte mit der grossen Axe die Tangenten an einen Kegelschnitt, alsdann stehen die beiden von der Directrix verschiedenen Diagonalen des entstandenen Vierseits auf einander senkrecht und schneiden sich in dem der Directrix zugehörigen Brennpunkte. Indem Herr F. diesen Satz analytisch beweist, wird er auf eine besondere Ellipse

$$\frac{x^2}{4p^2}+\frac{y^2}{2p^2}=1$$

aufmerksam, von welcher einige interessante Eigenschaften hervorgehoben werden. So wird für sie der Ort der Punkte mit Normalen von gleichen fundamentalen Doppelverhältnissen ein Kegelschnitt gleicher Art:

$$\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{2p^2}=1$$

etc. Sie kann auf zwei Arten mit einer gleichseitigen Hyperbel zugleich abgeleitet werden. Entweder kann man beide durch centrisch collineare Abbildungen mit gemeinsamer Axe und Cen-

trum aus einem Kreise ableiten, oder man kann auch über zwei Kreisen derselben Ebene gleichseitige Kegel errichten und beide Curven als orthogonale Projectionen auf die Kreisebene der Kegelschnitte ansehen, in welchen diese gleichseitigen Kegel sich durchdringen. Auch die Art. 9 u. 10 beschäftigen sich mit Brennpunkteigenschaften des Kegelschnittes.

XI. Nach einigen einleitenden Bemerkungen über das Vorkommen von Hexaedergruppen unter den Ecken eines Pentagon-Dodekaeders etc. geht Herr F. dazu über, die Figur zu untersuchen, welche bei der Centralprojection des Ikosaeders aus den Fluchtelementen der Kanten und Ebenen eines Ikosaeders entsteht. Die 15 Fluchtpunkte der Kanten sind einmal die Ecken eines vollständigen Sechsseits, dessen Seiten den Ebenen entsprechen, die je fünf Kanten des Ikosaeders enthalten; auf der anderen Seite ergeben sich 10 Gerade, deren jede drei Fluchtpunkte enthält, den 10 Paaren paralleler Ebenen des Ikosaeders entsprechend etc. Die Hauptdiagonalen ergeben Fluchtpunkte, die dreimal mit zwei Kanten-Fluchtpunkten in Geraden liegen u. s. w. Den Schluss machen litterarische Bemerkungen mit Bezug auf eine Bemerkung Steiner's in der Abhandlung „Ueber Maximum und Minimum etc.". E. K.

F. Spath. Lineale Construction von Kegelschnitten aus teilweise imaginären Elementen. Monatsh. f. Math. I. 237-246.

Herr Stolz in Innsbruck hatte in seinen Vorlesungen 1886 den Gedanken ausgesprochen, dass sich bei fünf einen Kegelschnitt bestimmenden Punkten A, B, C, D, E der zweite Schnittpunkt auf einer durch A gehenden geraden Linie auch dann linear construiren lasse, wenn von den fünf Punkten nur drei reell, die beiden andern ein Paar complex conjugirte Punkte sind, oder wenn nur einer reell ist und die vier andern zwei Paare complex conjugirter Punkte bilden. Der Verfasser, ein Schüler von Herrn Stolz, giebt hier die Constructionen, welche sich auf dem von Herrn Stolz angedeuteten Wege ergeben, und beweist dieselben. Dabei wird immer der Pascal'sche Satz, der

ja bei fünf reellen Punkten ohne weiteres zu der gewünschten Construction führt, zugrunde gelegt. In jedem der beiden Fälle ergeben sich zwei Constructionen. Beispielsweise führen wir die im zweiten Falle sich ergebende erste Construction hier an. Der reelle Träger des ersten Paares complex conjugirter Punkte heisse a, der Träger für das zweite Paar b, der reelle Punkt C'. Durch C geht eine beliebige Gerade g, deren zweiter Schnittpunkt mit dem durch die gegebenen fünf Punkte gehenden Kegelschnitte gesucht wird. In den beiden Involutionen, durch welche die beiden Paare complex conjugirter Punkte auf a und b bestimmt werden, entspreche dem Schnittpunkte P von a und b bezw. P_a und P_b. Ferner entspreche in diesen Involutionen dem Schnittpunkte G_a von g und a der Punkt G'_a, sowie dem Schnittpunkte G_b von g und b der Punkt G'_b. Nun suche man erstens den Schnittpunkt K von g mit $P_aG'_b$, zweitens den Schnittpunkt L von a mit CP_b und dann drittens den Schnittpunkt von b mit KL. Verbindet man letzteren mit G'_a, so schneidet die Verbindungslinie die Gerade g in dem gesuchten sechsten Kegelschnittpunkte. Scht.

E. W. Hyde. On the construction of the parabolas given by four points. Annals of Math. V. 84.

Während Salmon in seinen „Kegelschnitten“ das im Titel genannte Problem durch Anwendung des Carnot'schen Satzes oder der Involutionseigenschaften löst, wird hier die Axe der Parabel, die durch vier gegebene Punkte gehen soll, mit Benutzung des Pascal'schen Satzes und der Construction von mittleren Proportionalen construirt. Scht.

R. H. Graham. Newton in perspective. Nature XLI. 439-440.

Der Verfasser findet die Anfänge der Geometrie der Lage bei Newton und erläutert dies an einzelnen Constructionen von Newton, betreffend die Auffindung eines Kegelschnitts aus vier Tangenten und einem der Berührungspunkte.

Lp.

O. Weimar. Ueber verschiedene Darstellungen des correspondirenden Kegelschnitts einer Geraden in Bezug auf einen Kegelschnittbüschel. Diss. Giessen. 19 S. 4°.

A. Mannheim. Rayon de courbure d'une conique. S. M. F. Bull. XVIII. 155-160.

Es handelt sich um die Aufgabe, den Krümmungsradius in einem Punkte eines Kegelschnitts zu bestimmen, von dem man die Tangente in diesem Punkte kennt und ausserdem drei andere Punkte, welche dem Kegelschnitte angehören. Herr Mannheim entwickelt einige Relationen, welche den Krümmungsradius mit den gegebenen Elementen in Verbindung setzen, und gewinnt dadurch einfache Lösungen der vorliegenden Aufgabe.

Schn.

G. Fouret. Construction du rayon de courbure des courbes triangulaires symétriques, des courbes planes anharmoniques et des lignes asymptotiques de la surface de Steiner. C. R. CX. 778-781.

G. Fouret. Construction du rayon de courbure de certaines classes de courbes, notamment des courbes de Lamé et des paraboles et des hyperboles de divers ordres. C. R. CX. 843-846.

Schon Chasles hatte den Krümmungsradius in einem Punkte eines Kegelschnitts bestimmt, wenn dieser Punkt, die zugehörige Tangente und drei sonstige Punkte des Kegelschnitts als bekannt vorausgesetzt werden. Dann hatten 1875 Herr Mannheim in den Comptes rendus (LXXX. 620) und Herr Fouret im Bulletin de la Soc. Math. (1875) weitere Lösungen des Problems gelehrt. Eine neue, sehr elegante Construction wird hier von Herrn Fouret mitgeteilt, und zwar als Grundlage für die Construction von Krümmungsradien der im Titel der ersten Abhandlung genannten Curven. Die grundlegende Construction besteht im Folgenden: „Es sei M der gegebene Kegelschnitt-Punkt, m die in ihm be-

rührende Tangente, *A*, *B*, *C* drei weitere Curvenpunkte. Man lege den Kreis, der *m* in *M* berührt und durch *A* geht. Sein Centrum sei *O*, seine zweiten Schnittpunkte mit den Geraden *MB* und *MC* seien *E* und *F*. Die Gerade *EF* schneide *BC* in *G* und *MA* in *H*. Die Parallele durch *A* zu *EF* schneide *BC* in *K*. Dann ziehe man durch *G* die Parallele zu *KA*, welche *MA* in *L* schneidet. Durch *L* ziehe man endlich noch zu *HO* die Parallele, welche die Normale in *M* in dem Krümmungsmittelpunkte schneidet." Die Anwendung dieser Construction und der ihr zugrunde liegenden eleganten Formel für den Krümmungsradius auf die genannten Curven gestaltet auch für diese die Construction des Krümmungsmittelpunkts recht einfach. In der zweiten Abhandlung wird in ähnlicher Weise eine Construction des Krümmungsmittelpunkts für einen Hyperbelpunkt mitgeteilt, wobei ausser dem Punkte und der in ihm berührenden Tangente ein zweiter Punkt und die Richtungen der Asymptoten als gegeben betrachtet werden. Scht.

R. Skutsch. Ueber Ermittelung von Krümmungshalbmessern von Kegelschnitten auf synthetischem Wege. Hoppe Arch. (2) IX. 95-96.

An jeder beliebigen Stelle eines Kegelschnitts, auch an denen, wo ein Kreis vierpunktig berühren würde, kann der Krümmungshalbmesser dadurch construirt werden, dass man die Tangente an der betreffenden Stelle zum Träger zweier projectiven Punktreihen macht. Dabei hat man ihren Schnittpunkt mit einer beliebigen zweiten Tangente als den einen Doppelpunkt zu betrachten, und als den zweiten Doppelpunkt den Schnittpunkt der ersten Tangente mit der Collineationsaxe des Kegelschnitts und eines beliebig an beide Tangenten gelegten Kreises; als entsprechende Strecken sind die beiden Elemente anzusehen, welche die beiden Curven mit der ersten Tangente gemein haben. Scht.

Cl. Servais. Quelques propriétés des coniques. Belg. Bull. (3) XIX. 231-241.

Cl. Servais. Sur les centres de courbure des lignes décrites pendant le déplacement d'une figure plane dans son plan. Ibid. 241-245.

Cl. Servais. Sur l'hyperbole équilatère. Ibid. 759-763.

Berichte über diese drei Aufsätze von Herrn C. Le Paige in Belg. Bull. (3) XIX. 160-161, 161-162, 736-737. Neue Anwendungen einer gewissen speciellen birationalen quadratischen Transformation, hauptsächlich auf die Theorie der Krümmung der Kegelschnitte. Mn. (Lp.)

Cl. Servais. Sur les points caractéristiques de quelques droites remarquables dans les coniques. Belg. Bull. (3) XIX. 519-528.

Cl. Servais. Sur la courbure des courbes du second degré. Ibid. 529-540.

Verallgemeinerung früherer Untersuchungen, deren kurze Wiedergabe schwierig ist. Bericht des Herrn Le Paige auf S. 510-512. Mn. (Lp.)

W. Rulf. Elementare Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes der Parabel. Hoppe Arch. (2) IX. 212-214.

Ist P ein Punkt der Parabel, und trifft die in P an die Parabel gezogene Tangente die Parabelaxe in A; trifft ferner die in P an die Parabel gezogene Normale die Parabelaxe in R, und ist PQ das von P auf AR gefällte Lot, so ist bekanntlich $QR = p$, wo p die Entfernung des Brennpunktes der Parabel von ihrer Directrix bedeutet. Construirt man nun von allen Punkten P' der Tangente AP erstens $P'Q'$ senkrecht auf die Axe AR, und macht zweitens auf der Axe $Q'R' = p$, wo QR und $Q'R'$ gleichen Sinn haben, verbindet dann drittens jedesmal R' mit P', so ist (wie elementar-geometrisch bewiesen wird) die Einhüllende aller dieser Geraden $P'R'$ eine zweite Parabel, deren Scheiteltangente die Axe der ersten ist, und deren Brennpunkt leicht gefunden wird. An diese zweite Parabel geht von P eine

Tangente, deren Berührungspunkt (auf *PR* gelegen) *M* sei; dann ist *M* der Krümmungsmittelpunkt zu *P* für die erste Parabel.

Es wird dann noch an eine einfache Construction des Krümmungsmittelpunktes erinnert, die mittels eines Winkelbrettchens allein (ohne Benutzung des Zirkels) geschieht, und die Formel für den Krümmungsradius entwickelt.

Mz.

A. Mannheim. Sur les normales aux coniques. Mess. (2) XX. 1-2.

Der Verfasser beweist den, wie er vermutet, noch nicht ausgesprochenen Satz: Ein Kegelschnitt und seine reciproke Polare in Bezug auf einen Kreis mit dem Mittelpunkte *O* haben dieselben vom Punkte *O* aus gezogenen Normalen. Auf den bekannten Joachimsthal'schen Satz angewandt, ergiebt dies: Sind *OA*, *OB*, *OC*, *OD* die von *O* an einen Kegelschnitt *E* gezogenen Normalen und ist *Δ* der dem Punkte *D* von *E* diametral gegenüberliegende Punkt, so liegen *A*, *B*, *C*, *Δ* auf einer Kreislinie. Dadurch gewinnt man den Satz: Die Punkte *A*, *B*, *C* und der Fusspunkt *F* des Lotes von *O* auf die Tangente in dem Schnittpunkte von *OD* mit *E* liegen auf einem Kreise; hieraus folgt ein neuer Punkt auf dem Joachimsthal'schen Kreise. Noch eine zweite Anwendung des ersten Lehrsatzes wird gemacht.

Glr. (Lp.)

E. Pellegrin. Solution de la question 1591. Nouv. Ann. (3) IX. 373-374.

Es seien *A*, *B*, *C* die Fusspunkte der drei von einem Punkte *P* aus an eine Parabel gezogenen Normalen. Drei durch den Scheitel der Parabel gelegte Kreise, welche sie bez. in *A*, *B* und *C* berühren sollen, schneiden dieselbe noch in drei anderen Punkten *A'*, *B'*, *C'*: dann gehen auch die Normalen in *A'*, *B'* und *C'* durch einen Punkt (*Q*). (Lemaire.)

Hr. Barisien bemerkt dazu:

1) Der Ort der Mitte von *AA'* ist eine Parabel.

2) Die Enveloppe von *AA'* ist eine Parabel.

3) Der Flächeninhalt des Dreiecks $A'B'C'$ ist achtmal so gross wie der des Dreiecks ABC.

4) Liegt der Punkt P auf der Evolute der Parabel, so liegt auch Q darauf. Wbg.

A. MANNHEIM. Sur une parabole liée à une conique par certaines propriétés remarquables. Mess. (2) XX. 45-48.

Chasles hat S. 145 seines Traité des sections coniques den Satz aufgestellt: Dreht man in der Ebene eines Kegelschnitts eine Transversale um einen Punkt und fällt von ihrem Pole aus das Lot auf sie, so umhüllen alle diese Lote eine Parabel, welche die Polare des festen Punktes und die Tangenten des Kegelschnittes in den Fusspunkten der von diesem Punkte aus gezogenen Normalen berührt. In einer Reihe von vierzehn Theoremen beweist der Verfasser diesen Satz und andere mit ihm zusammenhängende, teils bekannte, teils auch neue Sätze.

Glr. (Lp.)

R. SLAWYK. Der Feuerbach'sche Satz vom ebenen Dreieck. Schlömilch Z. XXXV. 36-51.

Eine Gerade l schneide die Seiten des Dreiecks $\mathfrak{ABC}$ in S_1, S_2, S_3; S_{11}, S_{22}, S_{33} seien S_1, S_2, S_3 involutorisch zugeordnet; dann giebt es vier Kegelschnitte $\mathfrak{M}^2$, welche die Seiten von $\mathfrak{ABC}$ berühren und denen die involutorische Reihe $S_1 S_{11} S_2 S_{22} S_3 S_{33}$ zugeordnet ist; die Pole von l in Bezug auf diese Kegelschnitte seien $\mathfrak{M}$. $\mathfrak{A}S_1$, $\mathfrak{B}S_2$, $\mathfrak{C}S_3$ bilden das Dreieck ABC; AS_1, BS_2, CS_3 das Dreieck $A'B'C'$ und M^2, O^2, M, O haben für ABC resp. $A'B'C'$ dieselbe Bedeutung, wie $\mathfrak{M}^2$ und $\mathfrak{M}$ für $\mathfrak{ABC}$; dann ist M^2 Polarkegelschnitt von O in Bezug auf eine Kegelschnittschar, welche die Seiten von $\mathfrak{ABC}$ und l zu gemeinsamen Tangenten hat. Der Schnittpunkt von $\mathfrak{A}A$, $\mathfrak{B}B$, $\mathfrak{C}C$ sei S, dann berührt der Polarkegelschnitt S^2 von S für dieselben gemeinschaftlichen Tangenten die Seiten des Dreiecks ABC in den Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, und weil $\mathfrak{ABC}$ das Diagonaldreieck des durch die vier Punkte $\mathfrak{M}$ bestimmten Vierecks ist, so ist auch S^2 Polarkegelschnitt für

eine Gerade λ in Bezug auf einen Kegelschnittbüschel mit den Grundpunkten $\mathfrak{M}$; λ schneide $\mathfrak{ABC}$ in $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$; $\mathfrak{A}\Sigma_1$, $\mathfrak{B}\Sigma_2$, $\mathfrak{C}\Sigma_3$ bilden das Dreieck $\mathit{\Delta B\Gamma}$ und $\mathfrak{A}\Delta$, $\mathfrak{B}B$, $\mathfrak{C}\Gamma$ schneiden sich in Σ; der Polarkegelschnitt von Σ^2 von Σ für eine Kegelschnittschar mit den Seiten von $\mathfrak{ABC}$ und λ als gemeinsamen Tangenten ist auch Polarkegelschnitt der Geraden l für den Kegelschnittbüschel mit den Grundpunkten $\mathfrak{M}$. S^2 und Σ^2 haben $\mathfrak{ABC}$ und einen vierten Punkt G gemeinsam, sie haben vier gemeinsame Tangenten t, welche ausserdem je einen der Kegelschnitte M^2 berühren. Σ^2 berührt die vier Kegelschnitte M^2 in den Punkten N und die gemeinsamen Tangenten in N sind die vier Geraden t. Rückt l ins Unendliche, so werden $\mathfrak{M}^2$ die vier Berührungskreise von $\mathfrak{ABC}$, M^2 diejenigen von ABC, Σ^2 der Feuerbach'sche Kreis und S^2 die Ellipse, welche die Seiten von ABC in deren Mitten berührt. Diese Ellipse hat also mit dem Feuerbach'schen Kreise die vier Tangenten t gemeinsam, von denen jede noch einen der umgeschriebenen Kreise berührt. — Zum Schlusse werden vier Constructionsarten der Berührungspunkte N und der Tangenten t gegeben. Die Arbeit hat einige Berührungspunkte mit derjenigen von Schröter im J. für Math. LXVIII, worauf an den betreffenden Stellen vom Verfasser hingewiesen ist.

Lg.

L. Bosi. Généralisation et solution de la question 1593.
Nouv. Ann. (3) IX. 556-558.

Gegeben ein Dreieck ABC und zwei Punkte P, Q in seiner Ebene. Man zeichne einen Kegelschnitt X durch P, Q, A und einen Kegelschnitt Y durch P, Q, B, jedoch so, dass sie beide die Seite AB in demselben Punkte C' schneiden. X schneide AC in B', Y schneide BC in A', X schneide Y noch in J, alsdann liegen P, Q, C, A', B', J auf einem dritten Kegelschnitte Z. Wird nun ein dritter willkürlicher Punkt R angenommen, und werden die Schnittpunkte der Strahlen RA, RB, RC resp. auf X, Y, Z mit D, E, F bezeichnet, so liegen die sieben Punkte P, Q, R, D, E, F, J auf einem neuen Kegelschnitte. Alle Kegelschnitte werden Kreise, falls P, Q die beiden Kreispunkte der Ebene sind. R. M.

Audibert. Solution de la question 1592. Nouv. Ann. (3) IX. 374-375.

Man ziehe von einem Punkte M aus an eine Ellipse die vier Normalen, deren Fusspunkte A_1, A_2, A_3, A_4 seien; jede der vier Normalen MA_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ trifft die grosse Axe bez. in P_i, die kleine Axe in Q_i. Dann finden die beiden Relationen statt:

$$(1) \qquad \frac{MA_1}{A_1P_1} + \frac{MA_2}{A_2P_2} + \frac{MA_3}{A_3P_3} + \frac{MA_4}{A_4P_4} = \text{const.},$$

$$(2) \qquad \frac{MA_1}{A_1Q_1} + \frac{MA_2}{A_2Q_2} + \frac{MA_3}{A_3Q_3} + \frac{MA_4}{A_4Q_4} = \text{const.}$$

(Barisien.)

Die vier Verhältnisse in (1) und (2) ergeben sich als Wurzeln einer Gleichung vierten Grades, in welcher der Coefficient der dritten Potenz der Unbekannten constant ist. Wbg.

F. Haluschka. Beitrag zur Kegelschnittslehre. Hoffmann Z. XXI. 183.

Synthetischer Beweis einer Ellipsen-Construction von Herrn H. J. Bazala in Hoffmann Z. I. Lp.

A. Strnad. Die Ellipse als Projection des Kreises. Casop. XIX. 128. (Böhmisch.)

Bildet eine Ergänzung der gewöhnlichen Schulbücher. Std.

W. J. C. Miller, P. H. Schoute, G. E. Crawford. Solution of question 10118. Ed. Times LII. 32-33.

Man ziehe durch die beiden Brennpunkte F_1 und F_2 einer Ellipse die beiden parallelen Fahrstrahlen F_1A_1 und F_2A_2, lege in A_1 und A_2 die Tangenten an die Ellipse, welche sich in P schneiden mögen; dann gelten elf von Herrn Miller zum Beweise vorgelegte Sätze, die zum Teil besondere Fälle allgemeinerer Eigenschaften sind. Unter anderem ist der Ort von P der Kreis, welcher die grosse Axe zum Durchmesser hat. Lp.

G. Tarry. Remarque sur le quadrangle harmonique d'une conique. J. de Math. spéc. (3) IV. 122-124, 131-132.

Beweise einiger Sätze über die gleichseitige Hyperbel mit Hülfe der Eigenschaften von vier harmonischen Punkten auf Kegelschnitten (vergl. Steiner, Systematische Entwickelung etc. No. 43, II ff.; Chasles, Traité des sections coniques, p. 102).

Lp.

H. Mandart. Sur un groupe de trois paraboles. Mathesis X. 30-33.

Beitrag zur Dreiecksgeometrie. Jede der fraglichen Parabeln ist die Eingehüllte einer Geraden, welche in gleichen Abständen von zwei Ecken eines Dreiecks die beiden Seiten schneidet, welche durch die dritte Ecke gehen. Mn. (Lp.)

G. de Longchamps. Démonstration élémentaire d'un théorème de M. Artzt. J. de Math. élém. (3) IV. 149-151.

Der Halbparameter der Parabel, welche die Seiten AB und AC eines Dreiecks in B und C berührt, ist $p = \frac{\Delta^2}{m^3}$, wenn Δ der Inhalt und m die Transversale von A nach der Mitte von BC ist.

Lg.

J. Brill, P. H. Schoute. Solution of questions 9139 and 9190. Ed. Times LIII. 108-110.

Auf einer Parabel werden m willkürliche Punkte gewählt, die den Schwerpunkt P haben, und n andere mit dem Schwerpunkte Q. Die Tangenten in den Enden der Durchmesser durch P und durch Q schneiden sich im Schwerpunkte der mn Schnittpunkte der Tangenten in den m und in den n Punkten unter einander. Ein zweiter Satz bezieht sich auf die Schwerpunkte dreier Systeme von je l, m, n Punkten auf der Parabel und der zugehörigen Umkreiscentren der Tangentendreiecke. Lp.

G. Papelier. Note sur la question proposée au concours général 1889. J. de Math. spéc. (3) IV. 12-14.

Synthetische Lösung; vergl. F. d. M. XXI. 1889. 723-724.
Lp.

C. Bergmans. Théorèmes sur la parabole. Mathesis X. 116-117.
Mn.

A. Hurwitz. Ueber die Schröter'sche Construction der ebenen Curven dritter Ordnung. J. für Math. CVII. 141-147.

Der Verfasser macht interessante Bemerkungen zu der ebenso einfachen wie eleganten Construction der ebenen Curven dritter Ordnung, wie sie von Schröter im fünften Bande der Math. Ann. und in seinem 1888 erschienenen Buche über diese Curven ausgeführt ist. Die Schröter'sche Construction besteht bekanntlich darin, dass man immer aus je zwei Punktepaaren (a, a'), (b, b') ein neues Paar dadurch ableitet, dass man die Geraden ab und $a'b'$ sowie auch ab' und $a'b$ zum Schnitte bringt. Schröter hatte gezeigt, dass, wenn man, von drei Punktepaaren ausgehend, auf diese Weise immer wieder neue Punktepaare bildet, alle so entstehenden Punktepaare auf einer und derselben Curve dritter Ordnung liegen. Herr Hurwitz aber beweist, dass man bei besonderen Lagen der ursprünglichen drei Punktepaare durch die angegebene Construction nicht zu „sämtlichen“ Punkten der Curve dritter Ordnung gelangt, sondern nur zu einem endlichen Systeme kommt, indem schliesslich jedes neu erzeugte Punktepaar mit einem schon gefundenen identisch wird. Wenn aber die Construction, ins Unbegrenzte fortgesetzt, unbegrenzt viele Punktepaare liefert, so bildet die Gesamtheit der letzteren ein Punktsystem, welches entweder eine einzügige Curve dritter Ordnung, oder nur den unpaaren Zug einer zweizügigen Curve dritter Ordnung, oder endlich sowohl den unpaaren wie auch den paaren Zug einer zweizügigen Curve dritter Ordnung überall dicht bedeckt. Ein ähnlicher Satz gilt auch für die Construction, welche Schröter in seiner 1890 erschienenen Schrift (Grundzüge einer

rein geometrischen Theorie der Raumcurve vierter Ordnung erster Species) bezüglich der Construction der Raumcurve vierter Ordnung erster Species aus Punktetripeln angegeben hat.

Scht.

Cl. Servais. Sur les points d'inflexion dans les cubiques. Belg. Bull. (3) XX. 453-462.

C. Le Paige. Rapport. Ibid. 431-433.

Sehr einfacher Beweis einer grossen Anzahl von Eigenschaften der Wendepunkte der kubischen Curven, von denen einige neu sind.

Mn. (Lp.)

F. Palatini. Sopra una configurazione determinata dal punto doppio e da sette punti semplici di una cubica piana razionale. Palmi. Tip. Lopresti. 49 S.

A sei der Doppelpunkt einer ebenen Curve dritter Ordnung, und K_1', K_1'', K_2', K_2'', B', B'', C seien sieben beliebige Punkte derselben. Durch die Gerade $K_1' K_1''$ werde eine beliebige Ebene u_1 gelegt und durch den Punkt A eine beliebige Gerade a, welche u_1 in P_1 schneide. Durch einen beliebigen Punkt B von a ziehe man die Geraden $BB' \equiv b'$ und $BB'' \equiv b''$ und bestimme ihre Spuren $Q_1' Q_1''$ auf u_1. Die Punkte K_1', K_1'', Q_1', Q_1'', P_1 bestimmen einen Kegelschnitt Γ_1. Dadurch entsteht eine Regelfläche dritten Grades, die aus den Geraden gebildet wird, welche die gegebene kubische Curve, den Kegelschnitt Γ und die Gerade a einzeln in verschiedenen Punkten treffen. Es seien c ihre durch C gehende Erzeugende und C und R_1 ihre Treffpunkte mit a und Γ_1; ferner Γ_2 der Kegelschnitt der Fläche, welche durch K_2' und K_2'' geht, u_2 seine Ebene; Q_2', Q_2'', R_2 die Spuren der Geraden b', b'', c auf derselben, endlich P_2, A die Begegnungspunkte von Γ_2 resp. mit a und Γ_1. Dann hat man schliesslich im Raume 11 Punkte A, B, C, P_i, Q_i', Q_i'', R_i ($i = 1, 2$). Die Geraden, welche sie zu je zwei bestimmen, schneiden die Ebene der gegebenen Curve in neuen Punkten, deren Verteilung man leicht bestimmt, indem man die Eigenschaften der beschriebenen Raumgebilde

betrachtet. So fährt der Verfasser fort; aber wir folgen ihm nicht auf diesem Wege, da seine Untersuchungen an die Géométrie de combinaison erinnern, welche Poncelet so gering schätzte. Doch wollen wir nicht unerwähnt lassen, dass der Verf. selbst die Unvollkommenheit seiner Arbeit anerkennt, wenn er die Bestimmung der Anzahl der Punkte unterlässt, welche man mit gewissen Constructionen erreicht, während doch die Kenntnis dieser Anzahlen überhaupt eine gewisse Wichtigkeit haben würde. Endlich bemerken wir, dass die untersuchte Configuration durch die gegebenen Curvenpunkte nicht bestimmt ist, da bei der Construction der obigen Regelfläche viele Bestimmungsstücke vollkommen beliebig sind. Daher wirft die Palatini'sche Arbeit sehr wenig Licht auf den Zusammenhang zwischen sieben Punkten einer rationalen ebenen Curve und ihrem Doppelpunkte und kann in keiner Weise als ein Beitrag angesehen werden zur Verallgemeinerung der zahlreichen und inhaltsvollen Untersuchungen über das Pascal'sche Sechseck. La.

M. Disteli. Zur Configuration der Wendepunkte der allgemeinen ebenen Curve dritter Ordnung. Wolf. Z. XXXV. 145-166. 1 Tafel.

Projicirt man die Schnittcurve zweier Flächen zweiten Grades mit reellem gemeinsamen Poltetraeder $M_1M_2M_3M_4$ von einem ihrer Punkte P aus auf eine Ebene, so ist die Projection von P selbst ein Wendepunkt der entstehenden Curve dritter Ordnung, wenn P ein stationärer Punkt der Schnittcurve war. Die anderen Wendepunkte entstehen aus Punkten, die ihre Tangente und ihre Verbindungslinie mit P auf derselben Fläche des durch die Curve bestimmten Büschels haben. Im Sinne der darstellenden Geometrie ist nun die Projection durch die Spuren $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$ der Kegel mit den Spitzen M_1, M_2 gegeben, welche die Curve enthalten, sowie durch die Projectionen M'_1, M'_2 der Spitzen dieser Kegel, die auf $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$ liegen, und endlich durch die Spur $\mathfrak{L}_{12}$ der Geraden M_1M_2. Aus der räumlichen Anschauung heraus leitet nun Herr D. Bestimmungen ab für die Wendepunkte, die Wendepunktsdreiecke, die von den Wendepunkten ausgehenden

Tangenten etc., wobei sich für die imaginären Stücke elliptische Involutionen ergeben. Die gewonnenen Resultate erlangen nun, wie es sein muss, eine rein planimetrische Beziehung zur Curve und werden an zwei Specialfällen erläutert, nämlich an der Curve, welche die imaginären Kreispunkte zu Wendepunkten hat, und an der Curve, welche drei reelle Wendepunkte im Unendlichen hat. E. K.

C. Juel. Om Opgaver med uendelig mange Lösninger. Nyt Tidss. for Math. I. 11-23.

Indem der Verf. von den Poncelet'schen Polygonen, die einem Kegelschnitte umgeschrieben, einem anderen eingeschrieben sind, ausgeht, untersucht er verschiedene Aufgaben, welche die Eigenschaft haben, unendlich viele Lösungen zu besitzen, falls sie eine solche haben.

Die Lösungen der meisten angeführten Aufgaben können aus dem Poncelet'schen Satze hergeleitet werden.

Unter den Sätzen, von welchen gezeigt wird, dass sie nur Umschreibungen des Poncelet'schen Satzes sind, möge der folgende hervorgehoben werden, welcher, wie Herr Juel bemerkt, im wesentlichen von Steiner herrührt, vom Verf. aber etwas erweitert ist.

Wenn man einer ebenen Curve dritter Ordnung ein geschlossenes Polygon mit einer geraden Anzahl von Seiten einschreiben kann, von denen jede durch einen festen Punkt der Curve geht, so können unendlich viele Polygone dieser Art eingeschrieben werden, indem man eine Ecke in einen willkürlichen Punkt der Curve legen kann. Eine andere Gestalt des Poncelet'schen Satzes ist die folgende.

Einer Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten können unendlich viele $2n$-Ecke eingeschrieben werden, von denen jede Seite einen Kegelschnitt aus einem speciellen System von vierfach berührenden Kegelschnitten berührt, falls man einen solchen Kegelschnitt einschreiben kann.

Endlich werden noch Untersuchungen angestellt, ob ähnliche

Sätze, wie die angeführten, für Flächen gelten, und schliesslich wird ein dem Poncelet'schen analoger Satz von Zeuthen bewiesen.

V.

G. Kohn. Ueber die Berührungskegelschnitte und Doppeltangenten der allgemeinen Curve vierter Ordnung. J. für Math. CVII. 1-50.

Im Journal für Mathematik Bd. XLIX hat Steiner über die Doppeltangenten der allgemeinen Curve vierter Ordnung Untersuchungen veröffentlicht, welche von Hesse in demselben Bande vervollständigt sind. (Vgl. auch Cayley im LXIII. Bande des Journals für Math. und Salmon's „Höhere Curven"). Dann hat Aronhold in den Berl. Ber. von 1864 den Weg aufgedeckt, welchen Steiner bei seinen Untersuchungen verfolgt hat. Dieser Weg ist später von Geiser (J. für Math. LXXII) und Ameseder (Wiener Ber. LXXXVI) weiter verfolgt. Der Steiner'sche Ausgangspunkt war unzweifelhaft die Betrachtung der 63 quadratischen Kegelschnitt-Systeme, deren Einhüllende die allgemeine Curve vierter Ordnung ist. Von diesem Steiner'schen Ausgangspunkte aus sind nun hier die bisher nur von einem andern Ausgangspunkte her bewiesenen Sätze über die Doppeltangenten der allgemeinen Curve vierter Ordnung naturgemäss entwickelt; dazu hat sich auch dem Verfasser eine Reihe von neuen Sätzen über die Berührungskegelschnitte und Doppeltangenten dieser Curve ergeben. Nimmt man in der Ebene eines Kegelschnitt-Netzes einen Kegelschnitt J an, so giebt es in dem Netze ein System von Kegelschnitten, denen Dreiecke einbeschrieben werden können, die dem Kegelschnitte J umbeschrieben sind. Die Relation, welche zwischen den Coefficienten der Gleichungen eines Kegelschnitts K dieses Systems und des Kegelschnitts J besteht, ist bekanntlich in den Coefficienten von K quadratisch, sodass das fragliche System ein quadratisches ist. Da die Seiten der ∞^1 einem K so einbeschreibbaren Dreiecke die Tripel einer kubischen Tangenten-Involution auf dem Kegelschnitte J bilden, so wird J Involutions-Kegelschnitt des quadratischen Systems genannt. Zunächst wird nun gezeigt, wie jedes beliebige quadratische

System Σ von Kegelschnitten des Netzes bestimmt werden kann. Auf dem Kegelschnitte J werden durch Σ ∞^2 Tangententripel bestimmt, die analytisch bestimmt werden. Durch diese quadratische doppelte Mannigfaltigkeit von Tangententripeln erscheinen nun drei Systeme von Berührungskegelschnitten der allgemeinen Curve vierter Ordnung direct gegeben. Aus dem neu eingeführten Begriff eines Involutionskegelschnitts für ein quadratisches Kegelschnittsystem ergeben sich elegante Sätze und Betrachtungen. Als Consequenz dieser Sätze ergiebt sich namentlich auch die Aronhold'sche lineare Construction der sämtlichen Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung aus den Doppeltangenten eines Siebner-Systems. Die wesentlichsten von den Sätzen, die in der vorliegenden Abhandlung bewiesen sind, hatte der Verfasser schon in den Wiener Ber. vom 3. Februar 1888, jedoch ohne Beweis, veröffentlicht. Scht.

G. Kohn. Ueber die Relationen, welche zwischen den verschiedenen Systemen von Berührungskegelschnitten einer allgemeinen Curve vierter Ordnung bestehen. Monatsh. f. Math. I. 71-91, 129-158.

Die Sätze 1 bis 8 der Note, welche der Verfasser in den Wiener Ber. XCVII über die Berührungskegelschnitte und Doppeltangenten der allgemeinen Curve vierter Ordnung veröffentlicht hat, werden hier bewiesen, während die übrigen Sätze jener Note und die einer andern in den Wiener Ber. XCVI publicirten Note in einer Abhandlung bewiesen sind, die im Journ. für Math. CVII erschienen ist (vgl. das vorangehende Referat). Auch sind mehrere von den Resultaten dieser letzten Abhandlung hier anders begründet und weitergeführt. Von den hübschen Betrachtungen in der vorliegenden Abhandlung sei jetzt namentlich die erwähnt, welche an die Fragen anknüpft, die Steiner am Schluss seiner grundlegenden Abhandlung „über die Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung" (Journ. für Math. IL) bezüglich der Relationen stellt, welche einerseits zwischen den Hesse'schen Curven, andererseits zwischen den Cayley'schen Curven der 63 Netze bestehen, in denen die

63 Systeme von Berührungskegelschnitten der Curve vierter Ordnung enthalten sind. Die Relationen zwischen den Hesse'schen Curven hatte schon Herr Frobenius im CIII. Bande des Journ. für Math. untersucht. Von einer andern Seite her greift hier Herr Kohn jene Steiner'schen Fragen an. Scht.

O. Richter. Ueber die Systeme derjenigen Kegelschnitte, die eine bicirculare Curve vierter Ordnung viermal berühren. Leipzig. B. G. Teubner. 8°. 111 S. 4 Taf. Unveränderter Abdruck aus Schlömilch Z. XXXV. Suppl. 1-111. Selbstanzeige in den Leipz. Ber. XLII. 8-12.

In einer früheren Abhandlung hatte der Verfasser die Kreis-Fusspunktcurve als Hüllcurve einer Ellipse behandelt, die in der Ebene sich so bewegt, dass ihre Axen durch zwei feste Punkte E und F hindurch gehen, und also ihr Mittelpunkt einen Kreis durchläuft. Dieser Gedanke wird hier weiter ausgebildet und bei den allgemeinen bicircularen Curven vierter Ordnung zu einer ganz elementaren Behandlung gewisser specieller Systeme benutzt, die aus vierpunktig berührenden Kegelschnitten bestehen. Man hat nur an die Stelle der früheren Ellipse einen Kegelschnitt treten zu lassen, der sich zu sich selbst ähnlich verändert, während seine beiden Axen zwei feste Punkte E und F enthalten. Ist nämlich Q irgend ein Punkt, K der Mittelpunkt des Kreises über EF als Durchmesser, QKF gleich 2φ, so soll der zu Q gehörige Kegelschnitt die Axengleichung

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=1$$

haben, wobei

$$A = \mathrm{A}\,(1-\lambda\cos 2\varphi-\mu\sin 2\varphi),\qquad B = \mathrm{B}\,(1-\lambda\cos 2\varphi-\mu\sin 2\varphi)$$

ist und A und B Constanten sind. Die Kegelschnitte sind paarweise congruent, und es liegen die Mittelpunkte eines solchen Paares symmetrisch zu einem zweiten Durchmesser $E'F'$.

Das so erhaltene System Σ vierpunktig berührender Kegelschnitte enthält ausser zwei Paaren eigentlicher Doppeltangenten

noch zwei andere, deren jedes aus zwei von demselben Kreispunkte ausgehenden Tangenten der bicircularen Curve besteht.

Von besonderem Interesse ist der Umstand, dass mit dem ersten noch ein anderes System vierpunktig berührender Kegelschnitte gegeben ist. Man erhält sie als Hüllcurven der Tangenten, welche die früheren Kegelschnitte in entsprechenden Punkten berühren. Das neue System enthält wieder zwei eigentliche Paare von Doppeltangenten, die zusammen aus denselben vier Tangenten gebildet sind wie die früheren Paare, und ferner die beiden anderen Paare von Tangenten, die ausser den in Σ vorkommenden sich von den Kreispunkten aus an die Curve legen lassen. Die Axen der neuen Kegelschnitte gehen durch $E'F'$, und je zwei Kegelschnitte, deren Mittelpunkte symmetrisch zu EF liegen, sind congruent.

Zu einem System vierpunktig berührender bicircularer Curven vierter Ordnung gelangt man, wenn man je die homologen Punkte der Kegelschnitte von Σ, bez. Σ' zusammenfasst. Besondere Aufmerksamkeit wird noch einem Büschel gleichseitiger Hyperbeln geschenkt, dessen Curven je die acht Berührungspunkte zweier Kegelschnitte von Σ mit parallelen Axen enthält. Im zweiten Abschnitte der Arbeit werden specielle bicirculare Curven untersucht, zunächst diejenige mit einer Symmetrieaxe, sodann die Cassini'sche Curve, die Fusspunktcurve, welche Hyperbel und Ellipse für den Mittelpunkt ergeben, ferner die aus zwei Kreisen bestehende Curve etc. Im dritten Abschnitte werden ferner die bicircularen Curven dritter Ordnung ins Auge gefasst. Hier erhält man ein System dreipunktig berührender Parabeln, deren Axen durch einen Punkt gehen. E. K.

A. Mannheim. Détermination géométrique du centre de courbure de l'ellipse de Cassini. Böklen Mitt. III. 14-16.

Eine aus kinematischen Gesichtspunkten gewonnene Lösung der angezeigten Aufgabe. Schn.

P. PERLEWITZ. Die Fusspunktlinien des umbeschriebenen Kreises eines Dreiecks, elementar behandelt. Pr. (No. 99) Sophien-Realgymn. Berlin. R. Gaertner's Verlagsbuchh. H. Heyfelder. 16 S. 4° mit 3 Figurentafeln.

Die „Steiner'sche Curve", welche durch Umhüllung aus den in der Ueberschrift bezeichneten Linien entsteht, ist synthetisch und analytisch, als Curve vierten Grades oder Hypocykloide verschiedentlich bearbeitet worden; auf elementarem Wege sind aber bisher nur einzelne Sätze von derselben bewiesen worden. Verfasser macht hier den Versuch einer vollständig elementaren Behandlung des Problems; dieselbe ist rein geometrisch und streift nur einmal (§ 11) das Gebiet der höheren Geometrie. § 1 giebt Geschichte und Litteratur, § 2-3 einleitende Sätze, § 4-8 Beziehungen der Fusspunktlinien, insbesondere der Gegenlinien (zu Gegenpunkten des Umkreises gehörig) unter einander und zum Feuerbach'schen Kreise, § 9 behandelt die Gestalt, § 10 besondere Entstehungsarten, § 11 Gleichungen der Curve, § 12 die Construction gewisser Fusspunktlinien durch Rechnung.

Lg.

ED. JANISCH. Tangentenconstructionen für Fusspunktencurven. Hoppe Arch. IX. 196-201.

Bildet man zu einer Schar von Curven die Fusspunktencurven in Beziehung auf einen Pol P, so ist die Enveloppe derselben die Fusspunktencurve der Enveloppe von jener Curvenschar. Wesentlich auf diesen bekannten Satz gründen sich die Constructionen. Uebrigens sind die Constructionen so nahe liegend, dass es weder jenes generellen Satzes, noch der in dem Aufsatze herangezogenen beiden Curvenarten bedarf. Schn.

M. D'OCAGNE. Deux théorèmes généraux sur les trajectoires de points et les enveloppes de droites dans le plan. Nouv. Ann. (3) IX. 289-293.

Die beiden Theoreme sind bereits in den C. R. 1889 (23. De-

cember) mitgeteilt worden. Es erfolgt hier ihre kurze Begründung. Schn.

M. d'Ocagne. Théorèmes de géométrie infinitésimale. Applications aux anamorphoses coniques. J. de Math. spéc. (3) IV. 31-33, 49-52.

Fortsetzung der Betrachtungen, über welche F. d. M. XX. 1888. 697 berichtet ist. Sätze über den Krümmungsmittelpunkt werden abgeleitet und zur Lösung der Aufgabe verwendet: Ein spiegelnder gerader Kegel ruht mit seiner Grundfläche auf einer Ebene. In dieser Ebene eine Curve c' so zu zeichnen, dass ihr Bild für ein auf der Axe des Kegels in unendlicher Entfernung befindliches Auge eine gegebene Curve c wird. Lp.

C. Besondere räumliche Gebilde.

Th. Meyer. Ueber einen Satz aus der projectivischen Geometrie. Schlömilch Z. XXXV. 381-382.

Von einem von Herrn Schlömilch ausgesprochenen (XXVII. 380), dann von Herrn Sachse (XXVII. 381), endlich in einfacherer Art von Schröter (XXVIII. 178) und Herrn Quidde (XXVIII. 192) bewiesenen Satze wird hier eine Verallgemeinerung bewiesen, die sich aussprechen lässt, wie folgt: „Projicirt man ein vollständiges Vierseit aus einem Punkte des Raumes auf eine andere Ebene, und verbindet man dann irgend zwei Gegenpunkte des einen Vierseits wechselweise mit den entsprechenden Gegenpunkten des andern durch zwei Gerade, so schneiden sich diese auf einer bestimmten Geraden“. Scht.

H. Schroeter. Ueber die acht Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung. Acta Math. XIV. 207-209.

In Acta Math. XII hatte Herr Zeuthen im Anschluss an eine Arbeit des Herrn Dobriner einen Satz über eine Gruppe

von acht associirten Punkten ausgesprochen. Schröter macht nun Herrn Zeuthen brieflich darauf aufmerksam, dass sich dieser Satz in einer Arbeit von A. Buchheim (An extension of Pascal's theorem to space of three dimensions, Messenger (2) XIV. 74-75, F. d. M. XVI. 1884. 576) ausgesprochen findet. Von diesem Satze hatte sich Schröter einen Beweis zurecht gelegt, der nichts weiter voraussetzt, als dass die durch sieben von den gegebenen Punkten gelegten Hyperboloide auch den achten enthalten, also ebenso wohl für acht Punkte einer Raumcurve dritter Ordnung, wie für eine Gruppe von acht associirten Punkten gilt. Dieser Beweis wird hier mitgeteilt. Scht.

H. Ahlborn. Zum Pentagramma mirificum. Hamb. Mitt. II. 69-74.

Im dritten Bande von Gauss' gesammelten Werken (S. 481-490) sind, ohne Herleitung, die Eigenschaften zusammengestellt, welche Gauss bezüglich eines Kugelfünfecks gefunden hat, dessen fünf Diagonalen Quadranten sind. Auf diese „pentagramma mirificum" genannte Figur bezieht sich eine von Wichmann verfasste, in den „Commentationes soc. reg. Gotting." 1843 abgedruckte Preisschrift. Auch der Verfasser hatte schon 1874 im Progr. d. Realschule zu Osnabrück einen Teil der Gauss'schen Sätze über dieses Pentagramm bewiesen. Hier sind noch weitere Sätze für diese merkwürdige Figur abgeleitet, u. a. auch ein von Cayley in den Phil. Mag. (October 1871) mitgeteilter Satz. Die Centralprojection des Pentagramms vom Kugelcentrum aus auf eine Tangentialebene ist ein geradliniges Fünfeck, in dem die von den Ecken auf die Gegenseiten gefällten Lote sich in einem und demselben Punkte schneiden. Die Methode der Untersuchung geht von der Darstellung der fünf Ecken dieser Projection in ganzen complexen Zahlen aus. Scht.

G. Leinekugel. Solutions des questions 266 et 271. J. de Math. spéc. (3) IV. 22-23.

Die Seiten aller Dreiecke *ABC*, deren Ecken bezw. auf drei

zu einer und derselben Ebene parallelen Geraden a, b, c liegen und welche denselben Schwerpunkt G besitzen, sind die Erzeugenden dreier Paraboloide, und die Ebenen ABC umhüllen einen Kegel zweiter Ordnung. Lp.

Th. Meyer. Ueber das sphärische Polarsystem und seine Anwendung auf das Tetraeder. Pr. Gewerbesch. Saarbrücken und Hoppe Arch. (2) VIII. 363-373.

Th. Meyer. Ueber das allgemeine singuläre Polarsystem. Hoppe Arch. (2) IX. 18-30.

Ordnet man jedem Punkte des Raumes eine Ebene zu, die zu seiner Verbindungslinie mit einem festen Punkte M senkrecht steht und sie in einem solchen Punkte Q trifft, dass

$$MP\,.\,MQ = c$$

ist, so entsteht, wie Herr M. elementar zeigt, das Polarsystem einer reellen oder nicht reellen Kugel. Durch Umbildung an diesem Polarsystem lässt sich dann eine Reihe zum grössten Teil bekannter Eigenschaften des Tetraeders mit oder ohne Höhenpunkt ableiten. Die entsprechende Entwickelung für die Ebene wird in der zweiten Abhandlung gegeben. E. K.

J. B. Eck. Ueber die Verteilung der Axen der Rotationsflächen zweiten Grades, welche durch gegebene Punkte gehen. Diss. (Münster). Bonn; Carl Georgi. 1890. 145 S.

Die umfangreiche Abhandlung zerfällt in einen einleitenden Abschnitt und in drei Hauptcapitel, in denen nach einander die Mannigfaltigkeiten der Rotationsflächen zweiten Grades überhaupt, der Rotationscylinder und der Rotationskegel abgehandelt werden. Die Einleitung wird nötig, um den parabolischen Cylindern ihre Rolle zuzuweisen. Da als Rotationsfläche jede Fläche zweiten Grades gilt, die den unendlich fernen Kugelkreis $\mathfrak{K}^2$ in zwei Punkten berührt, so treten auch sie unter den betrachteten Flächen auf. Da die Axe einer Rotationsfläche einmal hinsichtlich $\mathfrak{K}^2$ zur Berührungssehne polarreciprok sein muss

und andererseits die Mittelpunkte der Flächenkreise enthält, so betrachtet Herr Eck als Axe des parabolischen Cylinders die unendlich ferne Gerade der Ebenen, welche zu den Geraden des Cylinders senkrecht stehen, als Mittelpunkt den Schnittpunkt der Axe mit der Berührungskante. Als Axe eines Paares paralleler Ebenen kann jede zu ihnen senkrechte unendlich ferne Gerade gelten.

Vorzüglich kommen die entwickelten Resultate durch die Combination dreier Stammcomplexe zu Stande. Der erste, R_4, besteht aus den Axen der A_1, A_2, A_3, A_4 enthaltenden Rotationsflächen, der zweite, Z_2, aus den Axen der Rotationscylinder, die A_1, A_2 enthalten, und der dritte, K_3, aus den Axen der Rotationskegel, die drei Punkte A_1, A_2, A_3 enthalten. R_4, bereits von Laguerre untersucht, ist vom dritten Grade; von seinen acht Strahlenbündeln hat eines den Mittelpunkt C der $A_1A_2A_3A_4$ umschriebenen Kugel zum Centrum, die anderen Centren liegen unendlich fern auf den Loten c_{ikl}, die von C aus auf die Ebenen des Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$ sich fällen lassen, und auf den Geraden $d_{ik,lm}$, die von C ausgehen und die Paare gegenüberliegender Kanten desselben treffen. Der Complexkegel eines beliebigen Punktes P enthält ausser PC die Parallelen zu den c_{ikl} und den $d_{ik,lm}$, längs der ersteren berührt er die Ebenen Pc_{ikl}; er verschiebt sich also zu sich selbst parallel, wenn P von C aus auf einer Geraden fortschreitet. Die Complexcurve in irgend einer Ebene π berührt die unendlich ferne Ebene zweifach, die Ebenen γ_{ik}, die in den Mitten der Kanten A_iA_k senkrecht stehen, einfach, so dass das erstere Strahlenfeld zwei-, die letzteren einfach zum Complex gehören. (§§ 17-54.)

Eine Gerade gehört dem Complex Z_2 an, wenn die zu ihr und zu A_1A_2 senkrechte Gerade in dem Halbirungspunkte B_{12} der Strecke A_1A_2 trifft. Da demnach der Complexkegel eines Punktes P den Kreis projicirt, welchen auf γ_{12} die Kugel über PB_{12} ausschneidet, so ist Z_2 ein Reye'scher Complex, dessen Tetraeder ausser B_{12} den unendlich fernen Punkt $\mathfrak{A}_{12}$ der Geraden A_1A_2 und die Kreispunkte von γ_{12} zu Ecken hat. (§§ 74-85.)

Am meisten Schwierigkeiten macht der Complex K_3. Um die Axen der Rotationskegel durch A_1, A_2, A_3 zu erhalten, die von einem Punkte P ausgehen und in einer Ebene π liegen, benutzt Herr Eck, dass, wenn eine Gerade p in π um P sich dreht, die Spitzen der beiden Rotationskegel mit der Axe p und den Punkten A_1, A_2 auf einer Curve k_{12} vierter Ordnung mit dem Doppelpunkte P fortschreiten. Wird A_3 für A_2 eingeführt, so entsteht eine analoge Curve k_{13}. Von den zwölf Schnittpunkten ausserhalb P zwischen k_{12} und k_{13} führen sechs auf Gerade der gesuchten Art, die übrigen auf Gerade, die der Aufgabe fremd sind. K_3 ist somit vom sechsten Grade.

In α ($\equiv A_1A_2A_3$) liegen als Complexcurven drei Parabeln, von denen jede eine Ecke des Dreiecks $A_1A_2A_3$ zum Brennpunkte, die gegenüberliegende Seite aber zur Directrix hat. In jeder zu α senkrechten Ebene μ ist eine Complexcurve der eine Focalkegelschnitt der Curve zweiten Grades, die $(\mu\alpha)$ zum einen Durchmesser hat und A_1, A_2, A_3 enthält. Ein vierfacher Strahlenbündel des Complexes geht von dem senkrecht über α im Unendlichen liegenden Punkte $\mathfrak{C}$ aus, einfache senden die Schnittpunkte der Ebenen γ_{ik} mit $\mathfrak{K}^2$ und die beiden Punkte aus, von denen aus $\mathfrak{K}^2$ in den $A_1A_2A_3$ umschriebenen Kreis projicirt wird. Einfache Strahlenebenen sind γ_{23}, γ_{31}, γ_{12}; mit Hülfe von etwas subtilen Betrachtungen stellt Herr Eck den Satz auf, dass die unendlich ferne Ebene dreifach zum Complex gehört, vierfach aber ausser den unendlich fernen Strahlen von $\mathfrak{C}$ die Tangenten von $\mathfrak{K}^2$ zählen. Der erste Teil der Behauptung hätte sich auf andere Weise sehr einfach erledigen lassen. (§§ 102-131.)

Zwei Complexe R_4, deren jeder zu vier von fünf Punkten A_1, A_2, ..., A_5 gehört, haben ein Strahlensystem R_5 siebenter Ordnung und zweiter Klasse (7, 2) gemein, dessen Strahlen Axen von Rotationsflächen sind, welche die fünf Punkte enthalten. Die Congruenz erweist sich, Herrn Kummer's Entwickelungen entsprechend, als frei von singulären Punkten: Die zehn Curven dritter und die eine Curve sechster Klasse, welche die allgemeine Theorie fordert, lassen sich in den Ebenen γ_{ik} ($i, k = 1, 2, \ldots, 5$) und der unendlich fernen Ebene nachweisen. (§§ 55-66.)

Das zu $A_1, \ldots, A_5$ gehörige Strahlensystem R_5 und der zu A_1, A_2, A_3, A_6 gehörige Complex R_4 haben die Axen der Rotationsflächen mit einander gemein, die alle sechs Punkte enthalten. Ihre Regelfläche ist zunächst nach der Halphen'schen Formel von der 27. Ordnung, aber es lösen sich als fremde Bestandteile die unendlich fernen Geraden von R_5 zweifach und die in $\gamma_{23}, \gamma_{31}, \gamma_{12}$ liegenden einfach ab, so dass eine Regelfläche sechster Ordnung übrig bleibt. Sie hat mit jeder Ebene γ_{ik} drei, mit der unendlich fernen Ebene vier Erzeugende und einen Kegelschnitt gemein. Diese Ergebnisse bestätigen in verschiedenen Arten, dass vier Rotationsflächen durch sieben Punkte sich legen lassen. (§§ 68-73.)

Nebenher geht im ersten Hauptteile die Untersuchung der Rotationsparaboloide. Je nachdem drei, vier oder fünf Punkte vorliegen, erhält man für die Axen einen Complex dritten Grades (§ 40), ein Strahlensystem siebenter Ordnung und zweiter Klasse (§ 43) oder eine Regelfläche sechsten Grades. (§ 67.)

Die beiden zu A_1, A_2 und A_1, A_3 gehörenden Complexe Z_2 haben ein Strahlensystem Z_3 vierter Ordnung und dritter Klasse gemein, welches die Axen der A_1, A_2, A_3 enthaltenden Rotationscylinder aufweist. Singuläre Punkte des Systems sind B_{23}, B_{31}, B_{12} und $\mathfrak{A}_{23}, \mathfrak{A}_{31}, \mathfrak{A}_{12}$, ferner die Schnittpunkte von $\mathfrak{K}^2$ mit den Ebenen $\gamma_{23}, \gamma_{31}, \gamma_{12}$. Ausser den Ebenen γ_{ik}, deren jede die Tangenten einer Parabel zum System beiträgt, wäre nach Herrn Eck's Entwickelungen noch die unendlich ferne Ebene singulär, und zwar enthielte sie den Strahlenbüschel, dessen Centrum senkrecht über α liegt, und die Tangenten von $\mathfrak{K}^2$. (§§ 85-96.)

Sind von den Rotationscylindern vier Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 gegeben, so hat der zu A_1, A_2, A_3, A_4 gehörige Complex R_4 mit dem zu A_1, A_2, A_3 gehörigen System Z_3 ausser den in $\gamma_{23}, \gamma_{31}, \gamma_{12}$ liegenden Geraden von Z_3 und den zweifach zählenden unendlich fernen Geraden noch eine Regelfläche neunter Ordnung gemein, der die gesuchten Axen angehören. Die Fläche hat je drei Gerade in den Ebenen γ_{ik} und sechs im Unendlichen. Ebenso muss die Regelfläche aber entstehen, wenn man das zu A_1, A_2, A_3 gehörige System Z_3 mit dem A_1, A_4 zugehörigen Complex Z_2 schneidet. Hierbei würde sich nach Ablösung der

unendlich fernen Bestandteile von Z_3 eine Regelfläche elfter Ordnung ergeben. Zur Lösung dieses Widerspruchs nimmt Herr Eck an, dass Z_2 und Z_3 die Tangenten von $\mathfrak{K}^2$ zweifach miteinander gemein haben. Die Zahl der Rotationscylinder durch fünf Punkte findet Herr Eck im Einklang mit einer von Herrn Kiefer herrührenden und verwandte Probleme behandelnden Schrift gleich sechs. (§§ 97-101.)

Die Rotationskegel durch A_1, A_2, A_3, A_4 haben ihre Axen zugleich in dem zugehörigen Complex R_4 und in dem A_1, A_2, A_3 entsprechenden Complex K_3. Das System derselben ist von der 14. Ordnung und der sechsten Klasse. Singulär sind die unendlich ferne Ebene und die Ebenen γ_{ik}, in denen Curven elfter, bez. sechster Klasse sich vorfinden (§§ 132-140). Den Complex K_3 mit einem zu $A_1, \ldots, A_5$ gehörigen Strahlensystem R_5 schneidend, kommt man zu einer Regelfläche 18. Ordnung für die Axen der diese Punkte enthaltenden Rotationskegel (§§ 141-142). Die Zahl der Rotationskegel durch sechs Punkte ergiebt sich auf verschiedene Weise gleich zwölf (§ 143). In manchen Einzelheiten kommt Herr Eck zu anderen Resultaten als Herr Kiefer.

E. K.

A. Cayley. On reciprocal lines. Mess. (2) XIX. 174-175.

Wenn zwei Gerade in Bezug auf eine Oberfläche zweiter Ordnung conjugirte Polaren sind, so ist jeder Punkt der einen und jeder Punkt der andern harmonisch bezüglich der Oberfläche. Dieser Satz kann auch aus einem anderen Gesichtspunkte betrachtet werden. Wenn die erste Gerade die Oberfläche in A, C schneidet und die zweite in B, D, so sind AB, BC, CD, DA Gerade der Oberfläche, AB und CD z. B. Leitlinien, BC und AD Erzeugende, indem nämlich die beiden reciproken Geraden die Diagonalen AC und BD des windschiefen Vierecks sind. Nimmt man auf AC einen Punkt P und auf BD einen Punkt Q, so besteht die neue Fassung des Satzes darin, dass, wenn PQ die Oberfläche in X und Y berührt, dann die vier Punkte P, Q, X, Y harmonisch sind.

Glr. (Lp.)

Th. Reye. Der gegenwärtige Stand unserer Kenntnis der kubischen Raumcurven, übersichtlich dargestellt. Hamb. Mitt. II. 43-60.

Das 200-jährige Stiftungsfest der ältesten mathematischen Gesellschaft forderte naturgemäss zu Rückblicken auf die Geschichte der Mathematik auf. Und so hat auch Herr Reye durch die vorliegende inhaltreiche Arbeit für die anlässlich jenes Stiftungsfestes erschienene Festschrift zu der Geschichte der modernen Mathematik einen wichtigen Beitrag geliefert. Die Raumcurven dritter Ordnung haben sowohl dadurch, dass sie die einfachsten Raumcurven sind, wie auch dadurch, dass sie für die Geometrie des Raumes eine ähnliche Bedeutung haben wie die Kegelschnitte, die Aufmerksamkeit der Geometer in den letzten Jahrzehnten mehr und mehr auf sich gezogen. Schon 1827 lieferte Möbius in seinem „Barycentrischen Calcül" eine analytische Darstellung der kubischen Raumcurve k^3. Dann gab Chasles 1837 den Grad 4 der abwickelbaren Fläche ihrer Tangenten an, und Cayley bewies 1845, dass durch jeden Punkt des Raumes eine Bisecante der k^3 hindurch geht. Am meisten aber regten zum Studium der k^3 die Sätze an, welche Chasles 1857 über diese Curve ohne Beweis veröffentlichte (C. R. 1857, Journ. de Math. (2) II. 1857). Seitdem ist über die k^3 eine reichhaltige Litteratur entstanden. Von dieser seien hier namentlich folgende Werke und Abhandlungen hervorgehoben. Eine systematische Untersuchung der k^3 findet man besonders in Reye's „Geometrie der Lage" (II. Auflage 1880) und in Schröter's „Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumcurven dritter Ordnung". Ausserdem beachte man: Cremona (Annali di Mat. (1) I, II, V, ferner J. für Math. LVIII, LX, LXIII und Nouv. Ann. (2) I), Schröter (J. für Math. LVI), v. Staudt (Beiträge, 3. Heft, Nürnberg 1860), Sturm (J. für Math. LXXIX, LXXX, LXXXVI, Math. Ann. XXVI), Schubert (Calcül der abzählenden Geometrie 1879), Voss (Math. Ann. XIII), F. Meyer (Apolarität und rationale Curven, Tübingen 1883), H. Krüger (Die Focaleigensch. d. kubischen Raumcurven, Diss. Breslau 1885). Diese Litteratur hebt Herr Reye in der Einleitung zu seiner Arbeit in erster Linie hervor; bei Gelegenheit

des Aufbaus der bisher erkannten Eigenschaften der k^3 werden dann noch einige andere Abhandlungen citirt. Die Aufzählung aller der von Herrn Reye übersichtlich zusammengestellten Eigenschaften der k^3 würde die Grenzen eines Referats übersteigen. Am Schluss hebt der Verf. mit Recht hervor, dass wir unsere Kenntnis über die k^3 lediglich der synthetischen Geometrie verdanken, indem die Infinitesimal-Geometrie zu der Kenntnis dieser einfachsten algebraischen Raumcurven kaum etwas beigetragen hat. Namentlich wissen wir so gut wie nichts über die Krümmung und Torsion der k^3, ihre Krümmungskreise, die sie doppelt berührenden und hyperosculirenden Kugeln, ihre Normalebenen, ihre Haupt- und Binormalen, ihre Evoluten und Evolventen.

Scht.

G. Kohn. Ueber eine neue Erzeugungsart der Flächen dritter Ordnung. Wien. Ber. XCIX. 683-691.

Die Punkte, in denen die Strahlen eines linearen Complexes von den ∞^2 durch fünf gegebene Punkte gehenden Raumcurven berührt werden, erzeugen eine Fläche, die natürlich dritter Ordnung ist, und von der Herr Kohn nachweist, dass sie punktallgemein ist. Aus dieser Erzeugungsart leitet der Verfasser geometrisch die Sätze ab, welche Herr Caporali über Gruppen von fünf Flächenpunkten durch Rechnung gefunden hat (Akademie zu Neapel 1881, Acc. dei Lincei, (3) I. 1877). Ausserdem entspringen aus der angegebenen Quelle auch neue Sätze, von denen wir beispielsweise anführen: „Zwölf Punkte, welche mit den fünf Ecken und zehn Diagonalpunkten eines räumlichen Fünfecks zusammen die 27 Schnittpunkte von drei Flächen dritter Ordnung bilden, liegen immer auf einer und derselben Fläche zweiter Ordnung, und die dem Fünfeck umschriebene und durch einen der zwölf Punkte gehende Raumcurve dritter Ordnung hat in diesem Punkte eine Erzeugende der Fläche zweiter Ordnung als Tangente“.

Scht.

E. Ciani. Sulle superficie cubiche, la cui Hessiana si spezza. Rom. Acc. L. Rend. (4) VI_1. 55-63.

Herr C. gelangt zu folgendem Resultat: Die Hesse'sche Fläche einer Fläche dritter Ordnung kann entweder in einen Kegel dritter Ordnung und eine Ebene oder in einen Kegel zweiten Grades und eine durch seine Spitze gehende Doppelebene zerfallen. Im ersten Falle hat die Spitze des Kegels die doppelt gezählte Ebene zur Polarfläche, und die Schnittcurve beider ist die Hesse'sche Curve der Schnittlinie zwischen Ebene und Grundfläche. Der Kegel kann wohl in drei Ebenen, nicht aber in eine Ebene und einen Kegel zweiter Ordnung zerfallen. Der zweite Fall tritt nur dann ein, wenn die vorgelegte Fläche einen uniplanaren Punkt besitzt. E. K.

K. Stoltz. Untersuchung der Fläche dritter Ordnung hinsichtlich der projectiv verallgemeinerten Mittelpunkts-Eigenschaften. Diss. Giessen. 18 S. 4°.

H. Schröter. Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der Raumcurve vierter Ordnung erster Species. Leipzig. B. G. Teubner. VI u. 101 S. 8°.

Die im Titel genannte Curve, der vollständige Schnitt zweier Oberflächen zweiter Ordnung, ist nicht allein in vielen grösseren geometrischen Werken gelegentlich berührt und untersucht, sondern auch recht oft der Gegenstand besonderer Abhandlungen gewesen. Die vom Verfasser des vorliegenden Buches angegebene Litteratur ist eine so reichhaltige, dass Referent darauf verzichten muss, sie hier wiederzugeben. Trotzdem waren bisher die Eigenschaften der C_1^4 noch nie sämtlich aus den Elementen der räumlichen Geometrie rein geometrisch abgeleitet. Dies thut hier der der Wissenschaft inzwischen durch den Tod entrissene Geometer in der ihm eigenen, ebenso geschickten wie gründlichen Weise. Naturgemäss stützen sich seine Untersuchungen auf seine früheren synthetischen Arbeiten, namentlich auf seine Bücher über „Kegelschnitte“, über „Oberflächen zweiter Ordnung und Raumcurven dritter Ordnung“, sowie über „ebene Curven dritter Ordnung“.

Hauptsächlich kam es in dieser Schrift auch darauf an, alle jene Eigenschaften synthetisch zu erkennen, welche aus der Darstellung der Coordinaten eines Punktes der Curve durch einen Parameter vermittelst doppelt-periodischer Functionen und aus einer Anwendung des Abel'schen Theorems entsprossen sind (Clebsch in J. für Math. LXIII). In der Einleitung verkennt der Verfasser nicht, dass er manche wichtige Fragen, besonders die Realitäts- und Gestaltungs-Verhältnisse, noch unerörtert gelassen hat, Fragen die einer weiteren Forschung vorbehalten bleiben. Da es die Grenzen eines Referats überschreiten würde, wenn hier auf die entwickelten Eigenschaften oder gar die Art ihrer Ableitung eingegangen würde, so begnügt sich der Referent damit, die Ueberschriften der zwölf Paragraphen anzugeben, in die das Buch zerfällt.

§ 1. Die C_1^4 als Grundcurve eines Büschels von Flächen zweiten Grades.

§ 2. Construction der C_1^4 durch acht willkürlich und unabhängig von einander gegebene Punkte.

§ 3. Tangente und Schmiegungsebene in einem Punkte der C_1^4.

§ 4. Bestimmung der C_1^4 durch zwei Tripel von je drei Punkten und lineare Construction weiterer Punkte der Raumcurve.

§ 5. Charakteristische Eigenschaft eines Punktetripels der C_1^4.

§ 6. Tetraeder, die der C_1^4 einbeschrieben sind, und deren Seitenflächen ihr in vier anderen Punkten einer Ebene begegnen.

§ 7. Die Reye'schen Sätze über Gruppen von acht associirten Punkten auf der C_1^4.

§ 8. Punktquadrupel auf der C_1^4, deren Tangenten hyperboloidische Lage haben.

§ 9. Einige Eigenschaften von Punktquadrupeln der C_1^4 im Zusammenhange mit dem gemeinsamen Polartetraeder des Büschels, dessen Grundcurve die C_1^4 ist.

§ 10. Besondere Hyperboloide des Büschels, dessen Grundcurve die C_1^4 ist.

§ 11. Die 16 Wendeberührungspunkte der C_1^4 und ihre Vertheilung zu je vieren in Ebenen.

§ 12. Tetraeder, deren Seitenflächen sämtliche Wendeberührungspunkte der C_4^1 zu je vieren enthalten. Scht.

Em. Weyr. Ueber Raumcurven sechster Ordnung vom Geschlecht Eins. (Erste Mitteilung.) Wien. Ber. XCIX. 932-951.

Anschliessend an seine Abhandlung „Ueber Raumcurven fünfter Ordnung vom Geschlecht Eins“ (Wien. Ber. Mai 1888), behandelt der Verfasser in der vorliegenden Arbeit die Raumcurve R_6 sechster Ordnung vom Geschlecht Eins. Ausgeschlossen von der Behandlung sind, ohne dass es der Verfasser sagt, diejenigen Curven, welche Doppelpunkte haben, also auch solche, welche auf Flächen zweiter Ordnung liegen. Es wird dann gezeigt, dass alle Flächen dritter Ordnung, welche R_6 enthalten, einen Flächenbüschel bilden, dessen Grundcurve, abgesehen von R_6, aus drei Quadrisecanten Q_1, Q_2, Q_3 der R_6 bestehen. Die drei Geraden Q_1, Q_2, Q_3 bestimmen ein Hyperboloid H, dessen Tangentialebenen die R_6 in sechs Punkten eines Kegelschnittes treffen. Jede Ebene, welche zwei ausserhalb R_6 sich schneidende Trisecanten von R_6 verbindet, ist Tangentialebene von H. Ferner wird gezeigt, dass die Fläche Θ der Trisecanten von der sechzehnten Ordnung ist und von jeder R_6 enthaltenden kubischen Fläche ausser in R_6, Q_1, Q_2, Q_3 noch in sechs Trisecanten geschnitten wird. Nun wird die Lage der 27 Geraden einer solchen kubischen Fläche gegenüber der R_6 untersucht. Dies führt zu dem Satze, dass die zwölf Knotenpunkte von kubischen Flächen des Büschels zu je vieren auf den drei Geraden Q_1, Q_2, Q_3 liegen. Es wird dann umgekehrt gezeigt, dass im allgemeinen der zweite Schnitt zweier kubischen Flächen, welche drei windschiefe Geraden gemein haben, eine R_6 vom Geschlecht Eins ist. Zum Schlusse wird der Satz aufgestellt: „Wenn eine Raumcurve sechster Ordnung zwei Quadrisecanten besitzt, so besitzt sie wenigstens noch eine dritte Quadrisecante und ist vom Geschlecht Eins, oder sie besitzt noch weitere vier Quadrisecanten und ist rational.“

Die Beweisführung in dieser Arbeit scheint dem Bericht-

erstatter nicht immer befriedigend; so z. B. heisst es in No. 5, wo zunächst gezeigt wird, dass eine Trisecante T von zwei anderen T' und T'' geschnitten wird: „Sie selbst (T' und T'') müssen zu einander windschief sein, weil sonst neun Punkte von R_6 in einer Ebene liegen würden“. Dieser Schluss ist nicht richtig, denn die drei Trisecanten könnten doch wohl durch einen Punkt gehen! W. St.

R. Sturm. Einteilung der Strahlencongruenzen zweiter Ordnung mit Brenn- oder singulären Linien. Math. Ann. XXXVI. 467-472.

Der Verfasser fügt hier, ohne die Beweise mitzuteilen, zu den von Herrn Kummer angegebenen Strahlensystemen zweiter Ordnung noch vier neue Arten hinzu. Später hat bekanntlich Herr Schumacher die Aufzählung dieser Strahlensysteme abgeschlossen. W. St.

R. Sturm. Ueber die sogenannten Strahlen-Congruenzen ohne Brennfläche. Hamb. Mitt. II. 61-68.

Ausser der linearen Congruenz und der Congruenz der Doppelsecanten einer kubischen Raumcurve besitzen alle Congruenzen eine Brennfläche, auch diejenigen, von denen man bisher sagte, dass sie nur Brenncurven, aber keine Brennfläche haben. Dies folgt schon aus den allgemeinen Strahlen-Coincidenzformeln des Referenten (Calcül d. abz. G., Schluss von § 15). Die dort c genannte Zahl ist das Doppelte von der Zahl, welche Herr Schumacher (München 1885) mit ϱ bezeichnet hat, und welche Herr Sturm „Rang“ der Congruenz nennt. Es ist dies die Zahl, welche angiebt, wie oft es vorkommt, dass auf einer beliebig gegebenen Geraden der Schnittpunkt zweier Congruenzstrahlen liegt, deren Verbindungsebene durch eben diese Gerade hindurchgeht. Der Verfasser der vorliegenden Abhandlung discutirt nun eingehend mehrere Congruenzen hinsichtlich ihrer Brennflächen. So zeigt sich, dass bei der Congruenz der Doppelsecanten einer beliebigen Raumcurve als Brennfläche die abwickelbare Fläche der

doppelten Berührungsebenen der Raumcurve auftritt, indem die ∞^1 Congruenzstrahlen, welche Erzeugende dieser Fläche sind, alle ihre Punkte zu Brennpunkten haben. Aehnliches gilt für die Congruenz der gemeinsamen Treffgeraden zweier Raumcurven. Um eine Congruenz zu bekommen, die eine Breuncurve und eine Brennfläche hat, fasst Herr Sturm die ∞^3 Strahlen zusammen, von denen jeder eine Fläche T berührt und eine Raumcurve R_1 trifft. Wirft die Fläche T in jeden beliebig gegebenen Strahlenbüschel ϱ Tangenten, und die Curve R_1 in jeden solchen Strahlenbüschel μ_1 Treffgerade, so ist Ordnung und Klasse der erzeugten Congruenz natürlich gleich $\varrho.\mu_1$. Weiter ergiebt sich, dass die vollständige Punkt-Brennfläche durch die μ_1-fache Fläche T und durch die Developpable der gemeinsamen Berührungsebenen von T und R_1 gebildet wird, während die Ebenen-Brennfläche sich aus dem μ_1-fachen T und dem ϱ-fachen Ort zweiter Stufe der Berührungsebenen von R_1 zusammensetzt. Indem der Verfasser dann noch die Congruenz untersucht, deren Strahlen eine mit einer $(\mu-2)$-fachen Geraden behaftete Fläche μ^{ter} Ordnung berühren und eben diese Gerade auch treffen, nähert er sich einem Teile der Kummer'schen Untersuchungen über Strahlensysteme (Berl. Akademie 1866). Die von Herrn Sturm hier untersuchten Congruenzen haben also die Eigenschaft, dass zur Erzeugung der Brennfläche nicht alle Strahlen, sondern nur ∞^1 Strahlen beitragen, die aber dann jeder statt zwei ∞^1 Brennpunkte haben, während die übrigen Strahlen durch ihre Brennpunkte die Brenncurven erzeugen. Scht.

P. H. Schoute. Solution of question 9490. Ed. Times LII. 77-78.

Zwei windschiefe Geraden seien die Leitlinien einer Congruenz (1,1). Der Ort für die Axen der Complexe erster Ordnung, welche durch die Congruenz gehen, ist eine Regelfläche dritter Ordnung, deren Doppellinie der kürzeste Abstand der beiden Leitlinien ist, während ihre einfache Linie (d. h. nicht eine Erzeugende) von der Geraden im Unendlichen gebildet

wird, die allen zu beiden Leitlinien parallelen Ebenen gemeinschaftlich ist. Lp.

C. Küpper. Ueber benachbarte, windschiefe Strahlen im linearen Complexe. Monatsh. f. Math. I. 451-456.

Wird durch einen Complexstrahl a ein beliebiges Complexhyperboloid gelegt, so ist die unendlich nahe bei a liegende Gerade b desselben ein Nachbarstrahl von a. Zur Fixirung eines bestimmten Nachbarstrahls kann man zwischen den durch a gehenden Ebenen und den auf a liegenden Punkten eine Projectivität festsetzen. Stellt man dann zu einer Geraden a projectivisch zwei benachbarte b, b' auf, „so sind damit zwei Strahlenbüschel (G), ($\mathfrak{G}$) gegeben, deren Centra e_1, $\mathfrak{e}_1$ auf a liegen, deren Ebenen E_1, $\mathfrak{E}_1$ durch a gehen, und deren Strahlen sämtlich von a, b, b' geschnitten werden. Ausser diesen Geraden G, $\mathfrak{G}$ existirt keine, der diese Eigenschaft zukäme; b, b' aber gehören zu einer einfach unendlichen Mannigfaltigkeit von Nachbargeraden, welche alle je zwei jenen Büscheln entnommene Gerade treffen". „Jeder lineare Complex, welcher irgend zwei je einem der Büschel (G), ($\mathfrak{G}$) entnommene Gerade als Conjugirte hat, enthält als Strahlen diese ∞^1 Nachbarn von a, und jeder lineare Complex, in welchem a nebst zwei der letzteren als Strahlen vorkommen, enthält sie alle, und es sind in ihm die Strahlen G mit denen $\mathfrak{G}$ als conjugirte Gerade gepaart." Ein solches geometrisches Gebilde („Garbe") wird z. B. von den Normalen a, b, b', ... einer Fläche gebildet, welche einer bestimmten a unter ihnen unendlich nahe liegen. Hk.

Th. Schmid. Ueber Berührungscurven und Hülltorsen der windschiefen Helikoide und ein dabei auftretendes zwei-zweideutiges Nullsystem. Wien. Ber. XCIX. 952-966. Mit 1 Taf.

Die Abhandlung erörtert zuerst die Natur der allgemeinen Schraubenregelfläche und erledigt das Berührungsproblem nach einer beachtenswerten, einfachen Methode. Hierauf werden für

die allgemeine Fläche und ihre verschiedenen Sonderfälle die zwei Aufgaben behandelt: 1) Die Berührungscurve einer Hülltorse, deren Richtungskegel gegeben ist, in orthogonaler Projection parallel zur Axe zu bestimmen. 2) Den Richtungskegel der Hülltorse zu finden, für welche die Projection der Berührungscurve gegeben ist. Hierbei ergiebt sich die Beziehung zwischen der Projection der Berührungscurve und der Spur des (zweckmässig gelegten und um 90° um die Schraubenaxe gedrehten) Richtungskegels, dass sich beide als entsprechende Gebilde in einem zwei-zweideutigen Nullsystem darstellen, wodurch sich die auf das Problem bezüglichen Fragen auf leichte Weise erledigen. Die vom Verf. benutzte Methode erweist sich als einfach und fruchtbar. Hk.

A. Biffignandi. Dimostrazione di un teorema di Dupin e sua applicazione. Batt. G. XXVIII. 202-208.

Es wird zunächst eine einfache synthetische Darstellung des allgemeinen Diakaustikenproblems im Anschluss an Dupin mit Benutzung einer rechtwinkligen Trajectorienfläche des gebrochenen Strahlenbündels gegeben. Daran schliesst sich als Anwendung die Bestimmung der diakaustischen Linie eines an einer Geraden sowie an einem Kreise gebrochenen ebenen Strahlenbüschels als Evolute der Trajectoriencurve. Hk.

D. Gebilde in Räumen von mehr als drei Dimensionen.

C. Cranz. Gemeinverständliches über die sogenannte vierte Dimension. Virchow u. Holtzendorff Vorträge. 70 S.

Nach ausführlicher Darlegung derjenigen Thatsachen der Geometrie, welche zur Erweiterung des gewöhnlichen Raumbegriffs geführt haben, werden in gleicher Weise die an den vierdimensionalen Raum, namentlich von Zöllner, geknüpften physikalischen Hypothesen besprochen. Die Versuche, diesen Raum als einen realen für spiritistische und theologische Zwecke

in Anspruch zu nehmen, werden sachgemäss zurückgewiesen. Dagegen muss, gegenüber den vom Verf. hier, wie später noch an anderer Stelle, erhobenen Einwänden, die Berechtigung und Brauchbarkeit der dreidimensionalen Projections - Darstellungen vierdimensionaler Gebilde als wissenschaftlich unanfechtbar aufrecht erhalten werden. Ebenso wenig ist es zutreffend, wenn der Verf. den vierdimensionalen Raum und seine Geometrie mit dem Schlagwort „analytische Fiction" abfertigt, da doch alle Methoden der Geometrie mit gleicher Denknotwendigkeit in ihn hineinführen. Schg.

G. Bordiga. Di una certa congruenza del terzo ordine e della sesta classe dello spàzio ordinario. Rom. Acc. L. Rend. (4) VI_1. 8-13.

Drei collineare Raumbündel dritter Stufe eines Raumes vierter Dimension erzeugen in den Schnittlinien homologer Räume einen linearen Complex, dessen singuläre Fläche F_2^6 von der sechsten Ordnung ist. Sie ist der Ort der Punkte, in welchen homologe Ebenen der Bündel sich treffen. Jeder dieser Punkte sendet einen rationalen Kegel dritter Ordnung in den Complex. Bezieht man nun die Raumbündel collinear auf einen Punktraum, so entspricht jedem Strahl des Complexes ein Punkt und jedem der erwähnten Kegel dritter Ordnung eine Gerade. Das aus diesen bestehende Strahlensystem ist von der sechsten Klasse und dritten Ordnung und wird mit Hülfe seiner Abbildung auf F_2^6 genauer untersucht. E. K.

M. Pieri. Sulla geometria projettiva delle forme di 4ª spezie. Batt. G. XXVIII. 209-218.

Bekanntlich kann man in sehr einfacher Weise die Strahlen des Raumes eindeutig auf die Punkte eines Raumes vierter Dimension beziehen. Während man dies gewöhnlich benutzt, um aus Eigenschaften des Raumes vierter Dimension Thatsachen der Strahlengeometrie abzuleiten, schlägt Herr P. hier den umgekehrten Weg ein. So formt sich der Satz von den beiden

Regelscharen eines einschaligen Hyperboloids in folgendes Theorem um: „Die Ebenen, welche zu gleicher Zeit eine Normalcurve des Raumes vierter Dimension und drei windschiefe Sehnen a', b', c' derselben treffen, treffen sämtlich noch genau eine Normalcurve mit den drei Sehnen a', b', c'". Als einen Specialfall erhält man einen bereits von Herrn Segre bewiesenen Satz.

E. K.

E. Abzählende Geometrie.

H. Schubert. Kegelschnitt-Anzahlen als Functionen der Raumdimension n. Hamb. Mitt. II. 172-184.

Im Anschluss an frühere Untersuchungen über die Anzahlen „linearer" Gebilde (Punkte, Geraden, Ebenen u. s. w.) im n-dimensionalen Raume (R_n) beantwortet der Verf. in dieser Abhandlung die Frage, wie viele „Kegelschnitte" ihre Ebene durch jeden von a gegebenen R_{n-3} schicken, auf b gegebenen R_{n-2} je einen Punkt und auf c gegebenen R_{n-1} je eine Tangente besitzen. Diese Aufgabe wird zuerst für zwei Ausartungen des Kegelschnitts, sodann für den allgemeinen Fall gelöst. Doch gelang beim letzteren die Bestimmung der Anzahlfunction in befriedigend einfacher, geschlossener Form zunächst nur unter der besonderen Annahme $b = 0$.

Schg.

J. C. Kluyver. Kenmerkende getallen der algebraische ruimte-kromme. Amst. Versl. en Meded. (3) VII. 121-164.

J. C. Kluyver. Twaalfde vraagstuk beantwoord. Nieuw Archief. XVII. 1-51.

In der erstgenannten Abhandlung wird Schubert's „Calcül der abzählenden Geometrie" angewendet auf Raumcurven R^m willkürlichen Grades. Nach kurzer einleitender Erklärung der Schubert'schen Bezeichnungen beschäftigt sich der Verfasser im ersten Teil lediglich mit der Erforschung schon bekannter Schlussfolgerungen. So bestimmt er die Anzahl der Tangenten von R^m, welche diese

Curve in einem andern Punkte schneiden, und die Anzahl der Punkte, durch welche drei nicht auf einander folgende Tangenten von R^m gehen. Man drückt sie aus in zwei Grössen, dem Grade und dem Geschlechte der Raumcurven, was nur dann geschehen kann, wenn keine höheren Besonderheiten vorliegen. Im zweiten Teile untersucht der Verfasser die von den R^m in drei Punkten schneidenden Geraden gebildete Oberfläche, d. h. den geometrischen Ort der dreifachen Sehnen von R^m, wobei die besonderen erzeugenden Geraden und die Doppelcurven dieser Oberfläche besprochen werden. Den hiervon durch Cayley und Schoute gefundenen Eigenschaften werden neue Ergebnisse zugefügt. Im dritten Teile prüft der Verfasser diese Ergebnisse, indem er sie auf durchaus anderem Wege für die vier verschiedenen Raumcurven des sechsten Grades ableitet, welche nicht auf einer Oberfläche des zweiten Grades liegen. Dabei werden sämtliche früher gefundenen Ergebnisse bestätigt. Die analytische Methode war hier nicht zu benutzen, weil die behandelten Raumcurven keine Durchschnitte von Oberflächen sind und sich folglich nicht durch Gleichungen darstellen lassen.

In der zweiten Abhandlung wird das folgende Problem behandelt: In den Schnittpunkten einer ebenen Curve n^{ten} Grades und m^{ter} Klasse mit einer in deren Ebene gelegenen Geraden sind Tangenten an diese Curve gezogen. Es ist der Grad zu bestimmen des geometrischen Ortes der Schnittpunkte dieser Tangenten unter einander, wenn die Gerade sich um einen festen Punkt dreht.

Bei der Behandlung dieses Problems werden zuerst die Eigentümlichkeiten der gegebenen Curve C_m^n beachtet; es wird dabei vorausgesetzt, dass diese Curve nur die gewöhnlichen Singularitäten besitze, indem der Fall, in welchem C_m^n Singularitäten höherer Ordnung zeigt, auf den allgemeinern Fall zurück zu führen wäre. Sodann ist die Bestimmung des festen Drehpunktes O der Transversalen von Bedeutung; denn er könnte auch in einem Einzelpunkte oder Doppelpunkte der Curve oder in irgend einer besonderen Weise hinsichtlich der C_m^n liegen.

Von dem gesuchten geometrischen Ort gelangen nach und nach zur Bestimmung: der Grad, die Klasse, die Anzahl der Doppelpunkte, Doppeltangenten, Wendepunkte und Rückkehrpunkte. Weiter werden Data gesammelt über den Verlauf jener Curve, zunächst betreffs der Durchschnitte mit der Curve C_m^n. Die Aufstellung der Gleichung des gesuchten geometrischen Ortes ist wohl nicht möglich; schon in den einfachsten Fällen bieten die dazu erforderlichen Eliminationen fast nicht zu beseitigende Schwierigkeiten. Aber die von Schubert in seinem „Calcül der abzählenden Geometrie" entwickelte Methode leistet bei der Lösung bedeutende Dienste. Im Laufe der Untersuchung ergiebt sich, dass der von Steiner behandelte Fall $n=3$, $m=6$ vereinzelt dasteht, weil er auf eigentümlichen Eigenschaften einer Curve dritten Grades beruht. Weiter wird die dualistische Umsetzung des Problems erwähnt, die lauten könnte: Aus einem Punkte in der Ebene einer Curve C_m^n sind die m Tangenten gezogen, so wie auch die $\frac{1}{2}m(m-1)$ Tangentenchorden, welche die Berührungspunkte je zwei und zwei verbinden. Welches ist die Klasse der Enveloppe dieser Tangentenchorden, wenn der angenommene Punkt eine Gerade durchläuft? Es ist klar, dass die Lösung dieser Frage gleich aus der des ursprünglichen Problems abzuleiten ist.

Nach der ausführlichen Behandlung des Problems für die ebenen Curven schreitet der Verfasser zur Behandlung der verwandten Raumcurven und Oberflächen. Auch hier führen die Schubert'schen Formeln meistens zur einfachen Beantwortung der gestellten Fragen. In einem Anhange kommen einige Bemerkungen vor über die von Steiner vorgenommene analytische Behandlung dieser Probleme, wobei Reductionsmethoden zur Anwendung kommen, welche auf der von Clebsch mitgeteilten Invariantentheorie der Curven dritten Grades beruhen.

G.

C. F. E. Björling. Die singulären Generatricen der Binormalen- und Hauptnormalen-Flächen. Stockh. Akad. Bihang. XV. Afd. I. No. 8. 18 S.

Mit Anwendung von zwei früheren Arbeiten („Ueber Raumcurven-Singularitäten", Hoppe Arch. (2) VIII, F. d. M. XXI. 1889. 779 und „Singuläre Generatricen in algebraischen Regelflächen", Stockh. Öfversigt 1888. 587-604) untersucht der Verf. den Zusammenhang zwischen den Singularitäten einer Raumcurve und den singulären Erzeugenden der zugehörigen Binormalen- und Hauptnormalen-Flächen. Es ergiebt sich für beide Flächen, dass (abgesehen von solchen Punkten der gegebenen Curve, für welche die Tangente den unendlichen Imaginärkreis schneidet) nur stationäre Punkte und Ebenen der Curve „Torsalen" hervorbringen, und zwar so, dass ein sogenannter (l, m, n)-Punkt im allgemeinen eine $(n-m+l-2)$-fache Torsale giebt. Bdn.

G. Humbert. Sur un problème de contact de M. de Jonquières. Palermo Rend. IV. 109-114.

In Anschluss an Arbeiten des Herrn de Jonquières im J. für Math. LXVI und der Herren Halphen und Brill behandelt der Verfasser die Aufgabe: Wenn gegeben ist ein lineares $(\varrho-1)$-fach unendliches System von algebraischen Flächen n^{ter} Ordnung

$$\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2+\cdots+\alpha_\varrho\varphi_\varrho=0,$$

die Zahl der Flächen zu finden, welche mit einer ebenen oder räumlichen Curve C von der Ordnung m und dem Geschlecht p einen Contact von der Ordnung $(\varrho-1)$ haben.

Er findet diese Zahl gleich

$$\text{(I)} \qquad mn\varrho+\varrho(\varrho-1)(p-1).$$

Wenn h Flächen des Systemes durch die Curve C hindurchgehen, so ist die Zahl der Punkte von C, in welchen eine Fläche des Systems einen Contact von der Ordnung $(\varrho-h-1)$ mit der Curve C hat, aus obiger Zahl (I) abzuleiten, indem man durchweg statt ϱ einsetzt $(\varrho-h)$.

Diese Gesetze werden an einigen Beispielen erläutert.

A.

M. Pieri. Sulla corrispondenza algebrica fra due spazi rigati. Torino Atti. XXV. 365-371.

Um den Inhalt dieses Aufsatzes verstehen zu können, muss man die folgenden durch Herrn Schubert (vergl. Mitteilungen der Math. Ges. in Hamburg, Nr. 6, S. 136) eingeführten Erklärungen und Bezeichnungen voranschicken: Das Symbol $[a]$ bedeutet einen a-dimensionalen linearen Raum, der in dem zu Grunde gelegte n-dimensionalen Raume liegt, und das Symbol $[a_0\, a_1 \dots a_k]$, wenn $0 \leqq a_0 < a_1 < \cdots < a_k \leqq n$ ist, setzt allgemein für ein $[k]$ voraus, dass ein $[a_0]$, ein $[a_1]$, ein $[a_2]$, u. s. w. bis zu einem $[a_k]$ derartig gegeben sind, dass der $[a_0]$ in dem $[a_1]$ liegt, der $[a_1]$ in dem $[a_2]$ und überhaupt jeder $[a_i]$ in dem $[a_{i+1}]$ liegt, und bezeichnet alle diejenigen $[k]$, welche mit dem $[a_0]$ einen Punkt, mit dem $[a_1]$ einen Strahl und überhaupt mit dem $[a_i]$ einen $[i]$ gemeinsam haben. Z. B. bezeichnet das Symbol $[n-1, n]$ die Gesamtheit der Geraden von $[n]$. Nun gilt der folgende Satz:

„Sind s und s' zwei beliebige entsprechende Strahlen zweier conjectiven algebraisch verwandten Räume $[n-1, n]$ und $[n-1, n]'$; bezeichnet man ferner durch

$$(p, q)(n-q, n-p)', \quad [\text{wo } 0 \leqq p < q \leqq n \text{ ist}]$$

die Anzahl der Strahlenpaare, welche ein Element in einem $[p, q]$ und ein Element in einem $[n-q, n-p]$ haben; setzt man endlich voraus, dass die gegebene Verwandtschaft nur solche Coincidenzen ss' besitze, dass jeder durch s gehende Raum auch s' enthalte: so wird die Zahl der Coincidenzen durch die Formel

$$N_{(n-1,n)} = \Sigma(p, q)(n-q, n-p)'$$

gegeben, wo $\frac{1}{2}n(n+1)$ Summanden unter dem Zeichen Σ stehen".

Ist $n = 2$ oder 3, so bekommt man folgende bekannte Ausdrücke:

$$N_{(1,2)} = (01)(12)' + (02)(20)' + (12)(01)', \qquad \text{(Salmon)},$$
$$N_{(1,3)} = (01)(23)' + (02)(13)' + (03)(03)' + (12)(12)' + (13)(02)' + (23)(01)' \qquad \text{(Schubert)}.$$

Um daher die allgemeine Formel zu beweisen, kann man die

Methode der vollkommenen Induction brauchen: sie bildet in der That das Verfahren des Verfassers. Als Anwendung seiner Formel liefert er einen neuen Beweis für die von Herrn Schubert schon gefundene Anzahl der Elemente, welche zweien resp. ∞^{n-1-p} und ∞^{n-1+p} algebraischen Strahlensystemen gemein sind.

La.

C. Burali-Forti. Sopra il sistema di quadriche che hanno l'n-pla polare comune. Palermo Rend. IV. 118-125.

Dieser Aufsatz bietet einen Beitrag zur abzählenden Geometrie der linearen Räume beliebig vieler Dimensionen. Der Verf. hat sich nämlich die Aufgabe gestellt, die Zahl der Quadriflächen [durch $(\varepsilon_0 \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-2})$ bezeichnet] zu bestimmen, welche im Systeme $g_1 n_1^2 + g_2 n_2^2 + \cdots + g_n n_n^2 = 0$ enthalten sind und ε_s s-dimensionale Räume ($s = 0, 1, \dots, n-2$) berühren. Nach Erläuterung des allgemeinen Verfahrens löst er die Aufgabe vollkommen in den Fällen $n = 3, 4, 5$ und 6. Zum Schluss hebt er die Ausdehnung auf die n-dimensionale Geometrie hervor, deren die Methoden fähig sind, die Halphen bei der Charakteristikentheorie des gewöhnlichen Raumes angewandt hat.

La.

Neunter Abschnitt.
Analytische Geometrie.

Capitel 1.
Lehrbücher, Coordinaten.

G. B. Guccia. Lezioni di Geometria superiore date da G. B. Guccia nella R. Università di Palermo nell'anno scolastico 1889—90. Teoria generale delle curve e delle superficie algebriche. Palermo. Litografia A. Longo e C.

Diese (autographirten) Vorlesungen sind zumeist ein Auszug der zwei Cremona'schen Werke über die Theorie der algebraischen Curven und Flächen und der gekrönten Preisschrift desselben Verfassers über die Flächen dritter Ordnung. In manchen Punkten hat Herr Guccia selbst den Wortlaut des citirten Geometers wiederholt, während er bei einigen Gegenständen die Darstellung durch einen weiteren Gebrauch der Correspondenzprincipien und des Begriffs „Geschlecht einer Curve" verjüngt hat. Er wechselt in seinen Betrachtungen zwischen der ebenen Geometrie und der Raum-Geometrie ab und macht, ausdrücklicher als Cremona, Anwendungen von analytischen Ueberlegungen. Er hat ferner zu den genannten Arbeiten einige Zusätze gefügt, unter denen wir die Untersuchung der Geometrie auf einer Fläche zweiter Ordnung nach Chasles und Cremona, die Auseinandersetzung der hauptsächlichsten Eigenschaften der Raumcurven dritter und vierter Ordnung (I. Art) und die Erzeugung der Regelflächen

beliebiger Ordnung mit Hülfe von Leitlinien anführen wollen. Demnach wird der Leser hinreichende Unterlagen haben, um mit uns zu schliessen, dass bei der gegenwärtigen Seltenheit der citirten Cremona'schen Werke die „Lezioni" unseres Collegen für viele von grossem Nutzen sein werden. La.

Fr. Graefe. Auflösungen und Beweise der Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie des Raumes insbesondere der Flächen zweiten Grades. Für Studirende an Universitäten und technischen Hochschulen bearb. Leipzig. Teubner. XVI u. 353 S. gr. 8°.

Die Auflösungen zu den in F. d. M. XX. 1888. 681 angezeigten Aufgaben bilden mit diesen letzteren zusammen einen vollständigen Cursus der analytischen Geometrie des Raumes. Denn alle wichtigen Lehren dieser Disciplin kommen bei den „Auflösungen" zur Darstellung in einzelnen Artikeln von grösserem Umfange, und ein genaues Inhaltsverzeichnis erleichtert das Auffinden jeder behandelten Frage. Bei der Bearbeitung hat der Verf. auch Gelegenheit genommen, manche Mängel zu beseitigen, welche der Fragestellung der Aufgaben anhafteten. Wenn Aufgabe 173 für die vier Seitenebenen eines Tetraeders sechs Gleichungen gab, so enthalten die Lösungen die zu berechnenden Grössen für alle fünfzehn Tetraeder, welche je vier von den gegebenen sechs Ebenen als Seitenflächen besitzen. Und wenn Aufgabe 785 in Parallele zu der Berechnung des Radius der die vier Flächen eines Tetraeders berührenden Kugel die Auffindung des Radius der die sechs Kanten berührenden Kugel forderte, so werden nun in der Lösung zuerst die Bedingungen für die Möglichkeit der verlangten Construction ermittelt. Manche Wiederholungen von Fragen werden durch Verweisungen beseitigt, die bezüglichen Stellen dadurch in Zusammenhang gebracht. In ihrer Vereinigung können die „Aufgaben" und die „Auflösungen" daher den Lehrern und den Studirenden als brauchbares Hülfsmittel empfohlen werden. Lp.

E. Busche. Grundzüge einer rechnenden Geometrie der Lage. Pr. Hansa-Schule Bergedorf b. Hamburg. 15 S.

Um unter Beschränkung auf die gewöhnlichen Rechnungen der Arithmetik eine rechnende Geometrie der Lage zu begründen, nimmt der Verf. zwei Verallgemeinerungen bestehender Anschauungen vor. Erstens führt er als Bild der reellen Zahlenreihe auf einer Geraden statt der äquidistanten Punktreihe die aus drei gegebenen Punkten durch successive Hinzufügung harmonischer Punkte entstehende „lineare Punktreihe“ ein, wobei die charakteristische Eigenschaft hervortritt, dass dem unendlich fernen Punkte nicht notwendig die unendlich grosse Zahl entspricht. Zweitens lässt er zum Zweck der Darstellung der complexen Zahlen neben dem Punktfelde auch das ebene Strahlenfeld und das Strahlenbündel zu. Es wird dann gezeigt, wie unter diesen Voraussetzungen die Begriffe: Strecke, Winkel und Flächeninhalt ohne Beanspruchung einer bestimmten Masseinheit sich zahlenmässig darstellen lassen, wie eine Gleichung zwischen zwei Variabeln zu deuten ist, u. s. w. Die zahlreichen in der Einleitung vorgebrachten Citate auch solcher Arbeiten, denen der Verf. eine mit der seinigen verwandte Tendenz bestreitet, sind geeignet, eine hohe Meinung von der Litteraturkenntnis des Verf. zu erwecken. Darüber aber, dass die Ausdehnungslehre in Deutschland erst durch das Peano'sche Buch zugänglicher geworden ist, wird sich niemand mehr wundern, als Herr Peano selbst. Schg.

H. Servus. Die analytische Geometrie der Ebene. Leipzig. B. G. Teubner. IV u. 128 S. 8°.

Der Verfasser empfiehlt zur Behandlung in der Schule Aufgaben aus der analytischen, unter Einschränkung derjenigen aus der construirenden Geometrie, und giebt für Schulzwecke und zum Selbststudium im Anschluss an Hefte seines verstorbenen Lehrers Runge einen Abriss der Geometrie in rechtwinkligen Coordinaten, welcher die Kegelschnitte und auch noch die aus ihnen entstehenden Rotationskörper umfasst. Eine Aufgabensammlung, die, ebenso wie der Text, auch Gelegenheit zu Constructions-

Uebungen bietet, bildet den Schluss. Coordinaten-Transformation und schiefwinklige Systeme sind nur beiläufig behandelt, auch sonst ist das Formelrechnen möglichst vermieden. Können wir uns auch dem Eingangs erwähnten Verdicte des Verfassers nicht ohne weiteres anschliessen, da dasselbe, dem Zuge unserer Zeit folgend, den Wert des fraglichen Unterrichtsgegenstandes mehr nach dem künftigen praktischen Nutzen als nach seiner Bedeutung für die Schulung der Geisteskräfte beurteilt, so können wir uns doch seinem Wunsche nach grösserer Berücksichtigung der analytischen Geometrie im Schulunterricht anschliessen, ohne dass wir den Einzelheiten in der Ausführung immer beipflichten.

Schg.

H. J. Oosting. Analytische meetkunde van het platte vlak. 1 : Stuk. den Helder de Boer. 60 S.

D. Bos. Beginselen der analytische meetkunde. Groningen. Wolters. 136 S.

Zwei elementare Lehrbücher der analytischen Geometrie der Ebene.

G.

F. Porta. Geometria analitica. Torino. Bocca. Un vol. in 8°.

A. Hanner. Analytische Geometrie des Punktes, der Geraden und der Kegelschnitte, nach neueren Methoden dargestellt. Prag. Dominicus. VIII u. 480 S. Mit 127 Figuren. 8°.

M. d'Ocagne. Sur la théorie des coordonnées parallèles. Brux. S. sc. XIV A. 47-50.

Sind P ein Punkt, π eine Ebene, $OABC$ ein Bezugstetraeder, a der Schnitt von OA mit der Ebene PBC, b der Schnitt von OB mit der Ebene PAC, c der Schnitt von OC mit PAB; α, β, γ die Schnitte von π mit OA, OB, OC, so kann man zu Coordinaten von P und π nehmen:

$$(P) \qquad x = \lambda \frac{Oa}{Aa}, \qquad y = \mu \frac{Ob}{Bb}, \qquad z = \nu \frac{Oc}{Cc},$$

$$(\pi) \qquad u = -\frac{1}{\lambda}\frac{A\alpha}{O\alpha}, \quad v = -\frac{1}{\mu}\frac{B\beta}{O\beta}, \quad w = -\frac{1}{\nu}\frac{C\gamma}{O\gamma},$$

wo λ, μ, ν drei constante Parameter sind. Als Bedingung dafür, dass P in π liegt, findet man

$$ux+vy+wz+1 = 0.$$

Nimmt man $\lambda = -OA$, $\mu = -OB$, $\nu = -OC$, und ist die Ebene ABC im Unendlichen, so werden x, y, z die Cartesischen Coordinaten des Punktes P und u, v, w die Plücker'schen Coordinaten von π. Ist $\lambda = -\frac{1}{OA}$, $\mu = -\frac{1}{OB}$, $\nu = -\frac{1}{OC}$ und entfernt sich O ins Unendliche, so werden x, y, z die parallelen Coordinaten des Punktes und u, v, w die der Ebene. Das correlative System des Cartesischen ist also das System der parallelen Ebenencoordinaten; das Plücker'sche System hat zum correlativen System das der parallelen Punktcoordinaten. [Man vergleiche hierzu die viel allgemeiner gehaltenen Betrachtungen von W. Fiedler in seiner Darstellenden Geometrie, 3. Aufl., Teil III, S. 102ff.; ferner die bezüglichen Untersuchungen von Schwering und Schlegel, cf. F. d. M. VIII. 1876. 414. Lp.]

Mn. (Lp.)

M. d'Ocagne. Addition à une note sur une application des coordonnées parallèles. Nouv. Ann. (3) IX. 471-472.

Der Zusatz gehört zu einer im Jahrgang 1889 dieses Jahrbuchs (S. 707) besprochenen Arbeit und enthält einfache Uebergangsformeln zwischen Parallel- und rechtwinkligen Cartesischen Coordinaten mit Anwendung auf den an obiger Stelle behandelten Satz.

Schg.

F. Franklin. On some applications of circular coordinates. American J. XII. 161-190.

Sind X und Y die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes, so sind die Kreiscoordinaten definirt durch die Formeln:

$$x = re^{i\vartheta} = X+iY; \quad y = re^{-i\vartheta} = X-iY,$$

Mittels dieser Coordinaten vereinfachen sich, wie der Verfasser zeigt, die Beweise der von Laguerre und Humbert gegebenen Sätze über Curven n^{ter} Ordnung [S. F. d. M. XIX. 1887. 432 u. XX. 1888. 686], und ebenso die zu den Specialfällen dieser Sätze führenden Wege. — Sehr einfach gestaltet sich ferner die Discussion der Gleichung

$$dx : \Pi(x-a_r)^{q_r} = dy : \Pi(y-b_r)^{q_r}, \quad (r = 1, 2, \dots, n).$$

Dieselbe stellt eine Curve dar, bei welcher eine lineare Beziehung existirt zwischen den Winkeln einer Tangente mit einer festen Axe und den Winkeln, welche dieselbe Axe mit den aus dem Berührungspunkte der Tangente durch n feste Punkte (a_r, b_r) gehenden Strahlen bildet. Der Verfasser discutirt eine Reihe einfacher Beispiele solcher Gleichungen und schliesst mit der Gleichung

$$\sin x\, dx = \sin y\, dy,$$

die für unendliche Gliederzahl des Productes Π unter obige Form fällt. Hierbei gelangt er auch zur Summirung verschiedener trigonometrischer Reihen. Schg.

Balitrand. Application des coordonnées intrinsèques. Caustiques par réflexion. Nouv. Ann. (3) IX. 476-479.

Schneiden die Tangenten einer Curve (M) eine andere Curve (M_0) in Punkten M_0, so umhüllen die in Bezug auf die Normale in M_0 symmetrisch zu jenen Tangenten construirten Geraden eine („Reflexions-Caustik" genannte) Curve (M'), welche in Bezug auf (M_0) in reciproker Beziehung zu (M) steht. Ausserdem existiren noch weitere Beziehungen zwischen beiden Curven. Schg.

M. Marie. Réalisation et usage des formes imaginaires en géométrie. Nouv. Ann. (3) IX. 60-93, 161-181, 375-392, 435-444, 508-528.

Die Schrift ist aus dem Bestreben erwachsen, die Lehre von den conjugirten Kegelschnitten auf Curven überhaupt auszudehnen. Zu diesem Zweck wirft Herr M. zunächst folgende Frage

auf: Wie muss man zwei Functionen $\varphi(\alpha, \beta; \alpha', \beta')$ und $\psi(\alpha, \beta; \alpha', \beta')$ wählen, damit der reelle Punkt

$$\xi = \varphi(\alpha, \beta; \alpha', \beta'), \quad \eta = \psi(\alpha, \beta; \alpha', \beta')$$

eine vom Coordinaten-System unabhängige Beziehung zu dem imaginären Punkte

$$x = \alpha + \beta i, \quad y = \alpha' + \beta' i$$

annimmt? Es zeigt sich sofort, dass alsdann

$$\xi = \alpha + k\beta, \quad \eta = \alpha' + k\beta'$$

sein muss. Da k ohne wesentliche Veränderung gleich Eins gesetzt werden kann, so bezeichnet Herr M. den Punkt $\xi = \alpha + \beta$, $\eta = \alpha' + \beta'$ als den repräsentirenden Punkt, die Realisation des Punktes $x = \alpha + i\beta$, $y = \alpha' + i\beta'$.

Eine Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

ist nun zwei Beziehungen zwischen den α, β, α', β' äquivalent, so dass die repräsentirenden Punkte die ganze Ebene überdecken. Eine bestimmte Curve wird herausgehoben, wenn man noch irgend eine Hülfsbeziehung für die α, β, α', β' hinzunimmt. Die einfachste Beziehung dieser Art ist

$$\beta' = \beta . C.$$

Jeder Punkt dieser Art erhält eine reelle Abscisse, wenn man eine Coordinaten-Transformation vornimmt, bei welcher die y'-Axe eine der Geraden

$$y = Cx + D$$

wird. Die Repräsentanten von Punkten, welche dieser Beziehung genügen, liegen auf der dem Werte C entsprechenden conjugirten Curve der gegebenen. Wählt man die Richtung einer conjugirten Curve zur y-Axe, so wird ihre Gleichung

$$\eta' = \varphi(x') + \psi(x'),$$

wenn sich die Punkte der Curve auf Parallelen zur y-Axe in der Form

$$y' = \varphi(x') + i\psi(x')$$

darstellen.

Die conjugirten Curven einer gegebenen umhüllen den reellen Zug derselben, infolge dessen auch den reellen Zug, welchen die Gleichung

$$f(ix, iy) = 0$$

darstellt, die Imaginär-Enveloppe der Schar conjugirter Curven. Ausserhalb beider Curven können sie sich nur schneiden. Mit grosser Ausführlichkeit werden insbesondere die Beziehungen conjugirter Kegelschnitte zu einander erläutert.

Als eine Folge der Entwickelungen ergiebt sich zuerst, dass eine Osculation zweier Curven im analytischen Sinne von den beiden conjugirten Curven reell verwirklicht wird, welche der betreffende Punkt charakterisirt. Erhält man durch Berechnung nach der gewöhnlichen Formel $r'+ir''$ als Krümmungsradius eines imaginären Punktes, so hat in dem repräsentirenden Punkte die betreffende conjugirte Curve den Krümmungsradius $r'+r''$.

In dem letzten Teil seiner Abhandlung giebt der Verfasser einige der Hauptsätze über die Integration in der complexen Zahlenebene an, und sucht darzuthun, dass man hierbei von den conjugirten Curven mit Vorteil Gebrauch machen kann.

E. K.

S. Vecchi. L'essenza reale delle quantità ora dette immaginarie, la rappresentazione diretta delle quantità complesse e la legge di continuità in geometria. Parma. Tipografia Rotti-Ubaldi.

C. A. Laisant. Sur la représentation analytique des figures planes et leur segmentation. S. M. F. Bull. XVIII. 123-131.

Sind x und y die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes M, und ist O der Anfangspunkt des Systems, so ist die Lage des Punktes M bestimmt durch die Aequipollenz

$$OM = x+iy.$$

Setzt man hierin $x=\varphi_1(t)$, $y=\varphi_2(t)$, so beschreibt M bei veränderlichem t die Curve, deren Gleichung $y=F(x)$ sich durch Elimination von t zwischen den letzteren Gleichungen ergiebt. Nimmt man nun, um eine vollständige geometrische Darstellung der Gleichung $y=F(x)$ zu erhalten, für die unabhängige Variable (x) das Wertgebiet $-\infty$ bis $+\infty$ in Anspruch, so decken sich

die den verschiedenen analytischen Darstellungen entsprechenden geometrischen Gebilde nur teilweise, da beim Uebergange zu einer neuen Variable auch deren Grenzwerte andere sind als vorher. Ausserdem können in der Aequipollenz imaginäre Werte von y auf reelle Punkte M führen, die aus der gewöhnlichen Curvengleichung nicht hervorgehen. So kann die Aequipollenz überschüssige Linien, vielfache, sich überdeckende Curven statt einer einzigen liefern, aber auch unter Umständen nur einen Teil der durch die gewöhnliche Gleichung vollständig dargestellten Curve. Letzteren Umstand benutzt der Verfasser, um durch das Verfahren der „Segmentirung" Curvenbogen von beliebiger Begrenzung, Strecken und Polygone durch Aequipollenzen darzustellen. Zu diesem Zwecke wird eine neue Variable τ so bestimmt, dass einer gegebenen Variation von t zwischen t_1 und t_2 eine solche von τ zwischen $-\infty$ und $+\infty$ entspricht. Das Verfahren, in der Tendenz an einen längst vergessenen Versuch des Prager Professors Doppler erinnernd, lässt sich auch auf den Raum ausdehnen. Schg.

K. Wessely. Anwendungen von Dühring's Begriffe der Wertigkeit. Hoppe Arch. (2) IX. 393-419.

Bedeutet k irgend eine der Kubikwurzeln der Einheit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, so erhält man durch Addition oder Multiplication zweier Ausdrücke von der Form $v = a + kb + k^2c$ Resultate von gleicher Form. Diesen Umstand, sowie die zwischen den Kubikwurzeln der Einheit bestehenden Beziehungen benutzt der Verfasser, um obigen Ausdruck als Vector in einem rechtwinkligen Coordinatensystem zu deuten, dessen Axen den als Einheiten betrachteten Grössen k, k^2, k^3 entsprechen. Hieraus leitet der Verfasser die drei auf einander senkrechten Einheitsvectoren ab:

$$i = (1+k+k^2) : \sqrt{3}, \quad j = (2-k-k^2) : \sqrt{6}, \quad l = (k-k^2) : \sqrt{2}.$$

Dieselben leisten, wie an verschiedenen Beispielen gezeigt wird, gleiche Dienste wie die Einheiten der Quaternionen-Rechnung und fügen sich nach Ansicht des Verfassers ihrem Ursprunge nach dem Rahmen der algebraisch definirbaren Grössen ein.

Dabei wird jedoch übersehen, dass der Ausdruck *v*, ebenso wie alle aus ihm abgeleiteten, eine geometrische, nicht aber eine arithmetische Summe ist. Dieser Umstand reicht aus, um die neuen Einheiten *i*, *j*, *l* als hyper-algebraische zu charakterisiren, und erklärt auch, dass der Verfasser zu einem Producte gelangt, welches den Wert Null hat, ohne dass einer seiner Factoren verschwindet. Auch die gegen dieses Ergebnis gerichtete redactionelle Schlussbemerkung geht von der Annahme einer arithmetischen Summe aus, wo eine geometrische zu verstehen ist. Diese Unterscheidung zu treffen, bleibt freilich überall dem Leser überlassen. Die Einfachheit der in den Anwendungen auf Mechanik vorkommenden Rechnungen bleibt dieselbe, wenn man die Einheiten *i*, *j*, *l* durch diejenigen der Quaternionen oder der Ausdehnungslehre ersetzt. Im übrigen aber lassen diese Anwendungen allerdings den Nutzen der gedachten Methoden recht augenfällig hervortreten. Schg.

H. Cox. Application of Grassmann's Ausdehnungslehre to properties of circles. Quart. J. XXV. 1-71.

Diese Arbeit enthält eine bemerkenswerte Bereicherung des Anwendungsgebietes der für die Ausdehnungslehre charakteristischen Operationen, obgleich ein ganz erheblicher Teil der darin vorgetragenen Theorie bereits durch Herrn Mehmke's Dissertation [F. d. M. XII. 1880. 460] vorweggenommen ist, Einiges auch schon durch Abschnitte in des Ref. „System der Raumlehre". Doch geht der Verf. darin weiter als Herr Mehmke, dass er sich nicht auf die innere Multiplication zweier Kreise beschränkt, sondern auch die Gesetze der äusseren und regressiven Multiplication anwendet und die Addition auf Kreissysteme (Kreisproducte) ausdehnt. Die Wirkungen der Ausartungen eines Kreises in Punkt und Gerade auf die Resultate werden auch hier eingehend untersucht, ausserdem die Verschiedenheiten der Lage zweier Kreise berücksichtigt. Das schon von Grassmann ausgesprochene Correspondenzprincip zwischen Kreisen der Ebene und Punkten des Raumes gelangt ebenfalls zur Verwendung. Zahlreiche Anwendungen, darunter auch solche auf die Theorie

der Flächen zweiter Ordnung, stellen die Vorteile der Methode in helles Licht. Nicht zutreffend erscheinen uns jedoch die Namen der beiden Haupt-Multiplicationsarten. Des Verfassers „innere“ Multiplication muss, um mit den Grassmann'schen Definitionen in Einklang gebracht zu werden, „äussere“ heissen und umgekehrt. Schg.

E. W. Hyde. The directional calculus based upon the methods of H. Grassmann. Boston. XII u. 247 S.

P. T. Grinwis. De oplossing van quaternionvergelijkingen. Diss. Utrecht. van Boekhoven. 75 S.

Beitrag zur algebraischen Theorie der Quaternionen. Der erste Abschnitt handelt von den Vectorgleichungen, der zweite von Quaternionengleichungen ersten und zweiten Grades, der dritte von Quaternionengleichungen dritten Grades, der vierte von coplanaren Vectoren nebst Erläuterung der Theorie durch viele Beispiele, der fünfte enthält eine eingehendere Untersuchung der Wurzelanzahl der Klasse $q^2 = qa+b$. Weil Hamilton sich darüber sehr unbestimmt ausspricht, wurde die Sache hier streng untersucht und das Resultat in klarer Form wiedergegeben G.

Th. B. van Wettum. De quaternion van Hamilton als matrix van Cayley. Nieuw Archief XVII. 206-216.

Handelt über Quaternionen und Matrizen. Im ersten Teil bekämpft der Verfasser zwei in Mess. (2) XIV (F. d. M. XVI. 1884. 113, XVII. 1885. 115) vorkommende Abhandlungen von Cayley; zumal bestreitet er Cayley's Behauptung, als wäre die Theorie der Quaternionen identisch mit der der Matrizen zweiter Ordnung, und behauptet dagegen, dass dergleichen Matrizen durchaus anderer Natur seien als die Quaternionen. Dann handelt der Verfasser vom Vectorenquotienten in der Ebene und vom Vectorenquotienten im Raume. Im Gegensatze zu Koenigsberger's Behauptung, als beständen für Punkte im Raume keine Ausdrücke, welche arithmetische Grössen bezeichnen, wie sich solche für Punkte in der Ebene in den complexen Zahlen vor-

finden, wird hier bewiesen, dass ähnliche Ausdrücke wirklich bestehen, und zwar im engsten Zusammenhange mit Hamilton's Quaternionen. Um unsinnige Sätze zu vermeiden (z. B. dass ein Product Null werde, ohne dass einer der Factoren es sei), ist die Theorie der Matrizen schicklich und passend anzuwenden.

G.

P. G. Tait. Note on a curious operational theorem. Edinb. Math. S. Proc. VIII. 21-22.

Sind α, β, γ, δ beliebige Vectoren, so ist

$$V . V\alpha\beta V\gamma\delta = \alpha S . \beta\gamma\delta - \beta S . \alpha\gamma\delta.$$

Aus diesem bekannten Ausdruck wird der folgende abgeleitet:

$$\nabla S . \sigma\nabla_1\sigma_1 = S(\nabla_1\sigma_1\nabla)\sigma,$$

wo $\sigma = i\xi + j\eta + k\zeta$, $\nabla = i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dz}$; ξ, η, ζ sind Functionen von x, y, z und σ_1, ∇_1 bedeuten die Ausdrücke, in welche σ, ∇ übergehen, wenn x_1, y_1, z_1 für x, y, z gesetzt werden.

Gbs. (Lp.)

Mc Aulay. Proposed extension of the powers of quaternion differentiation. Edinb. Proc. XVIII. 98-123.

Während der Verf. zugiebt, dass es eine nicht einwurfsfreie Verletzung der Gewohnheit ist, ein Operationssymbol ∇ auf die rechte Seite des betreffenden Ausdrucks zu setzen, spricht er dafür, dass dies zu rechtfertigen und in manchen Fällen vorteilhaft sei, wobei natürlich die Bedeutung der Bezeichnung erläutert wird.

Cly. (Lp.)

P. G. Tait. On the importance of quaternions in physics. Phil. Mag. (5) XXIX. 84-97.

Die Berechtigung der Quaternionen bei physikalischen Anwendungen wird hervorgehoben und durch mehrere Beispiele erläutert. Die verwickelten Gleichungen, welche ein notwendiger Bestand jeder auf cartesischen Bezugsaxen beruhenden Rechnung und oft zu schwer zu deuten sind, nehmen in der Qua-

ternionenrechnung sehr einfache Gestalten an, und es wird behauptet, „dass keine Figur, nicht einmal ein Modell ausdrucksvoller oder verständlicher als eine Quaternionengleichung sein könne“. Gbs. (Lp.)

Capitel 2.

Analytische Geometrie der Ebene.

A. Allgemeine Theorie der ebenen Curven.

G. Peano. Sopra alcune curve singolari. Torino Atti XXVI. 299-302.

Der Verfasser zeigt, dass mehrere von Staudt auf synthetischem Wege abgeleitete Sätze über Curven nur dann richtig sind, wenn man noch genauere Voraussetzungen über die zur Definition der Curve dienenden Functionen macht. So stellt Staudt beispielsweise den folgenden Satz auf: Wenn P und P' zwei Punkte einer ebenen Curve sind, welche in jedem ihrer Punkte eine Tangente besitzt, so hat der Schnittpunkt der beiden in P und P' construirten Tangenten bei Annäherung des Punktes P' an den Punkt P diesen letzteren Punkt P zur Grenzlage. Das Beispiel der beiden, durch die Gleichung $y = x^2 \sin\frac{1}{x}$ und durch die Gleichung $y = x^2\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right)$ dargestellten Curven lehrt die Unrichtigkeit jener Behauptung. Dabei hat die letztere der beiden Curven noch dazu die Eigenschaft, dass sie von irgend einer Geraden nur in einer endlichen Anzahl von Punkten getroffen wird. Ht.

A. Lindhagen. Om Medelriktninger af en bruten eller krokig Linie i Planet. Nyt Tidss. for Math. I. 80-82.

Der Verfasser zeigt, dass, wenn ein Curvenstück AB von der Länge S ohne Doppelpunkte gegeben ist, die mittlere Rich-

tung des Curvenstücks *AB* gleich $\frac{\Sigma}{S}$ ist, wenn Σ die Länge der Evolvente ist, welche entsteht, indem man *AB* von *B* anfangend abwickelt. V.

E. Cesaro. Remarques sur l'osculation. Nouv. Ann. (3) IX. 143-157.

Wenn eine Curvenfamilie in natürlichen Coordinaten ϱ, s durch eine Gleichung $F(\varrho, s, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) = 0$ definirt wird, so kann man daraus durch Einführung der aufeinanderfolgenden Krümmungsradien:

$$\varrho_1 = \varrho\frac{d\varrho}{ds}, \quad \varrho_2 = \varrho\frac{d\varrho_1}{ds}, \quad \dots, \quad \varrho_\lambda = \varrho\frac{d\varrho_{\lambda-1}}{ds}, \quad \dots$$

eine neue Gleichung $\Phi(\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n) = 0$ ableiten, welche die Familie ebenfalls charakterisirt, wie der Verfasser durch viele Beispiele erläutert. Sollen zwei Curven eine Berührung n^{ter} Ordnung haben, so ist nötig und hinreichend, dass ihre $(n-1)$ ersten Krümmungsmittelpunkte zusammenfallen; diese Bemerkung verwertet der Verfasser zur Bestimmung des osculirenden Kegelschnitts einer gegebenen Curve und untersucht den Ort seines Mittelpunkts, z. B. für die dreispitzige Hypocykloide. Soll der osculirende Kegelschnitt von besonderer Art sein, so muss eine Berührungsbedingung fortbleiben; in diesem Sinne studirt der Verfasser das System osculirender Parabeln resp. gleichseitiger Hyperbeln. Die durchgeführten Betrachtungen lassen sich in analoger Weise auf alle die Curven übertragen, welche der Verfasser in einer früheren Arbeit (F. d. M. XX. 1888. 701) ausführlich behandelt hat. R. M.

Husquin de Rhéville. Sur l'aberration de courbure. Nouv. Ann. (3) IX. 138-140.

Wenn man zu einer Tangente einer ebenen Curve eine unendlich nahe parallele Sehne zieht und deren Mittelpunkt mit dem Berührungspunkte verbindet, so heisst die Gerade Aberrations-Axe (nach Transon, Journ. de Math. 1841). Für den Winkel δ, welchen sie mit der Normale bildet, wird hier auf elementarem

Wege die Gleichung:

$$\operatorname{tg}\delta = \tfrac{1}{3}\frac{d\varrho}{ds} = \tfrac{1}{3}\frac{\varrho'}{\varrho}$$

bewiesen, in der ϱ den Krümmungsradius der Curve, ϱ' den der Evolute bezeichnet. R. M.

Husquin de Rhéville. Sur la courbure d'une podaire. Nouv. Ann. (3) IX. 140-143.

Der Verfasser entwickelt eine bekannte Formel für den Krümmungsradius der Fusspunktslinien auf elementarem Wege und leitet daraus eine lineare Construction ihres Krümmungsmittelpunktes ab. R. M.

F. Machowec. Ueber die Krümmungscentra der Integralcurve. Casop. XIX. 67. (Böhmisch.)

Enthält eine Verallgemeinerung der von d'Ocagne in Nouv. Ann. 1888 gelieferten Construction. Std.

J. Brill. On certain points specially related to families of curves. Cambr. Proc. VII. 57-64.

Die vorliegende Arbeit bildet eine Fortsetzung der Untersuchungen des Verfassers „On the geometrical interpretation of the singular points of an equipotential system of curves" (Proc. Cambr. Phil. Soc. VI. 313-320), über welche (F. d. M. XXI. 1889. 688) berichtet ist. Wie der Verfasser in seinem Aufsatze „Orthogonal systems of curves and of surfaces" (Proc. Cambr. Phil. Soc. VI. 230-245, F. d. M. XXI. 1889. 690) gezeigt hat, ist der Wert des Ausdrucks

$$\frac{h_2\,d\xi + i h_1\,d\eta}{dx + i\,dy},$$

wo ξ und η die Parameter zweier ein orthogonales System constituirenden Curvenfamilien darstellen und h_1, h_2 durch die Gleichungen

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = h_1^2,$$
$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 = h_2^2$$

definirt werden, von dem Verhältnis $dy:dx$ unabhängig. Es muss aber gewisse Punkte oder Oerter geben, an denen der Ausdruck unendlich wird. Diese Punkte oder Oerter können als eine Verallgemeinerung der singulären Punkte aequipotentialer Systeme betrachtet werden, und sie werden vom Verfasser in dem vorliegenden Aufsatze für einige Fälle näher studirt, in denen h_2/h_1 eine bestimmte Function von x und y ist. Zum Schluss werden die entwickelten Sätze auf zwei Beispiele angewandt. Gz.

A. Legoux. Sur un système de courbes orthogonales et homofocales. Toulouse Ann. IV. D. 1-7.

Der Verfasser betrachtet die durch eine Differentialgleichung

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2B\frac{dy}{dx} + C = 0$$

definirte Curvenschar, deren Discriminante

$$R = B^2 - AC = 0$$

bekanntlich entweder die Einhüllende oder den Ort der singulären Punkte der Curven der Schar darstellt. Wenn die Curven der Schar ein orthogonales System bilden und eine Enveloppe besitzen, so sind sie homofocal. Die Umkehrung gilt nicht, wie der Verfasser an dem Beispiel der durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{\lambda . f - a} + \frac{y^2}{\lambda . f - b} = 1$$

dargestellten Curvenschar zeigt, wo λ ein veränderlicher Parameter und f eine Function von x und y ist, während a und b Constanten bedeuten. In der That sind diese Curven zwar homofocal, aber orthogonal nur dann, wenn f einer gewissen partiellen Differentialgleichung genügt, deren Integral nach Einführung elliptischer Coordinaten auf elliptische Integrale, im Falle $a = 0$ auf elementare Functionen führt. Wbg.

Arenas y Garcia. Estudio analítico de la dualidad y transformación de figuras en el plano. Madrid. 1889. 135 S. 4°.

B. Theorie der algebraischen Curven.

E. Cosserat. Sur l'étude d'une courbe algébrique dans le voisinage d'un de ses points. Toulouse Ann. IV. O. 1-16.

In den beiden ersten Abschnitten wird nach dem Vorgange von Puiseux einfach und übersichtlich auseinandergesetzt, wie eine algebraische Function y in der Umgebung einer Verzweigungsstelle $x = a$ in eine nach gebrochenen Potenzen von $x-a$ fortschreitende Reihe entwickelt werden kann; es ist nämlich, wie bekannt:

$$y = b+b_1(x-a)^{\frac{1}{N}}+b_2(x-a)^{\frac{2}{N}}+\cdots,$$

wo N eine ganze Zahl und b, b_1, b_2, ... constante Zahlen bedeuten. Der dritte Abschnitt beschäftigt sich mit dem Falle, dass die zwischen x und y angenommene algebraische Gleichung reelle Coefficienten besitzt und somit eine reelle Curve in der xy-Ebene darstellt. Durch die obige Entwickelung lässt sich dann die Frage nach der Gestalt dieser Curve in der Umgebung eines singulären Punktes derselben leicht erledigen. Versteht man nämlich unter ω eine N^{te} Einheitswurzel, so stellt

$$y = b+b_1\omega(x-a)^{\frac{1}{N}}+b_2\omega^2(x-a)^{\frac{2}{N}}+\cdots$$

die Entwickelung eines anderen Zweiges der algebraischen Function y dar. Das System dieser N Entwickelungen wird ein Cyklus genannt. Soll dieser Cyklus einen reellen Curvenzug enthalten, so muss es notwendig unter jenen Entwickelungen eine geben, deren Coefficienten reelle Zahlen sind; es seien etwa b, b_1, b_2, ... selbst reell; dann sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Zahl N ungerade oder gerade ist. Im ersteren Falle giebt es nur einen reellen Zug; derselbe enthält sowohl solche Curvenpunkte, denen positive Werte von x entsprechen, als auch solche Punkte, deren x-Coordinate negativ ist. Im

zweiten Falle stellen zwei von jenen N Entwickelungen reelle Züge dar, welche jedoch beide auf der nämlichen Seite der y-Axe verlaufen. Der vierte Abschnitt behandelt besondere Beispiele. Ht.

A. Brill. Ueber algebraische Correspondenzen. Zweite Abhandlung. Specialgruppen von Punkten einer algebraischen Curve. Math. Ann. XXXVI. 321-360.

Die vorliegende Abhandlung ist die Fortsetzung einer Abhandlung gleichen Titels, über welche F. d. M. XX. 1888. 709 referirt worden ist. Wenn $f(x, y) = 0$ die Gleichung einer algebraischen Curve von der Ordnung n und vom Geschlechte p ist, so spricht sich das Problem der Specialgruppen algebraisch, wie folgt, aus: Man soll auf der Curve $f(x, y) = 0$ eine Gruppe G_R von R Punkten $x_1, y_1; \dots; x_R, y_R$ so bestimmen, dass die durch sie hindurchgehenden adjungirten Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung noch eine q-fach unendliche Schar bilden, wo die Zahl q grösser ist als $p-1-R$. Sind $\varphi_1(x, y) = 0, \dots, \varphi_p(x, y) = 0$ p solche linear unabhängigen Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, so müssen alsdann von den R Gleichungen

$$\alpha_1\varphi_1(x_1, y_1) + \alpha_2\varphi_2(x_1, y_1) + \cdots + \alpha_p\varphi_p(x_1, y_1) = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\alpha_1\varphi_1(x_R, y_R) + \alpha_2\varphi_2(x_R, y_R) + \cdots + \alpha_p\varphi_p(x_R, y_R) = 0$$

$r = q-p+1+R$ eine identische Folge der übrigen sein, eine Beziehung, welche sich durch das Verschwinden sämtlicher $(R-r+1)$-reihigen Determinanten der aus den Elementen $\varphi(x, y)$ gebildeten Matrix ausdrückt. Ein besonderes Interesse beansprucht wegen seiner Beziehung zu der Frage nach den Moduln der algebraischen Curve der schon von Riemann hervorgehobene Fall, dass die Zahl R einen Maximalwert annimmt. Dieser Fall tritt ein für $R = \frac{3}{2}p-3$, $r = \frac{1}{2}p-1$, $q = 1$, bezüglich $R = \frac{1}{2}(3p-7)$, $r = \frac{1}{2}(p-3)$, $q = 1$, je nachdem p eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Das hiermit bezeichnete Problem lässt sich nun mit Hülfe des Riemann-Roch'schen Satzes auf ein einfacheres Problem zurückführen, welches sich algebraisch, wie folgt, aus-

drückt: Es sollen solche $Q = \frac{1}{2}p+1$, bezüglich $= \frac{1}{2}(p+3)$ Wertepaare $x_1, y_1; \ldots; x_Q, y_Q$ bestimmt werden, so dass für dieselben sämtliche Q-reihigen Determinanten der Matrix

$$\left\| \begin{array}{cccc} \varphi(x_1, y_1) & \varphi_2(x_1, y_1) & \ldots & \varphi_p(x_1, y_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1(x_Q, y_Q) & \varphi_2(x_Q, y_Q) & \ldots & \varphi_p(x_Q, y_Q) \end{array} \right\|$$

verschwinden, während noch die Gleichungen $f(x_1, y_1) = 0, \ldots, f(x_Q, y_Q) = 0$ bestehen. Dieses Problem nimmt der Verfasser in folgender Weise in Angriff. Zunächst werden die Gleichungen untersucht, welche man erhält, wenn man alle k-reihigen Determinanten einer Matrix von k Horizontalreihen und $k+i$ Verticalreihen gleich 0 setzt, wobei man sich die Elemente als irgend welche ganze rationale Functionen von einer so grossen Anzahl von Veränderlichen denke, dass das Problem einen Sinn hat. Der Verfasser gewinnt eine Recursionsformel, mit deren Hülfe sich die Anzahl der Lösungen jener Gleichungen berechnen lässt. Nunmehr wird andererseits nach der Anzahl der Lösungen eines Gleichungssystems gefragt, welches allgemein die Form $\varphi(x_1, y_1; \ldots; x_k, y_k) = 0, \ldots, \vartheta(x_1, y_1; \ldots; x_k, y_k) = 0$ hat, während zugleich die Beziehungen $f(x_1, y_1) = 0, \ldots, f(x_k, y_k) = 0$ zu erfüllen sind. Durch successive Elimination wird der Fall von k Veränderlichenpaaren auf den Fall von drei Paaren Veränderlicher zurückgeführt, in welchem letzteren Falle die gesuchte Anzahl durch eine sehr einfache Formel gewonnen werden kann. Nach einer darauf folgenden ausführlichen Untersuchung der „symmetrisch gestalteten" Correspondenzen sind dann die Mittel vorhanden, um das oben bezeichnete Problem der Specialgruppen zu lösen. Das hauptsächlichste Ergebnis ist ein Ausdruck für die Anzahl der Wertepaare, welche sämtliche Q-reihigen Determinanten der obigen Matrix zum Verschwinden bringen, während jedes derselben auch noch die Function f zu 0 macht. Zum Schluss wird eine Anwendung auf die Frage nach den algebraischen Functionen gemacht, welche in der geringsten Anzahl von Punkten 0 und ∞ werden, und es zeigt sich dabei das gewonnene Resultat in Uebereinstimmung mit einer auf anderem Wege von Hrn. Castelnuovo gefundenen Formel. Ht.

W. Weiss. Ueber eine algebraische Theorie der Scharen nichtadjungirter Berührungscurven, welche zu einer algebraischen Curve gehören. Wien. Ber. XCIX. 284-317.

Um die von Clebsch gefundenen Resultate über Scharen von adjungirten Curven auf nicht adjungirte Curven auszudehnen, stellt sich der Verfasser die Aufgabe, aus einer Schar von adjungirten Curven $\psi = 0$ einen solchen Teil von Curven auszusondern, welche auf der Grundcurve $f = 0$ denselben beweglichen Schnitt besitzen, wie eine gewisse Schar nicht adjungirter Curven $\chi = 0$. Diese Aufgabe wird gelöst mit Hülfe des Noether'schen Fundamentalsatzes über die Darstellung einer Form, welche in den gemeinsamen Nullstellen zweier anderen Formen verschwindet, und zwar findet man, dass die adjungirten Curven, falls jene Aussonderung möglich sein soll, notwendig gewisse Bedingungen in den singulären Punkten von $f = 0$ erfüllen müssen. Diese Bedingungen sind besonders einfach, wenn die Grundcurve $f = 0$ nur gewöhnliche Doppelpunkte besitzt; es ergiebt sich nämlich dann, dass der betreffende Teil der Schar $\psi = 0$ von den sämtlichen Curven gebildet wird, welche in jedem Doppelpunkte eine gewisse Ausgangscurve $\psi_0 = 0$ berühren. Ist beispielsweise eine Curve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkte gegeben, so nehme man auf derselben vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 an und lege durch diese vier Punkte einen Kegelschnitt, welcher ausserdem noch weitere vier Punkte auf der Grundcurve ausschneidet: durch diesen Restschnitt werde der Kegelschnittbüschel $\chi = 0$ bestimmt. Ist ferner $\psi_0 = 0$ ein adjungirter Kegelschnitt, welcher die Grundcurve in den ersteren vier Punkten P_1, P_2, P_3, P_4 und in den zwei weiteren Punkten Q_1, Q_2 trifft, so wird das durch den eben construirten Kegelschnittbüschel auf der Grundcurve bestimmte Punktsystem auch durch diejenigen Kegelschnitte $\psi_0 = 0$ ausgeschnitten, welche durch Q_1, Q_2 hindurch gehen und den Kegelschnitt $\psi_0 = 0$ im Doppelpunkte der Grundcurve berühren. Nachdem der Verfasser in entsprechender Weise das Auftreten eines dreifachen Punktes in Betracht gezogen und ferner noch im allgemeinen Falle untersucht hat, in wie weit

die den adjungirten Curven aufzuerlegenden Bedingungen von einander unabhängig sind, wendet er sich dazu, die gefundenen Resultate für die Theorie der nicht adjungirten Berührungscurven zu verwerten. Die Methode besteht darin, den zu untersuchenden nicht adjungirten Systemen von Berührungscurven in bestimmter Weise adjungirte Berührungssysteme zuzuordnen; unter Voraussetzung der für die letzteren aus dem Jacobi'schen Umkehrproblem fliessenden Resultate gelingt es dann mit Hülfe der oben angedeuteten Principien, die Theorie der nicht adjungirten Berührungscurven auf rein algebraischem Wege zu lösen. Für den Fall, dass die Grundcurve nur gewöhnliche Doppelpunkte besitzt, etwa in der Zahl δ, giebt es, wie der Verfasser zeigt, $2^{\delta+2p}$ von einander völlig getrennte Systeme von Berührungscurven, welche die Doppelpunkte nicht enthalten, wobei p das Geschlecht der Grundcurve bedeutet. Auch der Fall von beliebig vielen Doppel- und Rückkehrpunkten wird vollständig erledigt. Zum Schlusse erläutert der Verfasser die gefundenen Resultate an einer Reihe von besonderen Beispielen. Ht.

E. Study. Ueber Schnittpunktfiguren ebener algebraischer Curven. Math. Ann. XXXVI. 216-229.

Die Arbeit beginnt mit der Ableitung einiger sehr allgemeinen, auf der bekannten Identität des Restsatzes beruhenden Schnittpunktsätze, von denen der erste wie folgt lautet: Sind auf einer algebraischen Curve n^{ter} Ordnung C^n vier Punktgruppen a, b, γ, δ gelegen, von welchen a und b residual sind zu γ und δ, so dass die Paare (a, γ), (a, δ), (b, γ), (b, δ) je ein volles Schnittpunktsystem der C^n bezüglich mit einer C^l, C^m, C^{m_1}, C^{l_1} ausmachen, so liegen die Punktgruppen d, c, β, α, in welchen sich die Curven C^l und C^{m_1}, C^m und C^{l_1}, C^l und C^m, C^{l_1} und C^{m_1} noch weiterhin durchdringen, auf einer C^{n_1}, deren Ordnung sich aus den Relationen ergiebt:

$$l+l_1 = m+m_1 = n+n_1.$$

Aus diesen Sätzen folgen unter anderen als besondere Fälle die von Olivier aufgestellten Schnittpunktsätze. Der Verfasser stellt

dann zur Veranschaulichung jener allgemeinen Sätze eine grosse Reihe von Beispielen zusammen, welche teilweise zu sehr einfachen Schnittpunktfiguren Veranlassung geben. Es seien hier die folgenden Sätze angeführt: Nimmt man auf drei Kreisen, welche sich in einem Punkte treffen, je einen Punkt an und verbindet je zwei dieser Punkte mit dem weiteren Schnittpunkte der sie enthaltenden Kreise durch einen neuen Kreis, so treffen sich die drei so construirten Kreise wieder in einem Punkte. Ferner: Nimmt man auf drei Geraden durch denselben Punkt je ein Punktepaar an und verbindet einen beliebig angenommenen Punkt mit je zweien dieser Punktepaare durch einen Kegelschnitt, so gehen die drei auf diese Art erhaltenen Kegelschnitte noch durch einen weiteren Punkt. Ht.

B. Sporer. Ueber die Anzahl der Lösungen gewisser Aufgaben und allgemeine Eigenschaften algebraischer Curven. Schlömilch Z. XXXV. 237-246, 293-306.

Zunächst erledigt der Verfasser eine Reihe specieller Aufgaben aus der abzählenden Geometrie der Kegelschnitte. Die Methode der Untersuchung läuft im wesentlichen auf eine Anwendung des Princips der speciellen Lage hinaus, wie sich an folgendem Beispiele zeigt: Es werde die Enveloppe derjenigen geraden Linie PQ gesucht, welche man erhält, wenn man einen Kegelschnittbüschel und zwei gerade Linien p und q fest annimmt und dann durch einen jeden Kegelschnitt des Büschels auf jenen zwei Geraden p und q je einen Punkt P und Q ausschneidet. Durch jeden Punkt P auf der Geraden p gehen drei Gerade von der verlangten Beschaffenheit hindurch, da man die Gerade p selber notwendig hinzurechnen muss; hieraus schliesst der Verfasser dann, dass die gesuchte Enveloppe eine Curve von der dritten Klasse ist. Durch die Ausbildung dieser Methode finden sich die bezüglichen von Steiner gemachten Angaben bestätigt; die neu erhaltenen Resultate werden in einer Tabelle zusammengestellt. Hierauf wendet sich der Verfasser zur Behandlung einer allgemeineren Frage, nämlich der Frage nach

der Anzahl der Kegelschnitte, welche irgend fünf gegebene Curven unter gegebenen Winkeln schneiden, und dehnt die Betrachtung dann auch noch auf den Fall aus, wo es sich allgemein um die Anzahl von Curven n^{ter} Ordnung handelt, welche gewisse Bedingungen erfüllen. Das gefundene Resultat bleibt, wie der Verfasser selbst hervorhebt, nur gültig, wenn man noch gewisse uneigentliche Lösungen in richtiger Weise mitrechnet und zugleich einzelne Lösungen als mehrfach zählt. Die Ausscheidung solcher uneigentlichen Lösungen und die genaue Charakterisirung der mehrfachen Lösungen wird jedoch vom Verfasser nicht bewerkstelligt. Ht.

E. Bertini. Sul numero dei punti di diramazione di una singolarità qualunque di una curva piana algebrica. Lomb. Ist. Rend. (2) XXIII. 307-311.

Die zwei Abhandlungen des Herrn Nöther: „Ueber die singulären Wertsysteme einer algebraischen Function und die singulären Punkte einer algebraischen Curve“ (Math. Ann. IX, F. d. M. VII. 1875. 243) und „Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Functionen“ (Math. Ann. XXIII, F. d. M. XVI. 1884. 349) enthalten eine eingehende Untersuchung beliebiger Singularitäten algebraischer Curven mittels der Anwendung successiver quadratischer Transformationen. Denselben Inhalt hat die Abhandlung des Herrn Bertini „Sopra alcuni teoremi fondamentali delle curve piane algebriche“ (Lomb. Ist. Rend. (2) XXI, F. d. M. XX. 1888. 709); doch ist in dieser die Untersuchung auf einem anderen Wege durchgeführt: der wesentlichste Unterschied liegt in der Erklärung der Verzweigung einer beliebigen Singularität. Der Zweck, welchen der gegenwärtige Aufsatz verfolgt, ist die Erforschung der Beziehungen zwischen den beiden angeführten Erklärungen; beide führen, wie bewiesen wird, auf die Bestimmung derselben Zahl. La.

G. Castelnuovo. Sopra un teorema del Sig. Humbert. Palermo Rend. IV. 195-196.

Castelnuovo, Guccia, Humbert, Noether. Memorie e communicazioni. Palermo Rend. IV. 65-72.

An eine Reihe von Mitteilungen in den Sitzungen vom 13. und 23. Februar 1890, welche von den oben genannten Herren gemacht wurden, knüpft Herr Castelnuovo die oben bezeichnete Note vom 8. Juni 1890. Es handelt sich um einen Einwand, den Herr Castelnuovo gegen einige Behauptungen des Herrn Humbert in einer Mitteilung in Bd. III, pag. 277 aufgestellt hatte, und über welchen sich die anderen Herren in verschiedenem Sinne äussern. A.

M. Noether. Les combinaisons caractéristiques dans la transformation d'un point singulier. Palermo Rend. IV. 89-108.

M. Noether. Extraits d'une lettre adressée à M. G. B. Guccia. Ibid. 299-301.

Ueber die Singularitäten der algebraischen Curven existiren viele Arbeiten, von denen hier hauptsächlich in Betracht kommen die von Halphen, C. R. LXXVIII. 1105, Ref. F. d. M. VI. 1874. 392; Noether, Math. Ann. IX. 166, Ref. F. d. M. VII. 1875. 243; Smith, Proc. L. M. S. VI. 153, Ref. F. d. M. VIII. 1876. 433. Das zuletzt erwähnte Referat ist sehr ausführlich und rührt von Herrn Noether selbst her, so dass man durch dasselbe sehr tief in die betreffenden Untersuchungen geführt wird. Als Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist folgender zu bezeichnen. Die Herren Smith und Halphen haben gezeigt, dass es bei den Reihenentwickelungen zur Untersuchung einer Singularität lediglich auf die Exponenten gewisser Terme, der „charakteristischen" oder „kritischen" Terme, bei der Bestimmung der Singularität ankommt. Andererseits muss man analytisch diese Entwickelungen herleiten durch eine Folge von quadratischen Transformationen, welche die Singularität immer weiter auflösen, und dies führt zu einer Reihe von Kettenbrüchen, wie sie die Herren Hamburger und Königsberger in der Theorie der elliptischen Functionen erwähnen, aus denen sich die Zahlen bilden lassen,

welche die Singularität definiren. Der Verfasser untersucht nun genauer den Zusammenhang zwischen diesen Bestimmungsweisen, wodurch die früheren Arbeiten dem Verständnis näher gebracht werden.

In dem Briefe an Herrn Guccia sind einige kleine Zusätze zu dem Aufsatz enthalten. A.

M. d'Ocagne. Quelques propriétés générales des courbes algébriques obtenues au moyen des coordonnées parallèles. Nouv. Ann. (3) IX. 445-455.

M. d'Ocagne. Sur l'application des coordonnées parallèles à la démonstration d'un théorème de Chasles relatif aux surfaces algébriques. S.M.F. Bull. XVIII. 108-118.

Die für die allgemeine Gleichung einer algebraischen Curve in Parallel-Coordinaten

$$a_n v^n + (a_{n-1} u + b_{n-1}) v^{n-1} + \cdots = 0$$

bestehende Beziehung zwischen der Summe der Wurzeln und dem Factor des zweiten Gliedes lässt, ebenso wie einige durch Differentiation daraus abgeleitete Formeln, durch geometrische Deutung Eigenschaften der Curve erkennen, welche sich auf harmonische Geraden und Punkte beziehen. Als specieller Fall eines derartigen Satzes erweist sich der Satz von Chasles: Das Centrum der mittleren Abstände der Berührungspunkte einer algebraischen Curve mit den einer gegebenen Geraden parallelen Tangenten ist ein von der Wahl jener Geraden unabhängiger Punkt (Chasles'scher Punkt). Für diesen Satz giebt die erste der obigen Abhandlungen noch einen directen Beweis; in der zweiten wird derselbe Satz in analoger Weise auf algebraische Flächen ausgedehnt. In beiden Fällen wird auch die Lage des Chasles'schen Punktes bestimmt. Schg.

B. Sporer. Ueber den Ort der Verbindungslinie der Berührungspunkte paralleler Tangenten einer algebraischen Curve. Böklen Mitt. III. 55-58.

Verfasser beweist auf rein geometrischem Wege die beiden folgenden von Steiner bereits allgemein aufgestellten, aber nur für den Fall $m = 3$ bewiesenen Sätze:

1) (Steiner, ges. W., B. II, S. 537-539 u. 589.)

Der Ort der Verbindungslinie der Berührungspunkte zweier parallelen Tangenten einer Curve m^{ten} Grades ist eine Curve $\frac{1}{2}m(m-1)(2m-3)^{\text{ter}}$ Klasse.

2) (Steiner, ges. W., B. II, S. 599, No. 5 u. S. 491, No. 22.)

Werden aus einem festen Punkte beliebige Transversalen durch eine gegebene Curve m^{ten} Grades gezogen und an diese in den m Schnitten die Tangenten gelegt, die einander in $\frac{1}{2}m(m-1)$ Punkten schneiden, so ist der Ort dieser Punkte eine Curve $\frac{1}{2}m(m-1)(2m-3)^{\text{ten}}$ Grades, und werden aus jedem Punkte einer festen Geraden an dieselbe Curve die $m(m-1)$ Tangenten gezogen, deren Berührungspunkte im ganzen $\frac{1}{2}m(m-1)(m^2-m-1)$ Berührungssehnen bestimmen, so ist der Ort dieser Sehnen eine Curve $\frac{1}{2}m(m-1)(2m-3)^{\text{ter}}$ Klasse. Wbg.

K. Birkeland. Ein Satz über algebraische Curven.
Monatsh. f. Math. I. 417-424.

„Es sei gegeben eine beliebige algebraische Curve m^{ter} Ordnung und n^{ter} Klasse

$$M(x, y) = 0.$$

Von einem laufenden Punkte P seien die $m+n$ Normalen gezogen, deren Länge von P bis zum resp. Fusspunkte auf $M(x, y)$ wir mit N_i $(i = 1, 2, \dots, m+n)$ bezeichnen. Dann ist der geometrische Ort derjenigen Punkte P, für welche

$$\Sigma N_i^2 = c^2 \qquad (c = \text{constant}),$$

ein Kegelschnitt. — Die Asymptoten des Kegelschnittes k_i $(i=1, 2)$ bilden solche Winkel mit den Asymptoten der algebraischen Curve l_j $(j = 1, 2, \dots, m)$, dass:

$$\sum_j \cos^2(k_i l_j) = m + n,$$

wenn $(k_i l_j)$ den Winkel zwischen k_i und l_j bezeichnet.“

Vorstehendes Theorem wird analytisch bewiesen. — Ist

insbesondere der Kegelschnitt eine Ellipse, so existirt für ein veränderliches c ein „Isobarensystem“ von concentrischen Ellipsen mit denselben Asymptoten und mit einem Minimum von c in dem gemeinschaftlichen Centrum. Wbg.

E. Borel. Note sur un théorème de M. Humbert et sur un théorème de M. Fouret. Nouv. Ann. (3) IX. 123-129.

Die Summe der Winkel, welche die gemeinsamen Tangenten zweier algebraischen Curven mit einer festen Axe bilden, ändert sich nicht, wenn man diese Curven durch homofocale Curven ersetzt. (F. d. M. XX. 1888. 687.) Dieser Satz wird direct bewiesen und in Zusammenhang gebracht mit einem andern Theorem, dem der Verfasser die Form giebt: Wenn zwei veränderliche algebraische Curven die Coordinaten-Axen in festen Punkten treffen, und wenn der Coordinaten-Anfang mit ihren Schnittpunkten verbunden wird, so ist das Product der anharmonischen Verhältnisse dieser Verbindungsstrahlen zu den Axen und einem festen Strahl constant. R. M.

E. J. Routh. Note on the intersection of a curve with a straight line. Quart. J. XXIV. 257-259.

Wenn eine Gerade eine Curve n^{ter} Ordnung in n getrennten Punkten schneidet, so besteht zwischen den Schnittwinkeln φ und den Krümmungsradien ϱ in diesen Punkten die Relation:

$$\Sigma \frac{1}{\varrho \sin^3 \varphi} = 0.$$

Man kann diese Gleichung etwas erweitern und einige Theoreme über die Wendepunkte der Curven dritter Ordnung daraus ableiten. R. M.

H. F. Baker. On the centre of an algebraic curve. Quart. J. XXIV. 338-339.

Der Inhalt des Taylor'schen Artikels (F. d. M. XXI. 1889. 695) wird in andrer Weise gefasst und kurz abgeleitet.

R. M.

G. Darboux. Sur une classe de courbes unicursales et sur une propriété du cercle. Ann. de l'Éc. Norm. (3) VII. 327-334.

Man vergleiche die Referate in F. d. M. XIV. 1882. 542 u. 543 über die gleich betitelten Arbeiten des Verfassers, die hier abgedruckt sind.

Der Verfasser betrachtet zunächst Unicursalcurven n^{ter} Klasse, welche die Eigenschaft besitzen, dass man in jeder Richtung nur eine Tangente ziehen kann, welche also die unendlich ferne Gerade als $(n-1)$-fache Tangente besitzen. Diese Curven entstehen durch Bewegung einer Geraden, welche auf n gegebenen Geraden von gegebenen Anfangspunkten aus Stücke abschneidet, die durch eine lineare Relation verbunden sind; sie besitzen auch die Eigenschaft, dass zwischen den von $n+1$ festen Tangenten auf einer veränderlichen Tangente abgeschnittenen Segmenten eine lineare Relation besteht. Das einfachste Beispiel dieser Curven bietet die Parabel dar. Durch Projiciren erhält der Verfasser analoge Sätze über Curven n^{ter} Klasse, welche irgend eine $(n-1)$-fache Tangente besitzen, speciell wieder über Kegelschnitte. — Es werden dann Unicursalcurven betrachtet, bei welchen man im allgemeinen in jeder Richtung zwei Tangenten ziehen kann; diese Curven entstehen durch Bewegung einer Geraden, welche mit n festen Geradenpaaren Dreiecke einschliesst, deren Umfangsumme constant ist. Die diesbezüglichen Sätze sind Analoga eines bekannten Satzes über den Kreis. Die Anzahlbestimmung der Dreiecke für Curven von gegebener Klasse führt auf Probleme aus der Theorie der binären Formen. Der Zusammenhang mit dieser Theorie erklärt sich auch daraus, dass diese Curven in Bezug auf einen Kreis die reciproken Polaren derjenigen Curven sind, welche in Polarcoordinaten durch die Gleichung $\varrho = f(\cos\omega, \sin\omega)$ dargestellt werden, wo f eine rationale Function bedeutet. Wbg.

Weill. Sur une propriété d'une classe de courbes algébriques. S. M. F. Bull. XVIII. 154.

Die drei Ecken eines Dreiecks ABC liegen auf einer Curve $y^m = Ax^p$, während die Seiten AB und BC je die Curven $y^m = Bx^p$ und $y^m = Cx^p$ berühren; dann umhüllt die dritte Seite AC bei der Bewegung von ABC unter den angeführten Bedingungen eine vierte Curve derselben Art; ferner kann man auch eine gewisse Vertauschung der Ecken vornehmen.

Lp.

C. Gerade Linie und Kegelschnitte.

E. Cesáro. Sur l'emploi des coordonnées barycentriques. Mathesis X. 177-190.

In diesem beachtungswerten Aufsatze benutzt Hr. Cesáro gleichzeitig die cartesischen und die barycentrischen Coordinaten. Ein in einer Ebene beweglicher Punkt M wird als der Schwerpunkt dreier, in den Ecken eines Bezugsdreiecks liegenden, veränderlichen Massen angesehen. Der Verf. bezieht die Figur auf die Axen des Trägheits-Kegelschnitts für das betrachtete Dreieck. Der gleichzeitige Gebrauch dieser beiden Arten von Coordinaten ermöglicht es, auf eine ungezwungene Weise eine grosse Menge alter und auch neuer Sätze zur Dreiecksgeometrie aufzufinden. Als eine Folge dieser Forschungsmethode ergiebt sich unter anderem: „Die Elemente, welche man gewohnheitsmässig merkwürdig nennt, sind dies nicht an sich, sondern durch die Beziehungen, welche sie unter einander haben. Man kann jeden Satz bezüglich des Zusammenhangs eines beliebigen Systems von Elementen auf jedes andere System übertragen, dessen Elemente denselben Zusammenhang besitzen". Die Vorteile der Methode des Hrn. Cesáro entspringen der Freiheit in der Verlegung des Anfangspunktes und in der Orientirung der Axen innerhalb eines gewissen Spielraums in der Ebene. Doch ist zu beachten, dass diese Freiheit in der infinitesimalen Geometrie fortfällt, wo man die natürlichen Coordinaten ϱ und s benutzt.

Mn. (Lp.)

F. J. Studnička. Bemerkungen zur analytischen Theorie der Geraden. Casop. XIX. 121. (Böhmisch.)

Betrifft die Ergänzung der gewöhnlichen Schulbücher in Bezug auf drei coexistirende Gerade. Std.

P. Sack. Ueber Kreisbündel zweiter Ordnung. Diss. Jena. 32 S. 8⁰.

Schon oft ist das dreistufige System aller Kreise einer Ebene auf das dreistufige System aller Punkte des Raumes abgebildet (z. B. Thomae, Schlömilch Z. XXIX. 284, Tauberth Diss. Dresden 1884). Auch ist die Geometrie des ebenen Kreissystems, welche der Verfasser mit Benutzung dieser Abbildung aus der Punktgeometrie des Raumes ableitet, in der Kugelgeometrie von Th. Reye enthalten (Synthetische Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme). Der Verfasser leitet nun hier analytisch die Eigenschaften der Kreisbündel ab, welche bei der erwähnten Abbildung den verschiedenen Arten von Flächen zweiten Grades entsprechen. Als gemeinsames Merkmal für alle Kreisbüschel zweiter Ordnung findet der Verfasser, dass die Kreise eines solchen je ein Paar zweier projectiv auf einander bezogenen linearen Kreisbüschel orthogonal und ausserdem einen Kreis, der keinem der beiden Büschel angehört, orthogonal oder diametral schneiden. Ferner ergiebt sich, dass alle diese Kreise eine bicirculare Curve vierter Ordnung doppelt berühren. Hinsichtlich der Kreisbündel zweiter Ordnung fügt der Verfasser den bekannten Resultaten noch hinzu, dass solche Bündel von allen Kreisen gebildet werden, die von einem Kreise diametral geschnitten werden, ferner von allen Kreisbüscheln, die einen Kreis gemein haben, und deren Potenzlinien einen Kegelschnitt umhüllen, ferner von allen Kreisen, welche die Paare zweier projectiven Kreisbüschel orthogonal schneiden, ferner von allen Kreisen, welche die Paare eines Kreisbüschels in Involution unter constantem Winkel schneiden, endlich von allen Kreisen, welche die Paare einer Strahlen-Involution unter constantem Winkel schneiden. Scht.

AND. MÜLLER. 1) Ueber den Brocard'schen Kreis als geometrischen Ort und die demselben verwandten Kegelschnittscharen. 2) Ueber Kegelschnitte, die zu dem verallgemeinerten Brocard'schen Dreiecke in Beziehung stehen. Hoppe Arch. (2) VIII. 337-362, (2) IX. 113-156.

Die Fusspunkte der durch die Brocard'schen Punkte O_2 und O'_2 gezogenen Ecktransversalen sind A_2, B_2, C_2, und homolog werden solche Punkte A_1, B_1, C_1 genannt, welche die Seiten des Fundamentaldreiecks alle 3 nach demselben Verhältnis teilen. Unter Benutzung barycentrischer Coordinaten wird der Satz hergeleitet: „Der Brocard'sche Kreis ist der geometrische Ort für den Schnittpunkt der Geraden A_2A_1, B_2B_1, C_2C_1", und dieser Satz dann nach doppelter Richtung erweitert, erstens indem in den benutzten analytischen Formeln die Coordinaten der in Betracht kommenden Punkte an Stelle des Exponenten 2 irgend einen andern Exponenten erhalten, und zweitens, indem man A_2 mit irgend welchen Punkten auf CA oder AB und entsprechend B_2 und C_2 mit den homologen Punkten auf AB und BC resp. BC und CA verbindet. An Stelle des Brocard'schen Kreises treten dann Kegelschnitte. — In der zweiten Arbeit werden homologe Punkte 1) auf den Seiten des Brocard'schen Dreiecks $A_mB_mC_m$, 2) auf $A'A_m$, $B'B_m$, $C'C_m$ (A' Mitte von BC), 3) auf $A'A'_m$, $B'B'_m$, $C'C'_m$ (A'_m Mitte von B_mC_m) mit A, B, C verbunden und der Ort für den Schnittpunkt der Verbindungslinien jedesmal als Hyperbel ermittelt. Endlich werden A, B, C mit A_m, B_m, C_m vertauscht und besondere Fälle betrachtet. Es wird verschiedentlich Bezug genommen auf die Arbeit des Verfassers im Programm des Kgl. Gymnasiums zu Kempen 1889 und auf den barycentrischen Calcul von Möbius.

Lg.

A. BOUTIN. Sur un groupe de quatre coniques remarquables du plan d'un triangle. J. de Math. spéc. (3) IV. 104-107, 124-127.

Sind O, I, I', I'', I''' die Mittelpunkte des Umkreises, des Inkreises und der Ankreise eines Dreiecks, und transformirt man

die Geraden OI, OI', OI'', OI''', indem man zu ihren Punkten die inversen construirt, so erhält man vier gleichseitige Hyperbeln, die durch den Höhenschnitt H des Dreiecks gehen. Ueber diese vier Hyperbeln handelt der Verf., indem er ihren Zusammenhang mit der neueren Dreiecksgeometrie zeigt, z. B.: Ihre Mittelpunkte liegen auf dem Feuerbach'schen Kreise des Dreiecks. Die Asymptoten sind die Simson'schen Geraden für die Endpunkte der Durchmesser OI, OI', OI'', OI''' des Umkreises. Wenn ein Dreieck einem festen Kreise eingeschrieben, einem zweiten umgeschrieben ist, so dreht sich die Verbindungslinie seines Nagel'schen und seines Gergonne'schen Punktes um einen festen Punkt der Centrale. Lp.

G. de Longchamps. Sur les paraboles de M. Artzt. J. de Math. spéc. (3) IV. 149-153.

Wenn die Artzt'schen Parabeln sich zu zweien in den Punkten A', B', C' schneiden, so sind die Inhalte der krummlinigen, durch sie bestimmten Dreiecke: $AC'B' = CA'B' = BA'C' = \frac{17}{81} ABC$; ferner $AC'B = BA'C = CB'A = \frac{5}{81} ABC$. Lp.

F. Caldarera. Sistema di circoli tangenti a tre cerchi dati, in coordinate trilineari. Palermo Rend. IV. 43-49.

Die bekannte Construction eines Kreises, der drei gegebene berührt, wobei die Aehnlichkeitsaxen und der Chordalpunkt der gegebenen Kreise verwandt werden, ist den hier gegebenen analytischen Entwickelungen zu Grunde gelegt. Es werden trilineare Coordinaten gebraucht, und das Coordinatendreieck hat die Centra der drei gegebenen Kreise zu Ecken. Gefunden werden die Coordinaten des Centrums und der Radius des Kreises, der die drei gegebenen Kreise berührt. Mz.

M. L. Albeggiani. Osservazioni sulla nota precedente. Palermo Rend. IV. 50-53.

Dieser kurze Aufsatz bezieht sich auf die von Hrn. Caldarera

gegebene Lösung des Problems, zu drei Kreisen den vierten sie berührenden zu finden. Der Verfasser legt die gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinatenaxen zu Grunde, zu welchen keiner der gegebenen Kreise eine specielle Lage hat, und gelangt zu Formeln, die einfacher sind, als die entsprechenden in der Arbeit des Hrn. Caldarera. Mz.

A. Poulain. Solution de la question 274. J. de Math. spéc. (3) IV. 111-119.

Die von Hrn. Lemoine gestellte Aufgabe verlangt die Auffindung der Oerter für zwei Punkte *M* und *M'* in der Ebene eines Dreiecks *ABC*, wenn ihre bezüglichen tripolaren Coordinaten *m*, *n*, *l* und *n*, *l*, *m* sind. „Der Ort von *M* ist ein Kegelschnitt, welcher drei merkwürdige Kegelschnitte doppelt berührt. Letztere haben *A*, *B*, *C* zu Brennpunkten, und jeder besitzt als Länge der Focalaxe diejenige Seite, welche der seine Brennpunkte verbindenden vorangeht" (directe Seitenkegelschnitte). Der Ort von *M'* steht in gleicher Beziehung zu den „rückläufigen Seitendreiecken". Lp.

A. Poulain. Sur un problème de M. A. Boutin. J. de Math. spéc. (3) IV. 33-41.

Im J. de Math. spéc. (3) III. 254-255 hatte Hr. Boutin die bekannte Aufgabe analytisch behandelt: „Um die Ecken eines Dreiecks als Mittelpunkte beschreibt man Kreise, deren Radien bezw. *p*, *q*, *r* sind. In der Ebene des Dreiecks die Punkte zu bestimmen, von denen aus die Kreise unter demselben Gesichtswinkel erscheinen, und die Abstände dieser Punkte von den drei Seiten zu berechnen." In der vorliegenden Note weist Hr. Poulain darauf hin, dass die Frage auf die Aufgabe hinausläuft, die senkrechten Coordinaten x, y, z eines Punktes *M* zu berechnen, wenn man drei Grössen p, q, r kennt, welche seinen tripolaren Coordinaten proportional sind, und knüpft hieran einige Rechnungen, welche mit der neueren Dreiecksgeometrie zusammenhängen. Lp.

C. Lolli. Intorno al problema degli assi delle curve di 2° ordine trattato coi metodi della geometria nuova e della geometria analitica. Batt. G. XXVIII. 193-201.

Das Axenproblem bei Curven zweiter Ordnung wird, wie es im Titel ausgesprochen ist, mit Hülfe der neueren synthetischen und der analytischen Methode behandelt. Wesentlich neue Gesichtspunkte enthält die Arbeit nicht. A.

V. Lac de Bosredon. Détermination des foyers, des directrices et des axes dans les coniques, d'après la conception de Plücker. Mathesis X. 265-275.

Aufsuchung der Brennpunkte, indem man sie als diejenigen Punkte ansieht, von denen aus man an den Kegelschnitt zwei Tangenten ziehen kann, welche die Richtungscoefficienten $\pm\sqrt{-1}$ haben. Die Leitlinie ist die Polare des Brennpunktes; die Axen sind die Geraden, welche die Brennpunkte paarweise verbinden. Der Artikel ist elementar. Mn. (Lp.)

Ravier. Propriétés focales des coniques et des quadriques. Nouv. Ann. (3) IX. 233-239.

Mehrere Sätze über Kegelschnitte und Flächen zweiter Klasse werden hier hergeleitet aus folgenden beiden Hauptlehrsätzen:

1. Sind $C=0$, $C'=0$, $C''=0$ die Tangentialgleichungen von drei Kegelschnitten, so definirt die Gleichung:

$$\lambda C+\lambda' C'+\lambda'' C''=0$$

ein Netz von Kegelschnitten. Zwei Kegelschnitte dieses Netzes mögen die Gleichungen $S'=0$, $S''=0$ haben; wenn man den vier Tangenten, die diesen beiden Kegelschnitten gemeinsam sind, einen Kegelschnitt einschreiben kann, der einen dritten Kegelschnitt des Netzes $S=0$ doppelt berührt, so kann man auch den vier Tangenten, die den Kegelschnitten $C'=0$, $C''=0$ gemeinsam sind, einen Kegelschnitt einschreiben, der den Kegelschnitt $C=0$ doppelt berührt.

2. Haben vier Flächen zweiter Klasse die Tangentialgleichungen:

$$C=0,\quad C'=0,\quad C''=0,\quad C'''=0,$$

so bestimmen sie ein Flächennetz durch die Gleichung:

$$\lambda C+\lambda' C'+\lambda'' C''+\lambda''' C'''=0.$$

Wenn dann $S'=0$, $S''=0$, $S'''=0$ die Tangentialgleichungen von drei Flächen dieses Netzes sind, und man den acht gemeinsamen Tangentialebenen dieser drei Flächen eine Fläche zweiter Klasse einschreiben kann, die einer vierten Fläche des Netzes $S=0$ eingeschrieben ist, so kann man auch den acht Tangentialebenen, die den Flächen $C'=0$, $C''=0$, $C'''=0$ gemeinsam sind, eine Fläche zweiter Klasse einschreiben, die der Fläche $C=0$ eingeschrieben ist. Mz.

C. A. Laisant. Quelques propriétés focales des coniques. Soc. Philom. Bull. (8) II. 182-191.

Sind OA und OB zwei conjugirte Halbmesser einer Ellipse oder Hyperbel, so ist die Lage eines Brennpunktes F durch die Aequipollenz

$$OF^2 = OA^2 \pm OB^2$$

in einfacher Weise bestimmt. Mit Hülfe dieser Beziehung löst der Verf. eine grössere Anzahl von Aufgaben, welche die Focal-Eigenschaften der Kegelschnitte betreffen, und beweist am Schluss einen früher an derselben Stelle ohne Beweis mitgeteilten Satz. Schg.

V. Jarolímek. Einige Beiträge zur analytischen Geometrie der Kegelschnitte. Casop. XIX. 14, 76. (Böhmisch.)

Handelt über die Ableitung der Formel zur Berechnung der Fläche 1. eines parabolischen Abschnittes und 2. eines elliptischen Abschnittes, 3. über den Pol und die Polare eines Kreises und 4. einer Ellipse, 5. über das einer Ellipse umschriebene Parallelogramm, 6. über den geometrischen Ort des Halbirungspunktes einer elliptischen Sehne, die durch einen festen Punkt geht, und 7. über den Krümmungskreis. Std.

C. R. J. Kallenberg van den Bosch. Relation entre la distance d'un point P du plan d'une conique au foyer et les rayons vecteurs des pieds des normales abaissées d'un point P sur la courbe. Nouv. Ann. (3) IX. 395-400.

Ist p der Parameter einer Parabel, sind v_1, v_2, v_3 die vom Brennpunkte aus gezogenen Radienvectoren der Fusspunkte der drei von einem Punkte ihrer Ebene gefällten Normalen und u der Abstand desselben Punkts vom Brennpunkte, so ergiebt sich zunächst:

$$u^2 = \frac{2}{p} v_1 v_2 v_3.$$

Bezeichnen n_1, n_2, n_3 die Längen der Normalen, so folgt weiter:

$$u = \frac{n_1 n_2 n_3}{2p^2}.$$

Für eine Ellipse oder Hyperbel seien a, b, c die Halbaxen und Excentricität; u, die v und die n mögen ihre Bedeutung für den einen Brennpunkt behalten und seien u', v', n' für den anderen; dann ist

$$u^2 = \frac{c^2}{a^2 b^2} v_1 v_2 v_3 v_4; \quad uu' = \frac{a^2 c^2}{b^6} n_1 n_2 n_3 n_4.$$ H.

R. H. Pinkerton. Note on normals to conics. Edinb. Math. S. Proc. VIII. 19-21.

Die Bedingung dafür, dass die Gerade $lx + my + nz = 0$ eine Normale des Kegelschnitts $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ sei, während die Axen rechtwinklig sind, ist:

$$(al^2 + 2hlm + bm^2)(Al^2 + Bm^2 + Cn^2 + 2Fmn + 2Gnl + 2Hlm) = \Delta(l^2 + m^2)^2,$$

wo die Buchstaben die in Salmon's Kegelschnitten ihnen beigelegte Bedeutung haben. Gbs. (Lp.)

A. Breuer. Die Normalform der allgemeinen Kegelschnittgleichung. Ein Beitrag zur analytischen Geometrie. Eisenach. 39 S. 8°.

Z. LUCCHINI. Dell'equazione di secondo grado come rappresentazione delle sezioni coniche. Torino. 26 S. 8°.

K. HABBART. Bemerkenswerte Polareigenschaften eines besonderen Ebenencoordinatensystems. Marburg. 45 S. 8°.

O. WEIMAR. Ueber verschiedene Darstellungen des correspondirenden Kegelschnitts einer Geraden in Bezug auf einen Kegelschnittbündel. Giessen. 23 S. 8°.

O. RICHTER. Ueber zwei Kegelschnittsätze. Schlömilch Z. XXXV. 125-126.

Es sei ein Kegelschnitt 𝔖 gegeben:

1. Dreht sich ein rechter Winkel um seinen auf 𝔖 liegenden Scheitel P, so dreht sich die Hypotenusensehne um einen Punkt U, der in der Normale von P liegt. Welches ist der Ort der Punkte U? (Cfr. B. Sporer, Schlömilch Z. XXXIII. 309.)

2. Schneiden sich drei Krümmungskreise von 𝔖 in einem Punkte auf 𝔖 selbst, so schneiden sich die Normalen ihrer Osculationspunkte in einem Punkte V. Welches ist der Ort der Punkte V? (Cfr. Steiner, Ges. Werke, Bd. II. S. 691 u. 348.)

Die gesuchten Orte U und V sind zwei mit 𝔖 ähnliche, coaxiale Kegelschnitte, von denen jeder die Evolute von 𝔖 viermal berührt. Die Tangenten der letzteren in den acht Berührungspunkten sind zugleich Tangenten eines und desselben Kreises. „U ist zugleich der Ort der Mitten derjenigen Strecken, die vom Axenkreuze auf den Normalen von 𝔖 begrenzt werden“.

Wbg.

H. BROCARD. Solution de la question 1566. Nouv. Ann. (3) IX. 157-159.

M. D'OCAGNE. Correspondance. Ibid. 558.

Bestimmt man auf der Focalaxe eines Kegelschnitts einen Punkt, von dem aus die Curve unter rechtem Winkel erscheint, errichtet in diesem Punkte die Senkrechte und construirt in

jedem Punkte des Kegelschnitts einen Kreis, der diese Senkrechte berührt, so bleibt das Verhältnis $PM_1 : PM_2$ constant, wo unter P der Pol jener Senkrechten, unter M_1 und M_2 die Schnittpunkte des Kreises mit der Focalaxe verstanden sind. Einen interessanten Specialfall liefert die gleichseitige Hyperbel; ein hierbei in der ersten Mitteilung begangener Irrtum wird in der zweiten Notiz berichtigt. R. M.

D. Valeri. Un teorema sulle coniche. Modena Mem. (2) VII. 181-187.

Der Verfasser beweist auf geometrischem Wege folgendes Theorem von H. Schröter aus den Nouvelles Annales, März 1888: „Es sei ein vollständiges Vierseit gegeben, dessen gegenüberliegende Ecken a, a_1, b, b_1, c, c_1 sind, so kann man die vier Dreiecke

$$ab_1c_1,\ a_1bc_1,\ a_1b_1c,\ abc$$

bilden. Nimmt man dann drei Punkte A, B, C auf einer Geraden an, so gehen die vier Kegelschnitte

$$BCab_1c_1,\ BCa_1bc_1,\ BCa_1b_1c,\ BCabc$$

durch einen Punkt A_1, die vier Kegelschnitte

$$CAab_1c_1,\ CAa_1bc_1,\ CAa_1b_1c,\ CAabc$$

durch einen Punkt B_1, die vier Kegelschnitte

$$ABab_1c_1,\ ABa_1bc_1,\ ABa_1b_1c,\ ABabc$$

durch einen Punkt C_1. Die Punkte A, B_1, C_1 liegen auf einer Geraden, ebenso die Punkte B, C_1, A_1 und C, A_1, B_1, und die acht Seiten der beiden Vierseite, deren gegenüberliegende Ecken beziehentlich a, a_1, b, b_1, c, c_1 und A, A_1, B, B_1, C, C_1 sind, berühren einen und denselben Kegelschnitt". Wbg.

Th. Nüsslein. Ueber Kegelschnittpaare, von denen der eine Kegelschnitt einem Vierecke umgeschrieben, der andere demselben Vierecke eingeschrieben ist. Pr. Königl. Studienanst. Münnerstadt. 53 S. 8°.

Der Verfasser leitet zuerst die bekannte Bedingung dafür her, dass bei zwei gegebenen Kegelschnitten der eine einem

Viereck um-, der andere diesem Viereck eingeschrieben ist:

$$4\Delta'\theta\theta'-\theta'^2 = 8\Delta\Delta'^2,$$

wo Δ, Δ', θ, θ' die aus Salmon's „Conic sections" bekannte Bedeutung haben. Diese Bedingung wird dann für eine Reihe einzelner Fälle geometrisch gedeutet. Es folgen noch Zusätze.

Mz.

M. Azzarelli. Derivazione delle coniche da una conica qualunque. Rom. Acc. P. d. N. L. XLIII. 103-112.

Die Coordinaten eines Punktes N der Ebene in Bezug auf zwei senkrechte Axen seien X, Y; und aus ihnen seien die Coordinaten x, y eines anderen Punktes M mittels der Gleichungen hergeleitet:

$$x = \frac{h^2}{X}, \quad y = \frac{hY}{X},$$

wo h eine constante Länge bedeutet. So entspricht einem Punkte N ein anderer M und umgekehrt. Beschreibt nun N eine Curve, so thut dies auch M; und es wird des näheren ausgeführt, wie aus einem der drei Kegelschnitte jeder der anderen oder auch einer von derselben Art hervorgehen kann. Die obigen Gleichungen ergeben sich aus einer zu Anfang der Arbeit aufgestellten Construction.

Mz.

E. Czuber. Ueber die einem Kegelschnitt umgeschriebenen Kreisvierecke. Hoppe Arch. (2) IX. 101-108.

Zunächst behandelt der Verfasser die Aufgabe, zu einem gegebenen Punkte $P(x', y')$ in der Ebene eines Kegelschnitts S einen zweiten Punkt $Q(x'', y'')$ derart zu bestimmen, dass die vier Schnittpunkte der beiden Tangentenpaare aus P und Q an S auf einem Kreise liegen. Nach Darlegung einer allgemeinen Methode der analytischen Lösung dieser Aufgabe, d. i. der Auffindung des Ortes von Q bei gegebenem P, werden die Centralkegelschnitte und die Parabel gesondert vorgenommen. Dabei kommt der Verfasser zu folgenden Sätzen:

Die Gegenseitenpaare eines Kreisvierecks, das einem Central-

kegelschnitt umgeschrieben ist, schneiden sich auf einer mit demselben concentrischen, durch seine Brennpunkte gehenden gleichseitigen Hyperbel, welche für den Kreis in ein Paar zu einander senkrechter Durchmesser degenerirt.

Die Gegenseitenpaare eines Kreisvierecks, das einer Parabel umgeschrieben ist, schneiden sich auf einer durch den Brennpunkt der Parabel gehenden Geraden.

Es wird dann auf den Specialfall aufmerksam gemacht, welcher sich ergiebt, wenn die Ellipse oder Hyperbel in Folge des Verschwindens ihrer Nebenaxe in eine Gerade zusammenfällt. Hierdurch werden auf einfache Weise Eigenschaften der gleichseitigen Hyperbel gewonnen; so z. B.: Wenn man einen beliebigen Durchmesser MN einer gleichseitigen Hyperbel aus zweien ihrer Punkte P und Q projicirt, so liegen die vier Schnittpunkte der beiden Geradenpaare auf einem Kreise. Es folgen dann noch weitere geometrische Bemerkungen. Mz.

E. Barisien. Concours pour les bourses de licence. (Toulouse 1888.) Nouv. Ann. (3) IX. 200-203.

Man betrachtet die osculirenden Parabeln einer Ellipse; durch einen beliebigen Punkt (α, β) der Ebene gehen vier solcher Parabeln; ihre vier Osculationspunkte liegen auf zwei parallelen Geraden, aber höchstens zwei sind reell. Durch diese vier Punkte lege man wieder eine Parabel, die also dem Punkte (α, β) eindeutig zugeordnet ist; welchen Ort muss (α, β) beschreiben, damit diese Parabel durch einen festen Punkt (p, q) gehe?

R. M.

C.-R.-J. Kallenberg van den Bosch. Solutions des questions 1591, 1592. Nouv. Ann. (3) IX. 159-160, 198-199.

Beweise für zwei Lehrsätze, welche sich auf die von einem Punkte an eine Parabel resp. Ellipse gelegten Normalen beziehen.

R. M.

Béghin. Note sur le cercle de Joachimsthal. S.M.F. Bull. XVIII. 138-140.

Zieht man von einem Punkte P vier Normalen an eine Ellipse, so ist durch ihre vier Fusspunkte eine gleichseitige Hyperbel bestimmt. Durch drei der Fusspunkte geht ein Kreis, welcher diese Hyperbel in einem vierten Punkte schneidet. Den vier Kreisen, welche möglich sind, entsprechen also vier derartige Schnittpunkte. Sie liegen auf einer Ellipse von unveränderlicher Form, welche ihren Mittelpunkt in P hat, und deren Axen parallel denen der gegebenen Ellipse verlaufen.

Schn.

C. B. Solution de la question proposée pour l'admission à l'École centrale en 1888, première session. Nouv. Ann. (3) IX. 403-410.

C. B. Solution de la question proposée pour l'admission à l'École centrale en 1888, seconde session. Nouv. Ann. (3) IX. 410-417.

G. Maupin. Solution des questions proposées pour la licence en juillet 1889 à Rennes. Nouv. Ann. (3) IX. 420-424.

Die gestellten Aufgaben sind nicht von allgemeinerem Interesse.

Schn.

R. Tucker. Some properties of co-normal points on a parabola. Lond. M. S. Proc. XXI. 442-451.

Der Verfasser setzt eine Parabel in der Gleichung an:

$$y^2 = 4ax.$$

Ein Punkt derselben hat dann die Coordinaten $(am^2, 2am)$, wo m ein variabler Parameter ist. Die Gleichungen der Tangente und Normale der Parabel in diesem Punkte sind:

$$x - my + am^2 = 0,$$

$$mx + y - a(m^3 + 2m) = 0.$$

Schreibt man die letzte Gleichung in der Form:

$$am^3 + (2a - x)m - y = 0,$$

so erkennt man, dass von einem gegebenen Punkte (x, y) drei

Normalen an die Parabel gehen, und die Bedingung unter ihren Parametern besteht:

$$m_1 + m_2 + m_3 = 0 \quad \text{oder} \quad \Sigma m = 0.$$

Drei solche Punkte der Parabel, für deren Parameter diese Bedingung erfüllt ist, und bei denen die in ihnen zur Parabel construirten Normalen also durch einen und denselben Punkt gehen, nennt der Verfasser „co-normal points“.

Es wird nun eine grosse Zahl von Eigenschaften solcher conormalen Punkte hergeleitet, wobei auch die durch drei solche Punkte gelegten Kreise und die dem Tangentendreieck solcher drei Punkte umschriebenen Kreise eine Rolle spielen. Diese sehr zahlreichen Eigenschaften müssen in der Arbeit selbst nachgelesen werden. Mz.

G. Papelier. Autre solution de la question proposée au concours général en 1889. Nouv. Ann. (3) IX. 35-40.

Es handelt sich um folgende Fragen: Gegeben sei eine Parabel P und ein Kreis mit dem Mittelpunkte O; C sei einer der Kegelschnitte, die dem Vierseit, das von den vier der Parabel und dem Kreise gemeinsamen Tangenten gebildet wird, eingeschrieben ist; dann verlangt man die Enveloppe der Polaren A des Punktes O in Bezug auf die Kegelschnitte C (diese Enveloppe ist eine Parabel). Ferner verlangt man die Enveloppe derjenigen Tangenten δ an die Kegelschnitte C, so dass die Normale im Berührungspunkte durch O geht (diese Enveloppe ist dieselbe wie die vorhergehende). Hierauf wird nach der Enveloppe der Axen der Kegelschnitte C gefragt (auch diese Enveloppe ist die nämliche wie vorher). Dann wird nach den Orten der Projectionen von O auf die Polaren A, ferner auf die Tangenten δ, und endlich auf die Axen der Kegelschnitte C gefragt.

Die Resultate werden sehr einfach gewonnen, und zwar werden die in Rede stehenden Curven durch ihre Tangentialgleichungen definirt. Nachher wird gezeigt, wie man auch auf rein geometrischem Wege dieselben Resultate erhalten kann. (Vergl. F. d. M. XXI. 1889. 723.) Mz.

G. Leinekugel. Remarques géométriques sur la même question. Nouv. Ann. (3) IX. 41-46.

Der Verfasser betrachtet den in der Arbeit von Herrn Papelier behandelten Gegenstand von allgemeineren Gesichtspunkten und kommt durch die synthetische Methode zu analogen Sätzen, die aber Kegelschnitte überhaupt, nicht bloss die Parabel betreffen.

Mz.

J. J. Wolstenholme, G. E. Crawford, T. Galliers. Solution of question 10220. Ed. Times LII. 91-92.

Beschreibt man um einen Punkt der Leitlinie einer Parabel einen Kreis mit einem Durchmesser gleich dem Focalabstande jenes Mittelpunktes, so bilden drei der gemeinschaftlichen Tangenten des Kreises und der Parabel ein gleichseitiges Dreieck, und die Ankreiscentren dieses Dreiecks liegen auf der kubischen Curve $y^2(3x+7a)+4a^2(3a-x)=0$.

Lp.

Asparagus, T. Galliers, G. G. Storr. Solution of question 9694. Ed. Times LII. 124-125.

Der Ort des Schwerpunktes eines der Ellipse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks ist die Ellipse

$$b^2(a^2+3b^2)^2x^2+a^2(b^2+3a^2)^2y^2=a^2b^2(a^2-b^2)^2.$$

Die Verbindungslinie dieses Schwerpunktes mit dem vierten Schnittpunkte der Ellipse und des Umkreises jenes Dreiecks ist eine Normale der Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2(a^2+3b^2)^2}+\frac{y^2}{b^2(b^2+3a^2)^2}=\frac{(a^2+b^2)^2}{(a^2-b^2)^4}.$$

Lp.

W. J. Greenstreet, P. H. Schoute. Solution of question 10086. Ed. Times LII. 58-60.

Durch einen Punkt M der Normale in einem beliebigen Punkte P einer Ellipse zieht man die drei übrigen Normalen MQ, MR, MS. Für das Dreieck QRS werden bestimmt: der Ort

des Höhenschnitts, des Umkreiscentrums, des Schwerpunktes, die Hüllcurve der Euler'schen Geraden, u. a. m. Herr Schoute, von welchem die Lösung stammt, verweist auf allgemeinere Sätze über schiefe Normalen in „Wiskundige opgaven“ II. 264 (Aufg. 160) und Mathesis VII. 38. Lp.

L. Rezeau. Solution de la question 223. J. de Math. spéc. (3) IV. 210-212.

Ort des Mittelpunktes eines Kreises, von dessen vier Schnittpunkten mit einer Ellipse drei die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bilden (eine coaxiale Ellipse). Hüllcurve der Verbindungslinie des Mittelpunktes des Kreises mit dem vierten Schnittpunkte (Evolute einer anderen coaxialen Ellipse); Ort der Mitte dieser Verbindungslinie (eine dritte coaxiale Ellipse).

Lp.

Clarke, D. Edwardes. Solution of question 8395. Ed. Times LII. 54-56.

Die Behandlung der Aufgabe, durch vier beliebige Punkte die Ellipse kleinsten Inhalts zu legen, erheischt die Lösung einer kubischen Gleichung, deren einzige positive Wurzel die eine gesuchte Ellipse liefert. Der besondere Fall, dass die vier Punkte die Ecken eines Parallelogrammes sind, wird für sich betrachtet.

Lp.

J. Neuberg, L. Wiener. Solution of question 10042. Ed. Times LII. 50-52.

Auf der einen von zwei sich rechtwinklig schneidenden Geraden nimmt man drei Punkte A, B, C beliebig an, auf der anderen ebenso A', B', C'. Die drei Punkte A'', B'', C'' teilen die Geraden AA', BB', CC' im Verhältnisse $\alpha:1$, die Punkte A''', B''', C''' im Verhältnisse $\beta:1$. Dann gehen die Lote von A auf $B''C''$, von B auf $C''A''$, von C auf $A''B''$ durch einen und denselben Punkt P, der eine Gerade beschreibt, wenn α veränderlich ist. Die von A'' auf $B'''C'''$ u. s. w. gefällten Lote

gehen durch einen und denselben Punkt Q, der eine Gerade beschreibt, wenn α variirt. Bei veränderlichem β beschreibt Q eine gleichseitige Hyperbel. Lp.

F. RUTH. Ueber den Schnitt einer Hyperbel mit einer Geraden. Hoppe Arch. (2) IX. 216-218.

Der Verfasser giebt die Construction der Schnittpunkte einer Hyperbel mit einer Geraden an, indem er die Hyperbel durch eine ihr affin verwandte mit demselben Scheitelkreise (Kreis über der reellen Axe als Durchmesser), die Gerade aber durch eine diesen Kreis berührende ersetzt. Eine solche Construction hat er bereits in einer früheren Note gezeigt (F. d. M. XXI. 1889. 635); in der gegenwärtigen bringt er eine Vereinfachung an, indem er einen von Chasles aufgestellten Satz verwendet.

Mz.

D. Andere specielle Curven.

J. ROSANES. Ueber ein System linearer Gleichungen, welches in Verbindung mit einer ebenen Curve dritter Ordnung auftritt. Math. Ann. XXXVI. 316-318.

Wenn $f = a_x^3 = b_x^3$ eine ternäre kubische Form ist und $H = h_x^3$ ihre Hesse'sche Covariante bedeutet, so verschwindet bekanntlich die Contravariante $(ahu)^3$ identisch für alle Werte u. Da $(abu)^3$ ebenfalls identisch 0 ist, so folgt, dass, wenn $P = \varrho_x^3$ eine kubische Form mit unbestimmten Coefficienten bedeutet, die Identität $(a\varrho u)^3 = 0$ unendlich viele Lösungen, nämlich die Lösungen $P = f + \lambda h$ für beliebige Parameter λ zulässt. Dieses Resultat wird in der vorliegenden Note direct mit Hülfe eines Satzes aus der Determinantentheorie abgeleitet. Setzt man nämlich alle Coefficienten der Contravariante $(a\varrho u)^3$ einzeln gleich 0, so erhält man 10 lineare Gleichungen für die 10 Coefficienten der zu bestimmenden Form P. Die Determinante dieser linearen

Gleichungen erweist sich als schief symmetrisch, und da dieselben jedenfalls eine Lösung, nämlich $P = f$, zulassen und somit jene Determinante 0 ist, so sind notwendig auch alle ersten Unterdeterminanten gleich 0. Ht.

F. H. Loud. On certain cubic curves. Colorado Studies I. 16.

Es handelt sich um Curven dritter Ordnung, bei denen drei Inflexionstangenten durch einen Punkt gehen. Wz.

R. A. Roberts. Notes on the plane cubic and a conic. Lond. M. S. Proc. XXI. 62-69.

Es wird gezeigt, dass die beiden Curven gleichzeitig in die Formen:

$$U \equiv ax^3+by^3+cz^3+du^3 = 0; \qquad V \equiv \alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2+\delta u^2 = 0$$

transformirt werden können, wobei x, y, z, u vier Gerade, a, b, c, d, α, β, γ, δ Constanten sind. U hat vier Polarkegelschnitte, welche mit V doppelte Berührung haben; x, y, z, u sind die jedesmaligen Berührungssehnen. Der Verf. bestimmt ferner einen contravarianten Kegelschnitt, der in derselben Form wie V erscheint, und stellt zum Schluss die Bedingung auf, unter welcher beide Curven in die Formen:

$$U \equiv \alpha x^3+\beta y^3+\gamma z^3+\delta u^3 = 0,$$
$$V \equiv l^2x^2+m^2y^2+n^2z^2-2mnyz-2nlzx-2lmxy = 0$$

gebracht werden können. R. M.

Herm. Wagner. Ueber gleiche Peripheriewinkel auf ungleichen Sehnen. Eine Verallgemeinerung einer planimetrischen Aufgabe. Pr. Neue Höhere Bürgersch. Hamburg (No. 718). 30 S. 4°.

Die Aufgabe ist dieselbe, welche Hr. O. Hermes im Journ. für Math. XCVII. 177 behandelt hat (vergl. F. d. M. XVI. 1884. 644), und für welche durch Hrn. Schoute ebenda IC. 98-109 (F. d. M. XVII. 1885. 630) die vorausgegangene reiche Litte-

ratur angegeben ist. Der Verf. der vorliegenden Programmarbeit hat hiervon offenbar keine Kenntnis gehabt, als er seine Untersuchung, die nur Bekanntes enthält, in den Druck gab.

Lp.

J. J. Wolstenholme. Solution of question 8246. Ed. Times LII. 84-85.

In einer kubischen Curve mit drei reellen Asymptoten und einem Einsiedler ist der Flächeninhalt zwischen zwei Asymptoten und dem entsprechenden unendlichen Zweige ein Drittel des von den Asymptoten gebildeten Dreiecks. Lp.

J. J. Walker. On the satellite of a line relatively to a cubic. Lond. M. S. Proc. XXI. 247-262.

Der Verfasser giebt die allgemeine Reduction der Gleichung der Satellitcurve einer Geraden bezüglich einer Curve dritter Ordnung auf eine bereits in einer früheren Arbeit („On the diameters of a plane cubic“, Phil. Trans., CLXXIX, F. d. M. XX. 1888. 740) von ihm aufgestellte Form, in welcher das Quadrat der ursprünglichen Geraden als impliciter Factor auftritt. Es werden im ganzen vier Formen dieser Gleichung aufgestellt, deren zweite mit der oben erwähnten übereinstimmt; die letzten beiden Formen sind insofern etwas einfacher, als in ihnen nur die erste Potenz der ursprünglichen Geraden implicite enthalten ist.

Wbg.

F. London. Ueber die Polarfiguren der ebenen Curven dritter Ordnung. Math. Ann. XXXVI. 535-584, Habil.-Schrift Breslau.

Algebraisch ausgesprochen, behandeln die Untersuchungen des Verfassers die Darstellung einer kubischen ternären Form als Summe von Kuben linearer Formen, sowie die gleichzeitige Darstellung mehrerer kubischer ternärer Formen als Summe derselben Kuben linearer Formen; namentlich wird gezeigt, auf welche Weise und in welcher Anzahl sich die linearen Formen bestimmen

lassen, aus deren Kuben die ternäre kubische Form linear zusammengesetzt wird; ferner wird auch die kleinste Anzahl linearer Formen bestimmt, aus deren Kuben mehrere kubische ternäre Formen gleichzeitig zusammengesetzt werden können. Geometrisch ausgesprochen, handelt das Problem des Verfassers von der Auffindung und Construction der Polarfiguren einer oder mehrerer Curven dritter Ordnung. Die angewandte Methode ist zum grossen Teile der Theorie conjugirter und apolarer Curven entlehnt, wie sie vorwiegend von den Herren Rosanes (J. für Math. LXXVI) und Reye (J. für Math. LXXII, LXXVII-LXXIX, LXXXII) ausgebildet ist. Ausserdem hat die vorliegende Arbeit vielfache Berührungspunkte mit den in den Math. Ann. (XXX u. XXXI) veröffentlichten Untersuchungen des Herrn O. Schlesinger.

Bei der Betrachtung der gemeinsamen Polarfünfseite zweier Curven dritter Ordnung zeigt sich, dass zum Besitz eines gemeinsamen Polarfünfseits für zwei allgemeine ebene Curven dritter Ordnung das Verschwinden einer simultanen Invariante notwendig, aber auch hinreichend ist. Die Betrachtung der gemeinsamen Polarsechsseite zweier Curven dritter Ordnung lässt erkennen, dass dieselben ein vierstufiges System bilden, und dass jedes allgemeine Curvennetz dritter Ordnung genau zwei Polarsechsseite besitzt. Die Construction der letzteren führt der Verfasser aus. Weiterhin werden auch noch Polarfiguren von höherer Seitenzahl behandelt. Scht.

F. London. Lineare Constructionen des neunten Schnittpunkts zweier Curven dritter Ordnung. Math. Ann. XXXVI. 585-596.

Die in der oben besprochenen Abhandlung über Polarfiguren einer einzigen Curve dritter Ordnung gefundenen Sätze werden hier zu vier neuen Lösungen des schon oft in mannichfachster Art gelösten Problems verwandt, mit Hülfe des Lineals allein denjenigen neunten Punkt zu finden, der allen durch acht gegebene Punkte gehenden Curven dritter Ordnung gemeinsam ist.

Scht.

E. Vigarié. Note bibliographique sur les cubiques. J. de Math. spéc. (3) IV. 63-69.

Bibliographische Ergänzungen zu dem Artikel des Hrn. Boutin: „Sur les cubiques remarquables du plan d'un triangle", vgl. F. d. M. XXI. 1889. 727. Lp.

Cl. Servais. Étude géométrique sur la cissoïde et de la strophoïde. Mathesis X. 9-14.

Eine Uebersicht über die hauptsächlichen Eigenschaften dieser berühmten Curven. Mn. (Lp.)

Balitrand. Note sur la Kreuzcurve. J. de Math. spéc. (3) IV. 54-57.

Zwei Tangentenconstructionen für die „Kreuzcurve"

$$a^2/x^2+b^2/y^2 = 1,$$

sowie Auffindung des Krümmungsmittelpunktes. Lp.

H. M. Jeffery. On the identity of the nodes of a nodal curve of the fourth order with those of its quartic and sextic contravariants. Quart. J. XXIV. 250-256.

Ist $U=0$ die Gleichung einer Curve vierter Ordnung in Punktcoordinaten, und bedeuten S und T die Contravarianten der ternären Form U, so stellen $S=0$ und $T=0$ die Gleichungen gewisser Curven in Liniencoordinaten dar, während $S^3-27T^2=0$ die Gleichung der Curve vierter Ordnung in Liniencoordinaten ist. Unter der Voraussetzung, dass diese Curve $U=0$ einen Doppelpunkt besitzt, wird gezeigt, dass auch die beiden Curven $S=0$ und $T=0$ eben jenen Punkt als Doppelpunkt besitzen, und dass ausserdem jeder der beiden Zweige von $T=0$ zugleich in jenem Punkte einen Wendepunkt aufweist. In der weiteren Untersuchung werden diese Ergebnisse auf den Fall ausgedehnt, dass die Curve $U=0$ zwei oder drei Doppelpunkte besitzt.

Ht.

W. Binder. Ueber die Realität der Doppeltangenten rationaler Plancurven vierter Ordnung vom Geschlechte Null. Schlömilch Z. XXXV. 25-35.

Die Worte „vom Geschlechte Null“ im Titel sind zu streichen. A. Ameseder hatte behauptet, dass von den vier Doppeltangenten einer rationalen ebenen Curve vierter Ordnung stets eine isolirt liegt, vorausgesetzt, dass alle vier Doppeltangenten reell sind. Indem der Verfasser die rationale Curve vierter Ordnung mittels einer quadratischen Transformation auf einen Kegelschnitt abbildet, findet er, dass jene Behauptung unrichtig ist. Zugleich ergiebt sich dabei die Thatsache, dass eine ebene Curve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten und mit vier reellen, nicht isolirt liegenden Doppeltangenten genau zwei reelle Wendepunkte besitzt. Die letztere Thatsache ist übrigens, wie Referent hinzufügt, eine specielle Folge der Klein'schen Realitätsformel.

Ht.

R. Lachlan. On some theorems connected with bicircular quartics. Proc. Cambr. Phil. Soc. VII. 87-92.

Da sich die mitgeteilten Sätze nicht ohne unverhältnismässige Weitschweifigkeit charakterisiren lassen, muss es bei dem Hinweise auf die Originalabhandlung sein Bewenden haben.

Gz.

Michelangelo Borgogelli Centrocroce. Studio sopra la curva formata dalle projezioni di un punto sulle tangenti ad un circolo. Rom. Acc. P. d. N. L. XLII. 203-224.

Die Fusspunktencurve des Kreises wird nach ihren gestaltlichen Verhältnissen in ihrer Abhängigkeit von der Lage des Poles discutirt; für die singulären Punkte und deren Tangenten werden geometrische Constructionen abgeleitet. R. M.

José Ruiz-Castizo · Ariza. Estudio analitico de un logar geométrico de cuarto orden.

In dieser Schrift wird die Curve vierter Ordnung untersucht:

$$y = \pm 2\sqrt{rx-x^2} \pm \sqrt{px-x^2}.$$

Tx. (Lp.)

O. Richter. Ueber die Systeme derjenigen Kegelschnitte, die eine bicirculare Curve vierter Ordnung viermal berühren. Schlömilch Z. XXXV. Suppl. 1-111.

Referat auf Seite 663 dieses Bandes.

G. Humbert. Sur une classe de courbes planes et sur une surface remarquable du quatrième ordre. Journ. de Math. (4) VI. 423-444.

Die Gleichung einer „Quartique“, d. i. einer Curve vierter Ordnung, bezogen auf das aus drei ihrer Doppeltangenten gebildete Dreieck, deren sechs Berührungspunkte nicht auf einem Kegelschnitt liegen, lautet

(1) $$p^2x^2+q^2y^2+r^2z^2-2pqxy-2prxz-2qryz = txyz,$$

wo p, q, r und t lineare Functionen von x, y, z bedeuten. — Es werden nun die Specialeigenschaften derjenigen „Quartiques“ untersucht, für welche in der obigen Gleichung (1) die Grössen p, q, r die partiellen Ableitungen einer und derselben Function zweiten Grades $f(x, y, z)$ nach x, y, z sind. Diese Eigenschaften sind so zahlreich, dass auf die Arbeit selbst verwiesen werden muss. — Es sei nur noch bemerkt, dass die reciproke Fläche des Ortes der Krümmungsmittelpunkte einer Quartique ebenso wie jede „homographische“ Fläche von einer beliebigen Ebene in einer Curve vierter Ordnung geschnitten wird, welche der in der vorliegenden Arbeit behandelten Klasse angehört. Wbg.

G. Humbert. Sur les coniques inscrites à une quartique. Toulouse Ann. IV. I. 1-8.

Der Verfasser erinnert zunächst an einige bekannte Sätze über Curven vierten Grades (Quartics), welche u. a. von Hesse und Cayley herrühren. Eine Quartic ohne Doppelpunkt hat 63 Systeme von eingeschriebenen Kegelschnitten, d. h. von solchen Kegelschnitten, die die Quartic in vier Punkten berühren; die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte eines Systems hat die Form:

$$(1) \qquad \lambda^2 U + 2\lambda V + W = 0,$$

wo $U=0$, $V=0$, $W=0$ Gleichungen von Kegelschnitten sind und λ einen variabeln Parameter bedeutet. Aus der Gleichung (1) folgt, dass die acht Berührungspunkte zweier Kegelschnitte desselben Systems mit der Quartic auch auf einem Kegelschnitte liegen. Der Zweck dieser Arbeit ist nun, einige einfache Eigenschaften von drei eingeschriebenen Kegelschnitten, die verschiedenen Systemen angehören, nachzuweisen. Eine solche Eigenschaft ist z. B. folgende:

Sind zwei Kegelschnitte, die verschiedenen Systemen angehören, einer Quartic eingeschrieben, und haben beide Systeme vier gemeinsame Doppeltangenten, so trifft jede Cubic (Curve dritten Grades), die durch die acht Berührungspunkte beider Kegelschnitte mit der Quartic geht, die Quartic in vier neuen Punkten, welche die Berührungspunkte eines andern eingeschriebenen Kegelschnittes sind, der dem dritten System angehört, das mit den beiden ersten dieselben vier Doppeltangenten enthält. In ähnlicher Weise folgt dann noch ein Satz von zwei eingeschriebenen Kegelschnitten, die zwei solchen Systemen angehören, die sechs gemeinsame Doppeltangenten enthalten. Die Beweise werden analytisch mit Benutzung von solchen Gleichungen wie (1) geführt. Mz.

H. M. Jeffery. On the genesis of binodal quartic curves from conics. Lond. M. S. Proc. XXI. 287-314.

Zu Anfang erklärt der Verfasser, wann zwei Kegelschnitte sich anorthotomisch schneiden: Wenn zwei Kegelschnitte P und Q sich so in vier Punkten A, B, C, D treffen, dass der Pol von

AB in Bezug auf *Q* derselbe ist, wie der von *CD* in Bezug auf *P*, so kann man beweisen, dass dann auch der Pol von *AB* in Bezug auf *P* derselbe ist, wie der von *CD* in Bezug auf *Q*. Zwei solche Kegelschnitte schneiden sich dann nach Definition anorthotomisch. Es ist dies eine Verallgemeinerung des Falles bei zwei Kreisen, die sich rechtwinklig schneiden. Wie nun aus solchen Kreisen bicirculare Curven vierten Grades, auch anallagmatische Curven genannt, hervorgehen, so gelangt man von anorthotomischen Kegelschnitten zu Curven vierten Grades mit zwei Doppelpunkten. Eine solche Curve hat eine Gleichung von der Form:

$$aJ_1^2+bJ_2^2+cJ_3^2=0,$$

wo J_1, J_2, J_3 Gleichungen von Kegelschnitten sind, die durch dieselben beiden Punkte gehen. Mz.

F. Franklin. On confocal bicircular quartics. American J. XII. 323-336.

Der Verfasser entwickelt mit Hülfe der „Kreiscoordinaten" Gleichung und Eigenschaften der confocalen bicircularen Curven vierter Ordnung und wendet die erhaltenen Resultate auf die Lösung der bekannten Euler'schen Differentialgleichung an:

$$dx/\sqrt{ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e}$$
$$+dy/\sqrt{ay^4+4by^3+6cy^2+4dy+e}=0,$$

sowie der allgemeineren

$$dx/\sqrt{ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e}$$
$$=dy/\sqrt{a'y^4+4b'y^3+6c'y^2+4d'y+e'},$$

in welcher zwischen den Coefficienten gewisse Relationen bestehen. Wbg.

A. Cayley. The bitangents of the quintic. Annals of Math. V. 109-110.

Bemerkungen zu der dem Verfasser von Hrn. Heal mitgeteilten Entdeckung einer grössern Anzahl numerischer Coefficienten, als er vorher erhalten hatte. H.

A. Lévy. Solution de la question 190. J. de Math. spéc. (3) IV. 163-168.

Die von Herrn Amigues gestellte Aufgabe verlangt den Ort des Mittelpunkts für die einem Dreiecke umgeschriebenen Kegelschnitte, bei welchen die Summe der Quadrate der algebraischen Längen der Axen gleich K ist. Die Curve, welche vom fünften Grade ist, wird vom Verf. untersucht und in ihren wechselnden Formen abgebildet. Lp.

Balitrand. Sur un théorème de M. Jamet. J. de Math. spéc. (3) IV. 241-248.

Der Artikel giebt einen Beweis für den von Herrn Jamet über die triangulären Curven

$$(px)^m + (qy)^m - (rz)^m = 0$$

in seiner Thèse 1887 (F. d. M. XIX. 816ff.) ausgesprochenen Satz: „Man betrachte einen dem Symmetrie-Dreiecke umgeschriebenen Kegelschnitt, welcher die Curve in einem Punkte berührt; das Verhältnis der Krümmungsradien des Kegelschnitts und der Curve ist für alle Punkte der letzteren constant". Anwendungen des Satzes auf mehrere besondere Curven, insbesondere die Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten, die zugleich Wendepunkte sind (Kreuzcurve). Lp.

J. Wesely. Ueber einige specielle Curven höherer Ordnung. Hoppe Arch. (2) IX. 420-433.

Es wird eine Reihe von Fusspunktencurven verwandten Ursprungs in der in den Uebungsbüchern gebräuchlichen Weise discutirt, eine davon mit besonderer Ausführlichkeit. Um diese Curve einzuführen, wird zu Anfang überflüssiger Weise eine elementare Schulaufgabe, nach Vorausschickung der einfachen exacten Lösung, durch Probiren gelöst. Schg.

H. Ekama. Die Curven, welche von Punkten von Kegelschnitten, die sich ohne zu gleiten längs anderer Curven wälzen, beschrieben werden. Hoppe Arch. (2) VIII. 388-441.

Eine in analytischer Form gehaltene Untersuchung über Rouletten. Als Polcurve wird ein Kegelschnitt genommen, als Polbahn dient entweder eine Gerade oder ein Kreis oder ein jenem Kegelschnitte congruenter Kegelschnitt. Im letzteren Falle wird vorausgesetzt, dass der eine auf dem anderen sich derart abrollt, dass stets entsprechende Punkte sich berühren.

Schn.

STEGGALL. A special case of three-bar motion. Edinb. Math. S. Proc. VIII. 5-15.

In diesem Aufsatze wird ein vollständiges Verzeichnis der verschiedenen Curvenarten gegeben, welche durch einen zeichnenden Punkt in der Mitte des mittleren Stabes beschrieben werden, wenn die beiden äusseren Stäbe gleich sind. Zahlreiche Figuren sind beigegeben. Gbs. (Lp.)

F. MASI. Alcune proprietà della curva di Watt. Bologna. 21 S. u. 1 Taf.

C. SENESI. Luoghi geometrici del baricentro del triangolo nel manovellismo di spinta rotativa. L'Ingegneria civile e le Arti industriali XVI. 51-56.

G. VIVANTI. Lettera al direttore. Daselbst. 122-123.

Bestimmung des geometrischen Ortes des Schwerpunktes des veränderlichen Dreieckes, von dem zwei Seiten die Kurbel und die Stange sind. Der Brief des Referenten ist der Berichtigung einer kleinen Ungenauigkeit gewidmet. Vi.

EICHLER. Die Darstellung der cyklischen Curven und ihre Bedeutung für die Schwingungstheorie. Hamb. Mitt. II. 92-105.

Als cyklisch werden hier alle Curven bezeichnet, deren Coordinaten durch die Gleichung:

$$z = a_0 + a_1\eta^{k_1} + a_2\eta^{k_2} + \cdots + a_n\eta^{k_n}$$

verbunden sind, worin $z = x + iy$, $\eta = e^{i\varphi}$ zu setzen ist, und wobei die a_i, k_i reelle Zahlen sind. Es wird zunächst gezeigt, dass diese Zusammensetzung verschiedener Kreisumläufe mit der gebräuchlicheren Vorstellung des Rollens von Kreisen auf einem festen Kreise in Uebereinstimmung gebracht werden kann; der Verf. erläutert dies an zahlreichen Beispielen und bestimmt den Curvencharakter derselben. Viele in der Optik und Mechanik beobachteten Schwingungscurven gehören hierher. Die Fragen, welche sich an veränderliche Coefficienten anknüpfen würden, hat der Verf. nur gestreift; dagegen zeigt er zum Schluss, wie sich die Quadratur und Rectification, die Tangenten- und Normalengleichung gewinnen lassen, ohne auf rechtwinklige Coordinaten zurück zu gehen. R. M.

E. Cesàro. Sur la développante de la chaînette. Mathesis X. 138.

Jede Evolvente der Kettenlinie schneidet unter constantem Winkel eine Schar gleicher Kreise, deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen. Mn. (Lp.)

F. Morley. On the epicycloid. American J. XIII. 179-184.

Der Verfasser leitet mit Hülfe der Kreiscoordinaten einige (hauptsächlich metrische) Specialeigenschaften der Epicykloide ab, welche zum Teil bereits von Wolstenholme (Lond. M. S. Proc. IV) und Humbert (American J. X. 258) gefunden bezw. bewiesen worden sind. Wbg.

Svechnikoff. Sur la polaire réciproque de l'épicycloïde. J. de Math. spéc. (3) IV. 146-149, 169-170.

Die Gleichung der Curve wird aufgestellt und discutirt. Lp.

E. Janisch. Eine Minimaleigenschaft der archimedischen Spirale. Hoppe Arch. (2) IX. 445-448.

„Ist in irgend einer Ebene eine variable Curve C, ferner ein fester Punkt V gegeben, und ist Γ die erste negative Fusspunktencurve der C bezüglich V, dann erhält man, wenn durch zwei beliebige fixe Punkte P_1, P_2 der C, die ein endliches Bogenstück begrenzen, die Senkrechten τ_1, τ_2 zu VP_1, VP_2 gezogen werden, in τ_1, τ_2 zwei Tangenten der Γ, welche dieselbe in Π_1, Π_2 berühren mögen, und die mit den Bögen $\widehat{P_0P_1}$, $\widehat{\Pi_0\Pi_1}$ ein gemischtliniges Viereck $P_0P_1\Pi_0\Pi_1$ einschliessen, dessen Fläche ein Minimum wird, wenn C eine archimedische Spirale ist mit V als Anfangspunkt.“

Vorstehender Satz wird durch die gewöhnliche Methode der Variationsrechnung bewiesen, wobei die Einführung von Polarcoordinaten eine bedeutende Vereinfachung bewirkt.

Wbg.

W. Ligowski. Zur Inhaltsberechnung der Flächen und Körper. Hoppe Arch. (2) IX. 111-112.

Ist die Subtangente (d. h. Projection der von der x-Axe begrenzten Tangente einer Curve auf die x-Axe) proportional der Abscisse x, so ist das Flächenstück zwischen der x-Axe, der Ordinate y und der Curve proportional dem Rechteck xy. Die Bedingung ist erfüllt von der Curve $y = ax^n$. Angewandt wird der Satz auf das Volumen des Prismas, dessen Basis die genannte Figur ist.

H.

H. Onnen. Bifocale krommen. Eene mathematische studie. Nieuw Archief. XVII. 77-129.

Gegenstand dieses Aufsatzes sind die bifocalen Curven, d. h. die Durchschnitte einer bifocalen Oberfläche mit einer durch die Hauptaxe gehenden Ebene; dabei ist unter bifocaler Oberfläche eine Oberfläche verstanden, deren Punkte hinsichtlich zweier im Raum gegebenen Punkte so liegen, dass Lichtstrahlen, die aus einem dieser Punkte ausgehen, nachdem sie von der Oberfläche gebrochen oder zurückgeworfen sind, durch den andern

Punkt gehen oder in ihm zusammentreffen; beide Punkte werden als Brennpunkte der Oberfläche bezeichnet.

Weil das Problem rein mathematisch aufgefasst wird, so sind die behandelten Curven dadurch charakterisirt, dass die Sinus der Winkel, welche die Normale mit den beiden Radienvectoren bildet, in jedem Punkte das nämliche Verhältnis geben.

Die einfachste Form für die Gleichung der Curven ergiebt sich in bipolaren Coordinaten. Nach der allgemeinen Betrachtung kommen zunächst die besonderen Formen zur Besprechung. Der Reihe nach behandelt der Verfasser die Kreisform, die hyperbolische Bifocale, die umgekehrte Ellipse, die konchoidale Bifocale, die umgekehrte Hyperbel, die elliptische Bifocale. Darauf wird die allgemeine Gleichung der bifocalen Curven auf das einfache Polarsystem übertragen, woraus sich neue Eigenschaften ergeben, und dann wird dieselbe auf natürliche Coordinaten zurückgeführt, wozu der Krümmungsradius dient nebst dem Winkel, den die Tangente mit der Geraden bildet, die im Perifocus senkrecht auf der Hauptaxe steht. Auch diese Gleichung unterwirft der Verfasser einer genauen Untersuchung, wodurch auch die Erforschung der Inflexionspunkte der bifocalen Curven ermöglicht wird. Ferner wird der Ort der Scheitel berechnet, d. h. der Punkte, wo der Krümmungsradius ein Maximum oder ein Minimum erreicht. Schliesslich werden die verschiedenen Formen auf fünf Typen zurückgeführt und diese näher betrachtet; die Charakteristik ist zunächst den Inflexionspunkten entnommen, welche bei der typischen Elliptica fehlen, wohl aber vorkommen bei der typischen Hyperbolica, der umgekehrten Ellipse und allen konchoidalen Curven. G.

Lord McLaren. Equation of the glissette of the two-term oval $\frac{x^n}{a^n}+\frac{y^n}{b^n}=1$. Edinb. Proc. XVIII. 83-87.

V. Jamet. Recherche de quelques courbes planes, par l'intermédiaire de leurs développées. Nouv. Ann. (3) IX. 496-500.

Es wird folgender Satz aufgestellt und bewiesen. „Ist der Krümmungsradius einer Curve (C) in jedem Punkte das harmonische Mittel zwischen den Abständen des Fusspunkts der Normale von den Punkten, in denen die Normale eine feste algebraische Curve (S) trifft, so ist ihr Bogen, vermehrt um eine constante Länge und erhoben zu einer Potenz mit einem Exponenten gleich dem Grade von (S), eine ganze rationale Function der Coordinaten seines beweglichen Endes.“ Hieraus entspringt nun die Aufgabe, für eine gegebene Curve (S) die Curve (C) zu ermitteln. Diese wird für den Fall, wo (S) ein Kegelschnitt ist, untersucht. Die Bedingung reducirt sich auf eine Differentialgleichung, welche durch die Gleichheit zweier elliptischen Integrale dritter Gattung als Gleichung von (C) gelöst wird.

H.

C. A. Laisant. Sur deux genres remarquables de courbes planes. Assoc. Franç. Limoges XIX. 74-78.

Der Verf. sucht eine derartige Curve, dass, wenn man zu ihr die Evolute bildet, von dieser abermals und so fort bis zur vierten Evolute, diese letztere mit der Stammcurve zusammenfällt. Er findet zwei Lösungen, deren Gleichungen zuerst in der Gestalt von Differentialgleichungen, dann in endlicher Form erhalten werden. Die betreffenden Curven können in folgender Weise erzeugt werden. Man denke sich eine logarithmische Spirale S_1, welche ihre Fahrstrahlen unter dem Winkel $\frac{1}{4}\pi$ und die Polaraxe in der Entfernung c vom Pole O schneidet. Man construirt ein gleichschenkliges Dreieck über S_1O als Höhe und S_1 als Spitze, so dass der Inhalt dieses Dreiecks constant, und zwar gleich c^2 ist. Die Mitten der Schenkel dieses Dreiecks beschreiben die gesuchten Curven. Die Spirale S_1 selbst bildet eine particuläre Lösung der Aufgabe.

Lp.

M. W. Haskell. Ueber die zu der Curve $\lambda^3\mu+\mu^3\nu+\nu^3\lambda=0$ im projectiven Sinne gehörende mehrfache Ueberdeckung der Ebene. American J. XIII. 1-52. Mit 2 Tafeln. Auch Göttingen. Vandenhoeck und Ruprecht.

Deutet man ein nicht-reelles Wertsystem λ, μ, ν, welches einer homogenen Gleichung

$$f(\lambda, \mu, \nu) = 0$$

genügt, als das System der Coordinaten einer nicht reellen Geraden, so kann man dasselbe durch den reellen Punkt dieser Geraden darstellen. Um also die Gleichung mit Herrn Klein durch eine Ueberdeckung der Ebene im projectiven Sinne zu deuten, hat man für jeden Punkt soviel Blätter im Riemann'schen Sinne einzuführen, als sich von ihm aus nicht reelle Tangenten an die gegebene Curve $f = 0$ legen lassen. Diese Bedeckung vereinfacht sich wesentlich, wenn man eine reelle Gleichung in Betracht zieht; alsdann decken die Blätter einander paarweise und hängen längs der reellen Züge der Curve zusammen. Dies wird nun an der Gleichung

$$\lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda = 0$$

genau durchgeführt. Dieselbe ist mit der Theorie der Modulfunctionen siebenter Stufe innigst verknüpft, indem alle diese homogene Functionen nullten Grades zweier Stamm-Functionen $\lambda:\mu:\nu$ des Periodenverhältnisses τ sind, welche dieser Gleichung genügen. Für die Untersuchung sind daher selbstverständlich die Eigenschaften des Fundamentalpolygons siebenter Stufe (in der τ-Ebene) von Wichtigkeit, an die der Verfasser zunächst erinnert. Die Aufgabe der Abhandlung ist geradezu: festzustellen, wie sich das Fundamentalpolygon, insbesondere seine 28 Symmetrielinien, bei der mehrfachen Ueberdeckung darstellt. Die Curve weist nur einen reellen Zug auf mit drei reellen Doppelpunkten und sechs reellen Spitzen. Letztere gruppiren sich in zwei Dreiecke, deren Seiten die Spitzentangenten sind. Diese reelle Curve ist das Bild der einen der 28 Symmetrielinien. Bei der mehrfachen Ueberdeckung bleiben drei dreieckartige Stücke frei; der Rest der Ebene wird zunächst von dem „grossen Doppelblatt" überdeckt, und hinzu tritt noch ein „kleines Doppelblatt", das ein dreieckartiges Stück doppelt überdeckt. Der Punkt 1, 1, 1 ist die Verzweigungsstelle, wo die beiden Hälften des grossen Blattes mit denen des kleinen Blattes zusammenhängen. Für die Abbildung der übrigen Symmetrielinien gilt

folgender Hauptsatz: „Jedes solches Aggregat von Punkten, welches auf der mehrfachen Ueberdeckung der Ebene einer Symmetrielinie des Fundamentalpolygons entspricht, bildet den reellen Zug einer algebraischen Curve, und zwar geht diese Curve aus der Grundcurve durch eine quadratische Transformation hervor."

Drei von den Symmetrielinien haben Stücke der drei Symmetrie-Axen der beiden Doppelblätter zu Bildern. Je zwei der 24 übrigen Curven ergeben sich deckende Bilder, und zwar erhält man drei Curven sechster Ordnung, welche mit der reellen Curve einen Doppelpunkt gemein haben, drei Curven achter Ordnung mit einem Doppelpunkt ausserhalb der reellen Curve, und endlich sechs Curven sechster Ordnung, deren jede drei Spitzen der Curve zu Spitzen hat, und auch die Spitzentangenten der betreffenden Punkte aufweist. E. K.

T. Brodén. Ueber die durch Abel'sche Integrale erster Gattung rectificirbaren ebenen Curven. Stockh. Akad. Bihang Afd. 15. I. No. 5. 26 S.

Es wird die im Titel bezeichnete Frage ausführlicher als früher von Kobb und Humbert behandelt, die Form der Gleichungen der fraglichen Curven näher untersucht, eine Tabelle der Curven der Gradzahlen 4 bis 10 aufgestellt; endlich werden Formeln für das Geschlecht und die Periodenzahl der Integrale gegeben. Bdn.

F. Gauss. Ueber Curven, welche die Eigenschaft haben, dass je zwei Tangenten aus einer gegebenen Geraden eine Strecke ausschneiden, welche zu dem von den Berührungspunkten begrenzten Bogen in einem gegebenen Verhältnisse steht. Pr. Gymn. Bunzlau (No. 174). 26 S. 4°.

Nach einigen einleitenden Worten zeigt der Verfasser, wie die Differentialgleichung der in der Ueberschrift definirten Curven gefunden wird. Die gegebene Gerade wird zur Ordinatenaxe

OY der gesuchten Curve $y = f(x)$ genommen. Ist nun

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{dy}{dx},$$

so ist die Differentialgleichung der Curven:

$$\frac{dx}{x} = \mp n \frac{d\tau}{\cos\tau},$$

wo $1:n$ das gegebene Verhältnis ist. Durch Integration kommt schliesslich

$$2y = a\left[\frac{n}{n-1}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n-1}{n}} - \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right],$$

wo a constant. Es folgt eine eingehende Discussion der Curve, hierauf die Rectification, Quadratur, Complanation (bei Umdrehung um *OY*), Kubatur und Betrachtnng des besonderen Falles $n = 2$. (Der Zusammenhang mit der Verfolgungscurve liegt auf der Hand. Lp.) Mz.

W. Hofmann. Kritische Bemerkungen zu einigen Fragen der analytischen Geometrie. Wien. 18 S. 8°.

R. von Lilienthal. Bemerkungen über einige Grundbegriffe der analytischen Geometrie und Mechanik. Santiago (Verh. wissensch. Verein). 7 S. gr. 8°.

E. Mosnat. Problèmes de géométrie analytique. Tome I. Paris. 350 S. 8°.

E. Schatte. Ueber eine transcendente Curve von gegebener Bogenlänge. Herford. 32 S. 8°.

W. Krimphoff. Ueber eine neue Curvengattung, welche aus der lemniskatischen Function entspringt. Marburg. 34 S. 8° u. 1 Taf.

Capitel 3.
Analytische Geometrie des Raumes.

A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumcurven.

F. Joachimsthal. Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung. Dritte Aufl., bearb. von L. Natani. Leipzig. B. G. Teubner. X u. 308 S. 8°.

Ueber die zweite Auflage des Werkes, welche ebenfalls von Herrn Natani bearbeitet ist, siehe das Referat F. d. M. XIII. 1881. 560-561. Die vorliegende dritte Auflage enthält eine sehr grosse Menge von Entwickelungen, welche der Herausgeber zugefügt hat, so dass es nicht mehr thunlich war, im Texte die ursprünglich von Joachimsthal herrührenden Teile von den Zusätzen getrennt zu halten. Vielmehr ist diese Trennung nur im Inhaltsverzeichnis angedeutet. Die von Joachimsthal herrührenden Teile sind in der Hauptsache ungeändert beibehalten; doch ist die Anordnung an einigen Stellen geändert, und die Theorien der doppelten Krümmung und der geodätischen Linien sind umgewandelt und vereinfacht. Auch der Anhang, der lediglich vom Bearbeiter herrührt, ist bedeutend erweitert. Diese neuen Teile des Buches bieten eine grosse Menge interessanten Stoffes.

A.

E. Padova. Sulla teoria generale delle superficie. Bologna Mem. (4) X. 745-772.

Ein kurzer Abriss der Principien der Flächentheorie, gegründet auf die Aufsuchung invarianter Ausdrücke der Differentialformeln für das Quadrat des Linienelementes u. dgl. Der Verfasser bemerkt zu Anfang, dass sich ein Teil seiner Formeln in J. Knoblauch, Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen, Leipzig 1888 (F. d. M. XX. 1888. 752) findet. Die Ab-

sicht der Untersuchung ist aber in der vorliegenden Untersuchung in sofern eine andere, als die algebraischen Gesichtspunkte überwiegen, und die Geometrie zur Interpretation derselben dient. Die Darstellung ist kurz und übersichtlich. A.

D. J. Korteweg. Sur les points de plissement. Arch. Néerl. XXIV. 57-98.

Untersuchung der besondern auf einer Oberfläche liegenden und mit den Inflexionspunkten von Curven übereinstimmenden Punkte. Der Verfasser nennt dieselben Faltenpunkte. Sie sind nicht nur von Bedeutung bei mathematischen Theorien, sondern auch bei physikalischen Untersuchungen, wie z. B. van der Waals zeigte (siehe F. d. M. XX. 1889. 1002).

Im ersten Teil der Abhandlung werden die Faltenpunkte näher bestimmt als diejenigen, bei denen für eine doppelt berührende Ebene die beiden Berührungspunkte zusammenfallen. Solche Punkte müssen vorkommen sowohl auf den spinodalen Curven (geometrischer Ort der Punkte, wo die Krümmung der Oberfläche Null ist), als auf den flecnodalen Curven (geometrischer Ort der Punkte, wo die Tangenten mit der Oberfläche eine Berührung dritter Ordnung haben). Weiter untersucht der Verfasser die Form der Oberfläche in der Nähe eines Faltenpunktes. Daraus ergiebt sich eine Einteilung der Faltenpunkte in zwei Arten, wobei zwei besondere Fälle vorkommen, in denen die allgemeinen Betrachtungen zum Teil ihre Gültigkeit verlieren; hier entstehen die doppelten Faltenpunkte. Die zweite Abteilung handelt von einer allgemeinen Methode zur Untersuchung der Art und Weise, wie sich die einzelnen Punkte auf einer langsam sich verändernden Oberfläche verhalten. Nach dieser Methode zeigt sich nun, in welcher Weise auf einer fortwährend die Form ändernden Oberfläche die Faltenpunkte entstehen und verschwinden. Schliesslich wird die Theorie angewandt auf die Oberflächen dritten Grades, wo dieselben zuerst vorkommen können. (Vgl. F. d. M. XXI. 1889. 779ff.) G.

T. MOTODA. Note to J. Knoblauch's Paper „Ueber Fundamentalgrössen in der Flächentheorie". (Journ. für Math. CIII.) Journ of the Phil. Soc. in Tokio 1889. 3 S.

Bericht in F. d. M. XXI. 1889. 765. E.

T. MOTODA. Quaternion proofs of theorems relating to asymptotic lines. Mess. (2) XIX. 188-189.

Einfache, mit Hülfe der Quaternionen geführte Beweise zweier grundlegenden Sätze betreffs der asymptotischen Linien einer Oberfläche. Glr. (Lp.)

G. PEANO. Sulla definizione dell'area d'una superficie. Rom. Acc. L. Rend. (4) VI_1. 54-57.

Die Definition der Grösse einer krummen Linie und Fläche wird auf folgende Sätze gegründet: Ist eine geschlossene nicht ebene Linie l gegeben, so kann man stets eine geschlossene ebene Linie oder Bivector l' derart bestimmen, dass die Projectionen beider durch parallele Strahlen willkürlicher Richtung auf eine willkürliche Ebene gleiche Flächenstücke auf dieser begrenzen. Die Linien l, l' heissen dann äquipollent. Projicirt man l orthogonal auf eine variable Ebene, so drückt das Maximum der von der Projection begrenzten Fläche die Grösse des Bivectors l' aus, und dieses Maximum erreicht sie, wenn jene Ebene die Lage von l hat. Länge eines Curvenbogens ist die obere Grenze der Summe der Grössen der Vectoren seiner Teile; Areal eines Flächenstücks die der Grössen der Bivectoren seiner Teile. Die Richtung des Vectors eines unendlich kleinen Curvenbogens ist die der Tangente; das Verhältnis zwischen seiner Grösse und der Bogenlänge ist die Einheit; ebenso ist die Lage des Bivectors eines unendlich kleinen Flächenstücks die der Berührungsebene, und das Verhältnis zwischen seiner Grösse und dem Areal die Einheit. Der erste Term der Entwickelung der Differenz des Areals eines geodätischen Kreises und seines

Bivectors nach Potenzen des geodätischen Radius ϱ ist

$$\frac{\pi\varrho^4}{8}(R_1^{-2}+R_2^{-2}) = \frac{\pi\varrho^4}{8}C,$$

wo R_1 und R_2 die Hauptkrümmungsradien und C die Krümmung der Fläche nach Definition von Casorati bezeichnen. H.

V. Reina. Sulla teoria delle normali ad una superficie. Nap. Rend. (2) IV. 75-78.

Es werden einige Sätze über unendlich nahe Normalen einer Fläche entwickelt. A.

V. Reina. Sulle linee conjugate di una superficie. Rom. Acc. L. Rend. (4) VI_1. 156-165.

V. Reina. Nuove ricerche sulle linee conjugate di una superficie. Rom. Acc. L. Rend. (4) VI_1. 203-209.

V. Reina. Di alcune formole relative alla teoria delle superficie. Rom. Acc. L. Rend. (4) VI_2. 103-110.

V. Reina. Osservazione alla nota precedente. Rom. Acc. L. Rend. (4) VI_2. 176.

Die erste Arbeit hat die Untersuchung einiger Eigenschaften von conjugirten Richtungen zum Gegenstande und benutzt dazu folgende Differentialausdrücke:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 = A,$$

$$\frac{ds^2}{\varrho} = L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = B,$$

$$-\frac{ds^2}{\tau} = \frac{(EM-FL)du^2+(EN-GL)du dv+(FN-GM)dv^2}{\sqrt{EG-F^2}} = C,$$

$$\frac{ds^2}{r\varrho} = d\sigma^2 = E_1 du^2 + 2F_1 du dv + G_1 dv^2 = D.$$

Hierin sind E, F, G, L, M, N die bekannten Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung, E_1, F_1, G_1 die Fundamentalgrössen erster Ordnung für die Abbildung der Fläche auf die Gauss'-sche Kugel; r bedeutet den Abstand des Flächenpunktes von dem Punkte der Flächennormale, in welchem die im andern Endpunkte von ds errichtete Flächennormale mit dieser den kürzesten Abstand

hat (also dem Strictionspunkte), ϱ den Krümmungsradius des Normalschnittes, τ den Radius der geodätischen Torsion, und es ist, wenn man setzt

$$H = \frac{EN-2FM+GL}{EG-F^2} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}, \quad K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} = \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}:$$

$$E_1 = HL-KE, \quad F_1 = HM-KF, \quad G_1 = HN-KG$$

und

$$D = HB-KA = ds^2\left[\frac{H}{\varrho} - K\right] = ds^2\left[\frac{\cos^2\chi}{\varrho_1^2} + \frac{\sin^2\chi}{\varrho_2^2}\right],$$

wo χ den Winkel zwischen ds und der ersten Hauptkrümmungsrichtung bedeutet. Diese Ausdrücke und die aus ihnen hervorgehenden Differentialparameter, wie z. B.

$$\Delta^B(\varphi) = \frac{L\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2M\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u} + N\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}{LN-M^2},$$

bilden dann eine sehr bequeme Grundlage zur Untersuchung der Flächen und der Curven auf ihnen; wie dies zum Teil von den Herren Bertrand, Beltrami, Knoblauch entwickelt ist.

Dieselben werden nun specieller zur Betrachtung der conjugirten Linien benutzt, und es ergeben sich dabei manche interessanten Resultate, so z. B. der Satz: Das Verhältnis der Normalkrümmung zur geodätischen Torsion einer Flächencurve ist der Tangente des Winkels proportional, welchen die Curve mit der conjugirten Richtung bildet. Specieller wendet sich der Verfasser zuletzt zur Betrachtung der „charakteristischen" Linien (man vergleiche Pucci und Reina, Rom. Acc. L. Rend. (4) V_1. 501 und 881, Ref. F. d. M. XXI. 1889. 754 und 755) und stellt die notwendige und hinreichende Bedingung dafür auf, dass eine Curve $\varphi(u, v) = 0$ eine charakteristische Linie sei, und zwar in der Form

$$\frac{H}{2}\frac{\Delta^B(\varphi)}{\Delta^A(\varphi)} = 1,$$

woran noch einige weitere Folgerungen geknüpft werden.

In der zweiten Abhandlung werden die Differentialausdrücke untersucht, welche zwei vom Punkte u, v ausgehenden Richtungen entsprechen: du, dv und δu, δv, und deren erste die

Form hat

$$A^* = E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v,$$

während die anderen B^*, C^*, D^* in analoger Weise gebildet sind. Der Ausdruck C^* war schon in der ersten Abhandlung betrachtet, und es hatte sich ergeben, dass

$$C^* = -\tfrac{1}{2}ds\,\delta s\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right)\sin(\chi+\chi^1).$$

Für die übrigen Ausdrücke ergeben sich u. a. folgende Bedeutungen:

Es ist

$$A^* = ds\,\delta s\cos\omega,$$

$$B^* = ds\,\delta s\left[\frac{\cos\omega}{\varrho} - \frac{\sin\omega}{\tau}\right] = ds\,\delta s\left[\frac{\cos\omega}{\varrho^1} + \frac{\sin\omega}{\tau^1}\right],$$

$$D^* = d\sigma\,\delta\sigma\cos\omega = ds\,\delta s\left[\frac{\cos\omega}{r\varrho} - \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)\frac{\sin\omega}{\tau}\right].$$

An die Discussion dieser Ausdrücke schliesst sich nun eine Reihe von geometrischen Folgerungen, welche hier übergangen werden müssen.

Die dritte Arbeit, zu welcher die vierte Mitteilung einen kleinen Zusatz bildet, beschäftigt sich mit einigen weiteren Umformungen der Fundamentalgrössen und der Ableitungen der Richtungscosinus der Normale X, Y, Z. Von den entwickelten Formeln sind folgende hervorzuheben:

$$d\sigma^2 = \frac{E\,du^2 - 2F\,du\,dv + G\,dv^2}{-\varrho_1\varrho_2},$$

$$\Delta_1 X + \Delta_1 Y + \Delta_1 Z = X\Delta_2 X + Y\Delta_2 Y + Z\Delta_2 Z = \frac{1}{\varrho_1^2} + \frac{1}{\varrho_2^2},$$

$$\frac{\partial \ln Y}{\partial x}\cdot\frac{\partial \ln Z}{\partial x} + \frac{\partial \ln Z}{\partial y}\cdot\frac{\partial \ln X}{\partial y} + \frac{\partial \ln X}{\partial z}\cdot\frac{\partial \ln Y}{\partial z} = \frac{1}{\varrho_1\varrho_2},$$

wenn zur Abkürzung

$$\Delta_1 X = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)^2 \text{ u. s. w.},$$

$$\Delta_2 X = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} \text{ u. s. w.}$$

gesetzt ist. A.

DEMARTRES. Sur les surfaces réglées dont l'élément linéaire est réductible à la forme de Liouville. C. R. CX. 329-330.

Herr Demartres hatte bei der französischen Akademie am 11. December 1889 eine versiegelte Note niedergelegt, und bittet um die Oeffnung derselben zur Wahrung seiner Priorität, weil inzwischen in einer Note des Herrn Raffy (C. R., Ref. unten S. 758) eins seiner Resultate, wenn auch ohne Beweis, mitgeteilt ist. Der Inhalt der versiegelten Note ist kurz der folgende:

Die geradlinigen Flächen, welche einen Ausdruck für das Quadrat des Linienelementes in der Liouville'schen Form

$$[\varphi(x+y)-f(x-y)]\,dx\,dy$$

zulassen, sind durch folgende Bedingungen bestimmt:

1. Der Verteilungsparameter der Normalen ist eine elliptische Function des Bogens der Strictionslinie.

2. Die Tangente des Winkels, welchen die Strictionslinie mit der erzeugenden Geraden bildet, ist diesem Verteilungsparameter proportional.

In derselben Abhandlung wird ferner bewiesen, dass die einzigen geradlinigen Flächen, welche auf eine Umdrehungsfläche abwickelbar sind, die von Herrn Bioche gefundenen sind [C. R. 1888, 19. März. Man vergleiche übrigens auch die Arbeit des Herrn Raffy C. R. CVIII. 493, F. d. M. XXI. 1889. 747].

Herr Demartres knüpft an die Mitteilung dieses Resultates noch die Bemerkung, dass die von ihm angewandte Methode einer Verallgemeinerung fähig ist. Wenn nämlich in dem Ausdruck

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

die drei Coefficienten E, F, G rational sind in Bezug auf den einen der beiden Parameter (etwa u), so lassen sich die Coefficienten des von ihm benutzten Hülfsintegrales A, B, C durch lineare Differentialgleichungen von der Form der Fuchs'schen bestimmen. Er erläutert dies an einem einfachen Beispiel.

A.

A. Petot. Sur les surfaces dont l'élément linéaire est réductible à la forme $ds^2 = F(U+V)(du^2+dv^2)$. C. R. CX. 330-333.

Beschreibt man um jeden Punkt M einer Fläche S eine Kugel σ, deren Radius mit den Parametern u und v variirt, dann bildet die Gerade D, welche den Punkt mit einem der beiden Punkte N verbindet, in welchem die Kugel σ ihre Eingehüllte berührt, eine Congruenz Σ von Normalen. Nach einem Satze des Herrn Beltrami bleibt diese Congruenz bestehen, wenn man die Fläche S biegt. Aus diesem Grunde untersucht der Verfasser das Verhalten der Congruenz Σ bei der Deformation der Fläche S.

Er gelangt hierdurch zu folgenden Resultaten:

1. Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass das Quadrat des Linienelementes einer Fläche S sich in die Form $ds^2 = F(U+V)(du^2+dv^2)$ bringen lasse, ist die, dass man durch jeden Punkt M in den beiden Ebenen P_1 und P_2, welche normal zu den Curven eines isothermischen Systems liegen, zwei Gerade D_1 und D_2 ziehen kann, deren Winkel mit der Flächennormale ϑ_1 und ϑ_2 die Bedingung erfüllen:

$$\frac{d(\sin^2\vartheta_1)}{ds_2} = \frac{d(\sin^2\vartheta_2)}{ds_1},$$

wo die Ableitungen in Richtungen senkrecht zu P_1 und P_2 genommen sind.

2. Man kann diese Bedingung hinsichtlich der erwähnten Geraden D_1 und D_2 durch die Annahme $E = G = (U+V)$ auch dahin formuliren, dass dieselben eine Congruenz von Normalen bilden, und dass sie mit der Flächennormale complementäre Winkel einschliessen müssen.

Dieselbe Betrachtungsweise lässt sich anwenden, wenn

$$E = G = (U+V)^m$$

ist. A.

L. Raffy. Détermination des surfaces harmoniques réglées. C. R. CX. 223-226.

Als Resultat nicht mitgeteilter Rechnung wird folgendes aufgestellt. Für Regelflächen, die keine den unendlich fernen Kreis berührende Richtungsebene haben, ist das Linienelement, auf die Form gebracht

$$ds^2 = du^2 + \{(u-\alpha)^2 + k^2\} dv^2,$$

entweder identisch mit dem des Hyperboloids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

und zwar wird für constante g, g_0, λ, wenn $t = \frac{1}{k}$ und k den „Verteilungsparameter" der Function von v bezeichnet, welche der Gleichung

$$dv = \frac{tdt}{\sqrt{-4t^4 - 2gt^3 + g_0 t^2 - 2\lambda t}}$$

genügt, der Winkel ω zwischen der Erzeugenden und der Strictionslinie bestimmt durch

$$\cot\omega = \frac{\sqrt{k}}{2\sqrt{2\lambda}}(g_0 - 4\lambda k),$$

und a^2, b^2, $-c^2$ sind die Wurzeln der Gleichung

$$\varrho^3 - \frac{4g}{\lambda}\varrho^2 - \frac{g_0}{2\lambda}\varrho + \frac{\lambda^2}{4} = 0;$$

oder das Linienelement ist

$$ds^2 = du^2 + \frac{(u-\alpha)^2 + k^2}{4k^2(\beta^2 k - 1)} dk^2,$$

wo

$$\alpha = \gamma \int \frac{kdk}{\sqrt{\beta^2 k^2 - k}},$$

(β, γ willkürlich constant). Für Regelflächen, welche die oben erwähnte Richtungsebene haben, giebt es folgende zwei Formen des Linienelements:

$$ds^2 = du^2 + (u + av + be^{\frac{v}{a}}) dv^2,$$
$$ds^2 = du^2 + (u - \tfrac{1}{3}v^3) dv^2,$$

wo a, b willkürlich constant sind. H.

B. Williamson. On curvilinear coordinates Dublin Trans. XXIX. Part. XV. 515-552.

Wenn die krummlinigen Coordinaten (α_1, α_2, α_3) eines Punktes durch die Gleichungen $\alpha_1 = f_1(x, y, z)$ u. s. w. definirt werden, wenn ferner (l_1, m_1, n_1) u. s. w. die Richtungscosinus der Bogenelemente $ds_1 (= k_1 d\alpha_1)$ u. s. w. in dem Punkte sind, so werden zuerst verschiedene Beziehungen zwischen diesen Grössen aufgestellt, dann wird Dupin's Theorem bewiesen, Ausdrücke für die Krümmungshalbmesser werden abgeleitet, und die Transformation von $\nabla^2 V$ wird erledigt. Der zweite Abschnitt handelt von Curven auf einer festen Oberfläche, wenn die beiden Systeme durch $\alpha_1 =$ const., $\alpha_2 =$ const. gegeben sind. Einfache Beweise für das Krümmungsmass werden geliefert, und der Gauss'sche Ausdruck für dasselbe erscheint in der Gestalt

$$-\frac{1}{k_1 k_2 \sin\omega}\left\{\frac{d}{d\alpha_1}\left(\frac{k_2}{r_2}\right)+\frac{d}{d\alpha_2}\left(\frac{k_1}{r_1}\right)-\frac{d^2\omega}{d\alpha_1\, d\alpha_2}\right\},$$

in welcher α_1, α_2, k_1, k_2 die oben angegebene Bedeutung haben, während $\frac{1}{r_1}$, $\frac{1}{r_2}$ die geodätischen Krümmungen der entsprechenden Bogen bedeuten, ω den Schnittwinkel der Bogen. Im dritten und letzten Capitel wird die Transformation der Grundgleichungen der Elasticitätstheorie aus rechtwinkligen Coordinaten in krummlinige ausgeführt. Gbs. (Lp.)

W. P. Ermakoff. Ueber geodätische Linien. Mosk. Math. Samml. XV. 516-580. (Russisch.)

Der Verfasser beweist den Satz: Ist u eine vollständige Lösung der Gleichung:

$$G\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)^2 - 2F\frac{\partial u}{\partial p}\cdot\frac{\partial u}{\partial q} + E\left(\frac{\partial u}{\partial q}\right)^2 = EG - F^2,$$

wo E, F, G die Coefficienten in dem Ausdrucke des Linienelementes $ds^2 = E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2$ der vorliegenden Fläche bedeuten, so ist $\frac{\partial u}{\partial a} = b$, wo a und b Constanten sind, die allgemeine Gleichung der geodätischen Linien auf der betrachteten Fläche. Ms.

C. Guichard. Recherches sur les surfaces à courbure totale constante et sur certaines surfaces qui s'y rattachent. Ann. de l'Éc. Norm. (3) VII. 233-264.

C. Guichard. Sur les surfaces qui possèdent un réseau de géodésiques conjuguées. C. R. CX. 995-997.

Es besteht ein bemerkenswerter Zusammenhang zwischen folgenden drei Gruppen von Flächen: 1. den Flächen F mit constantem Krümmungsmass, 2. den beiden Brennflächen S_1 und S_2 eines Strahlensystems C (einer Congruenz) von der Beschaffenheit, dass die abwickelbaren Flächen von C die Flächen S_1 und S_2 in ihren Krümmungslinien berühren, 3. den Flächen Σ, welche ein conjugirtes Netz von geodätischen Linien besitzen. — Mit der Untersuchung der Flächen Σ beschäftigt sich specieller die erste, mit der Untersuchung des Zusammenhanges der drei Flächen die zweite der vorliegenden Arbeiten. Sind zunächst auf einer Fläche Σ die Curven $v = \text{const.}$ geodätische, die Curven $u = \text{const.}$ die sie in conjugirten Richtungen schneidenden, sind ferner die Richtungscosinus der Normale $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, die der Curve $V = \text{const.}$ α, β, γ, die der Curve $u = \text{const.}$ α', β', γ', so hat man

$$(1)\ \Sigma\alpha\alpha_1 = 0, \quad (2)\ \Sigma\alpha\frac{\partial\alpha_1}{\partial v} = 0, \quad (3)\ \frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial\alpha}{\partial u} = \frac{1}{\beta_1}\frac{\partial\beta}{\partial u} = \frac{1}{\gamma_1}\frac{\partial\gamma}{\partial u}.$$

Differentiirt man die zweite dieser Gleichungen nach u, so folgt mit Rücksicht auf die Gleichung (3):

$$(4) \qquad \Sigma\alpha\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial u\partial v} = 0.$$

Aus (1), (2) und (4) erkennt man, dass $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ Integrale einer Differentialgleichung von der Form

$$(5) \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v} = P\frac{\partial\theta}{\partial u} + Q.\theta$$

sind, wo P und Q beliebige Functionen sein können. Sind umgekehrt $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ drei linear unabhängige Integrale der Gleichung (5), welche die Bedingung $\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2 = 1$ erfüllen, so sind die Curven $v = \text{const.}$ geodätische.

Damit die Curven $u = \text{const.}$ ebenfalls geodätische seien,

ist notwendige und hinreichende Bedingung, dass

$$P = 0$$

sei; also geht dann (5) über in

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = Q.\theta.$$

Setzt man nun $Q = \cos\varphi$, so geht die Bedingung über in

$$(6) \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \theta\cos\varphi,$$

und damit dieser die drei Richtungscosinus $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ genügen können, muss, wie der Verfasser ohne weiteren Nachweis angiebt:

$$(7) \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} = \sin\varphi$$

sein. Die Tangentialebene der gesuchten Fläche ist alsdann

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = r,$$

wo r ein beliebiges Integral von (6) ist.

Da die Gleichung (7) auch bei der Darstellung der Flächen F mit constantem Krümmungsmass auftritt, die Gleichung (1) aber auch die Flächen S darstellt, so ist der Zusammenhang zwischen diesen drei Flächengattungen hergestellt.

Bekanntlich ist die vollständige Bestimmung der Flächen F ein ungelöstes Problem. Doch kann man, wenn eine solche Fläche bekannt ist, daraus ein ganzes System ableiten. Ferner hat Herr Bäcklund gezeigt, dass, wenn in einem Strahlensystem die Focaldistanz constant ist und die beiden Focalebenen einen constanten Winkel bilden, die Focalflächen constantes Krümmungsmass haben. Diese Betrachtung benutzt der Verfasser, und sie führt ihn zur Untersuchung einiger speciellen Flächen S.

Um zu Flächen S zu gelangen, genügt es, eine Fläche F auf asymptotische Parameter zu beziehen und eine Gleichung von der Form

$$\frac{\partial^2\varrho}{\partial u\,\partial v} = \varrho\cos\varphi$$

zu lösen. Particuläre Lösungen derselben sind $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$ und $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$. In diesem Falle ist eine der Flächen S_1, S_2 eine Kugel. Die gemeinsamen Tangenten zweier Kugeln bilden ein Strahlensystem

C. Die entsprechende Fläche wird durch elliptische Quadraturen bestimmt.

Die Richtungscosinus α, β, γ der Normale von F sind Integrale der obigen Gleichung; ihnen entsprechen Strahlensysteme, deren centrale Fläche eine Ebene ist.

Endlich lässt jene Gleichung unendlich viele Systeme von je drei Lösungen ξ, η, ζ zu, welche durch eine homogene Gleichung zweiter Ordnung verknüpft sind. Die entsprechenden Flächen S haben die Eigenschaft, dass das eine System ihrer Krümmungslinien die Vectoren, welche von einem festen Punkte ausgehen, unter constantem Winkel schneidet.

Die analytische Bestimmung der Flächen Σ ist nach dem anfangs Mitgeteilten mit der der Flächen S identisch; sie hängen mit denselben so zusammen, dass Σ eine der Krümmungsmittelpunktsflächen (Evolutenflächen) von S ist.

Umgekehrt sind die Tangenten der geodätisch Conjugirten von Σ die Normalen einer Fläche S.

Hieraus folgt, dass aus einem gegebenen Strahlensystem C im allgemeinen unzählig viele andere hergeleitet werden können. Die Methode der Transformation kann so lange fortgesetzt werden, als die erhaltene Fläche Σ eine reelle Existenz hat, also so lange man nicht auf eine Kugel als Fläche S kommt.

Analytisch betrachtet, entspricht dieser Transformation eine solche der oben angeführten Gleichung. Die einzigen Lösungen, welche durch diese Transformation mit einem constanten Factor multiplicirt werden, sind die Lösungen ξ, η, ζ.

Dies ist, wie der Verfasser in der Einleitung angiebt, der Hauptinhalt der an Resultaten reichen Arbeiten. A.

E. Baroni. Superficie Σ in cui la somma dei raggi principali di curvatura è proporzionale alla distanza di un punto fisso dal piano tangente. Batt. G. XXVIII. 349-374.

Die Arbeit enthält die Untersuchung der Fläche Σ, bei welcher die Summe der Hauptkrümmungsradien proportional ist

dem Abstande eines festen Punktes von der Tangentialebene. Diese Fläche ist, wie der Verfasser bemerkt, auf anderem Wege bereits von den Herren Appell und Goursat untersucht. In dem ersten Teile wird unter Bezugnahme auf gewisse von Herrn Weingarten entwickelte Formeln die Differentialgleichung der Flächen Σ aufgestellt, und es werden Fälle besprochen, in welchen sich das Integral derselben aufstellen lässt. Dann wird die Form des allgemeinen Integrals festgestellt, und es werden gewisse particuläre Fälle besprochen nebst einer von Hrn. Goursat herrührenden Transformation. Mit der Erörterung einiger geometrischen Eigenschaften schliesst der erste Teil. Der zweite Teil behandelt einige neue Klassen von aufeinander abwickelbaren Flächen, welche von der Fläche Σ abgeleitet sind. Es handelt sich um die Verallgemeinerung des Satzes, dass jeder Minimalfläche eine andere Fläche entspricht, für welche das Quadrat des Linienelements sich darstellt in der Form

$$ds^2 = (\alpha^{\frac{2}{3}} + \beta^{\frac{2}{3}})(d\alpha^2 + d\beta^2),$$

und dass alle Flächen der letzteren Art auf einander abwickelbar sind. Der Verfasser stellt die analoge Untersuchung an, indem er, statt von den Minimalflächen, von den Flächen Σ ausgeht. A.

Ch. Bioche. Remarques sur les lignes de courbure qui passent par un ombilic. S. M. F. Bull. XVIII. 95-106.

Der Verfasser giebt in einer Uebersicht zu Anfang den Inhalt seiner Arbeit folgendermassen an:

Zunächst werden diejenigen theoretischen Betrachtungen angestellt, durch welche man die Gleichung der Krümmungslinien in einem Nabelpunkte bestimmen kann. Nachdem die Gleichung dritten Grades aufgestellt ist, durch welche sich im allgemeinen die Richtungen der drei Krümmungslinien im Nabelpunkte ergeben, wird ein irrtümlicher Schluss von Dupin erörtert, wonach nur eine dieser Richtungen reell sein könnte, wenn der Punkt ein isolirter Nabelpunkt ist (im Gegensatz zu den Punkten einer Nabellinie).

Bei der Betrachtung von Nabelpunkten höherer Ordnung zeigt der Verfasser, dass, wenn die Gleichung, welche die Richtungen bestimmt, von gerader Ordnung ist, mindestens zwei reelle Richtungen vorhanden sind. Er widerlegt damit eine Behauptung des Herrn Amiot [Journ. de Math. XII. (1847) 129].

Er beweist, dass, wenn durch einen Punkt, dessen Normalkrümmungen sämtlich Null sind, drei asymptotische Linien hindurchgehen, diese abwechseln mit den drei Krümmungslinien.

Den Schluss der Arbeit bildet eine Zusammenstellung der Litteratur, welche man weniger vollständig auch in dem Referat F. d. M. XV. 1883. 669 über die Arbeit des Herrn Hoppe: „Krümmungslinien in den Nabelpunkten" findet. A.

W. Burnside. On the surfaces whose lines of curvature are all plane. Mess. (2) XX. 49-54, 148.

Wenn nach der Gauss'schen Methode die Punkte einer krummen Oberfläche derart auf diejenigen einer Kugelfläche bezogen werden, dass P auf der Oberfläche und P' auf der Kugel sich entsprechen, falls die Normalen in P und P' parallel sind, so sind bekanntlich die Tangenten in entsprechenden Punkten auf einer Krümmungslinie der Oberfläche und auf ihrer sphärischen Abbildung parallel. Daraus folgt, dass, wenn die Oberfläche eine ebene Krümmungslinie besitzt, das sphärische Bild derselben ein Kreis ist, und dass, wenn die Krümmungslinien beider Systeme auf einer Oberfläche eben sind, ihnen zwei Scharen orthogonaler Kreise auf der Kugel entsprechen müssen. Diese Methode ist von Hrn. Bertrand benutzt worden, um die Differentialgleichungen der Oberflächen zu finden, deren sämtliche Krümmungslinien eben sind. In der vorliegenden Arbeit vereinfacht der Verfasser die Rechnung und erhält die Differentialgleichung in einer für die unmittelbare Integration geeigneteren Gestalt dadurch, dass er als unabhängige Veränderliche die Parameter derjenigen Linien benutzt, welche den imaginären Erzeugenden (oder Linien von der Länge Null) auf der Kugel entsprechen. Glr. (Lp.)

E. Padova. Sopra un teorema di geometria differenziale. Lomb. Ist. Rend. XXIII. 840-844.

In Annali di Mat. (1) VII hat Hr. Beltrami 1866 den Satz aufgestellt: „Die Flächen constanter Krümmung sind die einzigen, auf denen die geodätischen Linien durch lineare Gleichungen zwischen den Coordinaten dargestellt werden können". Von diesem Satze wird hier ein analytischer Beweis gegeben.

H.

G. Darboux. Sur la surface dont la courbure totale est constante. Ann. de l'Éc. Norm. (3) VII. 9-18.

Die Mitteilung ist ein Auszug aus den Arbeiten des Verfassers, welche in den C. R. XCVII. 1883 veröffentlicht sind. Ref. F. d. M. XV. 1883. 644.

A.

L. Bianchi. Sopra una nuova classe di superficie appartenenti a sistemi tripli ortogonali. Rom. Acc. L. Rend. (4) VI_1. 435-438.

L. Bianchi. Sulle superficie le cui linee assintotiche in un sistema sono curve a torsione costante. Daselbst. 552-556.

L. Bianchi. Sopra alcune nuove classi di superficie e di sistemi tripli ortogonali. Annali di Mat. (2) XVIII. 301-358.

Nachdem der Verfasser eine allgemeine Formel für eine auf ihre asymptotischen Linien bezogene Fläche vorausgeschickt hat (§ 1), kommt er (§ 2) auf die Ribaucour'schen Congruenzen und auf die von Hrn. Weingarten (Ueber die Deformationen einer biegsamen, unausdehnbaren Fläche, J. für Math. C. 296-310, F. d. M. XVIII. 1886. 721) für dieselben aufgestellten Formeln. Ist eine solche Punktcorrespondenz zwischen zwei Flächen S, $\bar S$ vorhanden, dass jedem Linienelemente von S ein zu demselben rechtwinkliges Linienelement von $\bar S$ entspricht, und zieht man durch jeden Punkt von $\bar S$ eine Gerade, die der Normale zu S

im entsprechenden Punkte parallel ist, so bilden diese Geraden eine „Ribaucour'sche Congruenz", deren „erzeugende Fläche" S ist. Die Untersuchung der Ribaucour'schen Congruenzen im allgemeinen und einiger speciellen Fälle derselben bildet den Inhalt des § 2. Eine besondere Bedeutung kommt denjenigen Ribaucour'schen Congruenzen zu, welche zugleich „cyklisch" sind, d. h. deren Strahlen die Axen eines zweifach unendlichen Kreissystemes sind, welches eine Schar orthogonaler Flächen besitzt; die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist (§ 3), dass das Krümmungsmass der erzeugenden Fläche die Form:

$$\text{(a)} \qquad K = -\frac{1}{(\varphi(u)+\psi(v))^2}$$

habe, wo u, v die asymptotischen Linien dieser Fläche darstellen. Man kann auf einem anderen Wege zu den Flächen gelangen, deren Krümmungsmass die Form (a) hat. Dazu untersucht der Verfasser zuerst im allgemeinen (§ 4) solche Congruenzen, dass die asymptotischen Linien der zwei Schalen der Brennfläche sich einander entsprechen. Specialisirt man nun diese Congruenzen dadurch, dass man ihnen die Bedingung auflegt, das Krümmungsmass solle in je zwei entsprechenden Punkten der zwei Schalen der Brennflächen gleichen Wert haben, so findet man (§ 5), dass das Krümmungsmass der Brennfläche jeder Congruenz von solcher Beschaffenheit die Form (a) besitzen muss. Ist eine derartige Fläche S gegeben, so kann man auf zweifach unendlich viele Weisen eine zweite ebensolche Fläche S_1 finden, so dass S, S_1 die zwei Schalen der Brennfläche einer Congruenz bilden. Setzt man insbesondere (§ 6) $\psi(v) = \text{Const.}$, so haben die Flächen, deren Krümmungsmass

$$K = -\frac{1}{(\varphi(u)+\text{Const.})^2} = -\frac{1}{(\bar{\varphi}(u))^2}$$

ist, die Eigenschaft, dass ihre asymptotischen Linien $u = \text{Const.}$ Curven von constanter Torsion sind. Die Differentialgleichung dieser Flächen ist:

$$r\left(\frac{\partial K}{\partial y}\right)^2 - 2s\frac{\partial K}{\partial x}\frac{\partial K}{\partial y} + t\left(\frac{\partial K}{\partial x}\right)^2 = 0,$$

wo $K = \frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}$; sie besitzt das Integral $z = m \operatorname{arctang} \frac{y}{x}$. Ist aber ein particuläres Integral dieser Gleichung bekannt, so kann man aus diesem, durch lauter Quadraturen, unendlich viele andere Integrale derselben mit einer beliebigen Anzahl willkürlicher Constanten ableiten. Man kann dies geometrisch dadurch ausführen, dass man für die Fläche S, welche das bekannte Integral darstellt, nach den Vorschriften des vorhergehenden Paragraphen entsprechende Flächen S_1 aufsucht.

Ist ein zweifach unendliches Kreissystem gegeben, welches eine Schar von orthogonalen Flächen Σ besitzt, so giebt es bekanntlich zwei Flächenscharen, welche zusammen mit Σ ein orthogonales Tripel bilden. Setzen wir nun voraus (§ 7), die erzeugende Fläche der durch die Axen der Kreise gebildeten cyklischen Ribaucour'schen Congruenz sei eine Pseudosphäre, so ergiebt sich, dass die Linien irgend einer Fläche Σ (oder $w =$ Const.), welche deren Krümmungslinien $v =$ Const. unter einem constanten Winkel schneiden, gleichflächige unendlich kleine Parallelogramme bilden. Die Abhandlung schliesst mit der Anwendung dieses Ergebnisses auf den Fall, wo eine der Flächen Σ eine Kugel ist. Vi.

DE SALVERT. Mémoire sur la recherche la plus générale d'un système orthogonal triplement isotherme. Brux. S. sc. XIV B. 121-283.

P. MANSION. Rapport. Ibid. A. 50-58.

Fortsetzung der Abhandlung, deren beide erste Capitel in denselben Annalen XIII B. erschienen und in F. d. M. XXI. 1889. 756 besprochen sind. Der Verfasser stellt zuerst die Lamé'schen partiellen Differentialgleichungen eines beliebigen dreifach orthogonalen Systems auf. In die eine dieser Gleichungen gehen sechs partielle Ableitungen ein. Der Verf. behandelt vollständig diejenigen Fälle, in denen zwei dieser Ableitungen identisch Null sind, und dies entspricht dem Dasein einer Familie abwickelbarer Flächen in dem untersuchten drei-

fach isothermen Flächensysteme. — In dem folgenden Capitel unternimmt Hr. de Salvert die allgemeine Lösung der Frage, indem er die drei ersten Differentialinvarianten bezüglich der krummlinigen Coordinaten als Function dieser Coordinaten bestimmt. Er macht diese Bestimmung von der Integration einer Differentialgleichung fünfter Ordnung abhängig, nämlich:

$$D\left[\frac{1}{Du} D \frac{D^3u}{Du}\right] = 0,$$

bewerkstelligt die Integration derselben und führt die Lösung bis zur Bestimmung des Ausdrucks der geradlinigen Coordinaten als Function der krummlinigen, Letzteres ausgeschlossen. Die Darstellung des Hrn. de Salvert ist bisweilen ein wenig breit, dafür aber auch sehr klar. Mn. (Lp.)

Issaly. Théorie des systèmes triples de pseudo-surfaces. Nouv. Ann. (3) IX. 204-222.

Der Verfasser setzt in dieser Arbeit seine Untersuchungen über Pseudoflächen (S. M. F. Bull. XVI. 19-81 und XVII. 84-104, F. d. M. XXI. 1889. 819) fort. Unter einer Pseudofläche ist der geometrische Ort verstanden, welchen zwei Curven bestimmen, deren jede mit einem Parameter variirt, wenn diese Curven sich nicht genau durchschneiden, sondern wenn ihr kürzester Abstand mindestens von zweiter Ordnung unendlich klein ist. Der Verfasser bemerkt im voraus, dass ein solcher Ort nicht durch eine endliche Gleichung zwischen x, y, z dargestellt werden könne, dass aber die Betrachtung geeignet sei, den Differentialgleichungen

$$dz = \varphi(x, y)dx + \psi(x, y)dy$$

eine geometrische Bedeutung zu geben, wenn $\frac{\partial\psi}{\partial x} \lesseqgtr \frac{\partial\varphi}{\partial y}$ ist, wenn also die rechte Seite kein vollständiges Differential ist. — Es handelt sich also, wie Referent bemerken möchte, um Differentialrelationen, welche unbestimmt bleiben, wenn die Parameter von einander unabhängig gedacht werden, so dass man keine Schlüsse über endliche Veränderungen machen kann, ohne diese Parameter von einander abhängig zu machen. In der vorliegenden Abhandlung werden nun statt zweier Curvensysteme

deren drei betrachtet, derart dass irgend drei Curven dieser Systeme bis auf eine in zweiter Ordnung unendlich kleine Grösse in einem Punkte M zusammentreffen. Je zwei dieser Curvensysteme bestimmen dann eine Pseudofläche, welche den drei Parameterflächen eines krummlinigen Coordinatensystems im Raume entsprechen, und für welche sich Relationen aufstellen lassen, welche diesen letzteren analog sind. Mit der Aufstellung solcher Relationen beschäftigt sich der Verfasser in der vorliegenden Abhandlung, in der zunächst die Differentialrelationen aufgesucht, dann gewisse Fundamentalformeln entwickelt werden. Hieran schliesst sich eine Anwendung auf dreifache Flächensysteme und eine Verallgemeinerung des Dupin'schen Theorems über Orthogonalsysteme, endlich eine Verallgemeinerung der Codazzi'schen Gleichungen und des Gauss'schen Theorems.

A.

O. Stolz. Zur Theorie der Raumcurven. Monatsh. f. Math. I. 433-442.

Es werden die Formeln der Principien der Curventheorie durchgegangen, um in allen die Vorzeichen der Richtungen und der sie ausdrückenden Grössen festzusetzen.

H.

J.-B. Pomey. Démonstration des formules de Frenet. Nouv. Ann. (3) IX. 559-560.

Es handelt sich um die Formeln für die Differentiale der Richtungscosinus der Tangente, der Hauptnormale und der Binormale einer Raumcurve. Vergl. Frenet, Recueil d'exercices Cap. XIV. Einleitung u. Aufg. No. 282.

R. M.

P. H. Schoute. Quelques problèmes sur les plans osculateurs. Assoc. Franç. Limoges XIX. 191-200.

Symbolische Gleichung der Schmiegungsebene für den Schnitt zweier Oberflächen in einem gegebenen Punkte, der als Ursprung der Coordinaten genommen ist. Bedingung dafür, dass die

Schmiegungsebene vier auf einander folgende Punkte der Curve enthält. Tangentialpunkte des Ursprungs. Die Eingehüllte der Schmiegungsebene und der Ort der Tangentialpunkte in den beiden Fällen, dass die eine der beiden Gleichungen einen Büschel darstellt, und dass die beiden Gleichungen homographische Büschel ergeben. Lp.

R. Hoppe. Zur Goursat'schen Reduction des Problems der Bestimmung der Curven durch die Relation zwischen Krümmungs- und Torsionswinkel. Hoppe Arch. (2) IX. 43-52.

Die Abhandlung des Herrn Goursat: Sur un problème relatif aux courbes à double courbure (Toul. Ann. I. C. 1-26) hat Herr Hoppe (F. d. M. XIX. 1887. 751) besprochen und dabei darauf hingewiesen, dass die Behauptung des Herrn Goursat, Herr Hoppe habe das Problem (J. für Math. LX. 182) nur unter specieller Voraussetzung behandelt, durchaus nicht zutreffe; vielmehr sei seine (Herrn Hoppe's) Lösung, die er auch später wieder in der Curventheorie mitgeteilt hat, genau von derselben Allgemeinheit, wie die des Herrn Goursat. Gleichwohl hat Herr Hoppe bereits in jenem Referat anerkannt, dass die Form der Goursat'schen Lösung grosse Vorzüge besitzt. Er sieht sich nun veranlasst, die Goursat'sche Reduction nochmals herzuleiten, und zwar ist seine Herleitung insofern eine Vereinfachung, als er das Bogenelement, welches Herr Goursat unnötigerweise in seinen Entwickelungen beibehalten hat, von vorn herein ausscheidet. So gelangt er in der That zu einer sehr einfachen Behandlung des Problems, welches nach Vorausschickung einiger einfachen Sätze über lineare Differentialgleichungen entwickelt wird.

Das Resultat stellt sich in sehr eleganter Weise folgendermassen dar: Sind f, g, h die Richtungscosinus der Tangente, f', g', h' die der Hauptnormale, l, m, n die der Binormale, und sind $d\tau$, $d\vartheta$, $d\sigma$ die unendlich kleinen Winkel zwischen diesen drei Geraden und ihren consecutiven, so kommt es darauf an, τ, ϑ und σ so zu bestimmen, dass

$$d\tau = d\sigma.\cos\lambda, \quad d\vartheta = d\sigma.\sin\lambda$$

wird, während λ eine gegebene Function der unabhängigen Veränderlichen ist.

Dazu bilde man die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{d\sigma^2}+i\frac{d\lambda}{d\sigma}\cdot\frac{dy}{d\sigma}+\tfrac{1}{4}y=0.$$

Ist y ein Integral derselben und y_1 der zu y conjugirte Wert, so ist ein zweites Integral $\frac{dy_1}{d\sigma}e^{-i\lambda}$.

Bildet man ferner $z=2\frac{dy}{d\sigma}e^{i\lambda}$, so ist ein System, welches die Bedingung erfüllt, das folgende:

$$f+il=yz,\quad g+im=\frac{i}{2}(y^2+z^2),\quad (h+in)=\tfrac{1}{2}(y^2-z^2),$$

woraus auch f', g', h' bestimmt werden können.

Jedes andere System von Lösungen lässt sich durch Orthogonalsubstitution in dieses überführen.

Die Lösung lässt sich alsdann noch ihrer imaginären Form entkleiden. Der Verfasser zeigt nun, wie der von ihm früher gegebenen weiteren Reduction des Problems noch zwei andere zur Seite gestellt werden können, von denen die eine mit der Goursat'schen im wesentlichen übereinstimmt, aber eine etwas einfachere Form besitzt, als sie ihr Herr Goursat gegeben hat.

A.

V. Jamet. Sur la théorie des sphères osculatrices à une courbe. Toulouse Ann. IV. F. 1-8.

Der Verfasser beschäftigt sich specieller mit einer Frage, auf welche Herr Darboux in seinen Arbeiten über die partiellen Differentialgleichungen hingewiesen hat, und stellt sich folgende Aufgabe: Wenn sich der Mittelpunkt einer gegebenen Kugel S bewegt, nach welchem Gesetze muss sich der Radius ändern, damit sie eine andere Curve C osculire?

Das Schlussresultat, zu welchem der Verfasser durch analytische Betrachtungen geführt wird, lässt sich dahin aussprechen: Denkt man sich eine Ebene, welche sich auf der Tangentenfläche der Curve S abrollt, so ist der Ort der Berüh-

rungspunkte σ der Ebene und der Curve S relativ zur Ebene die planificirte Curve S. Denkt man sich nun in der bewegten Ebene einen zu ihr relativ festen Punkt π und beschreibt um σ als Mittelpunkt eine Kugel, welche durch π geht, so bleibt diese an der Bewegung teilnehmende Kugel osculirende Kugel einer Curve C.

Der Verfasser giebt am Schluss seiner Arbeit an, dass Herr Cesáro, wie dieser ihm brieflich mitgeteilt habe, dasselbe Problem auf geometrischem Wege gelöst hat. A.

G. Pirondini. Sur les trajectoires orthogonales d'une ligne mobile. Nouv. Ann. (3) IX. 297-317.

Eine Linie $\varDelta$ ist fest verbunden mit dem aus der Tangente, Haupt- und Binormale einer festen Linie L gebildeten Trieder T; s, ϱ, r seien Bogen, Krümmungs- und Torsionsradius von L im Punkte (x, y, z), σ der Bogen von $\varDelta$ im laufenden Punkte, dessen Coordinaten bezüglich auf das Trieder ξ, η, ζ, auf die festen Axen (der x, y, z) dagegen X, Y, Z seien. Bei variirendem S erzeugt $\varDelta$ eine Fläche F. Die Bedingungen dafür, dass die Linien $s=\text{const.}$ und $\sigma=\text{const.}$ sich rechtwinklig schneiden, sind

$$\eta = c(a\xi+\zeta), \quad \xi = e(b\eta-1), \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{a}{r} + b.$$

Die Linien $s = \text{const.}$ sind dann gerade und F eine Regelfläche. Hier sind a, b absolut constant, c, e variiren mit s und seien Functionen von t. Abwickelbar (nicht Ebene) wird die Fläche für $abce = 1$. Ist ferner die Tangente an $\varDelta$ senkrecht zur Tangente an L, so liegt ihr laufender Punkt A auf einer Ebene, die parallel der rectificirenden Ebene von L durch den Krümmungsmittelpunkt geht, und ϱ ist constant; ist sie senkrecht zur Hauptnormale von L, so liegt A auf der Ebene zwischen der Hauptnormale und der rectificirenden Geraden von L, L ist Helix (d. h. $\varrho:r$ constant); ist sie senkrecht zur Binormale von L, so liegt A auf der rectificirenden Ebene von L, L ist dann willkürlich. Es werden noch 10 Sätze hergeleitet, die mit der anfänglichen Theorie mehr oder weniger in Verbindung stehen.

H.

H. G. Zeuthen. Analytisk Lösning og Almindeliggjórelse af den Opgave: paa en Kugleflade at finde en Kurve med konstant Krumning. Nyt Tidss. for Math. I. 67-76.

Analytische Behandlung der Aufgabe, Curven constanter Krümmung auf einer Kugel zu finden. Danach wird die Aufgabe dahin erweitert, auf einer gegebenen Fläche analytisch die Curven zu bestimmen, deren osculirende Ebenen eine andere Fläche berühren. Speciell wird der Fall erörtert, wo die beiden Flächen zusammenfallen. V.

A. E. Pellet. Rayons de courbure et de torsion d'une courbe tracée sur une surface. Assoc. Franç. Limoges XIX. 200-202.

Directer Beweis bekannter Sätze über die Krümmungs- und Torsions-Radien der auf einer Oberfläche gezeichneten Curven. Lp.

J. Lyon. Sur les courbes à torsion constante. Thèse. Paris. Gauthier-Villars et Fils. 70 S. 4°.

G. Pirondini. Di due superficie rigate che si presentano nello studio delle curve. Batt. G. XXVIII. 92-112.

Die Gerade, welche einen Punkt einer Raumcurve L mit dem zugehörigen Mittelpunkte der osculirenden Kugel verbindet, beschreibt bei Veränderung des Curvenpunktes eine geradlinige Fläche T.

Eine Gerade, welche zur Tangente der Linie L in dem zugehörigen Krümmungsmittelpunkte parallel gezogen ist, beschreibt eine geradlinige Fläche Σ.

Mit den Eigenschaften dieser beiden Flächen, besonders mit denjenigen der Fläche T, beschäftigt sich die vorliegende Abhandlung. Es ergiebt sich dabei eine Anzahl interessanter Beziehungen. A.

C. F. E. Björling. Singuläre Generatricen in algebraischen Regelflächen. Stockh. Öfv. (1888). 587-604.

C. F. E. Björling. Die singulären Generatricen der Binormalen- und Hauptnormalen-Flächen. Stockh. Vetensk. Bihang. XV. (1889). 18 S.

Eine mit dem Parameter α variirende räumliche Gerade erzeugt im allgemeinen eine nicht abwickelbare Regelfläche, bei welcher der kürzeste Abstand zwischen der Geraden α und der consecutiven $(\alpha + d\alpha)$ von erster Ordnung unendlich klein ist. Solche Erzeugende, bei welcher dieser kürzeste Abstand von höherer als der ersten Ordnung unendlich klein ist, heissen singuläre Erzeugende, und mit den verschiedenen Arten dieser Singularitäten beschäftigt sich die erste der beiden Abhandlungen. Es ist bisher nur die einfachste Art von singulären Erzeugenden untersucht worden, welche der Verfasser „Elementar-Torsale" nennt, und deren Anzahl für eine Regelfläche von der Ordnung k und dem Geschlecht p durch Herrn Lüroth (J. für Math. LXVII. 139) gleich $2k-4(p-1)$ bestimmt ist. Die übrigen Singularitäten lassen sich, wie der Verfasser nachweist, als hieraus zusammengesetzt ansehen. Die Elementar-Torsale ist daran kenntlich, dass die Tangentialebene für alle ihre Punkte dieselbe bleibt, also sich nicht ändert, wenn der Berührungspunkt sich auf der Erzeugenden bewegt. Diese Ebene wird die Torsalebene genannt. Alle übrigen singulären Erzeugenden (die nicht torsalen) haben die Eigenschaft gemein, dass, während der Berührungspunkt der Tangentialebene eine solche Erzeugende in bestimmtem Sinne durchläuft, die Tangentialebene sich um dieselbe um 180° dreht, ohne umzukehren. Die nicht torsalen singulären Erzeugenden verhalten sich in dieser Hinsicht wie die gewöhnlichen Erzeugenden; im übrigen zeigen die Singularitäten aber noch verschiedenes Verhalten, welches durch charakteristische Zahlen bedingt ist.

Am Schluss der ersten Abhandlung werden die Untersuchungen auf die Regelflächen dritter und vierter Ordnung angewandt. Bei der ersteren treten im allgemeinen zwei Ele-

mentar - Torsalen auf, welche sich aber auch zu einer Torsale vom Range zwei vereinigen können.

In der zweiten Abhandlung werden die Resultate der ersten auf die Binormalen- und Hauptnormalen - Fläche einer algebraischen Raumcurve angewandt, und es wird untersucht, wie die singulären Erzeugenden mit den singulären Punkten der Raumcurve zusammenhängen. A.

Ch. Bioche. Sur les surfaces réglées qui passent par une courbe donnée. C. R. CX. 515-516.

Die Erzeugende einer Regelfläche geht von einer beliebigen Curve C aus in einer Richtung, bestimmt durch den Winkel θ zwischen ihr und der Tangente an C, und durch den Winkel φ zwischen der Berührungsebene der Fläche und der Schmiegungsebene von C. Beim Fortrücken des Ausgangspunktes längs dem Bogen s findet, wie hier ohne Beweis aufgestellt wird, die Relation statt:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \pi + \omega \cot\theta \sin\varphi - G,$$

wo ω die Krümmung, π die Torsion der Curve C bezeichnet, und G^2 die „Totalkrümmung" der Fläche genannt wird. Der Formel zufolge kann man unter $-G^2$ nur das Krümmungsmass (nach Gauss), und zwar im Punkte der Leitlinie, auf welche sich die übrigen Grössen beziehen, verstehen. Weiter wird ohne Beweis der Satz mitgeteilt: Bildet die Erzeugende constanten Winkel mit der Tangente, Haupt- und Binormale der Leitlinie, so liegen ihre Centralpunkte auf einem Rotationscylinder.

H.

Ch. Bioche. Sur les ds^2 des surfaces réglées. S. M. F. Bull. XVIII. 91-95.

Die Parameter, in welchen die Regelfläche ausgedrückt wird, sind der Bogen der Leitlinie s, von dessen Ende die Erzeugende ausgeht, und die Strecke r auf letzterer bis zum laufenden Punkte (X, Y, Z). Dieser beschreibt, entsprechend ds, den Bogen

dS. Die Erzeugende bildet mit der Tangente an s den Winkel ϑ. Der Ausdruck von dS in s und r hat die Form:

$$\left(\frac{dS}{ds}\right)^2 = \left(\frac{dr}{ds} + \cos\vartheta\right)^2 + H^2 r^2 + 2Lr + \sin^2\vartheta.$$

$L = 0$ ist Bedingung dafür, dass s Strictionslinie ist. Statt der Coefficienten H, L werden die Grössen

$$\varrho = \frac{1}{H^2}, \quad K = \frac{H^2}{\sqrt{H^2\sin^2\vartheta - L^2}}$$

eingeführt, deren erstere die Strecke auf der Erzeugenden bis zum Schnitt der Strictionslinie, letztere den „Distributionsparameter" darstellt. In Anwendung hiervon zuerst auf abwickelbare Flächen wird zu einer Untersuchung von Molins in Liouville J. 1847 eine Bestimmung geliefert, dann in Anwendung auf die Normalenflächen der Regelfläche längs den orthogonalen Trajectorien der Erzeugenden eine Formel von Bertrand gewonnen, ausserdem werden in beiden Anwendungen verschiedene Bemerkungen gemacht. H.

E. Cesàro. Sur l'étude intrinsèque des surfaces réglées. Nouv. Ann. (3) IX. 294-297.

Bezeichnen

$$a = \cos\theta, \quad b = \sin\theta\sin\varphi, \quad c = \sin\theta\cos\varphi$$

die Richtungscosinus der Erzeugenden einer Regelfläche gegen die Tangente, Binormale und Hauptnormale der Strictionslinie s, so ist, wie der Verfasser den Angaben von Bioche entnimmt,

$$\frac{d\theta}{ds} = -\omega\cos\varphi, \quad \frac{d\varphi}{ds} = \pi - \omega\cot\theta\sin\varphi - G_0,$$

wo ω die Krümmung, π die Torsion von s bezeichnet und G_0 den Wert von G in der Strictionslinie, G aber die Totalkrümmung der Fläche ausdrücken soll. Da jedoch Bioche nicht G, sondern G^2 die Totalkrümmung nennt, so ist entweder die Formel oder des Verfassers ausdrückliche Angabe, dass dieselbe im Sinne Bioche's zu deuten sei, unrichtig. Die eigene Zuthat des Verfassers besteht nun darin, dass er zu grösserer Allgemeinheit den Variationen $d\theta$, $d\varphi$ neue Variationen $\delta\theta$, $\delta\varphi$ hinzufügt, ohne jedoch zu erklären, welche Verallgemeinerung er

im Sinne hat. Die der Leitlinie wäre überflüssig, da die Formel, die schon für jede Leitlinie gilt, hier erst specialisirt ist. Auch aus den Definitionen der δ geht ein solcher Sinn nicht hervor: $\delta\theta$, $\delta\varphi$ sollen dem Fortrücken der Erzeugenden längs s bei unveränderten Axen (d. i. Tangente etc.) entsprechen; denn das würde eine partielle Variation neben der vollständigen actuellen, also ohne actuelle Bedeutung sein. Unter solchen Umständen vermag Ref. über die weitern Rechnungen nicht zu berichten, welche überdies nur einen anderen Ausdruck für Resultate von Bioche zum Ziele nehmen. H.

M. Chini. Sopra alcune deformazioni delle superficie rigate. Torino Atti. XXVI. 20-34.

Sind $v =$ Const. die Erzeugungslinien einer Regelfläche S, und bezeichnen ϱ und T den Krümmungs- und Torsionsradius der Linie $u =$ Const., θ den Winkel der Tangente zu dieser Curve mit der durch den Berührungspunkt gehenden Erzeugungslinie, φ den Winkel der Schmiegungsebene derselben Curve mit der Tangentialebene der Fläche, so kann man den Ausdruck des Quadrates des Linienelementes auf die folgende Form bringen:

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\theta\, du\, dv + (M^2u^2 + 2Nu + 1)\, dv,$$

wo:

$$M^2 = \left(\frac{\partial\theta}{\partial v} + \frac{\cos\varphi}{\varrho}\right)^2 + \left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{1}{T}\right)\sin\theta - \frac{\sin\varphi}{\varrho}\cos\theta\right\}^2,$$

$$N = -\left(\frac{\partial\theta}{\partial v} + \frac{\cos\varphi}{\varrho}\right)\sin\theta.$$

Hieraus folgt, dass, wenn die Regelfläche derart gebogen wird, dass ihre Erzeugungslinien geradlinig bleiben, zwischen den ursprünglichen Grössen ϱ, T, φ, θ und den veränderten ϱ_1, T_1, φ_1, θ_1 die Relationen:

$$\theta_1 = \theta, \qquad \frac{\cos\varphi_1}{\varrho_1} = \frac{\cos\varphi}{\varrho},$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial v} - \frac{1}{T_1}\right)\sin\theta_1 - \frac{\sin\varphi_1}{\varrho_1}\cos\theta_1$$

$$= \pm\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{1}{T}\right)\sin\theta - \frac{\sin\varphi}{\varrho}\cos\theta\right\}$$

stattfinden müssen. Mit anderen Worten, die drei Functionen ϱ_1, T_1, φ_1 müssen die zwei Gleichungen:

$$\frac{\cos\varphi_1}{\varrho_1} = \frac{\cos\varphi}{\varrho},$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial v} - \frac{1}{T_1}\right)\operatorname{tang}\theta - \frac{\sin\varphi_1}{\varrho_1} = \pm\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{1}{T}\right)\operatorname{tang}\theta - \frac{\sin\varphi}{\varrho}\right\}$$

befriedigen. Von diesen Functionen bleibt also eine willkürlich, oder auch man kann die drei Functionen derart bestimmen, dass zwischen ihnen eine vorgegebene Relation stattfindet. Durch Specialisirung dieser Relation erhält man eine Reihe von Sätzen, von denen wir hier nur zwei als Beispiele anführen wollen:

Man kann immer eine Regelfläche derart biegen, dass eine beliebige Linie derselben in eine sphärische Linie von beliebigem Radius übergehe.

Man kann immer eine Regelfläche derart biegen, dass ein Hauptkrümmungsradius längs einer beliebig vorgegebenen Linie constant werde. Vi.

W. Jung. Analytische Studien aus der Lehre von den windschiefen Flächen. Casop. XIX. 82. (Böhmisch.)

Enthält die Fortsetzung der Untersuchungen, deren erste im vorangehenden Bande der Fortschritte p. 786 angezeigt wurde. Std.

G. Pirondini. Sulla teoria delle superficie di rivoluzione. Annali di Mat. (2) XVIII. 165-212.

Raumcurven, welche durch die Gleichungen

(1) $x = R\cos f(u)$, $y = R\sin f(u)$, $z = U$

gegeben sind, in denen $f(u)$, U und R beliebige Functionen von u bedeuten, erzeugen durch Drehung um die z-Axe eine Rotationsfläche. Diese Fläche ist die nämliche wie diejenige, welche von der Curve

(2) $x_1 = R\cos u$, $y_1 = R\sin u$, $z_1 = U$

beschrieben wird.

Die Curven (1) besitzen in Bezug auf die von ihnen erzeug-

ten Rotationsflächen eine bestimmte geometrische Eigenschaft, welche durch eine Differentialgleichung von der Form

$$(3)\qquad \Theta(f, R, U, f', R', U', \dots) = 0$$

charakterisirt ist, wobei die Striche die Abgeleiteten nach u bedeuten. Zieht man aus dieser Gleichung den Wert von f in der Form:

$$f = \varphi(R, U, R', U', \dots)$$

und führt ihn in (1) ein, so hat man:

$$(4)\quad x = R\cos\varphi(R, U, \dots),\quad y = R\sin\varphi(R, U, \dots),\quad z = U.$$

Man kann nun die willkürliche Function U so bestimmen, dass

$$(5)\qquad \varphi(R, U, \dots) = u$$

wird, indem man aus dieser Gleichung den Wert $U = \psi(R, R', \dots)$ ableitet; dann geht die Curve (2) über in:

$$(6)\qquad x_1 = R\cos u,\quad y_1 = R\sin u,\quad z_1 = \psi(R, R', \dots).$$

Nimmt man jetzt an Stelle der Gleichung (2) als primitive Erzeugende der Fläche die Curve (6), so hat man in (4) nur an Stelle von U die Function ψ zu setzen; dabei sind aber die in Gleichung (3) im allgemeinen auftretenden willkürlichen Constanten $a, b, c, \dots$ zuerst durch andere Constanten $a_1, b_1, c_1, \dots$ zu ersetzen, damit (4) eine andere Curve des durch (6) bestimmten Systems darstellt. Hierdurch erhält man dann als Gleichung der neuen erzeugenden Curve

$$(7)\quad x = R\cos\varphi_1(R, \psi, R', \psi', \dots),\quad y = R\sin\varphi_1(R, \psi, R', \psi', \dots),$$
$$z = \psi(R, R', \dots),$$

wobei φ_1 die Function bedeutet, die entsteht, wenn man in φ die Constanten $a, b, \dots$ durch $a_1, b_1, \dots$ ersetzt.

Die drei verschiedenen Curven (1), (6) und (7), welche zur Erzeugung derselben Rotationsfläche dienen, werden vom Verfasser in sechs Fällen wirklich aufgestellt, die folgenden geometrischen Bedingungen entsprechen: 1) Die Curve (1) stellt eine geodätische Linie der Fläche dar; 2) dieselbe ist eine Loxodrome; 3) eine Schraubenlinie auf einem Cylinder, dessen Erzeugende parallel zur z-Axe sind; 4) die Curve (1) ist eine Orthogonaltrajectorie der Schraubenlinien einer von ihr durch Schraubenbewegung um die z-Axe erzeugten Fläche; 5) sie ist die Berührungscurve der von ihr erzeugten Rotationsfläche mit einem

Cylinder (Schattencurve); 6) sie ist die Berührungscurve der von ihr erzeugten Rotationsfläche mit einem Kegel.

Die für diese sechs Fälle vollständig entwickelten Formeln bieten dann zu zahlreichen Anwendungen Anlass, bei deren Behandlung der Verfasser die fraglichen Flächen eingehend untersucht, indem er die erzeugenden Linien verschiedenen speciellen Bedingungen unterwirft.

Des weiteren wird der Schnitt eines Cylinders, dessen Erzeugende mit der z-Axe einen bestimmten Winkel bilden, mit der Rotationsfläche untersucht, die Schnittcurve für verschiedene Formen des Cylinders aufgestellt, und insbesondere die Projection der letzteren auf die xy-Ebene betrachtet. Dann folgt das Studium der ebenen Schnitte einer Rotationsfläche sowie der Schnittcurve zweier beliebigen Rotationsflächen. Einige Sätze über conjugirte Liniensysteme, über parallele geodätische Linien sowie über Biegungen von Rotationsflächen, bei welchen gewisse Curven wieder in bestimmte Curven übergehen, beenden die Abhandlung, die namentlich für Freunde von speciellen Untersuchungen im Gebiete der Flächentheorie von Interesse ist. Bm.

W. P. Workman. **The theory of the singularities of surfaces of revolution.** Quart. J. XXV. 89-103.

Die sämtlichen Singularitäten, die bei Rotationsflächen vorkommen können, werden auf folgende acht elementare Singularitäten zurückgeführt:

1) Die imaginären vielfachen Tangentialebenen ($x \pm iy = 0$).

2) Knotenpunkt, ein Punkt, wie ihn z. B. die Kegel-Fläche $x^2+y^2 = z^2$ im Anfangspunkte besitzt.

3) Rückkehrpunkt. Einen solchen weist die Fläche $x^2+y^2=z^3$ im Coordinatenanfangspunkte auf.

4) Knotenlinie: eine Kreislinie, deren Ebene senkrecht zur Rotationsaxe steht, und längs welcher sich zwei Mäntel der Fläche schneiden.

5) Rückkehrkante: eine Kreislinie senkrecht zur Rotationsaxe, längs welcher sich zwei Flächenschalen berühren.

6) Wendelinie: ein Kreis senkrecht zur Axe, erzeugt durch Rotation eines Wendepunktes.

7) Ebener Ring: eine Kreislinie, längs welcher eine Ebene, senkrecht zur Axe, die Fläche berührt.

8) Doppelkegel: In diesem Falle kann ein Kreiskegel, dessen Spitze auf der Axe liegt, und der die Fläche längs zweier Kreise, senkrecht zur Rotationsaxe, berührt, construirt werden.

Es wird nun gezeigt, welche verschiedenen Fälle bei diesen elementaren Singularitäten vorkommen können, und wie sich höhere Singularitäten aus ihnen zusammensetzen. Eine Ausnahme bei der Entstehung höherer Singularitäten aus obigen einfachen tritt dann ein, wenn die Axe selbst ein Teil der Rotationsfläche ist, d. h. wenn die Coordinatengleichung der Fläche den Factor x^2+y^2 besitzt; in diesem Falle müssen noch drei weitere Singularitäten hinzugenommen werden, welche der Verfasser Axenpunkt, Axenknoten und Axenspitze nennt. Der erstere ist ein Punkt, in welchem die Fläche die Axe senkrecht schneidet, und muss nun insofern als singulärer Punkt aufgefasst werden, als die Axe selbst zur Fläche gehört; der zweite und dritte sind bezüglich gewöhnliche Knoten- oder Rückkehrpunkte, durch welche die als Flächenteil zählende Axe geht. Die einzelnen Fälle sind durch Beispiele erläutert, die teils vom Verfasser neu gegeben, teils seiner Arbeit über singuläre Lösungen (Quart. J. XXI, F. d. M. XX. 1888. 334) entnommen sind.

Bm.

A. Ahrendt. Ueber die Rectification der Krümmungslinien auf Röhrenflächen. Hoppe Arch. (2) VIII. 442-446.

Statt einer solchen Krümmungslinie kann man offenbar auch sagen: eine Parallele s mit einer beliebigen Urcurve σ, d. i. mit der Mittellinie der Röhre. Es ist bekannt, dass das Linienelement einer Parallele die Form hat:

$$ds = d\sigma(1+\varrho g),$$

wo ϱ den Abstand der Parallelen bezeichnet, wie sich nebst dem

Werte von g durch Differentiation der Gleichung der Parallele sofort ergiebt. Die hier gegebene Herleitung dieser Form führt nun zu folgender geometrischen Deutung von g. Betrachtet man σ als Linie auf der abwickelbaren Fläche A, deren Erzeugende entsprechende Punkte von σ und s verbindet, so ist g die geodätische Krümmung von σ. Ferner wird gefolgert, dass das Areal zwischen s und σ für constante ϱ und σ und für veränderte A constant ist. H.

A. Ahrendt. Untersuchungen zur Theorie der Charaktere der Krümmungslinien auf Röhrenflächen. Hoppe Arch. (2) IX. 31-42.

Jede abwickelbare Normalenfläche einer Curve C hat die Eigenschaft, dass, wenn man auf den Erzeugenden vom Fusspunkte aus eine constante Strecke abschneidet, der Ort des Endpunkts der Curve C parallel ist. Mit Unrecht wird hier die Bezeichnung Parallelcurve als selbstgewählte eingeführt; sie sind es vielmehr im eigentlichen Sinne, d. h. sie haben mit C gemeinsame Normalebene. Der Ort dieser Parallelen ist daher eine Röhrenfläche, deren Normalschnitt ein Kreis vom Radius ϱ in der Normalebene ist, und auf ihr bilden die Parallelen die eine Schar von Krümmungslinien. Nachdem hiermit die Figur vorgeführt ist, wird C als algebraische Curve m^{ter} Ordnung betrachtet und die charakteristischen Zahlen, d. h. die der Ordnung, der Klasse, der Doppelpunkte, der Spitzen, der Inflexionspunkte und der Doppeltangenten der vorkommenden Gebilde ermittelt, und zwar erst allgemein, dann für Krümmungslinien auf Flächen zweiten Grades als Urcurve; auch wird gezeigt, wie die Cayley'sche Theorie der ebenen Parallelcurven sich durch Specialisirung daraus ergiebt. H.

E. Blutel. Recherches sur les surfaces qui sont en même temps lieux de coniques et enveloppes de cônes. Ann. de l'Éc. Norm. (3) VII. 155-216.

Der Verfasser untersucht die Eigenschaften derjenigen Flächen, welche von einem Kegelschnitte erzeugt werden und

längs dieses Kegelschnittes einen Kegel zweiter Ordnung berühren.

Im ersten Teile wird zunächst festgestellt, dass die bezeichneten Flächen sowohl als Eingehüllte von Kegeln, welche auf zwei abwickelbaren Flächen rollen, als auch als Trajectorien von Kegelschnitten, welche auf zwei Curven rollen, aufgefasst werden können.

Alsdann wird der Satz bewiesen, dass die die Fläche erzeugenden Kegelschnitte durch ihre conjugirten homographisch geteilt werden, welcher Satz sich auch umkehren lässt. Daran schliesst sich die Aufstellung der allgemeinen Gleichungen der Fläche und der Beweis gewisser Eigenschaften, welche sich auf die Bewegung des Kegelschnittes und des Kegels beziehen, nebst der Bestimmung gewisser specieller Flächen von besonders einfacher Art.

Im zweiten Teile werden die asymptotischen Linien der Flächen betrachtet, welche auch in gewissen Specialfällen besonders einfache Eigenschaften zeigen; der dritte Teil behandelt gewisse nicht projectivische Eigenschaften, besonders die orthogonalen Trajectionen der Kegelschnitte. A.

P. de Sanctis. Recherche d'une équation des surfaces moulures. Nouv. Ann. (3) IX. 552-556.

Der Verfasser definirt die surface moulure (Gesimsfläche) als eine Fläche, welche beschrieben wird von einer ebenen Curve *C* von unveränderlicher Gestalt, während die Ebene sich normal zu einer Raumcurve *R* bewegt, ohne sich um die Tangente dieser Curve zu drehen, und stellt auf Grund dieser Definition die allgemeine Gleichung einer solchen Fläche auf.

Obwohl diese Entwickelung einfach ist und jede Gesimsfläche durch sie dargestellt werden kann, muss es doch als ein Nachteil bezeichnet werden, dass in die Darstellung unnötiger Weise eine Willkürlichkeit hinein kommt, weil jeder Punkt der bewegten Ebene eine Raumcurve R_1 beschreibt, welche an Stelle der Curve *R* zur Erzeugung benutzt werden kann. Je nach der

Wahl dieser Raumcurve R_1 erhält aber dieselbe Fläche eine andere Gleichung.

Deswegen hält es Referent für sachgemässer, die Gesimsfläche zu definiren als eine Fläche, welche von einer ebenen Curve beschrieben wird, wenn die Ebene als Tangentialebene auf einer abwickelbaren Fläche rollt, ohne zu gleiten. Die Aufstellung der Gleichung ist dann ebenso einfach, und die bezeichnete Willkürlichkeit ist vermieden. A.

T. Motoda. Asymptotic lines of the surface of revolution. Tokio Math. Ges. IV. 213-216.

T. Motoda. Asymptotic lines of a circular ring. Tokio Math. Ges. IV. 217-219.

Bericht in F. d. M. XXI. 1889. 765. E.

J. Lyon. Sur les courbes à torsion constante. Paris. 77 S. 4°.

E. Hunyady. Ueber die Parameterdarstellung der orthogonalen Substitutions-Coefficienten. Ungar. Ber. 30 S. 8°.

B. Theorie der algebraischen Flächen und Raumcurven.

C. A. Laisant. Propriété des surfaces algébriques. S. M. F. Bull. XVIII. 141-144.

Zu drei Eigenschaften der algebraischen Curven, mitgeteilt von Humbert und bewiesen von Fouret, hat bereits Humbert die Analoga in Betreff der algebraischen Flächen aufgestellt und bewiesen. Das Gegenwärtige ist eine neue Herleitung der letzteren. Sie lauten: „Der Ort der Punkte derart, dass die Summe der Quadrate aller von ihnen aus auf eine algebraische Fläche gefällten Normalen constant ist, ist eine Fläche zweiter Ordnung.“ „Variirt diese Summe, so bleibt letztere Fläche concentrisch und

homothetisch." „Ihrem gemeinsamen Mittelpunkte entspricht das Minimum der Quadratsumme der Normalen." H.

J. H. Boyd. A simple proof of a theorem with reference to tangents touching a surface in two points. Annals of Math. V. 109.

Der hier bewiesene Satz lautet: Durch jeden Punkt einer Fläche n^{ten} Grades lassen sich $(n+2)(n-3)$ Tangenten ziehen, welche die Fläche noch ausserdem berühren (s. Salmon's Geom. von drei Dimens.) H.

M. Fouché. Sur les courbes algébriques à torsion constante. Ann. de l'Éc. Norm. (3) VII. 335-344.

Es werden folgende Sätze aufgestellt und bewiesen. 1) Es existirt eine und nur eine Curve, deren Torsionsradius gleich einer gegebenen Constante ist, und deren Binormalen den Seiten eines gegebenen Kegels parallel sind. Sie wird daraus durch Quadratur gefunden. 2) Notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, dass die Curve algebraisch ist, sind die zwei: 1. dass jener Kegel algebraisch ist; 2. dass der Schnitt dieses Kegels und einer Kugel um seine Spitze sich auf einer beliebigen Ebene längs einer algebraisch quadrirbaren Curve so projicirt, dass sich die Frage auf die Ermittelung der sphärischen Curven reducirt, deren Projection auf eine beliebige Ebene algebraisch quadrabel ist. 3) Die Bestimmung einer solchen Curve hängt von der zweier Functionen einer Variable ab, welche eine gewisse Differentialgleichung zweiter Ordnung zweiten Grades für die eine, eine Riccati'sche Gleichung für die andere Function zu erfüllen haben. H.

Lelieuvre. Sur certaines classes de surfaces. C. R. CXI. 568-569.

Die gegenwärtige Arbeit ist Fortsetzung der vorjährigen (C. R. CIX, F. d. M. XXI. 766). Sie betrifft, wie diese, die von

unicursalen ebenen Linien U erzeugten Flächen, Linien, die von ihren Conjugirten homographisch geteilt werden. Dies erfordert, dass die Differentialgleichung der Conjugirten, wenn man die Coordinaten rational im Parameter μ darstellt, eine Riccati'sche Gleichung ist. Die Parameter der Fläche sind t und μ; längs den U ist t constant, längs den Conjugirten μ. Es werden jetzt die Bedingungen für die U gesucht, und es ergeben sich folgende: Liegt der laufende Punkt M von U nicht auf der Charakteristik C, so muss die Tangente an U in einem Wendepunkte M bei Variation von t eine Abwickelbare erzeugen. Liegt M auf C, so sind wieder zwei Fälle zu scheiden, je nachdem die Tangente in M Charakteristik ist oder nicht. Im letzteren Falle muss ein gewöhnlicher Punkt M (mit oder ohne Inflexion) bei variirendem t die Einhüllende der U erzeugen, ein Rückkehrpunkt M fest sein. Im ersteren muss M ein gewöhnlicher Punkt ohne Inflexion sein und die Gratlinie von C beschreiben, ausgenommen den Fall, wo die Charakteristik fest ist. Im letzteren ist M, wofern er ein gewöhnlicher Punkt ist, an keine andre Bedingung gebunden; ist er Rückkehrpunkt, so muss er fest sein. Das gleiche Verfahren lässt sich auch anwenden, wenn die Aufgabe ist, die unicursalen ebenen Linien zu bestimmen, welche von ihren orthogonalen Trajectorien homographisch geteilt werden. Die Bedingungen sind als Resultat angegeben. H.

E. Ciani. Sulle superficie algebriche simmetriche.
Rom. Acc. L. Rend. (4) VI_1. 399-407.

Herr Goursat hat in einer Abhandlung (Ann. de l'Éc. Norm. (3) IV, F. d. M. XIX. 1887. 781) über Flächen, welche alle Symmetrieebenen eines regulären Polyeders besitzen, die Maximalzahl der Symmetrieebenen eines Ebenen-Büschels nicht bestimmt, welche eine Fläche besitzen kann, ohne eine Rotationsfläche zu sein, deren Axe die Axe des Ebenenbüschels ist. Diesen Fall behandelt der Autor in der vorliegenden Note, indem er ihn auf die Untersuchung des analogen Problems für ebene Curven zurückführt, das er in seiner Habilitationsschrift (Pisa Ann. VI.

1-160, F. d. M. XXI. 1889. 617) untersucht hat. Es ergeben sich hierbei folgende allgemeine Sätze:

1) Eine algebraische Fläche kann so viele Ebenen eines Ebenenbüschels zu Symmetrieebenen haben, als eine unter ihrem Grade liegende Zahl Einheiten hat.

2) Alle Flächen ungeraden Grades mit einer geraden Anzahl von Symmetrieebenen des Ebenenbüschels enthalten eine unendlich ferne Gerade, durch welche alle zur Axe des Büschels senkrechten Geraden gehen.

3) Eine algebraische Fläche vom Grade n kann nicht mehr als n Ebenen eines Ebenenbüschels zu Symmetrieebenen haben, ohne in eine Rotationsfläche überzugehen.

In Bezug auf die Flächen dritten Grades folgen hieraus zwei Typen: I. Flächen mit zwei zu einander senkrechten Symmetrie-Ebenen; II. Flächen mit drei Symmetrie-Ebenen, die unter dem Winkel von $\frac{\pi}{3}$ zu einander geneigt sind. Zu diesen zwei Flächengattungen treten dann noch die drei bereits von Herrn Goursat angegebenen hinzu, von denen die erste die Symmetrie der Doppelpyramide (III), die zweite die Symmetrie des regulären Tetraeders (IV) und die dritte nur eine Symmetrieebene besitzt (V). Diese fünf Flächengattungen sind, wie der Verfasser nachweist, die einzigen Flächen dritter Ordnung, welche Symmetrieebenen besitzen können.

Der interessanteste Fall ist No. III, welcher durch die Gleichung

$$x^3-3xz^2+\alpha(x^2+z^2)+\beta y^2+\gamma = 0$$

charakterisirt ist und im Zusammenhang mit der zugehörigen Hesse'schen Fläche eingehend untersucht wird. Dabei ergiebt sich ein specieller Fall, in welchem das Problem der 27 Geraden nur von der Lösung einer Gleichung dritten Grades abhängt.

Bm.

G. Castelnuovo. Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve iperellittiche. Palermo Rend. IV. 73-88.

Da die bei eindeutiger Transformation invarianten Eigenschaften der ebenen Curven eng verbunden sind mit den Eigenschaften jener Flächen, als deren ebene Schnitte diese Curven betrachtet werden können, so stellt sich der Verfasser die Aufgabe, diese Schnittcurven zu untersuchen, und gelangt zu dem Nachweise, dass eine Fläche, deren ebene Schnitte hyperelliptische Curven sind, unter gewissen Beschränkungen rational ist, d. h. eindeutig auf die Ebene abgebildet werden kann. Da die rationalen und elliptischen Curven als specielle Fälle der hyperelliptischen aufgefasst werden können, so werden sie kurz besprochen, und zwar wird zuerst darauf hingewiesen, dass die Herren Noether (Math. Ann. III, vgl. F. d. M. II. 1869/70. 616), Picard (J. für Math. C, F. d. M. XVIII. 1886. 743) und Guccia (Palermo Rend. I. 165 - 168, F. d. M. XIX. 1887. 787) bereits gezeigt haben, dass alle Flächen mit rationalen Schnitten rational sind, und dass die einzigen Flächen dieser Gattung die rationalen Regelflächen und die Steiner'sche Fläche sein können. Dann ergiebt sich weiter, dass jede Fläche, deren Schnitte elliptische Curven sind, rational sein muss, dass aber der Grad einer solchen Fläche höchstens die Zahl 9 erreicht. Hierauf folgt der Beweis für die bereits erwähnte Rationalität der Flächen mit hyperelliptischen Schnitten, wobei sich ergiebt, dass, wenn das Geschlecht der Schnittcurve >1 ist, die Fläche ∞^1 Kegelschnitte enthält, und zwar in der Weise, dass durch jeden Punkt der Fläche nur ein Kegelschnitt geht. Eine solche Fläche mit hyperelliptischen Schnittcurven kann so auf die Ebene abgebildet werden, dass den Schnitten der Fläche Curven von einem gewissen Grade r entsprechen, die einen $(r-2)$-fachen Punkt und etwa noch andere Punkte zu gemeinsamen Basispunkten haben. Der Grad der Fläche, welche hyperelliptische Curven vom Geschlechte π zulässt, kann dann höchstens $4\pi+4$ betragen. Beschränkt man sich auf die Untersuchung der Flächen, die diesen Maximalgrad besitzen, und nennt Directrixcurve eine jede Curve auf der Fläche, welche jeden der ∞^1 Kegelschnitte nur in einem Punkte schneidet, so kann man die Flächen nach der kleinsten Zahl der Directrices klassificiren und erhält hierdurch zwei ver-

schiedene Flächenspecies, die vom Autor zuerst direct und dann durch Betrachtung der linearen Systeme untersucht werden, die sie in der Ebene darstellen. Bm.

G. Castelnuovo. Sulle superficie algebriche le cui sezioni sono curve di genere 3. Torino Atti. XXV. 695-715.

Anknüpfend an die Untersuchungen der eben besprochenen Note, wird hier das folgende allgemeinere Problem aufgestellt: Rechnet man alle Flächen, deren Schnittcurven ein gegebenes Geschlecht besitzen, dann zu einer Familie, wenn sie alle aus einer derselben durch Projection von einem ausserhalb oder auf ihr gelegenen Punkte erhalten werden können, so handelt es sich darum, alle jene Flächenfamilien anzugeben, deren Schnittcurven ein gegebenes Geschlecht π besitzen, und dieselben vom Gesichtspunkte ihrer Darstellbarkeit auf bekannten oder einfacheren Raumgebilden zu studiren. Unter Schnitt einer Fläche hat man hierbei das Schnittgebilde einer in einem Raume von r Dimensionen S_r gelegenen Fläche mit einem Raume S_{r-1} zu verstehen. Durch die Schwierigkeit des Problems sieht sich jedoch der Verfasser gezwungen, seine Untersuchungen auf diejenigen Flächen mit Schnittcurven von gegebenem Geschlechte π zu beschränken, welche ein System von mindestens $\infty^{\pi-1}$ Curven von der Ordnung $2\pi-2$ besitzen, die auf der erzeugenden Schnittcurve die Specialschar $g_{2\pi-2}^{(\pi-1)}$ ausschneiden. Die Lösung dieses Problems, das er im Falle der „hyperelliptischen" Curven vom Geschlechte $\pi \gtreqless 2$ bereits in der vorangehend besprochenen Note behandelt hat, gelingt ihm in der vorliegenden Abhandlung auch allgemein für den Fall des Geschlechtes $\pi = 3$.

Ist $F^{(n)}$ eine Fläche n^{ter} Ordnung, deren erzeugender Schnitt eine Curve vom Geschlechte 3 ist, und giebt es auf einer solchen Fläche ein lineares System (γ), bestehend aus Curven γ von der Ordnung 4, welche auf jeder Schnittcurve von $F^{(n)}$ die Specialschar $g_4^{(2)}$ ausschneiden, so kann man die Flächen $F^{(n)}$ nach dem Charakter des Systems (γ) in vier Species einteilen:

Flächen „erster Species" erhält man dann, wenn in (γ) ein lineares System von ∞^3 rationalen Curven vierter Ordnung (γ_0) enthalten ist;

Flächen „zweiter Species", wenn in (γ) ein lineares System von ∞^3 Curven vierter Ordnung vom Geschlechte 1 allein sich findet;

die „dritte Species" ergiebt sich, wenn in (γ) ein System von ∞^3 Curven vierter Ordnung vom Geschlechte 2 allein vorkommt, und

die „vierte Species", wenn (γ) nur Systeme von ∞^3 Curven vierter Ordnung vom Geschlechte 3 enthält. Dazu kommt dann noch der Fall, dass γ in zwei Kegelschnitte zerfällt, was bei den Flächen mit hyperelliptischen Schnitten eintritt, und dass γ in vier Gerade sich auflöst, welcher Fall den Regelflächen entspricht.

Aus der Fülle von Resultaten, welche der Verfasser durch Betrachtung dieser Flächengattungen gewinnt, können wir hier nur folgende als die wichtigsten herausheben:

Jede Fläche der ersten Species ist rational und kann auf der Ebene mittels eines linearen Systems von allgemeinen Curven vierter Ordnung dargestellt werden. Der Grad einer solchen Fläche kann höchstens die Zahl 16 erreichen, welche einer Fläche $F^{(1)}$ entspricht, die dem Raume S_{14} angehört. Jede Fläche erster Species kann dann aus $F^{(1)}$ durch Projection gewonnen werden.

Jede Fläche zweiter Species wird durch Projection einer Fläche achter Ordnung $F^{(2)}$ des S_8 abgeleitet, welche der höchsten möglichen Ordnung entspricht, und zwar, indem man zunächst aus ihr für einzelne Räume gewisse Normalflächen und aus diesen dann durch Projection alle übrigen ableitet. Diese $F^{(2)}$ lässt sich auffassen als der Schnitt einer Fläche zweiter Ordnung des S_6 mit einem Kegel, der von einem ausserhalb des Raumes S_5 gelegenen Punkte eine Fläche vierter Ordnung $\Phi^{(4)}$ projicirt, die diesem S_5 angehört. Die Fläche $\Phi^{(4)}$ wurde bereits von Herrn Veronese studirt: Mem. Accad. dei Lincei (vgl. auch Segre: Considerazioni intorno alla geometria delle coniche, Torino Atti XX, F. d. M. XVII. 1885. 607 und Study:

Ueber die Geometrie der Kegelschnitte, Math. Ann. XXVII, F. d. M. XVIII. 1886. 629). Ferner kann $F^{(2)}$ auf eine einfache Ebene eindeutig abgebildet werden, und zwar mit Hülfe eines Systems von ∞^6 Curven sechster Ordnung mit sieben gemeinsamen Doppelpunkten, woraus sich eine Reihe von Eigenschaften der $F^{(2)}$ ableiten lässt.

Die Flächen dritter und vierter Species werden vom Autor nur kurz erwähnt, da ihre Untersuchung leichter dadurch geschieht, dass man sie als zu den Flächen vom Geschlechte 1 oder zu den Regelflächen gehörig betrachtet. Ausserdem hat schon Herr Noether (Ueber die rationalen Flächen vierter Ordnung, Math. Ann. XXXIII) auf sie bezügliche Fragen eingehend behandelt. Diejenige Fläche endlich, aus welcher durch Projection alle jene Flächen erhalten werden können, deren Curven γ in Kegelschnitte zerfallen, ist die F^{16} des Raumes S_{14} und wird auf der Ebene entweder repräsentirt mittels jener Curven sechsten Grades, welche einen vierfachen und einen Doppelpunkt gemeinsam haben, oder mittels Curven von der Ordnung $8-\mu$ mit einem $(6-\mu)$-fachen Punkte und $3-\mu$ zu diesem unendlich benachbarten Doppelpunkten ($\mu = 0, 1, 2, 3$). Bm.

A. Brill. Ueber rationale Curven und Regelflächen. Math. Ann. XXXVI. 230-238.

Sind $f(\lambda)$, $\varphi(\lambda)$, $\psi(\lambda)$, $\chi(\lambda)$ vier ganze rationale Functionen n^{ten} Grades von λ, so stellen die Gleichungen

$$x:y:z:1 = f(\lambda):\varphi(\lambda):\psi(\lambda):\chi(\lambda)$$

die Coordinaten einer rationalen Raumcurve C_n dar, deren Punkte den Werten des Parameters λ eindeutig zugeordnet sind. Ferner sei eine andere Raumcurve p^{ter} Klasse K_p entsprechend gegeben durch die Gleichungen

$$u:v:w:1 = \alpha(\mu):\beta(\mu):\gamma(\mu):\delta(\mu),$$

wo $\alpha(\mu)$, $\beta(\mu)$, $\gamma(\mu)$, $\delta(\mu)$ ganze rationale Functionen p^{ten} Grades von μ bedeuten; dann drückt die Gleichung

$$F(\lambda,\mu) = \alpha(\mu)f(\lambda)+\beta(\mu)\varphi(\lambda)+\gamma(\mu)\psi(\lambda)+\delta(\mu)\chi(\lambda) = 0$$

aus, dass der dem Parameterwerte λ entsprechende Punkt der

Curve C_n auf der zu μ gehörigen Ebene der Curve K_p gelegen ist. Wenn nun die Functionen $f, \varphi, \psi, \chi, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ von der besonderen Art sind, dass die Function $F(\lambda, \lambda)$ identisch für alle λ verschwindet, so entspricht jedem Punkte λ der Curve C_n eindeutig die Schmiegungsebene $\mu = \lambda$ der Curve K_p, so dass in diesem Falle die beiden Curven eindeutig auf einander bezogen sind. Nimmt man die Coefficienten der Functionen f, φ, ψ, χ als gegeben an, so liefert die Identität $F(\lambda, \lambda) = 0$ für die $4p+4$ homogenen Coefficienten der Functionen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gerade $n+p+1$ lineare Gleichungen, und diese sind demnach, wenn man $p = \frac{1}{3}(n-2)$ annimmt, im allgemeinen eindeutig bestimmt, d. h.: Wenn n von der Form $3p+2$ ist, so giebt es zu einer rationalen Raumcurve C_n von der n^{ten} Ordnung im allgemeinen eine bestimmte Raumcurve K_p von der p^{ten} Klasse, welche sich jener eindeutig in der Weise zuordnet, dass jede ihrer Schmiegungsebenen durch den ihr entsprechenden Punkt der C_n geht. Es ist klar, dass man unendlich viele Curven von der genannten Eigenschaft erhalten kann, indem man p grösser als $\frac{1}{3}(n-2)$ wählt. Die auf solche Weise erhaltenen Klassencurven lassen sich umgekehrt zu einer linearen Construction der C_n verwenden. Nimmt man nämlich irgend drei solcher Klassencurven K_p, so schneiden sich je drei entsprechende Schmiegungsebenen derselben in einem Punkte der C_n, und dabei ist es offenbar, dass man für die Klasse der Curven K_p in keinem Falle eine höhere Zahl als $\frac{1}{3}(n+2)$ zu nehmen braucht. Indem man nun die Klassencurven, aus denen die gegebene Ordnungscurve entsteht, ihrerseits aus Curven niederer Ordnung erzeugt und so fortfährt, kommt man schliesslich auf lauter Punktreihen, bezüglich Ebenenbüschel, aus denen sich somit durch passende Anordnung der Construction jede rationale Raumcurve herstellen lässt. Die nämliche Methode führt zu den entsprechenden Sätzen über die Construction der allgemeinen rationalen ebenen Curve und der rationalen windschiefen Fläche.

Ht.

G. Humbert. Sur une classe de surfaces algébriques. Palermo Rend. IV. 54-56.

Die Note beschäftigt sich mit einer Klasse algebraischer Flächen, welche durch Gleichungen von der Gestalt

$$\varrho x_i = \Sigma\Theta(u)\Theta'(v) \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

dargestellt werden, wo x_1, x_2, x_3, x_4 homogene Punktcoordinaten und Θ, Θ' holomorphe thetafuchsische Functionen der Veränderlichen u und v beziehungsweise vom Geschlechte p und p' sind. Der Verfasser zeigt, dass das Geschlecht dieser Flächen, d. h. die Anzahl der linear unabhängigen, überall endlichen Doppelintegrale der Fläche, im allgemeinen gleich pp' ist. Es werden ferner Anwendungen dieses Satzes gemacht auf Flächen, welche ein unendliches System von Unicursalcurven enthalten; zu diesen Flächen gehören unter anderen diejenigen Flächen, welche die Eigenschaft besitzen, dass ein jeder ebener Schnitt eine Curve vom Geschlechte 1 oder 0 ist. Ht.

A. Sucharda. Zur Theorie einer Gattung windschiefer Flächen. Wien. Ber. XCIX. 549-569.

Man nehme zwei Ebenen A und B im Raume und in diesen zwei projectiv auf einander bezogene Strahlenbüschel an. Ferner liege in der Ebene A eine rationale Curve m^{ter} Ordnung und in der Ebene B eine rationale Curve n^{ter} Ordnung; beide seien ohne Rückkehrpunkte. Durch einen Punkt der rationalen Curve m^{ter} Ordnung construire man den Strahl des in A gelegenen Strahlenbüschels. Da der entsprechende Strahl des projectiven Strahlenbüschels die in B gelegene Curve n^{ter} Ordnung in n Punkten schneidet, und auch umgekehrt das Entsprechende gilt, so ist durch unsere Construction eine (m, n)-Correspondenz der beiden Curven gegeben. Die vorliegende Arbeit untersucht die windschiefe Fläche P, welche entsteht, wenn man die entsprechenden Punkte der beiden Curven durch gerade Linien verbindet. Die Curve in A ist eine n-fache, die in B gelegene ist eine m-fache Curve der windschiefen Fläche. Die Ordnung der Fläche ist $2mn$. Die Zahl der Doppelpunkte eines beliebigen ebenen Schnittes, d. h. die Ordnung der Doppelcurve der Fläche, ergiebt sich gleich $2m^2n^2-4mn+m+n$. Der Rang der Fläche, d. h. die Klasse

ihres ebenen Schnittes, ist gleich $6mn-2m-2n$. Für das Geschlecht der Fläche ergiebt sich die Zahl $(m-1)(n-1)$, und hieraus folgt, dass die Fläche rational wird, dann und nur dann, wenn entweder $m=1$ oder $n=1$ ist. Nachdem noch die Developpable D, welche der windschiefen Fläche längs der Leitcurve in B umschrieben ist, und insbesondere deren Schnittcurve mit der Ebene A untersucht worden ist, wendet der Verfasser die gefundenen Resultate auf den bereits erwähnten besonderen Fall der rationalen Fläche an, indem er $m=1$ setzt.

Ht.

C. Raumgebilde ersten, zweiten und dritten Grades.

Ed. Lucas. Sur quelques questions de signe en géométrie analytique. Mathesis X. 5-8.

Analytische Unterscheidung zweier Arten des Kreuzens zweier Geraden im Raume (Geraden, die weder parallel sind, noch sich treffen), nebst anderen ähnlichen Zeichenfragen. Man vergleiche Duhamel's Mechanik, Einleitung, Cap. II.

Mn. (Lp.)

J. Neuberg, W. J. C. Miller. Solution of question 10412. Ed. Times LIII. 74-76.

Wenn ein Tetraeder $ABCD$ und ein Punkt P gegeben sind, so lege man durch P eine solche Ebene, die den Dreikant A in einem Dreiecke T_1 mit dem Schwerpunkte P schneide. Construirt man ebensolche Dreiecke T_2, T_3, T_4 für die Dreikante B, C, D, so sind die vier Dreiecke T_1, T_2, T_3, T_4 einer und derselben Fläche zweiter Ordnung einbeschrieben. Hr. W. J. C. Sharp, welcher ebenfalls eine Lösung der Aufgabe eingesandt hat, erweitert dieselbe auf einen Raum von n Dimensionen unter Bezugnahme auf seine Abhandlungen in Lond. M. S. Proc. XVIII u. XIX.

Lp.

L. Rezeau. Solution de la question 226. J. de Math. spéc. (3) IV. 253-258.

Lösung folgender zwei Aufgaben: 1) Fünf Punkte auf einer Geraden sind gegeben. Diese bewegt sich derart, dass vier jener Punkte die vier Seitenflächen eines Tetraeders beschreiben. Zu beweisen, dass der fünfte Punkt eine Ellipse beschreibt (Mannheim). 2) Wenn einer jener ersten vier Punkte auf der Geraden verschoben wird, so ändert sich die Ellipse. Zu beweisen, dass der Ort ihres Mittelpunktes eine andere Ellipse ist, deren Bestimmungsstücke zu finden sind (Amigues). Zwei andere Sätze werden vom Verf. hinzugefügt. Lp.

J. Vályi. Klassification der Flächen zweiter Ordnung. Hoppe Arch. (2) IX. 223-224.

Der Verfasser setzt die Gleichung der Fläche in der Form voraus:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy \\ +2a_{14}xt+2a_{24}yt+2a_{34}zt+a_{44}t^2=0.$$

Dann sei $D=|a_{ik}|$ $(i,k=1,2,3,4)$ und A_{ik} die Unterdeterminante von a_{ik}, so hat man die Hauptfälle:

$$A_{44}\gtrless 0 \text{ Centralflächen,}$$
$$A_{44}=0,\quad D\gtrless 0 \text{ Paraboloide,}$$
$$A_{44}=0,\quad D=0 \text{ Cylinder.}$$

Diese Hauptfälle werden nun noch weiter in Unterfälle geschieden, so dass die Kriterien für die einzelnen Arten der Flächen deutlich herauskommen. Mz.

E. Carvallo. Contact de deux quadriques. Nouv. Ann. (3) IX. 586-594.

Es werden der Reihe nach für zwei Flächen zweiten Grades, deren Gleichungen in vier homogenen Coordinaten allgemein gegeben sind, die Bedingungen dafür angegeben, dass die Flächen eine einfache, doppelte, dreifache, vierfache — und mehr als vierfache Berührung mit einander haben. Die aufgefundenen

analytischen Bedingungen werden geometrisch interpretirt. Von grosser Wichtigkeit ist hierbei die Gleichung vierten Grades, durch welche die vier Kegel erhalten werden, die sich durch die Schnittcurve der beiden Flächen legen lassen. Mz.

A. Koch. Ueber die Spitzenörter aller orthogonalen, gleichseitigen oder dazu dualen Kegel, welche an eine Fläche zweiter Ordnung tangential gehen. Hoppe Arch. (2) IX. 250-285.

Ein Kegel $Ax^2+By^2+Cz^2=0$ heisst „orthogonal", wenn

$$(A+B-C)(A-B+C)(-A+B+C)=0,$$

„gleichseitig", wenn

$$A+B+C=0$$

ist, der Kegel

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=0$$

in beiden vorigen Fällen „dual" zum erstern. In Anwendung auf die Tangentialkegel einer centrischen Fläche zweiter Ordnung, welche beziehungsweise diese vier Eigenschaften haben, werden nun die Gleichung eines Tangentialkegels und die der Oerter seiner Spitze aufgestellt, dann insbesondere für gleichseitige oder dual-gleichseitige, dann für orthogonale, dann für dual-orthogonale Tangentialkegel; die Anwendung auf Paraboloide als Urflächen wird besonders untersucht. Es ergeben sich viele Sätze. H.

G. Humbert. Sur les normales aux quadriques. C. R. CXI. 963-965.

Der Verfasser stellt über die 28 Doppeltangenten, welche man von einem Punkte M aus an die Krümmungsmittelpunktsfläche einer Oberfläche zweiten Grades ziehen kann, und zu welchen bekanntlich auch die sechs von M aus an die Fläche zweiten Grades gelegten Normalen gehören, mehrere Sätze auf, von denen besonders diejenigen bemerkenswert sind, welche sich ergeben, wenn der Punkt M seine Lage im Raum auf irgend

eine Art verändert. Diese Sätze sind indessen so zahlreich, dass auf die kleine Arbeit selbst verwiesen werden muss.

Wbg.

E. Janisch. Bemerkungen betreffend eine Klasse von Curven auf dem einschaligen Rotationshyperboloide. Hoppe Arch. (2) IX. 219-223.

Der Verfasser betrachtet Curven, die folgendermassen entstehen: Es seien zwei sich schneidende Gerade a_1 und a_2 gegeben, ferner eine Gerade DD', welche diese beiden unter gleichen Winkeln kreuzt, und deren Projection auf die Ebene a_1a_2 mit der Halbirenden des Winkels (a_1a_2) zusammenfällt. Diese Geraden a_1, a_2 drehen sich nun mit für jede verschiedener, constanter Geschwindigkeit um DD'. Hierbei beschreibt die eine wie die andere ein und dasselbe einschalige Rotationshyperboloid. Gleichzeitige Lagen der a_1, a_2 sind nicht derselben Schar angehörige Erzeugende dieses Hyperboloids, und mithin haben die Geraden in jeder Lage einen Punkt gemein. Der Ort dieser Coincidenzpunkte ist eine Raumcurve, welche in gegenwärtiger Arbeit hinsichtlich einiger bemerkenswerten Eigenschaften untersucht wird.

Mz.

Gambey. Solution de la question de mathématiques spéciales proposée au concours d'agrégation des sciences mathématiques de 1889. Nouv. Ann. (3) IX. 129-138.

G. Leinekugel. Concours d'agrégation (1889). J. de Math. spéc. (3) IV. 200-206.

Gegeben seien ein Kegel (C) und zwei ihm einbeschriebene Flächen (A) und (A') zweiter Ordnung; man betrachte eine andere demselben Kegel einbeschriebene Fläche (S) zweiter Ordnung, welche jede der Flächen (A) und (A') in einem veränderlichen Punkte α resp. α' berührt. 1) Zu beweisen, dass die Gerade $\alpha\alpha'$ durch einen festen Punkt geht. 2) Welches ist der Ort für die Schnittgerade der an (S) in α und α' gelegten Tangentialebenen? 3) Zu beweisen, dass der Ort des Poles einer

festen Ebene in Bezug auf die veränderliche (S) aus zwei einander doppelt berührenden Flächen zweiter Ordnung besteht. 4) Wenn diese Ebene sich so bewegt, dass sie einer Tangentialebene von (C) parallel bleibt, welches ist alsdann der Ort der Geraden, welche die beiden Berührungspunkte der beiden eben genannten Flächen verbindet? R. M.

G. Leinekugel. Concours général de 1890. J. de Math. spéc. (3) IV. 138, 153-157.

S. Ravier. Solution de la question proposée au concours général de 1890. Nouv. Ann. (3) IX. 614-619.

Es ist eine Fläche zweiten Grades S, ein fester Punkt A auf dieser Fläche und ein Kegelschnitt C in einer Ebene P gegeben. Die drei Geraden, welche den Punkt A mit den Punkten A_1, A_2, A_3 eines in der Ebene P gelegenen Dreieckes T verbinden, treffen die Fläche S ausser in A beziehungsweise in den Punkten a_1, a_2, a_3.

1) Zu beweisen, dass die Ebene $a_1a_2a_3$ durch einen festen Punkt M geht, wenn das Dreieck T sich in der Ebene P so bewegt, dass es in Bezug auf den Kegelschnitt C conjugirt bleibt.

2) Den Ort des Punktes M zu finden, wenn der Kegelschnitt C so variirt wird, dass er einem gegebenen Vierseit umgeschrieben bleibt.

3) Den Ort des Punktes M zu finden, wenn C so variirt wird, dass er einem gegebenen Vierseit eingeschrieben bleibt.

Als Ort des Punktes M ergiebt sich im Falle 2) ein Kegelschnitt, im Falle 3) eine Gerade. Wbg.

C. Benz. Anwendung des Taylor'schen Satzes zur Rectification der Ellipse und zur Complanation des Ellipsoids. Hoppe Arch. (2) VIII. 378-387.

Die Ellipse wird dargestellt durch $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$, der Bogen in der Form

$$a\int_0^\varphi d\varphi\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi},$$

entwickelt nach Potenzen von φ, die Rechnung ausgeführt bis zur 11. Potenz. Hiervon wird u. a. Anwendung auf den Erdmeridian gemacht und φ in der geographischen Breite ausgedrückt. Zur Entwickelung der Ellipsoidfläche wird erst z als Function von x, y eingeführt, dann das ebene Element $dxdy$ in $rdrd\chi$ transformirt und die Entwickelung des Integrals nach Potenzen des Radiusvectors r vorgenommen. H.

R. Marcolongo. Sulle geodetiche tracciate sulle quadriche prive di centro. Rom. Acc. L. Rend. (4) VI_1. 392-399.

Es wird die Differentialgleichung der geodätischen Linien des elliptischen Paraboloids integrirt, die bekanntlich, im Falle dass der Ausgangspunkt der geodätischen Linien ein Nabelpunkt ist, auf Exponentialfunctionen, im Falle aber dass er ein beliebiger Flächenpunkt ist, auf elliptische ϑ-Functionen führt. Dabei finden einige bereits für die Mittelpunktsflächen zweiten Grades bekannte Sätze auf dem Paraboloide ihre Analoga. Die Formeln, welche die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der geodätischen Linien ausdrücken, werden zum Schlusse in eine Gestalt gebracht, die zu einer ähnlichen numerischen Rechnung geeignet erscheint, wie sie der Referent im Falle der Mittelpunktsflächen zweiten Grades mittels hyperelliptischer Functionen ausführte. (Math. Ann. XX. 557, F. d. M. XIV. 1882. 689.) Zum Schlusse sei noch ein Druckfehler bemerkt, der sich p. 393 findet: es muss daselbst $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 2z$ statt $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ stehen.

Bm.

G. de Berardinis. Le coordinate geodetiche ortogonali e le geografiche sulla sfera e sull' ellissoide di rotazione. Batt. G. XXVIII. 53-91, 138-153.

Fortsetzung und Schluss der Arbeit, über deren Anfang F. d. M. 1889. XXI. 798 berichtet ist. Auch die vorliegenden Teile enthalten weitere Entwickelungen der in der praktischen Geodäsie anzuwendenden Methoden. A.

O. GUTSCHE. Ueber eine neue Erzeugungsart der Regelflächen zweiter Ordnung. Diss. Halle. 32 S. 8°.

J. B. ECK. Ueber die Verteilung der Axen der Rotationsflächen zweiten Grades, welche durch gegebene Punkte gehen. Diss. Münster. 147 S. 8°.

Bericht auf S. 668 dieses Bandes.

J. KRAUSZLER. Coordinaten der Platonischen Polyeder und ihrer Tangential- und Schnittkörper. Wien. 20 S. 8°.

C. BIEHLER. Notes de géométrie analytique sur les surfaces du second ordre. Paris. 52 S. 8°.

F. HAFT. Sobre la construction de una superficie del tercer orden de Grassmann. Soc. Argentinea XXIX.

Untersuchung der Oberfläche dritter Ordnung nach Grassmann im Journ. für Math. XLIX. Tx. (Lp.)

E. LEBON. Sulla determinazione degli ombeliche delle superficie tetraedriche. Palermo Rend. IV. 115-117.

Die kurze Note bezieht sich auf gewisse Flächen, welche der Verfasser in einer Reihe von Mitteilungen (J. de Math. spéc. (3) III, F. d. M. XXI. 1889. 786) besprochen hat, und deren Gleichung ist

$$a+b[x^2+y^2+z^2]+2xyz=0.$$

Dieselbe ist tetraedrische Fläche oder Tetraedroid genannt, weil sie dieselben sechs Symmetrieebenen besitzt, wie das Tetraeder.

Es wird der Satz aufgestellt:

Das Tetraedroid besitzt vier Nabelpunkte, das sind die Punkte, in denen die Höhenlote des Tetraeders die Fläche

schneiden. Ihr Krümmungs-Mittelpunkt ist der zugehörige Eckpunkt des Tetraeders. A.

D. Andere specielle Raumgebilde.

L. Berzolari. Sulla curva gobba razionale del quarto ordine. Lomb. Ist. Rend. (2) XXIII. 96-106.

Nach dem Vorgange von Beltrami und d'Ovidio bei den Curven dritter Ordnung (F. d. M. I. 246, IX. 88) untersucht der Verfasser ein einfach unendliches System von Hyperboloiden, welches mit der rationalen Raumcurve vierter Ordnung in enger Beziehung steht. Man weiss, dass von einem Punkte P einer solchen Curve an dieselbe drei Schmiegungsebenen gelegt werden können; die Tangenten in den drei Berührungspunkten derselben bestimmen ein Hyperboloid, welches also dem Punkte P eindeutig zugeordnet ist; es berührt die Curve in jenen drei Punkten und schneidet sie in zwei anderen, deren Hyperboloide wiederum durch P gehen. Der Verfasser geht den Eigenschaften der hierbei auftretenden Involutionen und symmetrischen Systeme nach und studirt die Besonderheiten, welche bei den Specialfällen der äquianharmonischen Curve und der Curve mit Doppelpunkt auftreten.

R. M.

K. Rohn. Die Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species. Erster Teil. Leipz. Ber. XLII. 208-244.

Der Verfasser stellt sich die Aufgabe, die Raumcurve C_4 vierter Ordnung zweiter Species und ihre covarianten Gebilde analytisch darzustellen. Wenn auch die geometrischen Resultate meist bekannt sind, so verdient die Arbeit doch deshalb Beachtung, weil hier zum ersten Male eine Parameterdarstellung der Doppelcurve D_6 der Tangentenfläche von C_4 sowie die Gleichungen einiger covarianten Flächen gegeben werden. Bekanntlich geht C_4 durch drei geschart involutorische Punkttransformationen in sich über, deren Leitstrahlen die Gegenkanten eines Tetra-

eders bilden. Diesen Satz beweist der Verfasser mittels der ein-dreideutigen Beziehung, welche durch C_4 zwischen den beiden Scharen des Hyperboloids hervorgerufen wird, das C_4 enthält. Dieses Tetraeder wird hier als Coordinatentetraeder gewählt, wodurch sich die Parameter-Darstellung von C_4 ganz einfach gestaltet. Sehr leicht ergeben sich dann die Gleichungen der Flächen J_3 und Φ_3, welche von den die Curve in äquianharmonischen, beziehungsweise harmonischen Punkten schneidenden Ebenen umhüllt werden, sowohl in Ebenen- wie in Punktcoordinaten. Die Doppelcurve D_6 der Tangentenfläche T_6 von C_4 wird untersucht mittels der zwei-zweideutigen Beziehung, welche zwischen ihren Punkten und denjenigen von C_4 besteht. Der bekannte Satz, dass D_6 rational und reciprok zu C_4 auf vierfache Weise ist, wird damit gewonnen. Nun kann die Parameterdarstellung für die Punkte und Schmiegungsebenen von D_6 aufgestellt werden. Ferner wird die Developpable Π_6 der Doppeltangentialebene von C_4 und ihre Rückkehrcurve R_6 betrachtet und die bekannte collineare Transformation gegeben, mittels welcher R_6 aus D_6 hervorgeht. D_6 und R_6 werden dann auch durch die Schnitte von Flächen zweiter und dritter Ordnung bestimmt. W. St.

G. Loria. Sull'applicazione delle funzioni Jacobiane allo studio delle linee sghembe di quarto ordine e prima specie. Rom. Acc. L. Rend. (4) VI_2. 179-187.

Die Coordinaten der Punkte einer Raumcurve vierter Ordnung erster Species lassen sich, bezogen auf ein Tetraeder, dessen Ecken die Spitzen der vier Kegel sind, auf welchen die Curve liegt, proportional setzen den vier Jacobi'schen elliptischen Thetafunctionen, so dass

$$\varrho x_i = \theta_i(\lambda)$$

wird. Zwischen vier Punkten der Curve, die einer Ebene angehören, besteht dann die Parameterrelation

$$\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 4K \text{ und } 4iK'),$$

ein Fundamentalsatz, den der Autor auf zwei verschiedene Arten

beweist, und der eine ganze Reihe von geometrischen Eigenschaften der Curve liefert. An die Aufzählung derselben reiht sich die Darstellung der Coordinaten einer Tangente der Curve durch Thetafunctionen, welche unmittelbar zeigt, dass die Tangenten jenem Complexe zweiten Grades angehören, der das Fundamentaltetraeder zur Singularitätenfläche hat (ein Reye'scher Complex). Dann folgen die Gleichungen der Tangential- und der Osculationsebene, sowie einer Regelfläche zweiten Grades, welche zwei bestimmte Secantenscharen der Curve zu Regelscharen hat. Variirt das Argument der Flächenfunctionen in der letzteren Gleichung, so erhält man die Gleichungen aller Flächen des Büschels, dessen Grundcurve die gegebene ist.

Bm.

R. Lachlan. On a theorem relating to bicircular quartics and twisted quartics. Lond. M. S. Proc. XXI. 274-280.

Für die ebenen Curven dritter Ordnung besteht bekanntlich der Satz, dass jede derartige Curve, welche durch acht feste Punkte geht, durch einen neunten gehen muss. Ganz ähnliche Sätze gelten, wie der Verfasser zeigt, für ebene bicirculare Curven vierter Ordnung und für Raumcurven vierter Ordnung. In dem ersten Teile der Arbeit wird die allgemeine Schnitt-Theorie circularer Curven gegeben (unter einer circularen Curve $2n^{\text{ter}}$ Ordnung ist eine Curve $2n^{\text{ter}}$ Ordnung zu verstehen, deren unendlich ferne Kreispunkte n-fache Punkte der Curve sind); die betreffenden Theoreme lassen sich übrigens leicht aus den entsprechenden, in Salmon's „Higher plane curves“ (§§ 30-34) für gewöhnliche Plancurven aufgestellten Sätzen ableiten. Im zweiten Teile wird ein Specialtheorem der oben angegebenen Art für die bicircularen Plancurven vierter Ordnung und im dritten unabhängig davon das entsprechende für die Raumcurven vierter Ordnung entwickelt; endlich wird gezeigt, wie die Sätze des zweiten Abschnittes direct auf Raumcurven vierter Ordnung übertragen werden können.

Wbg.

E. Marchand. Le théorème de Dupuis et la cyclide de Dupin. Nouv. Ann. (3) IX. 98-115, 182-197.

Der Verfasser hat das Bestreben, mit den einfachsten Hülfsmitteln der elementaren Geometrie die interessanten Beziehungen eingehend zu untersuchen, welche zwischen der Cyklide und den beiden Scharen von Kugeln, deren gemeinsame Eingehüllte sie ist, vorhanden sind, und im Zusammenhange damit das Problem des Apollonius und das entsprechende räumliche Problem zu betrachten. Bei der grossen Reichhaltigkeit der auf diese Untersuchungen bezüglichen Litteratur, an der die berühmtesten Geometer beteiligt sind, ist es zweifelhaft, ob in der Arbeit wesentlich neue Resultate enthalten sind. Dagegen wird die Darstellung allen Freunden geometrischer Untersuchungen mancherlei Interesse gewähren. A.

P. H. Schoute. Sur un cas d'intersection de deux tores. J. de Math. spéc. (3) IV. 73-79.

Hr. Schoute knüpft an eine ältere Aufgabe an (Concours d'admission à l'Éc. Pol. 1881): „In einer Ebene seien ein Kreis Z und zwei in O sich schneidende Geraden OA und OB gegeben. Man dreht Z einmal um OA, dann um OB. Die Projection des Schnittes der beiden Rotationsflächen auf Ebene AOB zu finden". Es wird hervorgehoben, dass diese Projection eine zu Z concentrische Ellipse ist, und die Aufgabe mit den Eigenschaften der allgemeineren Cykliden in Beziehung gesetzt.

Lp.

Aniceto Xavier. Sobre o plano bitangente ao toro. Coimbra Inst. XXXIX.

Beweis des Satzes von den Schnitten der doppeltberührenden Ebenen der Cyklide. Tx. (Lp.)

---

de Paolis. Alcune proprietà della superficie di Kummer. Rom. Acc. L. Rend. (4) VI_2. 3-11.

Bei Gelegenheit des Studiums der doppelten Raumtransformationen (Rom. Acc. L. Mem. (4) I) fand der Verfasser die Kummer'sche Fläche als Grenzfläche einer solchen Transformation und leitete aus der letzteren eine Reihe von Eigenschaften dieser Fläche ab. Die Veröffentlichung der Resultate unterblieb jedoch, da inzwischen der Aufsatz des Herrn Reye: Ueber Strahlensysteme zweiter Klasse und die Kummer'sche Fläche (J. für Math. LXXXVI) erschienen war, welcher in der Hauptsache auf denselben Betrachtungen basirt. Die gegenwärtige Note nun enthält die Resultate, die der Verfasser neuerdings auf Grund derselben Methoden erhalten hat, die er in seinen früheren Untersuchungen verwendete.

Die in Frage stehende Transformation ist dadurch charakterisirt, dass einer Ebene eines Doppelraumes S die Flächen zweiten Grades eines einfachen Raumes S' entsprechen, welche durch sechs Fundamentalpunkte gehen (ein Flächengebüsch nach Hrn. Reye); dann entsprechen den Geraden in S die Curven vierter Ordnung erster Species, welche durch diese sechs Fundamentalpunkte gehen, den Punkten P in S aber zwei conjugirte Punkte P', P'' in S'. Den 15 Verbindungslinien der sechs Fundamentalpunkte und der Curve dritter Ordnung, die sie alle sechs enthält, sind in S 16 Punkte zugeordnet, welche singuläre Punkte heissen, und diesen 16 Punkten gehören in S' wieder 16 singuläre Ebenen zu, die sich in der Weise gruppiren, dass jeder singulären Ebene sechs singuläre Punkte entsprechen, die auf ihr liegen und einem Kegelschnitte angehören, während sechs singuläre Ebenen, die durch einen singulären Punkt gehen, einen Kegel zweiter Ordnung umhüllen.

Ferner ist der Ort der sich selbst conjugirten Punkte in S' die Jacobi'sche Fläche des Flächengebüsches, und die ihr entsprechende Fläche in S ist die Kummer'sche Fläche, welche zugleich als die Brennfläche der sechs Congruenzen zweiten Grades aufgefasst werden kann, die den Strahlenbündeln in den sechs Fundamentalpunkten entsprechen. Aus den zahlreichen, teils bekannten, teils neuen Folgerungen, die der Verfasser aus dieser Definition der Kummer'schen Fläche zieht, heben wir nur die

eine hervor, dass es 47 Systeme von vierfach-unendlich vielen Kegelschnitten giebt, die die Kummer'sche Fläche berühren (mit Ausschluss der Kegelschnitte in den singulären Ebenen), und dass durch einen beliebigen Punkt zwei zweifach-unendliche Systeme dieser Kegelschnitte gehen. Bm.

W. Schmidt. Analytische Untersuchungen über eine Ortsfläche vierter Ordnung mit reellem Doppelkegelschnitt. Lüdenscheid. 16 S. 4°.

A. del Re. Sulla superficie del 5^0 ordine dotata di curva doppia del 5^0 ordine. Rom. Acc. L. Rend. (4) VI_2. 221-228.

Im Jahre 1886 hat Herr del Re bewiesen (F. d. M. XVIII. 604), dass, wenn man eine projective Verwandtschaft zwischen einem Ebenenbündel und zwei Punktfeldern hergestellt hat, der Ort der Punkte, in denen die Ebenen der Bündel durch die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte geschnitten werden, die bemerkenswerte Fläche fünfter Ordnung mit einer Doppelcurve fünfter Ordnung ist, welche durch Clebsch entdeckt (Math. Ann. III) und durch Caporali (Annali di Mat. (2) VII) gründlich untersucht worden ist. Der zum Berichte stehende Aufsatz giebt eine analytische Entwickelung dieser Construction; er lehrt insbesondere die Formel für die ebene Abbildung der Fläche und die Gleichung derselben. Zuletzt bemerkt der Verfasser, dass, wenn man in einem Raume S eine collineare Ω und eine reciproke Verwandtschaft Γ hat, und jedem Punkte M von S denjenigen M_1 entsprechen lässt, in welchem die in Γ zu M entsprechende Ebene μ durch diejenige Gerade geschnitten wird, die M mit dem zu M in Ω entsprechenden Punkte M' verbindet, man in S eine dreifache Verwandtschaft bekommt, bei der den Flächen des dreifachen Raumes eben Flächen der gesagten Art entsprechen. La.

A. G. Greenhill. Sumner lines on the Mercator and stereographic chart. Mess. (2) XX. 4-21.

Eine Sumner'sche Linie auf einer Mercator-Karte ist das Bild eines Kleinkreises auf der Erdkugel, welcher der Ort aller Punkte ist, in denen die Sonne oder ein Stern in einem gegebenen Augenblicke dieselbe Höhe hat. Die Gleichung einer solchen Sumner'schen Linie ist in allen Fällen von der Form

$$\sinh\frac{y}{c} = A\sin\frac{x}{c} + B\cos\frac{x}{c}\cdot$$

In der vorliegenden Abhandlung giebt der Verf. eine Uebersicht über mannigfaltige mit der Kugelgeometrie zusammenhängende Resultate, welche bei einer Abbildung auf eine Mercator-Karte die Anwendung der Sumner'schen Linien nach sich ziehen. Es folgen noch andere mathematische Entwickelungen, welche mit dem Gegenstande zusammenhängen und durch diese Abbildungen veranlasst sind. Glr. (Lp.)

A. Puchta. Loxodromen und kürzeste Linien auf dem Kreisring. Monatsh. f. Math. I. 443-450.

Durch Rotation des Kreises

$$(x-a)^2 + z^2 = b^2$$

um die z-Axe entsteht die Kreisring genannte Fläche:

$$x = (a-b\cos u)\cos v,\quad y = (a-b\cos u)\sin v,\quad z = b\sin u.$$

Als Gleichung der Loxodromen ergiebt sich:

$$\operatorname{tg}\frac{u}{2} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2b}v\operatorname{tg}\alpha + C\right),$$

wo α den Winkel zwischen Loxodrome und Parallelkreis $u = \text{const.}$ bezeichnet, als Gleichung der Kürzesten:

$$v = \int\frac{du}{(a-b\cos u)\sqrt{C(a-b\cos u)^2-b^2}} + C.$$

Offenbar giebt es von den ersteren stets zwei, symmetrisch zur Ebene der xz. H.

Ch. Robert. Note sur une propriété du cylindre droit ayant pour directrice une spirale logarithmique. Nouv. Ann. (3) IX. 392-395.

Es wird folgender Satz hergeleitet. Ein Cylinder über der logarithmischen Spirale

$$r = a e^{m\vartheta}$$

wird von einer beliebigen Rotationsfläche um dieselbe Axe

$$z = f(r)$$

in einer Curve geschnitten, die nach Abwickelung des Cylinders sich vom Meridian

$$z = f(x)$$

nur durch einen constanten Factor der Abscisse x unterscheidet.

H.

A. Razzaboni. Sulle flessioni dell' evoluta del catenoide. Batt. G. XXVIII. 154-180.

Nach einem von Jellet (Royal Irish Ac. (1853) XXII) aufgestellten, von Weingarten (J. für Math. C, F. d. M. XVIII. 1886. 721) bewiesenen Satze wird eine biegsame, undehnbare, positiv krumme Fläche starr, sobald eine Linie auf ihr starr ist, und: man kann durch Biegung einer solchen Fläche einer Linie auf ihr jede Gestalt geben. Im Gegenwärtigen wird nun als Urfläche das Catenoid (d. i. die von der Kettenlinie durch Rotation um ihre Axe erzeugte Fläche) angenommen, das obige Resultat durch Rechnung entwickelt und einfache Formeln gefunden, welche die Deformation des Catenoids bestimmen, entsprechend der Umgestaltung einer gegebenen Linie auf ihr in eine andre gegebene Linie. H.

Svechnikoff. Les courbes et les surfaces épicycloïdales. J. de Math. spéc. (3) IV. 217-220.

Der Verfasser definirt die „epicykloidale Curve“ als diejenige, welche durch einen Punkt eines Kreises beschrieben wird, der, ohne zu gleiten, auf einem festen Kreise rollt, während die Ebenen beider Kreise einen constanten Winkel α mit einander bilden

(sphärische Epicykloiden). Ihre Gleichungen werden in der Form erhalten:

$$x = a[n\cos\varphi + (1-\cos n\varphi)\cos\varphi\cos\alpha + \sin n\varphi\sin\varphi],$$
$$y = a[n\sin\varphi + (1-\cos n\varphi)\sin\varphi\cos\alpha - \sin n\varphi\cos\varphi],$$
$$z = a[1-\cos n\varphi]\sin\alpha.$$

Lässt man α von 0 bis 2π wachsen, so wird durch die Schar epicykloidaler Curven die „epicykloidale Oberfläche" erzeugt, deren Gleichungen also durch eben jene drei Ausdrücke mit den beiden variabeln Parametern φ und α gegeben sind. Einige bezügliche Rechnungen werden durchgeführt. Lp.

W. Thienemann. Ueber eine transcendente Minimalfläche, welche eine Schar algebraischer Raumcurven vierten Grades enthält. Diss. Giessen; Leipzig. G. Fock. 22 S. 8°.

Die hier behandelte Fläche ist zuerst von Hrn. H. A. Schwarz (Ueber einige nicht algebraische Minimalflächen, welche eine Schar algebraischer Curven enthalten, J. für Math. LXXXVII. 146) erwähnt. Der Verfasser stellt die Fläche, mit etwas geänderter Lage des Coordinatensystems, durch die Parameter r und φ in folgender Weise dar:

$$x = \tfrac{1}{2}(r^2-r^{-2})\cos 2\varphi - 2\ln r,$$
$$y = \tfrac{1}{2}(r^2-r^{-2})\sin 2\varphi,$$
$$z = 2(r - r^{-1})\cos\varphi.$$

Die Curven $r = \text{const.}$ sind algebraisch, und zwar Curven vierten Grades. Es geht durch jede derselben ein Büschel von Flächen zweiten Grades, denen folgende specielle Flächen angehören:

1) der Umdrehungscylinder

$$y^2 + (x+2\ln r)^2 - \tfrac{1}{4}(r^2-r^{-2})^2 = 0,$$

2) der parabolische Cylinder

$$z^2 = 4\frac{r+r^{-1}}{r-r^{-1}}(x+2\ln r) + 2(r+r^{-1})^2,$$

3) die Kugel

$$y^2+z^2+\left(x+2\ln r-2\frac{r+r^{-1}}{r-r^{-1}}\right)^2 = \left[\tfrac{1}{2}(r^2-r^{-2})+2\frac{r+r^{-1}}{r-r^{-1}}\right]^2,$$

4) der Umdrehungskegel

$$y^2+[x+\tfrac{1}{2}(r^2-r^{-2})+\ln r]^2 = \tfrac{1}{4}[r-r^{-1}]^2 z^2,$$

und zwar berührt der zuletzt dargestellte Umdrehungskegel die Fläche längs jener Raumcurve. Bei der Gauss'schen Abbildung gehen die Curven r = const. in eine Schar von Meridianen, die Curven φ = const. in die zugehörigen Parallelkreise der Gauss'schen Kugel über, und es sind r und φ Abbildungsparameter der Fläche. Die Fläche ist symmetrisch zu den drei Coordinatenebenen und enthält die x-Axe als Doppellinie.

Die Weierstrass'sche Function $\mathfrak{F}(s)$ nimmt für diese Fläche die Form an $\mathfrak{F}(s) = s^{-1}-s^{-3}$, d. h. es ist:

$$x = \Re\int^{s}(1-s^2)\mathfrak{F}(s)\,ds,$$

$$y = \Re\int^{s} i(1+s^2)\mathfrak{F}(s)\,ds,$$

$$z = \Re\int^{s} 2s\mathfrak{F}(s)\,ds,$$

wenn s eine complexe Variable und $\Re$ den reellen Bestandteil des dahinter stehenden Ausdrucks bedeutet. Die Hauptkrümmungen, die Krümmungslinien und die asymptotischen Linien lassen sich in sehr eleganter Weise darstellen. Die Fläche lässt sich durch Biegung in eine von Herrn Catalan 1855 gefundene Minimalfläche überführen, welche eine Schar von Parabeln enthält und eine gewisse Cykloide als geodätische Linie. Behufs Construction oder Modellirung der Fläche sind gewisse Zahlenangaben zusammengestellt. A.

A. Cayley. Sur les surfaces minima. C. R. CXI. 953-954.

Man kann die Definition der Minimalflächen dadurch verallgemeinern, dass man statt des unendlich entfernten Kreises einen beliebigen Kegelschnitt als Ordnungskegelschnitt oder auch eine beliebige Fläche zweiter Ordnung eintreten lässt. Diese Verallgemeinerung wird in der vorliegenden kurzen Note erläutert. A.

H. Tallquiss. Bestimmung einiger Minimalflächen, deren Begrenzung gegeben ist. Helsingfors. 79 S. 4°.

A. Lietke. Ueber die Flächen, für welche eine Krümmungsfläche ein Kegel zweiten Grades ist. Königsberg. 36 S. gr. 8° u. 1 Taf.

E. Gebilde in Räumen von mehr als drei Dimensionen.

R. Hoppe. Erweiterung der Sätze über das Tetraeder, dessen Höhen sich in einem Punkte schneiden, auf mehr Dimensionen. Hoppe Arch. (2) IX. 327-332.

Mittels rechtwinkliger Coordinaten leitet der Verfasser drei Eigenschaften des Höhenschnitt-Plasmas ab, wobei nach Sylvester's Vorgang mit dem Namen „Plasma" ein n-dehniges $(n+1)$-Eck bezeichnet wird. Ausreichende Bedingung für das Schneiden aller Höhen in einem Punkte ist, dass in jedem Grenztetraeder die drei Paare von Gegenkanten gleiche Quadratsummen haben. Ausserdem stellt sich heraus, dass alle Grenzplasmen eines Höhenschnitt-Plasmas selbst Höhenschnitt-Plasmen sind.

Schg.

R. Hoppe. Ueber Congruenz und Symmetrie der Gebilde von beliebig vielen Dimensionen. Hoppe Arch. (2) IX. 108-110.

Es werden die Bedingungen der Congruenz und Symmetrie zweier Gebilde im n-dimensionalen Raume erörtert, und zwar im Anschluss an das Verhalten zweier mit ihnen in gleicher Weise verbundenen Coordinatensysteme. Dabei findet sich, dass ein System von n Axen um $n-2$ beliebige seiner Axen, welche in Ruhe bleiben, rotiren kann, und dass die positiven Axen symmetrischer Gebilde bis auf zwei Axen, welche entgegengesetzte Richtung erhalten, paarweise zur Deckung gebracht werden können.

Schg.

F. N. Cole. On rotations in space of four dimensions. American J. XII. 191-210.

Der Verfasser untersucht zuerst mit Hülfe eines vieraxigen rechtwinkligen Coordinatensystems die Beziehungen zwischen Geraden, Ebenen und Räumen im vierdimensionalen Gebiete. Hierbei ergiebt sich, dass, wenn jeder von zwei Räumen senkrecht steht auf jedem von zwei anderen, ihre Schnittebenen auf einander senkrecht stehen, ohne eine Gerade gemeinsam zu haben. Solche Ebenen werden „absolut senkrecht" zu einander genannt. — Um sodann zur allgemeinen Theorie der Drehungen im vierdimensionalen Raume zu gelangen, untersucht der Verfasser analytisch die Gruppen von Transformationen einer vierdimensionalen Kugel in sich selbst. Es zeigt sich, dass ausser Rotationen um einen festen Punkt auch solche möglich sind, bei welchen eine Ebene in allen ihren Punkten fest bleibt. Letztere Rotationen werden „einfache" genannt. Die Combination von zwei einfachen Drehungen liefert wieder eine einfache Drehung, wenn die constanten Ebenen sich in einer Geraden schneiden. Ausser den durch eine Rotation darstellbaren Transformationen giebt es noch „conjugirte", welche durch Rotation und Spiegelung entstehen.

Schg.

G. Pirondini. Sulle linee a tripla curvatura nello spazio euclideo a quattro dimensioni. Batt. G. XXVIII. 219-239.

Diese Abhandlung bietet die Ausdehnung der gewöhnlichen Infinitesimalgeometrie auf den vierdimensionalen Raum dar. Ihr Inhalt kann folgendermassen zusammengefasst werden.

§ 1. Definitionen. Richtungscosinus der Tangente. Erste Krümmung.

§ 2. Ausdruck der Coordinaten einer Curve durch den Vectorradius R und zwei willkürliche Functionen φ, θ des Bogens:

$$x = R\sin\varphi\cos\psi\sin\theta,\quad y = R\sin\varphi\sin\psi\sin\theta,\quad z = R\cos\varphi\sin\theta,$$
$$t = R\cos\theta,$$

wo

$$\psi = \int \frac{\sqrt{1-R'^2-R^2(\theta'^2+\sin^2\theta.\varphi'^2)}}{R\sin\varphi\sin\theta}\,ds.$$

§ 3. Gleichung des osculirenden dreidimensionalen ebenen Raumes.

§ 4. Richtungscosinus der Trinormale. Dritte Krümmung.

§ 5. Richtungscosinus der Hauptbinormale.

§ 6. Richtungscosinus der Hauptnormale.

§ 7. Zweite Krümmung.

§ 8. Beweis des Satzes, dass eine Linie der Form nach vollständig bekannt ist, wenn ihre drei Krümmungen als Functionen des Bogens gegeben sind.

§ 9. Krumme dreidimensionale Räume. Tangenten-Raum, Normale, geodätische Linien.

§ 10. Verschiedene Theoreme.

§ 11. Radien der zwei- und dreidimensionalen Schmiegungskugel.

§ 12. Eigenschaften der cylindrischen Schraubenlinie, d. i. der Linie, deren Tangenten gegen eine bestimmte Gerade eine constante Neigung haben. Vi.

F. Nicoli. Interpretazione geometrica del campo delle soluzioni di una equazione lineare a quattro variabili.
Modena Mem. (2) VII. 205-225.

Herr N. nimmt im Raume einen festen Punkt P und vier Richtungen an, von denen keine drei zu derselben Ebene parallel sind. Construirt man nun einen Polygonzug $PP_1P_2P_3P_4$, dessen Seiten der Reihe nach die gegebenen Richtungen haben und gleich p_1, p_2, p_3, p_4 sind, so ist P_4 der dem Wertsystem p_1, p_2, p_3, p_4 der Veränderlichen x_1, x_2, x_3, x_4 entsprechende Punkt, und es ist Gelegenheit geboten, die Gesetze des Raumes vierter Dimension in unserem Raume zu veranschaulichen. Raum, Ebene, Gerade und Punkt werden hierbei durch 1, 2, 3 und 4 unabhängige Gleichungen

$$(1) \qquad Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 + E = 0$$

gegeben, dabei wird aber von allen Räumen abgesehen, deren Constanten mit den Richtungscosinus h, k, l der letzten Richtung P_3P_4 die Beziehung

$$(2) \qquad Ah + Bk + Cl + D = 0$$

eingehen. Unter dieser Voraussetzung ist, je nach Anzahl der Gleichungen (1), P_4 im Raume, in einer Ebene, in einer Geraden frei beweglich oder fixirt, der Punkt P_3 hingegen bewegt sich collinear zu P_4. Die verschiedenen Schnittpunktsätze und die Parallelentheorie werden nun in der That anschaulich. Die Gleichung (2) schliesst Herr N. deswegen aus, weil alsdann P_4 auf eine Ebene beschränkt ist, und jedem einzelnen Punkte derselben unendlich viele Punkte des durch (1) dargestellten Raumes entsprechen. Herr N. lässt hierbei ausser Acht, dass nicht sowohl die Punkte P_4, als die Punktepaare P_3P_4 einen Punkt des Raumes vierter Dimension festlegen. In dem Specialfall (2) erhält man aber zu jedem Punkte der Ebene für P_4 unendlich viele Punkte P_3, jedes der ∞^3 Punktepaare P_3P_4 charakterisirt eindeutig ein Lösungssystem von (1). Nach Meinung des Referenten hätte aus diesem Gesichtspunkte der specielle Fall ganz wohl in die Betrachtung eintreten können. E. K.

E. Bertini. Intorno ad alcuni teoremi della geometria sopra una curva algebrica. Torino Atti. XXVI. 118-130.

Dieser Aufsatz liefert einen Beitrag zu unseren Kenntnissen über die Geometrie einer algebraischen Curve. Bezeichnet man, wie gewöhnlich, mit g_n^r eine ∞^r Reihe von Gruppen, jede aus n Punkten bestehend, welche auf einer Curve C des Geschlechtes p liegt, so kann man die Sätze, welche der Verfasser in einem einleitenden Paragraphen beweist, folgendermassen ausdrücken: „Ist g_n^r von solcher Beschaffenheit, dass die Gruppen, welche einen Punkt gemein haben, andere $\varrho-1$ Punkte gemein haben, so liegt auf C eine γ_ϱ^1, von der $k=\frac{n}{\varrho}$ Gruppen in jeder Gruppe von g_n^r sich befinden. Schliesst man diesen besonderen Fall aus, so kann es nie geschehen, dass die Gruppen von g_n^r, welche $s(1<s<r)$ Punkte gemein haben, alle anderen $\sigma(0<\sigma<n-r)$ Punkte gemein haben; daher bestimmen r beliebige Punkte eine und nur eine Gruppe von g_n^r.“ Wendet man diese und andere

schon bekannte Sätze an, so kann man (vgl. §§ 2 u. 3 der Bertini'schen Arbeit) auf einem anderen Wege zu einigen wichtigen Resultaten gelangen, welche man Herrn Castelnuovo verdankt (vergl. den Aufsatz: Ricerche di geometria sulle curve algebriche, Torino Atti XXIV). In ähnlicher Weise erhält der Verfasser folgende Sätze, von denen die Specialfälle, welche unseren Raum betreffen, schon bekannt waren (Nöther: Raumcurven §§ 1 u. 3; Küpper: Math. Ann. XXXI):

„Ist eine ebene Curve C m^{ter} Ordnung die Projection einer speciellen Curve eines Raumes r^{ter} Dimension R_r, und ist μ die kleinste Ordnung einer zu C adjungirten Curve, so ist

$$m-3>\mu>m-r-\frac{m-r}{r-1}.$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung, damit eine ebene Curve m^{ter} Ordnung die Projection einer speciellen Normalcurve des R_r sei, ist die, dass unter den Bedingungen, welche für eine adjungirte Curve $(m-4)^{\text{ter}}$ Ordnung aus dem Gehen durch die vielfachen Punkte von C entspringen, $r-2$ Gleichungen statthaben, wo $\mu \geqq m-r+1$ ist. In diesem Falle ist die Zahl der analogen Gleichungen für eine adjungirte Curve $(m-3-i)^{\text{ter}}$ Ordnung (wenn eine solche existirt) mindestens $(r-2).\frac{1}{2}i(i+1)$."

La.

F. Enriques. Alcune proprietà dei fasci di omografie negli spazi lineari ad n dimensioni. Rom. Acc. L. Rend. (4) VI_2. 63-70.

Die Leser des Jahrbuchs wissen, dass die methodische Untersuchung der Projectivitäten in den linearen Räumen beliebig vieler Dimensionen in Italien begonnen und durch verschiedene Geometer entwickelt wurde: es genüge, an die Arbeiten der Herren Segre, Bertini und Predella zu erinnern (F. d. M. XVI. 1884. 693; XVII. 1885. 610; XVIII. 1886. 536; XIX. 1887. 665ff.; XXI. 1889. 812). Der Aufsatz von Herrn Enriques giebt andere Sätze über dasselbe Thema, wie auch neue Ableitungen schon bekannter Resultate.

La.

A. del Re. Sui gruppi completi di tre trasformazioni lineari involutorie negli spazî ad n dimensioni. Rom. Acc. L. Rend. (4) VI$_1$. 57-65.

Im linearen n-dimensionalen Raume R_n giebt es, je nachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, $\frac{1}{2}n$ oder $\frac{1}{2}(n+1)$ Arten involutorischer Collineationen: jede hat zwei lineare Ordnungsräume R_h und R_{n-h-1}, wo h eine der Zahlen $0, 1, \ldots, \frac{1}{2}n-1$ oder $0, 1, \ldots, \frac{1}{2}(n-1)$ ist, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Man hat ferner in R_n die Polaritäten in Bezug auf $(n-1)$-dimensionale Quadriflächen; endlich, falls n ungerade ist, die Nullsysteme. Vom projectiven Gesichtspunkte aus sind zwei collineare oder reciproke Verwandtschaften derselben Art identisch: daher kann man sagen, dass in R_n sich $\frac{1}{2}(n+2)$ oder $\frac{1}{2}(n+5)$ projective involutorische Beziehungen befinden, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Eine aus drei solchen Verwandtschaften bestehende Gruppe kann nur folgende Möglichkeiten darbieten: ihre Glieder sind a) drei Collineationen, b) zwei Polaritäten und eine Collineation, c) zwei Nullsysteme und eine Collineation, d) eine Collineation, eine Polarität und ein Nullsystem. In jedem dieser vier Fälle untersucht der Verfasser die charakterisirende Eigenschaft der betreffenden Verwandtschaften. La.

M. Pannelli. Sulla più semplice trasformazione birazionale dello spazio ordinario rigato in uno spazio lineare a quattro dimensioni. Rom. Acc. L. Rend. (4) VI$_1$. 479-487.

Durch Σ werde der gewöhnliche Raum, durch Σ' ein vierdimensionaler Raum bezeichnet. Die Strahlencomplexe von C, welche durch dieselbe Gerade r gehen, bilden eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit, welche man auf die durch die dreidimensionalen Räume S' von Σ' bestimmte derart eindeutig beziehen kann, dass einem Complexbüschel ein Büschel von S' u. s. f. entspricht. Dies vorausgesetzt, schneiden sich vier beliebige Complexe C, ausser in r, in einer gewissen Geraden R;

die entsprechenden S' haben einen Punkt P' gemein. Lässt man P' der R entsprechen, so sieht man sogleich, dass umgekehrt jedem P' eine R entspricht. Die so entstehende Verwandtschaft zwischen Σ und Σ' wird vom Verfasser ausführlich untersucht. Nennt man $p_1, \dots, p_6$ die Coordinaten einer Geraden (verbunden durch die Gleichung $p_1p_4+p_2p_5+p_3p_6=0$) und $x'_1, \dots, x'_5$ die von P', so kann man den Transformationsformeln die folgende Gestalt geben:

$$\sigma' x'_i = p_i,$$

oder umgekekrt

$$\sigma p_i = x'_i x'_3, \quad \sigma p_6 = -(x'_1 x'_4 + x'_2 x'_5),$$

wo i die Werte 1, ..., 5 zu durchlaufen hat. Die in Rede stehende Verwandtschaft führt sogleich auf die allgemein bekannte Klein'sche Abbildung eines linearen Complexes auf den Punktraum (vgl. Nöther in Gött. Nachr. von 1869). La.

Capitel 4.

Liniengeometrie (Complexe, Strahlensysteme).

R. Schumacher. Klassification der algebraischen Strahlensysteme. Math. Ann. XXXVII. 100-140.

Der Verfasser zeigt hier, wie mit Hülfe von vier unabhängigen Zahlen eine Klassification der Strahlensysteme aufgestellt werden kann, und dass alle übrigen für das Strahlensystem und seine covarianten Gebilde wichtigen Charaktere aus den gegebenen vier Zahlen berechnet werden können. Diese Zahlen sind folgende:

1) n, der „Grad“, die Zahl der Strahlen durch einen Punkt;

2) k, die „Klasse“, die Zahl der Strahlen in einer Ebene;

3) ϱ, die „Art“, die Zahl der Strahlenpaare des Systems, welche mit einer gegebenen Geraden in einer Ebene liegen und zugleich durch einen Punkt gehen;

4) t, die Anzahl der Strahlentripel (Strahlentripel ist eine

Zusammenstellung von drei Strahlen in einer Ebene und durch einen Punkt), deren Tripelpunkte in derselben Ebene liegen, und deren Tripelebenen zugleich durch denselben in jener gelegenen Punkt gehen.

Die Resultate werden erhalten mit Hülfe der Abbildung des Geradenraumes $\mathfrak{M}$ auf die vierdimensionale lineare Punktmannigfaltigkeit M. Die Geraden des Raumes $\mathfrak{M}$ werden bestimmt durch ihre Spuren in zwei festen Ebenen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$. Zur Bestimmung des Punktes im vierdimensionalen Raume M werden die Ebenenbündel (g_1) und (g_2) durch zwei Gerade g_1 und g_2 benutzt. Ist nun $\mathfrak{E}_1$ collinear zu (g_1), $\mathfrak{E}_2$ zu (g_2), und zwar jedesmal so, dass der Schnittgeraden s von $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ der die Geraden g_1 und g_2 verbindende Raum dritter Dimension entspricht, so ist jeder Geraden von $\mathfrak{M}$ ein Punkt in M zugeordnet. Die s schneidenden Strahlen werden dann auf eine zweidimensionale Fläche zweiter Ordnung Φ in M abgebildet. Jedem Punkte derselben entsprechen ∞^1 Strahlen in $\mathfrak{M}$. Jedem linearen Raume dritter Dimension in M entspricht ein linearer Complex in $\mathfrak{M}$. Es findet sich weiter: Ein Raum n^{ten} Grades R^n in M ist das Bild eines Complexes n^{ten} Grades in $\mathfrak{M}$, welcher den Strahl s n-fach enthält, während der allgemeine Complex n^{ten} Grades in $\mathfrak{M}$ sich als ein Raum $(2n)^{\text{ten}}$ Grades abbildet, welcher Φ n-mal enthält. Einem Strahlensysteme n^{ten} Grades k^{ter} Klasse in $\mathfrak{M}$ entspricht in M eine Fläche $(n+k)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche Φ schneidet nach einer Curve $(n+k)^{\text{ter}}$ Ordnung. Auf jeder Geraden σ_1 der einen Schar von Φ liegen n, auf jeder Geraden σ_2 der zweiten Schar k Punkte dieser Curven. Auf die Eigenschaften dieser Fläche F_{n+k} kommt nun alles an. Die Zahl ϱ wird z. B. gefunden durch Betrachtung des Kegels, dessen Spitze auf Φ liegt, und dessen Strahlen Sehnen von F_{n+k} sind.

Ist das Strahlensystem der vollständige Schnitt zweier Complexe μ^{ten} und ν^{ten} Grades, so wird gefunden:

$$\varrho = \mu\nu(\mu-1)(\nu-1),$$
$$3t = \mu\nu\{3\mu^2\nu^2-6\mu\nu(\mu+\nu)+2\nu^2+2\mu^2+9\mu\nu-4\}.$$

Im allgemeinen zeigt sich, dass Ordnung und Klasse der Brennfläche von t unabhängig sind, aber die Ordnung der Rückkehr-

curve sowie der Doppelcurve dieser Fläche von t abhängt. Diese Charaktere, sowie die analogen für den Ort der Tripelpunkte werden berechnet. Als Beispiel zur Prüfung der Formeln wird das Strahlensystem betrachtet, welches durch eine Cremona'sche Verwandtschaft k^{ter} Ordnung zwischen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ entsteht.

W. St.

W. C. L. Gorton. Systems of rays normal to a surface. American J. XIII. 173-178.

In diesem Aufsatze werden mit Hülfe der Quaternionen auf einfache Weise einige schon bekannte Sätze über die Normalstrahlen einer Fläche bewiesen.

1) Ein Normalensystem einer Fläche bleibt ein solches nach Reflexion an einer beliebigen anderen Fläche.

2) Das Normalensystem einer Fläche bleibt ein solches nach Brechung an einer anderen Fläche.

Insbesondere werden die durch einen Punkt gehenden Strahlen betrachtet, und es wird für sie gezeigt, dass nach irgend einer Zahl von Reflexionen die Länge eines Strahles von dem Brennpunkte an bis zu einer zu allen Strahlen normalen Fläche von der Richtung des ursprünglichen Strahles unabhängig ist. Ein ähnlicher Satz, der noch die Brechungscoefficienten berücksichtigt, gilt für die Brechung eines solchen Strahlensystems.

W. St.

J. P. Johnston. Note on congruences of lines. Mess. (2) XX. 102-103.

Beweis des Satzes, dass jede Congruenz von Geraden im allgemeinen als das System der Doppeltangenten einer gewissen Oberfläche angesehen werden kann. Glr. (Lp.)

F. Walther. Zur Theorie des Strahlensystems erster Ordnung und erster Klasse und des linearen Strahlencomplexes. Analytische Ableitung einiger Sätze von Reye. Jena. Pohle. 67 S. 8°.

C. Guichard. Détermination des congruences telles que les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface focale. C. R. CX. 126-127.

Sind u und v die Asymptoten einer Fläche F, so können die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z der Punkte von F stets so als Functionen von u und v gegeben werden, dass man hat

$$(1)\quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = \eta\frac{\partial \zeta}{\partial u} - \zeta\frac{\partial \eta}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u} = \zeta\frac{\partial \xi}{\partial u} - \xi\frac{\partial \zeta}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \xi\frac{\partial \eta}{\partial u} - \eta\frac{\partial \xi}{\partial u}, \\ \frac{\partial x}{\partial v} = -\eta\frac{\partial \zeta}{\partial v} + \zeta\frac{\partial \eta}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v} = -\zeta\frac{\partial \xi}{\partial v} + \xi\frac{\partial \zeta}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = -\xi\frac{\partial \eta}{\partial v} + \eta\frac{\partial \xi}{\partial v}, \end{cases}$$

wobei ξ, η, ζ drei linear unabhängige Lösungen der Gleichung:

$$(2)\qquad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v} = M\Theta$$

sind. Ist nun ϱ eine andere Lösung von (2), so wird mit ihrer Hülfe eine Moutard'sche Transformation gemacht. Gehen hierdurch ξ, η, ζ in ξ_1, η_1, ζ_1 über, so hat man

$$(3)\qquad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial u}(\varrho\xi_1) = \varrho\frac{\partial \xi}{\partial u} - \xi\frac{\partial \varrho}{\partial u}, \\ \frac{\partial}{\partial v}(\varrho\xi_1) = -\varrho\frac{\partial \xi}{\partial v} + \xi\frac{\partial \varrho}{\partial v}. \end{cases}$$

Wird nun eine zweite Fläche F_1 definirt durch die Gleichungen:

$$(4)\qquad \begin{cases} x_1 = x + \eta_1\zeta - \zeta_1\eta, \\ y_1 = y + \zeta_1\xi - \xi_1\zeta, \\ z_1 = z + \xi_1\eta - \eta_1\xi, \end{cases}$$

so bilden die Verbindungslinien entsprechender Punkte beider Flächen F und F_1 das gesuchte Strahlensystem. W. St.

M. Pannelli. Sopra le congruenze generate da due superficie, di cui i punti si corrispondono univocamente. Rom. Acc. L. Mem. 17 S. 4°.

Capitel 5.

Verwandtschaft, eindeutige Transformationen, Abbildungen.

A. Verwandtschaft, eindeutige Transformation und Abbildung.

E. Dewulf. Sur les coniques osculatrices. Mathesis X. 55-58.

Untersuchung einer Transformation, bei welcher die entsprechenden Punkte M, M' auf einer Geraden liegen, die durch einen festen Punkt O geht, und bei welcher ausserdem M und M' auf dem Strahle OMM' projectivische Punktreihen bilden, deren Doppelpunkte in O zusammenfallen. Mn. (Lp.)

Cl. Servais. Sur la réversibilité de la transformation linéaire. Mathesis X. 132-137.

Einfacherer und vollständigerer Beweis als der, welchen der Verfasser in Mathesis VII. 90-91, IX. 267-268 gegeben hat (vgl. F. d. M. XIX. 1887. 855, XXI. 1889. 831). Mn.

A. Laisant. Sur la transformation par rayons vecteurs réciproques. Mathesis X. 224-230.

Allgemeine Eigenschaften der durch die symmetrische Relation $F(r, r_1) = 0$ hergestellten Transformation, worin $r = OM$, $r_1 = OM_1$ die Fahrstrahlen der entsprechenden Punkte M und M_1 zweier auf einander bezogenen Curven sind, während O, M und M_1 in einer Geraden liegen. Fälle: $r + r_1 = 2a$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} = \frac{2}{a}$, $r^2 + r_1^2 = 2a^2$, $\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_1^2} = \frac{2}{a^2}$, u. s. w. Mn. (Lp.)

N. M. Ferrers. Elementary treatise on trilinear coordinates, the method of reciprocal polars, and the theory of projections. 4th ed. London.

R. d'Emilio. Alcune osservazioni sulla projezione stereoscopica. At. Ven. (14) II. 607-612.

Auf Grund der Beziehungen zwischen den homogenen Coordinaten einer Geraden im Raume und den Plücker'schen Coordinaten der sie bestimmenden Projectionen wird derjenige Connex untersucht, welcher aus einem Complex entsteht, wenn die in dessen Gleichung enthaltenen Coordinaten der ersten Art durch ihre Werte als Functionen der Coordinaten der zweiten Art ersetzt werden. Schg.

M. d'Ocagne. Remarques sur une transformation quadratique réciproque. Liège Mém. V. 10 S.

J. Neuberg. Remarques sur une transformation quadratique. Liège Mém. V. 12 S.

Die in diesen beiden Artikeln ergründete ebene und räumliche Transformation kann in der Ebene auf folgende Weise definirt werden: Es seien a und a' die Schenkel eines constanten Winkels, b und b' die eines anderen. Drehen sich die beiden Winkel um ihre Scheitelpunkte, so mögen sich a und b in M, a' und b' in M' schneiden. Die Punkte M und M' sind die entsprechenden Punkte. Die beiden Gelehrten unternehmen eine sorgfältige Forschung über diese Transformation, sowohl analytisch als auch synthetisch, und ermitteln ihren Zusammenhang mit der allgemeinen Theorie der quadratischen Transformationen.

Mn. (Lp.)

J. J. Sylvester, S. Sircom. Solution of question 8184. Ed. Times LII. 25-26.

Die Gleichungen zwischen zwei entsprechenden Punkten in zwei homolog auf einander bezogenen Systemen können in die

Form gesetzt werden:

$$x' = \varrho x + f(ax + by + cz), \quad y' = \varrho y + g(ax + by + cz),$$
$$z' = \varrho z + h(ax + by + cz).$$

Wenn zwei homographische Systeme von Punkten, die durch die Gleichungen $x' = Ax$, $y' = By$, $z' = Cz$ verbunden sind, in Homologie gebracht werden, so wird die Bedingung, dass der Pol in der Homologie-Axe liegen soll, durch die Beziehung gegeben:

$$[AB(A-C)(B-C)p^2 + BC(B-A)(C-A)q^2 + CA(C-B)(B-A)r^2]^2$$
$$+A^2B^2C^2[(A-C)(B-C)p^2 + (B-A)(C-A)q^2$$
$$+ (C-B)(A-B)r^2]^2 = 0.$$

Lp.

M. Pannelli. Sui complessi associati ad ogni trasformazione birazionale dello spazio. Batt. G. XXVIII. 245-256.

Der Verfasser behandelt die rationale, umkehrbar eindeutige Transformation eines Raumes von drei Dimensionen in sich; eine solche Transformation definirt eine Reihe von geometrischen Gebilden, von denen hier nur folgende hervorgehoben werden sollen: Die Gesamtheit aller Geraden, welche durch Verbindung entsprechender Raumpunkte erhalten werden, bilden einen Liniencomplex Γ. Jeder Ebene des Raumes entspricht eine Fläche $\varphi = 0$ von der n^{ten} Ordnung. Ist ferner S eine Gerade, so entsprechen den durch S gehenden Ebenen die Flächen eines zu dem Ebenenbüschel S projectiven Flächenbüschels. Diese beiden Büschel erzeugen eine Fläche K, von welcher man leicht erkennt, dass sie von der $(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung ist und die Gerade S enthält. Ist P ein Punkt dieser Fläche K, so liegt offenbar der vermöge der birationalen Transformation entsprechende Punkt P' auf der durch P gelegten Ebene des Ebenenbüschels S, d. h. die Gerade PP' schneidet die ursprüngliche Gerade S. Somit erscheint die Fläche K auch als Ort aller Punkte P von der eben genannten Eigenschaft. Die weiteren Resultate betreffen in der Hauptsache die Singularitäten der durch die Transformation bestimmten geometrischen Gebilde. Ht.

G. LORIA. Le trasformazioni razionali dello spazio determinato da una superficie generale di terz'ordine. Torino Atti XXVI. 275-299.

Um die birationalen Raumtransformationen dritten Grades aufzustellen, schlägt der Verfasser ein Verfahren ein, welches dem von Cremona zur Untersuchung der birationalen Transformationen der Ebene angewandten analog ist. Es wird zunächst eine Curve als „Fundamentallinie" zu Grunde gelegt; es gäbe dann i-fach unendlich viele Flächen dritter Ordnung, welche diese Fundamentallinie enthalten, und irgend drei von diesen Flächen mögen sich ausserhalb jener Fundamentallinie noch in ϱ beweglichen Punkten schneiden. Um nun eine umkehrbare rationale Transformation zu construiren, muss man aus jenem System von Flächen ein System von vierfach unendlich vielen Flächen mit nur einem einzigen beweglichen Schnitte aussondern. Zu dem Zweck lege man den Flächen die Bedingung auf, durch x_1 gegebene Punkte zu gehen und allgemein mit x_r gegebenen Ebenen in ebenso viel gegebenen Punkten eine Berührung $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung zu besitzen. Da eine Fläche $\frac{1}{2}r(r+1)$ Bedingungen erfüllen muss, wenn dieselbe eine gegebene Ebene in einem gegebenen Punkte von der $(r-1)^{\text{ten}}$ Ordnung berühren soll, so hat man zwischen den Zahlen x_1, x_2, ... die Gleichung

$$x_1+3x_2+6x_3+10x_4+\cdots = i-3.$$

Da ferner in einem Punkte, in welchem drei Flächen mit einer und der nämlichen Ebene eine Berührung $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung eingehen, r^2 Schnittpunkte vereinigt sind, so besteht die weitere Gleichung

$$x_1+4x_2+9x_3+25x_4+\cdots = \varrho-1.$$

Es werden nun die verschiedenen Möglichkeiten discutirt und dann die brauchbaren Lösungen zusammengestellt. Ht.

G. PIRONDINI. Di una particolare trasformazione geometrica. Nap. Rend. (2) IV. 155-164.

D. PADELLETTI, A. CAPELLI, G. BATTAGLINI. Rapporto. Daselbst. 154-155.

Die in dieser Note besprochene Transformation ist durch die folgenden Formeln gegeben:

$$(1)\qquad x_1 = \frac{a^2x}{x^2+y^2},\quad y_1 = \frac{a^2y}{x^2+y^2},\quad z_1 = a^2\int\frac{\frac{dz}{du}}{x^2+y^2}du,$$

aus welchen folgt:

$$x = \frac{a^2x_1}{x_1^2+y_1^2},\quad y = \frac{a^2y_1}{x_1^2+y_1^2},\quad z = a^2\int\frac{\frac{dz_1}{du}}{x_1^2+y_1^2}du.$$

Geht also eine Linie L durch diese Transformation in L_1 über, so geht L_1 durch dieselbe Transformation in L über; die zwei Linien L, L_1 heissen „conjugirt", und so auch irgend zwei Flächen, welche in einander durch die Transformation (1) übergehen.

Zwei conjugirte Curven haben in entsprechenden Punkten dieselbe Neigung gegen die z-Axe; ihre Projectionen auf die xy-Ebene sind in Bezug auf den Nullpunkt zu einander reciprok.

Die zu einer Umdrehungsfläche, deren Meridianlinie $z = \varphi(x)$ ist, conjugirte Fläche ist eine Umdrehungsfläche mit der Meridianlinie $z_1 = -\int\varphi'\left(\frac{a^2}{x_1}\right)dx_1$; die zwei Flächen sind auf einander conform abgebildet. Die zu einem Helikoid conjugirte Fläche ist ein Helikoid, und es wird durch die Transformation (1) eine conforme Abbildung der zwei Helikoide auf einander bewerkstelligt. Vi.

G. Loria. Sulla classificazione delle trasformazioni razionali dello spazio, in particolare sulle trasformazioni di genere zero. Lomb. Ist. Rend. (2) XXIII. 824-834.

Bei irgend einer birationalen Raumtransformation entsprechen bekanntlich den Ebenen des einen Raumes die Flächen eines homaloidalen Systems, d. h. irgend drei Flächen des Systems begegnen sich, ausser in festen Punkten und Curven, nur in einem beweglichen Punkte. Es zeigt sich nun, dass die ebenen Schnitte der beiden Systeme homaloidaler Flächen, die bei einer

birationalen Transformation auftreten, sämtlich dasselbe Geschlecht zeigen, welches man als das Geschlecht der Transformation bezeichnen kann. Der Verfasser wendet sich nunmehr den Transformationen vom Geschlechte Null zu. Hierbei müssen die beiden Systeme homaloidaler Flächen aus Steiner'schen Flächen oder aus rationalen Regelflächen bestehen. Was die erste Möglichkeit angeht, so können den Ebenen beider Räume Steiner'sche Flächen entsprechen oder den Ebenen des zweiten Raumes Flächen zweiter Ordnung. Im anderen Falle muss jedes System aus rationalen Regelflächen bestehen, und zwar das eine aus Flächen μ^{ten} Grades mit $(\mu-1)$-facher Geraden, das andere aus Flächen ν^{ten} Grades mit $(\nu-1)$-facher Geraden. Jedes der homaloidalen Systeme enthält ausser der mehrfachen noch eine Anzahl einfacher Fundamental-Geraden und -Punkte. Die Anzahl der Fundamentalgeraden des einen Systems ist gleich der der Fundamentalpunkte des anderen Systems. E. K.

P. Painlevé. Sur les transformations simplement rationnelles des surfaces algébriques. C. R. CX. 184-186.

Der Zweck dieser Note ist, die auf die birationalen Transformationen der Oberflächen bezügliche Picard'sche Methode auf die einfach rationalen Transformationen auszudehnen. Die Ergebnisse, zu denen der Verfasser gekommen ist, werden in gedrängter Kürze dargestellt; die Berichterstattung über sie muss verschoben werden, bis die zugehörigen Entwickelungen veröffentlicht sind. Lp.

B. Conforme Abbildung und dergleichen.

M. d'Ocagne. Remarques sur les transformations isogonales. S. M. F. Bull. XVIII. 107-108.

Verallgemeinerung eines Laisant'schen Satzes über das Verhalten des Orts der Krümmungscentra, welche zu dem gemein-

samen Schnittpunkte eines Curvensystems gehören, bei isogonaler Transformation, nebst Anwendung auf eine specielle Art dieser Transformation. Schg.

A. Cayley. Note on the orthomorphic transformation of a circle into itself. Edinb. Math. S. Proc. VIII. 91-92.

Ist die Gleichung des Kreises $x^2+y^2-1=0$, so setze man zum Zwecke der Transformation

$$x_1+iy_1 = \frac{A(x+iy)+B}{1+C(x+iy)},$$

mithin

$$x_1-y_1 = \frac{A'(x-iy)+B'}{1+C'(x-iy)},$$

wenn A', B', C' zu A, B, C conjugirt sind. Also:

$$x_1^2+y_1^2 = \frac{AA'(x^2+y^2)+AB'(x+iy)+A'B(x-iy)+BB'}{1+C(x+iy)+C'(x-iy)+CC'(x^2+y^2)}.$$

Diese Gleichung ist eine Identität für $x^2+y^2=1$, $x_1^2+y_1^2=1$; daher $C=AB'$, $C'=AB$, $AA'=1$ (wogegen $BB'=1$ nicht zulässig ist), so dass die Lösung lautet:

$$x_1+iy_1 = \frac{A(x+iy)+B}{1+AB'(x+iy)}.$$

Hierin ist A ein Einheitsvector und B, B' sind conjugirte Vectoren. Gbs. (Lp.)

J. Brill. The solution of a special case of the problem of the establishment of a correlation between two plane figures (second paper). Mess. (2) XIX. 151-155.

In einem früheren Aufsatze gleichen Titels (Mess. (2) XIX. 57-62, F. d. M. XXI. 1889. 834) beschäftigte sich der Verf. mit dem Problem der Aufstellung einer Correlation zwischen dem Raume ausserhalb eines geschlossenen convexen geradlinigen Polygons und einem Streifen einer Ebene, der durch eine geradlinige Strecke und zwei zu ihr rechtwinklige Halbstrahlen begrenzt ist. In dem vorliegenden Artikel verwendet er seine Methode zur Herstellung einer Correlation zwischen der Fläche

eines Rechtecks und derjenigen, die zwischen zwei geschlossenen convexen geradlinigen Polygonen eingeschlossen ist, von denen das eine ganz innerhalb des anderen liegt. Glr. (Lp.)

A. Razzaboni. Sulle rappresentazioni dello spazio sopra sè stesso che conservano le aree delle superficie corrispondenti. Bologna Rend. 1889-90. 21-25.

Die einzige Abbildung, welche diese Eigenschaft besitzt, ist die ähnliche. Vi.

L. Bianchi. Sopra una classe di rappresentazioni equivalenti della sfera sul piano. Rom. Acc. L. Rend. (4) VI_1. 226-229.

Das Problem ist: die Kugel äquivalent und so auf die Ebene abzubilden, dass ein Orthogonalsystem der Kugel in ein Orthogonalsystem der Ebene übergeht, welches aus parallelen Geraden und den dazu Senkrechten besteht.

Sind

$$ds^2 = d\beta^2 + d\gamma^2 \quad \text{und} \quad ds_1^2 = E d\beta^2 + G d\gamma^2$$

die Quadrate entsprechender Linienelemente auf der Ebene und auf der Kugel, so dass die Parameterlinien in beiden Flächen orthogonal sind und in der Ebene Gerade, so ist die Bedingung der Aequivalenz $EG = 1$, also ist $ds_1^2 = E d\beta^2 + \frac{1}{E} d\gamma^2$.

Ist aber G eine Function von E allein, so entspricht nach einem Weingarten'schen Theorem jeder Form des sphärischen Linienelementes eine Klasse von Flächen, deren Hauptkrümmungsradien gegenseitig sich als Functionen von einander ausdrücken, und bei denen sich die Krümmungslinien auf die Gauss'sche Kugel als die Parameterlinien abbilden. In dem vorliegenden Falle wird die Relation zwischen den Krümmungsradien $r_2 - r_1 = 1$. Die beiden Blätter der Evolutenfläche dieser Fläche sind zwei complementäre pseudosphärische Flächen, und man erhält so das Resultat, dass jedem Paar von complementären pseudosphärischen

Flächen eine Abbildung der verlangten Art entspricht, und umgekehrt.

Im Anschluss an diesen Satz lässt sich nun, wie der Verfasser zeigt, die analytische Lösung des Problems vollziehen. Er macht beim Beginn seiner Mitteilung darauf aufmerksam, dass das behandelte Problem demjenigen des Herrn Korkine (Math. Ann. XXXV., vgl. das folgende Referat) analog sei.

A.

A. Korkine. Sur les cartes géographiques. Math. Ann. XXXV. 588-604.

Es handelt sich in der Arbeit um die äquivalente Abbildung einer Umdrehungsfläche auf eine Ebene, bei welcher sich Meridiane und Parallelkreise als Orthogonalsystem abbilden.

Eine äquivalente Abbildung heisst bekanntlich eine solche, bei welcher entsprechende Flächenstücke gleich sind, oder etwas allgemeiner, bei welchem sie in constantem Verhältnis stehen. Sind zwei beliebige Flächen äquivalent auf die Ebene abgebildet, so sind sie auch äquivalent auf einander abgebildet; das Problem der äquivalenten Abbildung ist also zurückgeführt auf die äquivalente Abbildung einer beliebigen Fläche auf die Ebene, und dieses führt auf eine lineare partielle Differentialgleichung, in welcher zwei unbekannte Functionen der Flächenparameter auftreten. Die allgemeine Lösung des Problems erhält man bekanntlich, indem man eine dieser beiden Functionen als willkürlich gegeben ansieht; dann hat man zur Bestimmung der andern eine lineare partielle Differentialgleichung, welche sich nach der bekannten Jacobi'schen Methode auf eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung zurückführen lässt.

In dem vorliegenden Problem aber ist noch eine Bedingung gestellt, nämlich die Orthogonalität der Abbildung des aus Meridianen und Parallelkreisen gebildeten Netzes, es bedarf daher einer anderen Behandlung. Der Verfasser sagt in der Einleitung, dass Herr Ossian Bonnet in seiner Doctor-Dissertation (Sur la théorie mathématique des cartes géographiques, Liouv. J. Bd. XVII, 1852) dieses Problem für die Kugel behandelt und

auf eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung reducirt, deren Integration aber nicht ausgeführt hat. Der Verfasser hat nun das Problem vollständig gelöst, und zwar nicht nur für die Kugel, sondern allgemeiner für jede Rotationsfläche. Es liegt aber, wie Referent vorweg bemerken möchte, in der Verallgemeinerung auf Rotationsflächen nichts wesentlich Neues. Denn es ist bekannt, dass sich jede Umdrehungsfläche Σ äquivalent in die Ebene Σ_0 abbilden lässt, so dass den Meridianen und den Parallelkreisen zwei Systeme paralleler Geraden entsprechen, welche sich gegenseitig rechtwinklig durchschneiden. Ist nämlich das Quadrat des Linienelementes der Umdrehungsfläche $ds^2 = du^2 + \varphi(u)^2 dv^2$; so ist z. B. eine solche Abbildung dargestellt durch die Gleichungen:

$$X = \frac{\alpha}{\varkappa} \int \varphi(u) du, \quad Y = \frac{1}{\alpha} v$$

($\varkappa$ die constante Flächenvergrösserung, α eine beliebige Constante). Es kommt also wesentlich auf ein Problem der ebenen Geometrie an, nämlich eine Ebene flächengleich so auf eine andere Ebene abzubilden, dass zwei zu einander orthogonalen Systemen paralleler Geraden zwei Systeme orthogonaler Linien entsprechen.

Der Verfasser hat diese Ausscheidung des einfacheren Problems nicht vorgenommen, sondern es als eine specielle Lösung später erwähnt. Dennoch lässt sich dieselbe in seinen Rechnungen überall erkennen; hätte er sie von vorn herein wirklich vollzogen, so wäre dies für die Entwickelung entschieden von Nutzen gewesen; denn wenn auch die Complication der Rechnung durch Nichtbeachtung der erwähnten Vereinfachung nur sehr geringfügig ist, so wären doch die allgemeinen Eigenschaften, die den gesuchten Abbildungen zukommen, zum Teil ohne weiteres evident gewesen, vor allem die Vertauschbarkeit der Meridiane und Parallelkreise.

Auch die partielle Differentialgleichung, von deren Integration die Lösung des Problems abhängt, hätte der Verfasser mit den Hülfsmitteln der Flächentheorie in weniger umständlicher Weise gewinnen können, als durch die Vertauschung der

unabhängigen und abhängigen Parameter, welche er benutzt. Sind nämlich zwei Flächen in den Parametern u', v' dargestellt, also in beliebiger Weise auf einander abgebildet, so sind die Liniensysteme, die in beiden Flächen zugleich Orthogonalsysteme sind, bestimmt durch die Bedingung

$$(EF_1-FE_1)du'^2+(EG_1-GE_1)du'dv'+(FG_1-GF_1)dv'^2=0,$$

wo E, F, G; E_1, F_1, G_1 die Fundamentalgrössen erster Ordnung bezeichnen. Diese Bedingung ist bei conformen Abbildungen identisch erfüllt, bei allen nicht conformen Abbildungen dagegen geht durch jeden Punkt der einen wie der anderen Fläche, ein Paar von diesen orthogonalen Curven.

Es handelt sich also darum, die Parameter u und v (oder auch X und Y) so als Functionen von u' und v' darzustellen, dass die Abbildung äquivalent ist, also $T=\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{E'G'-F'^2}$ ist, und dass ferner z. B. die Curve $u=$ const. (oder $X=$ const.) d. h. $\frac{\partial u}{\partial u'}du'+\frac{\partial u}{\partial v'}dv'=0\left(\text{oder auch } \frac{\partial X}{\partial u'}du'+\frac{\partial Y}{\partial v'}dv'=0\right)$ der eben aufgestellten Bedingung genügt. Die Elimination von $dv':du'$ aus beiden Gleichungen ergiebt die zweite Bedingung, welcher die Abbildung genügen muss. Drückt man nun, wie es auch der Verfasser bei seiner Entwickelung in sehr zweckmässiger Weise gethan hat, die Coordinaten der Bildfläche Σ' durch Nulllinienparameter aus, indem man setzt:

$$x+iy=u',\quad x-iy=v',$$

dann werden die Gleichungen überaus einfach, und es ergiebt sich nach wenigen Rechnungen z. B. für v die Gleichung

$$\frac{\frac{\partial^2 v}{\partial u'^2}}{\left(\frac{\partial v}{\partial u'}\right)^2}+\frac{\frac{\partial^2 v}{\partial v'^2}}{\left(\frac{\partial v}{\partial v'}\right)^2}=0 \quad \text{oder kürzer} \quad \frac{r}{p^2}+\frac{t}{q^2}=0.$$

Derselben Gleichung muss auch die Variable $U=\frac{4}{ki}\int\varphi(u)du$ genügen, welche der Verfasser einführt. Führt man die Hülfsabbildung in die Ebene Σ_1 ein, so müssen in ihr X und Y derselben Gleichung genügen. In der Aufstellung und Integration dieser Gleichung liegt vorzugsweise der Fortschritt, welchen die

Arbeit geleistet hat, und wenn Referent einige kritische Bemerkungen über die Darstellungsweise in dem ersten Teile nicht hat unterdrücken können, so möchte er sich doch dagegen verwahren, als wollte er dadurch den wissenschaftlichen Wert der Arbeit herabsetzen. Es ist vielmehr gerade das Interesse, welches er an der Arbeit genommen hat, für ihn der Grund gewesen, auf gewisse Vereinfachungen hinzuweisen, durch welche seiner Ansicht nach die Darstellung gewonnen hätte.

Bei der Integration wird zuerst der Fall besprochen, wo p und q Functionen einer einzigen Variable λ sind, die ihrerseits natürlich Function von u' und v' ist. Mit Rücksicht darauf, dass $\frac{\partial p}{\partial v'} = \frac{\partial q}{\partial u'}$, ergiebt sich nach kurzer Rechnung

$$p = Aq^i \quad \text{und} \quad \frac{\partial \lambda}{\partial u'} = \frac{A}{iq^{1-i}} \frac{\partial \lambda}{\partial v'},$$

also nach der bekannten Jacobi'schen Methode

$$u' + \frac{i}{A} q^{1+i} v' = w,$$

wo w eine willkürliche Function von λ oder von q bedeutet. (Der Fall, dass λ, also auch p und q constant sind, führt auf die Abbildung, bei welcher den Meridianen und den Parallelkreisen gerade Linien entsprechen.) Bei veränderlichem λ ergiebt sich, wenn man $q = e^{a+\lambda(1+i)}$, $A = e^{a(1+i)}$, $u' = \varrho e^{i\vartheta}$, $v' = \varrho e^{-i\vartheta}$ setzt, die Gleichung

$$\varrho \cos\left[\lambda - \vartheta + \frac{\pi}{4}\right] = \Omega(\lambda),$$

wo Ω eine willkürliche Function bedeutet.

Wählt man speciell Ω constant, so besteht das Netz der Abbildung aus zwei Systemen logarithmischer Spiralen, welche sich senkrecht durchschneiden.

Um die allgemeine Integration der Gleichung

$$\frac{r}{p^2} + \frac{t}{q^2} = 0$$

zu bewirken, wird gesetzt $p = e^{-(\xi+\eta)-(\xi-\eta)i}$, $q = e^{-(\xi+\eta)+(\xi-\eta)i}$ und $u' = e^{(\xi+\eta)}z$. Dann ergiebt sich nach einiger Rechnung

die Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta} = z,$$

mit deren Integration das Problem gelöst ist. Dies ist aber eine lineare Partialgleichung mit constanten Coefficienten, deren allgemeines Integral sich durch bestimmte Integrale in bekannter Weise darstellen lässt. Es werden nun einige einfache specielle Integrale der Gleichung und die ihnen entsprechenden Abbildungen betrachtet. Setzt man z. B. $z = -\frac{i}{2} e^{(\xi-\eta)i}$, so besteht das Netz aus concentrischen Kreisen und den Geraden, welche durch den Mittelpunkt gehen. Etwas allgemeiner ist die Lösung

$$z = Ae^{-\frac{2m(m-1)(\xi+\eta)-(2m-1)(\xi-\eta)i}{m^2+(m-1)^2}}.$$

Das Netz besteht aus logarithmischen Spiralen.

Zum Schlusse zeigt der Verfasser, wie man aus imaginären Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial p^2}}{\left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)^2} + \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial q^2}}{\left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2} = 0$$

durch Benutzung der sogenannten Legendre'schen Transformation reelle Lösungen herleiten kann. Setzt man nämlich

$$w = pu' + qv' - Z$$

und sieht p und q als unabhängige Veränderliche an, dann erhält man die Gleichung

$$\frac{1}{q^2}\frac{\partial^2 w}{\partial p^2} + \frac{1}{p^2}\frac{\partial^2 w}{\partial q^2} = 0.$$

Sind nun Z_1 und Z_2 zwei conjugirte Lösungen der ursprünglichen Gleichung, so erhält man die entsprechenden Werte w_1 und w_2. Da aber die Gleichung für w linear ist, so sind auch (w_1+w_2) oder $i(w_1-w_2)$ Integrale der Gleichung. Bezeichnet man einen dieser Werte mit w_3, so ist

$$Z_3 = pu' + qv' - w_3, \quad u' = \frac{\partial w_3}{\partial p}, \quad v' = \frac{\partial w_3}{\partial q},$$

und durch Elimination von p und q erhält man Z_2 als Function von u' und v', und dies ist eine reelle Lösung.

Als Beispiel wird gewählt

$$Z_1 = u'^m v'^{\frac{m}{2m-1}},$$

wo m eine reelle Constante bedeutet, die weder 0, noch $\frac{1}{2}$, noch 1 ist.

Es ergiebt sich, wenn man $l = \frac{m(2m-1)}{m^2+(m-1)^2}$ setzt,

$$Z_2 = \frac{1}{m} w_2 = a[p^l q^{\frac{l}{2m-1}} + p^{\frac{l}{2m-1}} q^l],$$

woraus sich dann die weiteren Formeln herstellen lassen.

Zum Schlusse zeigt der Verfasser, dass man sich auch der Symmetrie der Variabeln bedienen kann, um aus bekannten Lösungen andere abzuleiten. A.

R. HEGER. Beiträge zur Lehre von den Karten-Entwürfen. Civiling. (2) XXXVI. 47-62.

Bezeichnet man, unter Voraussetzung der Kugelgestalt der Erde, mit δ den sphärischen Abstand eines Punktes P vom Mittelpunkte des abzubildenden Gebietes, mit λ das Azimut von P, so ist die Abbildung bekanntlich zenital und azimutal, wenn der Bildpunkt P' die Polarcoordinaten $\varrho = f(\delta)$, λ hat.

Der Verfasser entwickelt unter der Voraussetzung

$$f(\delta) = \delta + a\delta^3 + b\delta^5 + c\delta^7 + \cdots$$

das Mass der Flächen- und Winkelverzerrung

$$\frac{\varrho\varrho'}{\sin\delta} - 1 \quad \text{und} \quad 2w = 2\arcsin\frac{\varrho'\sin\delta - \varrho}{\varrho'\sin\delta + \varrho}.$$

Die Coefficienten werden so bestimmt, dass beide Ausdrücke dem absoluten Betrage nach gleich werden; man erhält

$$\varrho = \delta - \frac{1}{720}\delta^5 - 0{,}0000359\,\delta^7 + 0{,}0000024\,\delta^9.$$

Des weiteren bestimmt der Verfasser die Coefficienten so, dass die Winkelverzerrung in einem constanten Verhältnis zur Flächenverzerrung steht.

Dann wendet sich der Verfasser den echt cylindrischen Kartenentwürfen zu. Des weiteren behandelt er in ähnlicher Weise vermittelnde Kegelentwürfe. Im letzten Abschnitt giebt er eine neue Ableitung der Tissot'schen Formeln für den Kegelstumpfentwurf. F. K.

M. Busolt. Behandlung der conformen Abbildung der Oberflächen zweiter Ordnung. Diss. Königsberg i. Pr. Koch, Antiqu. 95 S. 8°.

Zehnter Abschnitt.

Mechanik.

Capitel 1.

Allgemeines (Lehrbücher etc.).

Le opere di GALILEO GALILEI. Edizione nazionale sotto gli auspici di S. M. il Re d'Italia. Promotore dell'edizione il R. Ministero della Pubblica Istruzione. (Ausgabe von 500 nicht im Handel vorkommenden Exemplaren.) Firenze. G. Barbèra.

Le opere di GALILEO GALILEI ristampate fedelmente sopra la edizione nazionale con approvazione del Ministero della Pubblica Istruzione. Firenze. G. Barbèra.

Wenn es Pflicht ist, Verehrung und Dankbarkeit für diejenigen zu hegen, welche die Wissenschaft mit neuen Resultaten oder mit der Erklärung bekannter Erscheinungen bereichert haben, so muss man um so mehr jene grossen Männer ehren, welche durch ihre Arbeiten feste Regeln zur Erforschung der wissenschaftlichen Wahrheiten ermittelt haben, und es ist eine Ehrenpflicht, dafür zu sorgen, dass ihre Werke nicht verloren gehen oder zerstreut bleiben. Unter den Gelehrten dieser zweiten Art nimmt Galileo Galilei eine der höchsten Stellen ein als (um die Worte zu brauchen, welche auf seinem Grabe in Santa Croce stehen) „Geometriae Astronomiae Philosophiae Maximus Restitutor Nullis Aetatis suae comparandus". Schon während seines

Lebens erfreute er sich eines so grossen Ruhmes, dass er zweimal sich bewegen liess, an eine Ausgabe seiner gesammelten Werke zu gehen: das eine Mal (1634) wollte er auf die Anregung von P. Carcavy die Sammlung unternehmen, das andere Mal nach den Vorschlägen der berühmten Verleger der Elzevire. Aber diese beiden Versuche hatten kein Resultat. — Daher wurde nach dem Tode Galilei's der noch nicht zwanzigjährige Vincenzo Viviani vom Gedanken erfasst, den Plan seines Lehrers zu verwirklichen; und er brachte die dazu nötigen Vorstudien so weit, dass er einen allgemeinen Umriss der ganzen Arbeit schon skizziren konnte. Durch mannigfaltige Umstände verhindert, sein Unternehmen zu Ende zu führen, nahm er seine Zuflucht zu Carlo Manolessi, durch dessen Verdienst die erste Sammlung Galilei'scher Schriften an das Licht trat (2 Bde. 4°, Bologna 1655-56). Aber das Verbot der Veröffentlichung einiger Arbeiten des grossen Philosophen, welches der heilige Stuhl ausgesprochen hatte, liess diese Aufgabe zu unvollkommen, so dass sie nicht als den allgemeinen Wünschen entsprechend betrachtet werden konnte. Daher kehrte Viviani zu seinem alten Gedanken zurück und suchte durch die Hülfe des Fürsten Leopold von Toscana den kirchlichen Widerstand zu überwinden; aber umsonst! Danach gab Viviani sein edles Unternehmen auf, welches er, wie kein anderer, zu Ende zu bringen befähigt war. — Doch sind die Materialien, welche Viviani gesammelt hatte, nicht ganz unnütz geblieben; denn sie wurden von Tommaso Buonaventuri benutzt, welcher, durch Guido Grandi und Benedetto Bresciani unterstützt, die erste Florentiner Ausgabe der Werke Galilei's im Jahre 1718 veröffentlichte (3 Bde. 4°). Diese Ausgabe wurde sehr bald höchst selten; daher entschloss sich Toaldo, eine neue zu veranstalten, in welcher es ihm gelang, auch die berühmten Gespräche über die beiden wichtigsten Weltsysteme einzuschalten (Padova 1744; 4 Bde. 4°). Diese Ausgabe diente als Grundlage sowohl für die erste Mailändische (1808-1811; 13 Bde. 8°, von denen nur der letzte Band etwas enthält, was sich in den vorigen Ausgaben nicht befand) als für die zweite, welche die Bände XX und XXI der Biblioteca Enciclopedica Italiana bildet. — Unter diesen fünf

Ausgaben ist die Paduaner des Toaldo die beste; dessen ungeachtet konnte sie nicht allen Wünschen genügen, und Eugenio Albèri benutzte die Gelegenheit der Versammlung der italienischen Gelehrten 1841 zu Florenz, um den Plan zu einer neuen Ausgabe auseinanderzusetzen. Nachdem er die hohe Unterstützung des Grossherzogs von Toscana erlangt hatte, begann er (1842) seine Arbeit auszuführen und brachte sie 1856 zu Ende. Die Albèri'sche Ausgabe ist verdienstvoll, wie alle wohl wissen, welche dieselbe gebraucht haben; dessen ungeachtet hat die Eile, mit der sie gemacht wurde, den Herausgeber verhindert, diejenigen Voruntersuchungen zu vollenden, welche einer solchen Arbeit vorhergehen müssen. Davon rührt bei ihr eine gewisse Unsicherheit in der Richtung und ein Mangel an festen Kriterien. Ferner ist sie mangelhaft zufolge ungenügender Sorgfalt beim Abschreiben des Textes und bei der Veröffentlichung der ungedruckten Schriften. Endlich hat man in diesen letzten dreissig Jahren viele andere Galilei'sche Schriften teils entdeckt, teils veröffentlicht, welche in der Sammlung der Werke Galilei's einen Platz wohl verdienen. Daher war eine neue Ausgabe derselben durchaus zeitgemäss. Unter der hohen Unterstützung des Königs von Italien, unter der wissenschaftlichen Leitung des Herrn Antonio Favaro, des fleissigsten der italienischen Forscher über Galilei, dessen Werkchen „Per l'edizione nazionale delle opere di Galileo Galilei" (wovon eine II. Aufl. im Jahre 1890 erschien) der Abfassung des Berichtes zugrunde liegt, indem wir die obigen Nachrichten über die Galilei-Ausgaben ihr entnahmen, und mit Hülfe des wohlbekannten Philologen Isidoro Del Lungo wurde diese neue Ausgabe ins Leben gerufen. Dieselbe wird zwanzig Bände enthalten, auf die alle die gedruckten oder ungedruckten Schriften verteilt werden sollen, welche durch Galilei oder nach seinen Gedanken verfasst wurden, wie auch alle diejenigen seiner Gegner, welche zu Antworten oder Bemerkungen seinerseits Veranlassung gaben; ferner alle von ihm geschriebenen oder an ihn gerichteten Briefe und die Documente, welche sich auf sein Leben beziehen; endlich eine Galilei-Bibliographie.

Von dem ersten Band dieser Ausgabe soll dieses Referat

reden. Wir wollen seinen Inhalt kurz besprechen; doch wollen wir vorausschicken, dass jede Schrift in ihrer Originalform gedruckt wird; aber auch alle durch den Verfasser gemachten Textveränderungen werden mitgeteilt. Für jede Schrift werden auch die speciellen Veröffentlichungskriterien angegeben.

I. „Iuvenilia.“ Unter diesem Titel wurden einige Fragmente von keinem grossen Interesse gesammelt, welche Erläuterungen über Werke des Aristoteles geben. Der Text derselben befindet sich in der National-Bibliothek von Florenz und ist von Galilei selbst geschrieben. Daher gehören dieselben sicher auf eine gewisse Weise Galilei zu; aber die Annahme ist nicht ohne Grund, dass sie Excerpte von Universitätsvorlesungen sind, welche er in Pisa gehört hat, und welche nach Prof. Ragnisco's (m. s. Rivista italiana di filosofia, Anno V, Vol. II, S. 463) und Favaro's Meinung von Bonamici gehalten wurden.

II. „Theoremata circa centrum gravitatis solidorum.“ Die Sätze bezwecken die Bestimmung der Schwerpunkte von Pyramiden, Kegeln und parabolischen Cylindern und sind zufolge der Studien Galilei's über das Werk Commandino's „De centro gravitatis solidorum“ (Roma 1565) entstanden: die Beweismethoden sind denjenigen ähnlich, welche Archimedes in seiner Abhandlung über die Quadratur der Parabel brauchte.

III. „La Bilancetta.“ Die Studien über die mechanischen Werke des Archimedes und das Nachdenken über jenen Passus, wo Proklus über die Art berichtet, wie jener grosse Gelehrte den Diebstahl des Goldschmiedes des Königs Hieron entdeckte und bewies, haben zur Folge gehabt, dass Galilei meinte, Archimedes habe nicht so verfahren, wie man gewöhnlich sagt, und dass er eine neue Weise ausdachte, um die Aufgabe zu lösen. Die Resultate solcher Forschung sind in der „Bilancetta“ enthalten.

IV. „Tavola delle proporzioni delle gravità in ispecie dei metalli e delle gioje pesate in aria ed in aqua.“ Anhang zu der vorigen Abhandlung.

V. „Postille ai libri De Sphaera et Cylindro di Archimede.“

VI. „De Motu.“ Diese Schrift enthält die Keime der Gedanken, welche später Galilei in seinen Gesprächen über zwei

neue Wissenschaften entwickelte (vgl. Dühring's Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik. II. Aufl. 1877. S. 21). La.

Th. Beck. Historische Notizen. Civiling. (2) XXXVI. 191-212, 505-527.

Die Notizen beziehen sich auf Jacques Besson († 1569) und Agostino Rameli (etwa 1530-1590). Beide sind Verfasser interessanter Werke über angewandte Mechanik. F. K.

E. Budde. Allgemeine Mechanik der Punkte und starren Systeme. Ein Lehrbuch für Hochschulen. I. Bd. Mechanik der Punkte und Punktsysteme. II. Bd. Mechanische Summen und starre Gebilde. Berlin. G. Reimer, 1890/91. XX u. S. 1-418, XII u. S. 419-968. gr. 8°.

Während vor dreissig Jahren der deutsche Student nur au[illegible] Uebersetzungen oder Bearbeitungen französischer Lehrbücher der Mechanik verwiesen werden konnte, ist seitdem ein völliger Umschwung eingetreten. Die Jacobi'schen „Vorlesungen über Dynamik", welche 1866 zuerst erschienen, beleuchteten die allgemeinen analytischen Grundlagen der Behandlung der Aufgaben der Mechanik und wiesen dem Hamilton'schen Principe seine Stelle im Mittelpunkte der Dynamik an. Als erstes grösseres deutsches Lehrbuch folgte die „Theorie der Bewegung und Kräfte" von Schell (1870), danach als ursprüngliches Erzeugnis eines Forschergeistes von eigenartigem Gepräge „Vorlesungen über mathematische Physik" von G. Kirchhoff (1876). Die beiden letzteren Werke bildeten neben der „Theoretischen Physik" von Thomson und Tait (1871/74) seitdem die am meisten studirten Lehrbücher der Mechanik unter der deutschen akademischen Jugend.

Zu ihnen gesellt sich jetzt (ausser dem kleineren Werke von W. Voigt, vgl. F. d. M. XXI. 1889. 837) die „Allgemeine Mechanik" des Herrn Budde mit dem ausgesprochenen Zwecke, ein pädagogisch brauchbares System aufzustellen, das nicht bloss

vom Leichteren zum Schwereren aufsteige, sondern die Anwendbarkeit jedes Satzes auf praktische Aufgaben verdeutliche. Zu diesem Zwecke teilt der Verf. das Gebiet nicht nach Principien, sondern nach dem Objecte ein: die Mechanik der Punkte, zuerst die des einzelnen Punktes, dann die mehrerer Punkte, bildet das erste Buch; nach Einschiebung eines Zwischenstücks über wichtige Summen (Massenintegrale, Schwerpunktsbestimmungen, Anziehungssummen, Trägheitsmomente) werden im zweiten Buche die starren Gebilde behandelt. Was in diese Einteilung nicht hineinpasst, wie z. B. die Theorie der Fadencurven und der biegsamen unausdehnbaren Flächen, ist fortgelassen worden, ein Mangel, dessen Beseitigung im Interesse der Vollständigkeit wünschenswert gewesen wäre. Die Hydromechanik hat natürlich ebenfalls keinen Platz gefunden.

Das Werk ist nicht aus Vorlesungen hervorgegangen, sondern in Erinnerung an Schwierigkeiten bei der Aneignung des Stoffes und in der Absicht geschrieben, die hierbei gemachten Erfahrungen für andere nützlich zu verwerten, besonders, damit der Studirende nach Durcharbeitung der theoretischen Mechanik einer concreten Aufgabe gegenüber nicht hülflos dastehe. Die langjährige litterarische Thätigkeit des Verfs. und seine umfassenden Kenntnisse in der Mathematik und Physik haben bei der Abfassung zusammengewirkt, sodass ein Werk entstanden ist, das gleich ausgezeichnet ist durch seine klare und verständliche Sprache wie durch die scharf gegliederte und lichtvolle Entwickelung der Gedanken. Als besonders charakteristische Stellen seien hervorgehoben die Erörterung der physikalischen Grundlagen (S. 111 ff.) mit Anlehnung an Streintz und C. Neumann, das Hamilton'sche Princip für einen einzigen Punkt (S. 250 ff.), vor allem aber das zweite Buch mit der Mechanik der starren Gebilde, in welchem der Verf. teils eigene Untersuchungen zuerst veröffentlicht, teils die Ergebnisse der Forschungen von anderen Gelehrten anschaulich vorträgt. Die Theorie der Vectoren (welchen Namen der Verf. statt des deutschen Ausdrucks „Strecken“ von den Engländern übernimmt) wird hier in ihrer mannigfachen Bedeutung dargestellt, und die Ball'sche

Theorie der Windungen und Dynamen erscheint wohl zum ersten Male in einem deutschen Lehrbuche vollständig als organischer Teil in das allgemeine System der Mechanik hineingearbeitet.

Ein Register der Begriffsbestimmungen und eine Litteraturübersicht beschliessen das Ganze. Einzelne eingestreute Aufgaben dienen als Fingerzeige für die Anwendungen. Das verdienstvolle Werk ist für das Studium warm zu empfehlen. Aus einem Gusse hervorgegangen, wirkt es wie ein einheitliches Kunstwerk auf den Leser; auch manches vom Verf. liebevoll gepflegte krause Beiwerk möchte man nicht an ihm entbehren.

Lp.

J. H. Jellett. Die Theorie der Reibung. Deutsch bearbeitet von J. Lüroth und A. Schepp. Mit vielen Figuren im Text. Leipzig. B. G. Teubner. X u. 238 S. gr. 8°.

Das Werk „Treatise on the theory of friction“ des im Jahre 1888 (19. Febr.) verstorbenen englischen Gelehrten hat gleich bei seinem Erscheinen 1872 allgemeinen Beifall gefunden (vergl. Darboux Bull. IV. 225 - 227) und ist in F. d. M. IV. 480 - 481 durch den inzwischen auch verschiedenen Casey besprochen worden. Die beiden jetzigen Bearbeiter sagen in der Vorrede über ihr Unternehmen unter Bezugnahme auf das Vorwort des Verfassers: „Was Jellett in diesen Sätzen, die er seinem Werke bei dessen Erscheinen 1872 voranschickte, sagte, gilt auch heute noch. Da seit dieser Zeit, so viel wir wissen, kein anderes ausführliches Buch über die Theorie der Reibung erschienen und andererseits das Original vergriffen ist, glaubten die Unterzeichneten den deutschen Lesern durch die vorliegende Uebersetzung einen Dienst zu erweisen. An dem englischen Original wurden einige Aenderungen angebracht und auf Correctheit der Formeln grosse Sorgfalt verwandt, so dass, wie wir hoffen, keine Fehler stehen geblieben sind“.

Der Vollständigkeit halber möge noch das Inhaltsverzeichnis im Auszuge folgen. 1. Cap. Definitionen und Grundsätze. 2. Cap. Gleichgewicht mit Reibung. 3. Cap. Aeusserste Gleich-

gewichtslagen. 4. Cap. Bewegung eines materiellen Punktes oder eines Systems materieller Punkte. 5. Cap. Bewegung eines festen Körpers. 6. Cap. Notwendiges und mögliches Gleichgewicht. 7. Cap. Ueber die Bestimmung des thatsächlichen Wertes der wirkenden Reibungskraft. 8. Cap. Verschiedene Probleme. Lp.

A. Föppl. Leitfaden und Aufgabensammlung für den Unterricht in der angewandten Mechanik. I. u. II. Leipzig. B. G. Teubner. IV u. 140, VI u. 180 S. gr. 8°.

Erstes Heft: 1) Mechanik des materiellen Punktes I. 2) Mechanik der starren Körper I. 3) Die Maschinen. 4) Die Festigkeitslehre. Tabellen.

Zweites Heft: 1) Mechanik des materiellen Punktes und der starren Körper II. 2) Mechanik der flüssigen Körper I. 3) Mechanik der flüssigen Körper II. Energetik. 4) Elektromechanik. Tabellen.

Bei der Bearbeitung ist auf die Bedürfnisse der gewerblichen oder technischen Lehranstalten mittleren Ranges Rücksicht genommen worden; doch dürfte das Werkchen auch den Lehrern der Physik an Gymnasien und Realschulen zur Belebung des Unterrichts durch Heranziehung von Beispielen aus den technischen Anwendungen willkommen sein. Die Behandlungsweise ist zweckentsprechend, klar und verständlich, greift auch nicht zu hoch. Lp.

Rehdans. Aufgaben aus der Statik und Dynamik mit Beispielen, welche an preussischen Anstalten in der Entlassungsprüfung bearbeitet worden sind. Pr. Gymn. Graudenz (No. 33). 31 S. 8°.

Die ersten 15 Seiten bringen als „mathematische Vorübungen“ Sätze und Formeln der reinen Mathematik; erst der zweite Abschnitt beschäftigt sich mit den üblichen Aufgaben aus der Mechanik. Lp.

S. RYCHLICKI. Physikalische Aufgaben aus der Mechanik nebst Auflösungen für die Prima höherer Lehranstalten. Pr. Gymn. Wongrowitz (No. 161). 47 S. 8°.

Eine Sammlung von 164 Schulaufgaben von nicht zu hoher Schwierigkeit. „Die durchweg selbständige Sammlung lehnt sich nur an etwa vier Stellen an den Wortlaut gleichartiger Aufgaben aus Martus und Jansen an." Lp.

Weitere Lehrbücher.

D. BOBYLEW. Einleitung in die theoretische Mechanik. I. Kinematik. St. Petersburg. 1890. 183 S. mit 4 Figurentafeln. (Russisch.)

L. KIRPITSCHEFF. Die Grundlehren der Mechanik. 2te Ausgabe. St. Petersburg. 1890. 472 S. (Russisch.)

O. CHWOLSON. Die Lehre von den Bewegungen und Kräften. Vorlesungen. St. Petersburg. 1890. 267 S. mit XVI Figurentafeln. (Russisch.)

H. LAURENT. Traité de mécanique. 3e éd. 2 vol. Paris. VIII + 352, XIV + 364 S.

P. PUISEUX. Leçons de cinématique, mécanismes, hydrostatique, hydrodynamique, professées à la Sorbonne. Rédigées par P. Bourguignon et H. Le Barbier. Paris. VIII + 340 S. 8°.

W. M. HICKS. Elementary dynamics of particles and solids. London. Macmillan and Co. VIII + 397 S.

Referat F. d. M. XXI. 1889. 845ff.

R. H. PINKERTON. An elementary text-book of dynamics and hydrostatics. 2nd ed. London. Blackie and Son. [Nature XLII. 543.]

TH. W. WRIGHT. Text-book of mechanics. New York. D. Van Nostrand Company. [Nature XLII. 567.]

B. PRICE. A treatise on analytical mechanics. Vol. II. Dynamics of a material system. 2nd ed. Oxford Clarendon Press. (1889.) [Nature XLII. 585-587.]

Syllabus of elementary dynamics. Part I. Linear dynamics with an appendix on the meanings of the symbols in physical equations. London. Macmillan and Co. [Nature XLII. 28.]

A. Weilenmann. Physikalische Mitteilungen. Wolf Z. XXXV. 302-322.

Der Zweck dieser Artikel ist ein didaktischer; sie sollen die Behandlungsweise der einzelnen Gegenstände insbesondere in dem Falle zeigen, dass die Infinitesimalrechnung ausgeschlossen ist. 1. Ueber die Reibung. 2. Ueber die Fliehkraft. 3. Zur Gastheorie. 4. Potential eines Punktes in Bezug auf eine elektrische Kugel. Lp.

F. Reuleaux. Ueber das Verhältnis zwischen Geometrie, Mechanik und Kinematik. Zwei Vorträge. Z. dtsch. Ing. XXXIV. 14 S.

Der Verf. sucht die Bereiche der Wissenschaften, Bewegungsgeometrie und Mechanik, scharf gegen einander abzugrenzen. Mechanik ist ihm die Wissenschaft von dem ursächlichen Zusammenhang der Bewegung der Körper, die Bewegungsgeometrie oder Phoronomie hat es nur zu thun mit den Gesetzen der Bewegung räumlicher Gebilde und fragt nicht nach einem derartigen ursächlichen Zusammenhang. In diesem Sinne fällt die Erforschung der Bewegungsgesetze der Himmelskörper, wie sie Kepler und seine Vorgänger betrieben haben, rein in den Bereich der Phoronomie, die Himmelsmechanik beginnt erst mit Newton. Das Wort Kinematik (cinématique) ist zuerst von Ampère 1830 in dem Werke „Essai sur la philosophie des sciences“ für eine bestimmte Betrachtungsform der Mechanismen eingeführt worden, es hat aber im Laufe der Zeiten eine derartig umfassende Bedeutung gewonnen, dass es sich mit dem Begriff der Phoronomie vielfach deckt. Gegen diesen Gebrauch des Wortes wendet sich Herr Reuleaux mit scharfen Worten. Er will den Ausdruck Kinematik beschränkt wissen auf die Lehre von de Art und

Weise, wie Bewegungen in Mechanismen erzwungen werden. Sie ist ihm demnach ein Teil der Mechanik, da es sich um die Verursachung von Bewegungen handelt; denn „das Wesen des Zwanges in machinalen Systemen besteht darin, dass in ihnen Körper unter Berührung auf einander wirken und zwar so, dass vermöge der in den Körpern vorhandenen Widerstandsfähigkeit und vermöge der Formen der berührenden Teile für jeden derselben alle Relativbewegungen ausser einer einzigen ausgeschlossen sind". Die Kinematik ist also gleichbedeutend mit dem Worte „Zwanglauflehre", d. h. sie ist „die Wissenschaft von derjenigen besonderen Einrichtung der Maschine, vermöge deren die gegenseitigen Ortsveränderungen der Teile zu bestimmten werden". Schn.

R. Proell. Geometrie, Mechanik, Kinematik. Z. dtsch. Ing. XXXIV. 347-348, 563.

W. Hartmann. Geometrie, Mechanik, Kinematik. Z. dtsch. Ing. XXXIV. 561-563.

Im Anschluss an Reuleaux's Abhandlung über das Verhältnis zwischen Geometrie, Mechanik und Kinematik weist Herr Pröll auf seine Abhandlung im Jahrgang 1873 des Civilingenieurs hin, in welcher er auf graphisch-kinematischem Wege die relative Bewegung der Planeten gegen die Erde studirt hat. Herr Hartmann macht auf einige Ungenauigkeiten der Pröll'schen Abhandlung aufmerksam. F. K.

G. Helm. Ueber den Einfluss der Technik auf die Ausbildung der mechanischen Principien. Civiling. (2) XXXVI. 159-161.

Die Tendenz des Vortrages geht aus dem Titel hervor; ein Auszug aus dem kurzen Referat erscheint unthunlich.

F. K.

J. Bertrand. Principes généraux sur le choix des unités. Nouv. Ann. (3) IX. 21-35.

Der Artikel ist ein Abdruck eines Teils des Capitels XIII aus den „Leçons sur la théorie mathématique de l'électricité". Der Verfasser erörtert in der ihm eigentümlichen klaren und geistvollen Weise die Willkürlichkeiten, welche den Beziehungen zwischen den beliebig festgesetzten Masseinheiten für die verschiedenen zu messenden Grössen (hier Länge, Zeit, Masse, Kraft, Geschwindigkeit) mit Notwendigkeit anhaften, und zieht daraus die Folgerungen über die Homogeneität der Gleichungen der Mechanik sowie über die Dimensionen der einzelnen Grössen, welche in den Formeln auftreten. Lp.

G. Bertolini. Le unità assolute. Definizioni, dimensioni, rappresentazione, problemi; con una bibliografia. Milano. XII + 175 S.

H. Fritsch. Beiträge zur Mechanik. Pr. Realgymn. Königsberg i. Pr. (No. 20). 20 S. 4°.

Die Ueberlegungen des Verfassers sollen beweisen, dass aus der Undurchdringlichkeit der Masse ihre Elasticität folge. „Dass jede Masse beweglich ist, das ist wohl schon seit dem Anfange der Physik bekannt; dass jede Masse, weil beweglich, auch träge sein muss, das ist wohl erst seit Galilei und Kepler so weit ins Bewusstsein der Physiker eingedrungen, dass man nicht mehr versucht, diese Trägheit irgendwie zu erklären; genau ebenso wird man sich allmählich in die Anschauung hineinfinden müssen, dass die Elasticität der Masse nicht weiter eine Erklärung erfordert, dass sie vielmehr notwendig aus der Undurchdringlichkeit gefolgert werden muss. Mit dieser Vorstellung von dem Wesen der Elasticität steht denn auch ganz im Einklange die Erfahrungsthatsache, dass wir keinen für unsere sinnliche Wahrnehmung vollkommen elastischen Körper kennen; elastisch ist die Masse doch nur, weil sie undurchdringlich ist; eine für unsere sinnliche Wahrnehmung vollkommen undurchdringliche Masse kennen wir nicht u. s. w."

Zum Schlusse der Anzeige der „Beiträge zur Theorie der Gravitation" von demselben Verfasser (F. d. M. XVIII. 1886. 39),

wo sich schon die nämlichen Gedanken finden, bemerkte der Ref., dass die Zahl der ausgesprochenen und unausgesprochenen, bei den Ableitungen angewandten Hypothesen sehr gross sei, und dass ihre Beschaffenheit oft bedenklicher erscheine, als das zu erklärende Gesetz. Es genüge, auf diese Bemerkung wieder hinzuweisen. So lange der Verf. unbekümmert um die kritischen Forschungen anderer Gelehrter, wie Mach und Streintz, seinen Weg verfolgt und z. B. bei der Feststellung der Definition der Krafteinheit die Zeit fortlässt (die nirgends in seinen Schlussfolgerungen vorkommt), so lange er den Massenbegriff als einzig selbständigen festhält, ohne sich bewusst zu sein, dass er damit den Kraftbegriff zugleich hineingelegt hat, werden seine vermeintlichen „Thatsachen“ als Hypothesen zu gelten haben; ihnen wollen wir als letztes Ergebnis der Betrachtungen den Schlusssatz der Abhandlung anreihen: „In dem Begriffe der Masse ist nichts vorhanden, was der Fähigkeit zu denken notwendig widerspricht, die Masse als solche kann folglich Sitz oder Grundlage des Denkens sein; und dennoch würde man fortan nicht etwa das Denken als eine neue Seite des Massenbegriffs auffassen, man müsste vielmehr sich bemühen, die thatsächlich an der Masse beobachtete Fähigkeit zu denken abzuleiten aus ihren oben aufgeführten notwendigen Eigenschaften.“ Lp.

Ch. Golowin. Zur Frage über die Composition der Kräfte. Chark. Ges. (2) II. 162-166. (Russisch.)

Ein analytischer Beweis des Parallelogramms der Kräfte. Indem der Verfasser von dem Satze ausgeht, dass zwei gleiche und in entgegengesetzten Richtungen wirkende Kräfte sich im Gleichgewichte befinden, und dass die Resultante zweier gleichen, einen beliebigen Winkel mit einander bildenden Kräfte die Richtung der diesen Winkel halbirenden Geraden hat, beweist er zuerst, dass die Grösse der Resultante zweier auf einander senkrechten Kräfte gleich ist der Diagonale des über ihnen construirten Rechteckes, und zeigt dann, dass auch die Richtung der Resultante mit dieser Diagonale zusammenfällt. Endlich

wird der Beweis des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte auch auf den allgemeinen Fall, wenn der Winkel zwischen den Kräften ein beliebiger ist, ausgedehnt. Bb.

W. E. JOHNSON. Proof of the parallelogram of forces. Nature XLI. 153.

J. D. EVERETT. Duchayla's proof. Nature XLI. 198.

A. G. GREENHILL. The parallelogram of force. Nature XLI. 298.

G. CASAZZA. Il teorema del parallelogramma delle forze dimostrato erroneo. Brescia. Tipogr. Savoldi. [Nature XLII. 413.]

LEONHARD WEBER. Ueber das Galilei'sche Princip. Kiel. Haeseler'sche Buchh. 1891. 40 S. gr. 8°.

In dieser dem Herrn G. Karsten zu seinem siebzigsten Geburtstage gewidmeten Schrift erörtert der Verf. die Fassung des Trägheitsgesetzes unter Berücksichtigung der bisher darüber geführten Untersuchungen, besonders des Streintz'schen Werkes: „Die physikalischen Grundlagen der Mechanik“ (F. d. M. XV. 1883. 760), ohne jedoch der Lange'schen Arbeiten Erwähnung zu thun (vgl. u. a. F. d. M. XVII. 1885. 816). Der erste Abschnitt enthält den Versuch einer Analyse derjenigen Beobachtungselemente und Denkoperationen, welche der Aufstellung des Trägheitsprincipes zu Grunde liegen, und in dem zweiten Abschnitt wird die folgende neue Formulirung begründet (S. 36): „Erklärung: Unter universell geradlinig-gleichförmiger Bewegung eines Punktes sei diejenige verstanden, bei welcher die Bewegung des Massenmittelpunktes der Welt rücksichtlich eines mit dem Punkte verbundenen Coordinatensystems eine geradlinig-gleichförmige ist, falls die Richtungen des Systemes jederzeit so gelegt werden, dass die hierauf bezogene lebendige Kraft des Weltalls ein Minimum wird. Satz: Wenn auf einen materiellen Punkt keine Kräfte einwirken, besitzt er eine universell geradlinig-gleichförmige Bewegung. Und umgekehrt.“

„Sollten hiergegen keine Einwendungen gemacht werden, so wäre mit der zuletzt vorgeschlagenen Fassung des Galilei'schen Satzes einerseits allen an der früheren Newton'schen Fassung empfundenen Mängeln abgeholfen, und andererseits wäre der unfruchtbare, durch die Lücke des Galilei'schen Satzes eingeschlüpfte, und nur zu Unklarheiten führende Begriff des absoluten Raumes definitiv aus der Physik und vielleicht auch sonst aus der Welt geschafft." Lp.

M. Zistl. Ueber Verwandlung, Uebertragung und Aufspeicherung der Energie. Pr. Gymn. Würzburg. 83 S. 8°.

Eine fleissige Zusammenstellung der Ergebnisse der bezüglichen Forschungen bis in die neueste Zeit; so sind u. a. die Untersuchungen der Herren H. von Helmholtz, Planck, Ostwald, Duhem aus dem letzten Jahrzehnt berücksichtigt worden.

Lp.

G. Holzmüller. Mechanisch-technische Plaudereien. Z. deutsch. Ing. XXXIV. 30-34, 58-61, 374-379.

Die schon im vorhergehenden Bande der Fortschritte (S. 855) besprochenen Entwickelungen werden fortgesetzt. Im ersten Abschnitte behandelt der Verfasser Beispiele von Arbeitsfähigkeit rotirender Massen. Wir führen an die Energie von Schwungrädern, den Energieverlust, welchen durch Verminderung der Rotationsgeschwindigkeit die Erde erfahren hat, Pendel von verschiedener Form.

Dann wird die ausgleichende Thätigkeit des Schwungrades besprochen und an Beispielen erläutert.

Danach wendet der Verfasser sich Bewegungen zu, bei denen neben fortschreitender Bewegung auch Drehungen vorhanden sind. Es wird zunächst der Ausdruck für die Energie bei derartigen Bewegungen aufgestellt. Mit Hülfe des Satzes von der Erhaltung der Kraft wird dann die Bewegung einer Scheibe untersucht, die durch einen um sie geschlungenen Faden gezwungen ist, neben der abwärts gerichteten Bewegung ihres Mittel-

punktes eine Rotation um letzteren anzunehmen. Dann erörtert der Verfasser die Bewegung eines Cylinders auf einer schiefen Ebene, wenn derselbe durch einen umgeschlungenen Faden zum Rollen gezwungen ist (vgl. F. d. M. XXI. 1889. 943).

Diese Aufgabe bildet den Uebergang zu demjenigen Capitel, welches uns ganz besonders interessant zu sein scheint, nämlich zu einer eigenartigen Lösung von Aufgaben, bei welchen die Reibung in Frage kommt. Als Beispiel für die Art von Aufgaben, welche in Frage steht, führen wir hier die folgende an.

Ein Cylinder vom Gewichte p werde durch eine Zugkraft p_1 auf horizontaler Bahn bewegt. Wie gross muss die gleitende Reibung mindestens sein, damit nur Rollen, aber kein Gleiten eintritt?

Im Anschluss hieran erörtert der Verfasser die Frage nach der Bewegung, welche eintritt, wenn jene Bedingung nicht erfüllt ist. F. K.

G. della Bona. La statica e la dinamica nello studio dei fenomeni sociali. Ven. Ateneo. (13) II. 297-315.

Im Anschluss an einen ähnlichen Aufsatz „Lo spazio ed il tempo nello studio dei fenomeni sociali" im Ateneo von 1889 macht der Verf. allgemeine Betrachtungen über Analogien in der Statik und Dynamik und im socialen Leben. Im zweiten Teile werden die Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf nationalökonomische Probleme in populärer Form besprochen. Lp.

Capitel 2.

Kinematik.

E. Study. Ueber die Bewegungen des Raumes. Leipz. Ber. XLII. 341-354, Naturf. Ges. Bremen. LXIII. 4.

Enthält die vorläufige Mitteilung einer Reihe von Resultaten, die in Math. Ann. XXXIX ausführlich abgeleitet worden sind.

Die ∞^3 Drehungen eines Körpers um einen festen Punkt resp. die Coefficienten der zugehörigen orthogonalen Substitution lassen sich, wie Euler gezeigt hat, rational durch vier homogene Parameter darstellen, die ihrerseits wieder rational von den Substitutionscoefficienten abhängen. Sie haben überdies die Eigenschaft, dass sich die Parameter der resultirenden Drehung bilinear aus denjenigen der beiden componirenden Drehungen zusammensetzen. Der Verfasser knüpft hieran die Frage, ob nicht auch die ∞^6 Bewegungen des Raumes einer ähnlichen Parameterdarstellung mit bilinearer Zusammensetzung fähig sind. Die Antwort lautet, dass hierzu acht homogene Parameter notwendig und hinreichend sind.

Ein eingehendes Referat wird im Anschluss an die oben genannte Arbeit gegeben werden. Sfs.

Ch. Hochmann. Die Kinematik der Mechanismen. Bd. I. Grundlehren des Erkennens und der Bildung von Paaren und Mechanismen. Odessa. 1890. XVI. 248 S. nebst 3 Figurentaf. (Russisch.)

Ch. Hochmann. Ueber die Kinematik der Mechanismen. Arbeiten der VIII. Versammlung der russischen Naturforscher und Aerzte. 1890. St. Petersburg. Math. und Astron. 25-30. (Russisch.)

Der Verfasser giebt in seinem Berichte einen Begriff vom ersten Bande seiner Kinematik der Mechanismen, welcher die Theorie des Erkennens und der Bildung von Paaren und Mechanismen enthält. Unter Erkennen versteht er die Untersuchung der Bewegung und überhaupt aller kinematischen Eigenschaften schon vorher bekannter Mechanismen, unter Bildung das Auffinden, die Erfindung von Mechanismen nach vorgeschriebener Bewegung. Bb.

Ch. Hochmann. Maschinenkinematik. Bd. II. Die Lehre von den kinematischen Paaren. Teil 2. Die Bildung der Paare. Lief. 1. Allgemeine praktische Methode

zum Profiliren der Zähne auf nicht kreisrunden und kreisrunden Rädern. Odessa. 1890. 62 S. nebst 4 Figurentaf. (Russisch.)

Im ersten Bande seiner Maschinen-Kinematik hat der Verfasser eine analytische Formel der allgemeinen Methode zum Profiliren beliebiger Räder und eine sehr einfache Construction dafür gegeben; aber sowohl diese Formel, als auch die Construction sind ohne weitere Bearbeitung in den Einzelheiten gegeben, da nach dem Plane der Arbeit die umständlichere Ableitung der Grundformeln in die folgenden Bände gehört. Wegen der praktischen Bedeutung des Gegenstandes hält der Verfasser es für nützlich, die Praktiker mit seiner Methode des Profilirens der Zähne bekannt zu machen. Bb.

D. Seiliger. Mechanik der ähnlich-veränderlichen Systeme. 1. Lieferung: Theorie der Vectoren. Odessa Ges. XI + 122 S. nebst 2 Figurentaf. 1890. 2. Lieferung: Theorie der Schrauben. Odessa Ges. XI. 149-221 nebst 1 Figurentaf. (Russisch.)

Der Verfasser weist hin auf den schon ziemlich hohen Grad der Vollständigkeit und Geschlossenheit in den Untersuchungen auf dem Gebiete der Kinematik eines ähnlich-veränderlichen Systems und auf den Mangel der Untersuchungen auf dem Gebiete der Mechanik eines solchen Systems. Allein in der Statik von Möbius befindet sich eine Frage, welche zur Statik eines solchen ebenen Systems gehört. Aus diesem Grunde hat der Verfasser ein Werk unternommen, dessen beide erste Lieferungen die Theorie der Strecken und die Theorie der Schrauben enthalten. Der Hauptunterschied der Theorie der Strecken eines ähnlich-veränderlichen Systems und der Theorie der Strecken eines unveränderlichen Systems besteht darin, dass ein Paar entgegengesetzt gleicher Strecken, die auf einer Geraden liegen, ein unveränderliches System nicht in Bewegung setzen, wohl aber eine Deformation eines veränderlichen Systems hervorbringen. Deshalb ist der Verfasser genötigt, nicht nur Kräfte-

paare, deren Componenten nicht auf einer Geraden liegen, und welche eine Drehung des Systems hervorbringen, sondern auch Dilatations- und Compressionspaare zu betrachten. Er stützt sich erstens auf den Satz vom Parallelogramm der Kräfte, welche auf einen Punkt wirken, und dann auf ein Princip, welches ausspricht, dass ein Dilatations- oder Compressionspaar auf eine beliebige Gerade im Raume übertragen werden kann, wenn man nur darauf Acht giebt, dass die Grösse der Kräfte und die Entfernung zwischen ihren Angriffspunkten dabei nicht verändert werden. Bb.

R. Aranaz e Izaguirre. Los mecanismos, estudios analíticos y graficos. Madrid. Aguado (1889). [Rev. d'Art. XXXV. 580.]

A. Calinon. Étude de cinématique à deux et à trois dimensions. Paris. 129 S. 8°.

P. Puiseux. Leçons de cinématique, mécanismes, hydrostatique, hydrodynamique, professées à la Sorbonne, rédigées par P. Bourguignon et H. Le Barbier. Paris. G. Carré. VIII + 340 S. 8°.

Anzeige in Darboux Bull. (2) XV. 10-11.

P. Somow. Ueber die Beschleunigungen in collinear-veränderlichen Systemen. Arbeiten der VIII. Versammlung der russischen Naturforscher und Aerzte. St. Petersburg 1890. Math. u. Astron. 41-44. (Russisch.)

In einer Abhandlung, welche sich in den Mitteil. der math. Gesellsch. in Charkow für das Jahr 1890 vorfindet, untersucht P. Somow die Verteilung der Geschwindigkeiten in collinear-veränderlichen Systemen. In dem vorliegenden Berichte betrachtet er die Beschleunigungen der Punkte eines solchen Systems. Bb.

F. Buka. Elemente der kinematischen Geometrie des zweigliedrigen ebenen Systems. Pr. (Nr. 103) Realgymn. Charlottenburg. 27 S. 4°.

Der Verf. entwickelt die Elemente der Kinematik für zwei starre ebene Systeme, ohne besondere Kenntnis der synthetischen Geometrie vorauszusetzen, in einer einfachen, rein geometrisch gehaltenen Form. Zweckmässige Beispiele erläutern die allgemeinen kinematischen Gesetze und vermitteln zugleich die Erkenntnis einer ganzen Reihe wichtiger Relationen aus der Lehre von den Kegelschnitten. Gerade hierdurch empfiehlt sich die Schrift als ein wertvoller Beitrag zum Lehrstoff für höhere Lehranstalten, besonders für solche, welche die Vorbereitung für technische Hochschulen mit als eine Hauptaufgabe ansehen.

Schn.

F. Morley. On the kinematics of a triangle of constant shape but varying size (with a note). Quart. J. XXIV. 359-369, 386.

Die Arbeit bezieht sich auf einige Gesetze, welche für die Bewegung ähnlich-veränderlicher Systeme gültig sind. Das Grunddreieck, welches während der Bewegung die Aehnlichkeit bewahrt, und auf welches Punkte oder Curven des Systems bezogen gedacht werden, wird zunächst so geleitet, dass seine Ecken sich auf drei festen Geraden bewegen. Nachdem das Wesentliche dieser Bewegungsform entwickelt worden ist, wird das Grunddreieck so geführt, dass jede Seite desselben durch je einen festen Punkt geht, und dieser Fall durch eine Inversion auf jenen zurückgeführt. Des weiteren wird eine Darstellung des Ortes eines Systempunktes oder der Enveloppe einer Systemcurve bei allgemeinen Bewegungsvorgängen gegeben und auf die Relationen eingegangen, welche die von Systempunkten umschriebenen Flächen verknüpfen. (Vergl. F. d. M. XIII. 670.)

Schn.

R. Mehmke. Ueber die Bewegung eines starren ebenen Systems in seiner Ebene. Schlömilch Z. XXXV. 1-28, 65-81.

Die Formeln, in denen die Bewegung eines starren ebenen Systems zum Ausdruck gebracht wird, gründen sich auf die geometrische Darstellung complexer Zahlen. Sie sind von grosser Allgemeinheit und umfassen sowohl die directe, wie die indirecte Bewegung des Systems. Indem die geometrische Natur einer Curvenstelle wesentlich in dem Möbius'schen Sinne gekennzeichnet wird, verfolgt der Verf. alle Besonderheiten, welche bei den Bahnen der Systempunkte auftreten können. Es fallen in den Bereich der Untersuchung nicht nur die Fälle, in denen Polbahn und Polcurve im augenblicklichen Berührungspunkte sich einfach berühren, sondern auch diejenigen, in welchen die Krümmung der Polcurven bestimmte Eigentümlichkeiten im Berührungspunkte aufweist. Genauer in die Behandlungsform einzugehen, ist nicht möglich, ohne das hier zulässige Mass des Raumes zu überschreiten. Schn.

M. Grübler. Die momentane Bewegung dreier starrer Geraden mit einem gemeinschaftlichen Punkte in einer Ebene. Schlömilch Z. XXXV. 247-254.

Bewegen sich drei beliebige Punkte A_1, A_2, A_3 in einer Ebene mit gegebenen Geschwindigkeiten, so wird, wenn ein Punkt A in starre Verbindung mit jenen drei Punkten gebracht wird, im allgemeinen eine den Voraussetzungen entsprechende Bewegung nicht mehr möglich sein; denn die Geschwindigkeit des Punktes A ist in Grösse und Richtung schon bestimmt durch die Geschwindigkeiten von zweien der drei Punkte. Es entsteht daher die Frage, wie der Punkt A zu jenen drei Punkten gelegen sein muss, damit eine momentane Bewegung möglich ist. Die Untersuchung dieser Frage führt zu dem Ergebnis, dass der Ort der Punkte A aus einer Curve dritter Ordnung besteht, welche in die unendlich ferne Gerade und einen Kegelschnitt zerfällt. Die Construction dieses Kegelschnitts wird gegeben; derselbe hat, wie der Verf. ausführt, in der Fachwerkstheorie eine besondere Bedeutung. Schn.

G. Pastore. La legge di Roberts sul quadrilatero articolato. Torino Atti XXVI. 84-101.

Der Roberts'sche Satz über das Gelenkviereck, der zuerst ausgesprochen und bewiesen wurde in der Abhandlung „On three-bar motion in plane space" (Lond. M. S. VII. 14-23), besagt, dass die Curve, welche von einem unveränderlich mit der Koppel eines ebenen Gelenkvierecks verbundenen Punkte beschrieben wird, von drei verschiedenen Gelenkvierecken, deren jedes eine feste Seite hat, gezeichnet werden kann (vgl. das ausführliche Referat in F. d. M. VIII. 1876. 551 von Hrn. Schumann). Der Roberts'sche Beweis ist wesentlich analytisch. Hr. Burmester beweist den Satz in seinem Lehrbuche der Kinematik (Bd. I, S. 294) nach synthetischer Methode. Gegenwärtig liefert Hr. Pastore einen neuen directen und sehr einfachen geometrischen Beweis, der sich nur auf die Mittel der elementaren Planimetrie stützt, und zieht einige Schlussfolgerungen und Anwendungen aus seinen Betrachtungen, wie z. B.: In jedem Augenblicke liegen die drei Rotationscentren O, O', O'' (der drei Gelenkvierecke) und der beschreibende Punkt P in einer Geraden. Wenn man zwei von den drei festen Punkten A, B, C der Figur betrachtet, so bewegen sich die um sie drehbaren Arme, welche nicht zu dem diese beiden Punkte als feste Centren besitzenden Gelenkviereck gehören, mit derselben Winkelgeschwindigkeit. Zuletzt werden einige besondere Gelenkvierecke betrachtet, welche auf die Erzeugung der cyklischen Curven führen. Lp.

W. Preobraschensky. Ueber eine Frage der Theorie der Gelenkmechanismen. Arbeiten der VIII. Versammlung der russischen Naturforscher und Aerzte. St. Petersburg. 1890. Math. u. Astron. 70. (Russisch.)

Es wird eine analytische Lösung des sogenannten umgekehrten Problems der Gelenke, angewandt auf den Hart'schen Inversor, gegeben. Bb.

F. Masi. Alcune proprietà della curva di Watt. Bologna. 31 S. 8° u. 1 Taf.

L. Burmester. Geradführung und Proportionalität am Indicator. Z. dtsch. Ing. XXXIV. 2 S.

Es werden von Herrn Burmester in zwei Zuschriften an die Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure Irrtümer dargelegt, welche sich in dem in Bd. XXXIV dieser Zeitschrift von Herrn W. Hartmann veröffentlichten Vortrage, obigen Gegenstand betreffend, finden. Schn.

H. Knauff. Polbahnen, deren Roulette ein Kreis ist. Diss. Marburg, Pr. (Nr. 650) Realsch. Schönberg i. Ratzeburg. 34 S. gr. 8°.

Die Bewegung eines ebenen starren Systems ist bestimmt durch die Roulette, welche ein Punkt des Systems beschreibt, und durch die Polcurve des bewegten Systems. Durch diese beiden Curven ist die Polbahn bedingt. In der Arbeit wird als Roulette ein Kreis gewählt, als Polcurve ein Kegelschnitt, eine logarithmische oder eine hyperbolische Spirale. Die Untersuchung der Polbahnen, welche sich unter diesen Bedingungen ergeben, bildet den Gegenstand der vorliegenden Abhandlung.

Schn.

C. Rodenberg. Ueber Polbestimmung in Verzweigungslagen zwangläufig bewegter starrer Systeme. Naturf. Ges. Bremen. LXIII. 6-8.

„Es handelt sich um die Bestimmung derjenigen Pole, um welche zwei consecutive Bewegungen stattfinden können. Jeder Systempunkt eines der beiden Glieder beschreibt dann im Systeme des anderen Gliedes eine Curve mit mehrfachem Punkte, und die Normalen der verschiedenen Zweige dieses Punktes sind nach den zu suchenden Polen gerichtet.“ Lp.

E. Ovazza. Il poligono funicolare in cinematica. Torino Atti XXV. 406-413.

Wenn eine Gerade λ sich um einen ihrer Punkte innerhalb einer Ebene dreht, und wenn man die Geschwindigkeiten ihrer

Punkte in einem gegebenen Momente als Lote zur Geraden in diesen Punkten abträgt, so liegen die Endpunkte aller dieser Lote in einer zweiten Geraden λ', welche durch das Rotationscentrum geht. Ist l eine zu λ senkrechte Gerade der Ebene, so nennt der Verfasser den Winkelraum zwischen den beiden Geraden λ und λ' das „Diagramm der simultanen Geschwindigkeiten in der Richtung l“. Der Aufsatz enthält die Ableitung des folgenden Satzes: „Zwei Diagramme der Geschwindigkeiten in Richtunng l, die in einer und derselben Ebene π construirt sind und sich auf dasselbe System von simultanen Elementar-Rotationen um parallele Axen (Lote zur Ebene π) beziehen, sind affine Figuren mit dem Affinitätscentrum im Unendlichen auf l und mit einer Affinitätsaxe, die zu der Verbindungslinie der Pole parallel ist.“ Hierbei sind von einem „Pole“ P die Parallelen μ_i, μ_{i+1}, ..., μ_r zu den Geraden λ'_i, λ'_{i+1}, ..., λ'_r gezogen und diese Parallelen mittels einer Geraden von der Richtung l im Abstande 1 von P geschnitten. Der polygonale Zug $\lambda'_i \lambda'_{i+1} \dots \lambda'_r$ kann ein „Seilpolygon“ heissen, das die Winkelgeschwindigkeiten enthält. Lp.

H. Wiener. Die Zusammensetzung zweier endlichen Schraubungen zu einer einzigen. Leipz. Ber. XLII. 13-23.

H. Wiener. Zur Theorie der Umwendungen. Leipz. Ber. XLII. 71-87.

H. Wiener. Ueber geometrische Analysen. Leipz. Ber. XLII. 245-267.

Ein einfacher, in seinen Folgen fruchtbarer Gedanke ist der der Umwendung, welche der Verfasser als einheitliche Elementarbewegung in die Kinematik einführt. Unter einer Umwendung ist verstanden eine halbe Umdrehung um eine Axe. Die Folge der Umwendungen um zwei parallele Gerade ersetzt eine Schiebung eines starren Gebildes um den doppelten Abstand dieser Geraden; die Folge der Umwendungen um zwei sich schneidende Geraden ersetzt eine Drehung um ihren doppelten Winkel um eine Axe, welche in dem Schnittpunkte beider Geraden senkrecht zu ihrer Ebene errichtet ist; endlich ist die Folge der

Umwendungen um zwei windschief sich kreuzende Geraden ersetzbar durch eine Schraubung, deren Winkel mit dem doppelten Winkel und deren Höhe mit dem doppelten Abstand beider Geraden übereinstimmt, während die Schraubenaxe mit der Linie dieses Abstandes zusammenfällt. Umgekehrt kann jede Schraubung durch die Umwendungen um zwei Geraden *s* und *t* ersetzt werden; diese Geraden schneiden die Schraubenaxe senkrecht. Die eine kann im übrigen willkürlich angenommen werden, die andere ist aber alsdann in der angegebenen Form durch die Maasse der Schraubung bedingt. Sind demnach zwei Schraubungen gegeben, so kann man die Linie des kürzesten Abstandes beider Schraubenaxen als eine Umwendungsaxe *t* ansehen, welche mit einer Umwendungsaxe *s* zusammen die eine Schraubung und mit einer Umwendungsaxe *u* zusammen die andere Schraubung charakterisirt. Das Ergebnis beider Schraubungen ist also durch eine Umwendung um *s*, eine darauf folgende um *t*, eine abermalige um *t* und eine neue Umwendung um *u* ersetzbar. Da die zweimaligen Umwendungen um *t* sich aufheben, so ist der Erfolg beider Schraubungen durch zwei Umwendungen um *s* und *u* ersetzbar, und diese beiden ergeben wieder eine Schraubung, deren Elemente aus *s* und *u* leicht construirbar sind. Damit sind die Erfolge zweier Schraubungen durch die einer einzigen ersetzt, und die Elemente derselben aus denen jener beiden Schraubungen constructiv abgeleitet.

Im Anschluss an die Lösung der gestellten Aufgabe zeigt der Verfasser, wie nun aus der Theorie der Umwendungen gefolgert werden kann, dass jedes starre System aus einer Lage in jede beliebige andere stets durch zwei Umwendungen gebracht werden kann, und er begründet damit auf neue Art den Satz, dass sich jeder Körper aus einer Lage in eine beliebige andere durch eine Schraubung überführen lässt.

Die Theorie der Umwendungen führt Herrn Wiener zu der Betrachtung allgemeiner geometrischer Verwandtschaftsverhältnisse. Er unterwirft dieselben bestimmten Formen der Rechnung; auf letztere näher einzugehen, muss indessen an dieser Stelle verzichtet werden. Nur eine allgemeinere Bemerkung, die das

Bestreben des Verfassers kennzeichnet, mag hier noch Platz finden. Versteht man unter einer involutorischen Verwandtschaft eine solche (nicht identische) Verwandtschaft, die, zweimal hinter einander angewandt, die identische Verwandtschaft ergiebt, so ist, wo es nur immer möglich ist, in einer bestimmten Klasse von Verwandtschaften eine jede als Folge von involutorischen Verwandtschaften aufzufassen, die Theorie dieser allgemeineren Verwandtschaften auf diejenige der sie zusammensetzenden involutorischen Verwandtschaften zu gründen. Da Herr Wiener in Aussicht stellt, diesen allgemeinen Gedanken in seiner Tragweite für bestimmte Verwandtschaftsverhältnisse eingehender zu verfolgen, so wird Gelegenheit werden, auf denselben später näher einzugehen. Schn.

C. Küpper. Die Schraubenbewegung, das Nullsystem und der lineare Complex. Monatsh. f. Math. 95-104.

Von der Schraubenbewegung ausgehend, entwickelt der Verf. die Theorie des Nullsystems und des linearen Complexes. Er empfiehlt, in dieser Form das Studium dieser Gebilde in Vorträgen an technischen Hochschulen zu vermitteln. Schn.

G. Darboux. Sur le déplacement d'une figure invariable. Ann. de l'Éc. Norm. (3) VII. 323-326.

Ein Umdrehungscylinder C rolle in einem zweiten Umdrehungscylinder C', dessen Radius die doppelte Grösse hat, und gleite gleichzeitig längs der erzeugenden Geraden von C'. Unterwirft man die Bewegung von C noch der Bedingung, dass ein Punkt seiner Fläche eine Gerade beschreibe, welche notwendiger Weise durch die Axe von C' gehen muss, so ist die Bewegung von C vollkommen bestimmt, und jeder mit C starr verbundene Punkt beschreibt einen Kegelschnitt. Diese Bewegung ist die allgemeinste, bei welcher alle Punkte des starren Gebildes Ellipsen beschreiben, und zwar ist es, wenn man den Fall ausschliesst, bei welchem der Körper parallel einer festen Ebene verschoben wird, die einzige, bei welcher alle Punkte des starren

Gebildes ebene Curven beschreiben. Der Beweis hierfür wird in geistvoller Weise aus kinematischen Gesichtspunkten mit Hülfe des Princips der inversen Bewegung geführt.

Bei der Bewegung eines starren ebenen Gebildes in seiner Ebene giebt es eine Bewegung, bei welcher alle Punkte Ellipsen beschreiben; im Raume giebt es dagegen keine Bewegung, bei der alle Punkte des Raumes Flächen zweiten Grades beschreiben, vielmehr treten an ihre Stelle in gewissem Sinne Steiner'sche Flächen, das heisst: Es existirt eine Bewegung eines starren Gebildes im Raume, bei welcher alle Punkte Steiner'sche Flächen beschreiben. Zehn besondere Punkte des beweglichen Gebildes beschreiben bei dieser Bewegung Ebenen. Wenn man die Bewegung noch gewissen besonderen Bedingungen unterwirft, so kann es vorkommen, dass die Punkte von zwei Geraden Ellipsoide beschreiben. In diesem Falle giebt es, wenn man imaginäre Elemente zulässt, ein Tetraeder mit höchstens zwei reellen Seiten, welches folgende Eigenschaften darbietet:

Jeder Punkt ausserhalb der Seitenflächen beschreibt eine Steiner'sche Fläche, jeder Punkt, welcher in einer Seitenfläche, aber ausserhalb der Kanten gelegen ist, eine Regelfläche dritter Ordnung, jeder Punkt endlich, welcher auf einer der Kanten sich befindet, durchläuft eine Fläche zweiter Ordnung oder eine Ebene. Schn.

A. Mannheim. Sur le déplacement d'une figure de forme invariable dont tous les plans passent par des points fixes. J. de l'Éc. Pol. LX. 75-88.

Herr Darboux hatte bemerkt (C. R. 1881), dass, wenn ein starres System sich so bewegt, dass jede Ebene desselben bei der Bewegung durch einen festen Punkt geht, die Ebenen Umdrehungskegel umhüllen. Im Anschluss an diese Bemerkung zeigt Herr Mannheim, dass diese Umdrehungskegel parallele Axen haben. Daraus wird gefolgert, dass in dem starren System ein Ebenenbüschel vorhanden ist, dessen Ebenen bei der Bewegung bezüglich durch feste Geraden gehen. Alle diese Ge-

raden sind Erzeugende eines Umdrehungscylinders. Es lässt sich demnach die Bewegung auch dadurch erzeugt denken, dass ein Dreiflach sich so bewegt, dass zwei seiner Flächen durch zwei parallele Geraden gehen, während die dritte Fläche stets durch denselben Punkt läuft. Indem diese Bewegungsform weiter untersucht wird, gelangt Herr Mannheim zu dem Ergebnis, dass die Bewegung dadurch hervorgebracht werden kann, dass ein Umdrehungscylinder (C) auf einem festen Umdrehungscylinder $\left(\frac{C}{2}\right)$, der, im Inneren von (C) gelegen, den halben Radius von jenem zum Radius hat, rollt, und in der Richtung der Axe gleichzeitig derart gleitet, dass eine mit ihm fest verbundene Ebene durch einen festen Punkt geht. Wird diese Bewegungsform vorausgesetzt, so lässt sich wieder erkennen, dass jede Ebene des bewegten, aber in sich starren Systems durch einen festen Punkt führt. Betrachtet man die inverse Bewegung, so erkennt man, dass ein Umdrehungscylinder, welcher im Innern eines anderen Umdrehungscylinders von doppeltem Radius rollt, und gleichzeitig so gleitet, dass ein mit ihm starr verbundener Punkt auf einer festen Ebene verbleibt, die Bewegung eines starren Systems bestimmt, bei der alle Punkte des Systems ebene Curven beschreiben. Schn.

A. Mannheim. Sur un mode de transformation en géométrie cinématique. C. R. CX. 220-223, 270-272.

A. Mannheim. Transformation en géométrie cinématique. C. R. CX. 391-394.

Wenn eine Gerade D sich so bewegt, dass drei ihrer Punkte a, b, c bezüglich auf drei Kugelflächen bleiben, deren Mittelpunkte α, β, γ einer Geraden O angehören, so verschieben sich die anderen Punkte von D auch auf Kugelflächen, deren Mittelpunkte auf O gelegen sind. Beschreibt man um a eine Kugel, welche die Kugelfläche um α berührt, und verfährt entsprechend mit b und c, so werden diese neuen Kugeln, wenn sie, von unveränderlicher Form gedacht, bei der Bewegung von D mitgeführt werden, die drei festen Kugelflächen berühren. Da bei der Be-

wegung von D ein jeder Punkt l von D auf einer Kugelfläche bleibt, deren Mittelpunkt λ auf der Geraden O gelegen ist, so muss eine Kugel von unveränderlicher Gestalt, welche l zum Mittelpunkte hat, bei der Bewegung von D stets zwei concentrische Kugeln berühren, welche λ zum Mittelpunkte haben. Denkt man sich demnach, dass eine Reihe Kugeln (une file de sphères), deren Mittelpunkte einer Geraden D angehören, ein Gebilde von unveränderlicher Gestalt bilden, und verschiebt dasselbe so, dass drei von ihnen bezüglich drei feste Kugeln, deren Mittelpunkte auf einer Geraden O liegen, berühren, so wird jede der beweglichen Kugeln stets zwei concentrische Kugeln berühren, deren Mittelpunkt auf O gelegen ist. Wird D in das Unendliche verlegt, so werden die Kugelflächen, deren Mittelpunkte auf D angenommen wurden, zu Ebenen, welche einer Geraden parallel laufen, und man darf im besonderen auch annehmen, dass dieselben einen Ebenenbüschel bilden. So gewinnt Herr Mannheim den Satz: „Ein Ebenenbüschel von unveränderlicher Form bewege sich derart, dass drei seiner Ebenen bezüglich drei Kugeln berühren, deren Mittelpunkte auf einer Geraden O gelegen sind; jede Ebene des beweglichen Büschels berührt bei der Bewegung eine Kugel, deren Mittelpunkt sich auf O befindet.

Es bildet somit das mittlere der drei oben ausgesprochenen Theoreme das verbindende Glied zwischen dem ersten und letzten; denn denkt man sich, dass die Kugelreihen zu Punkten der Geraden D übergehen, so entsteht das erste der Theoreme; das zweite aber ist in der Form abzuleiten, wie soeben dargelegt ist. Durch Betrachtung der Kugelreihe wird also das eine Theorem, welches sich auf die Trajectorienflächen der Punkte einer Geraden bezieht, in das andere Theorem übergeführt, welches die Trajectorienflächen betrifft, die von den Ebenen eines in sich starren Ebenenbüschels beschrieben werden. Die Gesetze für jene und für diese Trajectorienflächen lassen manche Analogien erkennen, welche durch das dargelegte Princip der kinematischen Umbildung ihre Begründung erhalten. Dies das Wesen der Sache. Die Fruchtbarkeit des Gedankens wird durch mannigfache interessante Anwendungen dargelegt,

doch muss, was diese betrifft, auf die Publication selbst verwiesen werden.

Während in der ersten Mitteilung von Flächentrajectorien der Punkte des starren Systems die Rede war, wird das Princip der kinematischen Transformation in einer zweiten Mitteilung auf Fälle angewandt, in denen die Punkte des starren Systems Linientrajectorien beschreiben. So gewinnen z. B. die folgenden beiden Sätze ihre innere Verbindung: „Die Normalebenen für die Trajectorien der Punkte einer Geraden schneiden sich längs einer Geraden“, und das Analogon: „Die Normalebenen für die Ebenen eines beweglichen in sich starren Ebenenbüschels, welche bei einer Lage des Büschels durch die bezüglichen Charakteristiken dieser Ebenen gehen, schneiden sich längs einer Geraden“. In der gleichen Weise werden die folgenden beiden Sätze verbunden: „Die Krümmungsaxen der Trajectorien der Punkte einer Geraden gehören einem Hyperboloid an“, und: „Die Krümmungsaxen der abwickelbaren Flächen, welche von den Ebenen eines beweglichen in sich starren Ebenenbüschels umhüllt werden, liegen auf einem Hyperboloid“. Diese Beispiele mögen zur Kennzeichnung der zweiten Mitteilung genügen.

In einer dritten Mitteilung werden die Principien der kinematischen Transformation auf eine Construction angewandt. Wenn die Trajectorien von zwei Punkten einer Geraden bekannt sind, so ist die Verrückung der Geraden bestimmt; die Elemente zweier Trajectorien müssen also die Elemente der Trajectorie eines beliebigen Punktes der Geraden bestimmen lassen. Herr Mannheim hat seiner Zeit eine Construction angegeben für die Krümmungsaxe der Trajectorie eines beliebigen Punktes der beweglichen Geraden, wenn dieselbe für die Trajectorien zweier Punkte der Geraden gegeben ist. Durch die Transformation wird folgende Construction dieser zur Seite gestellt: „Ein bewegliches Zweiflach von unveränderlicher Form bewege sich so, dass seine Seitenflächen zwei abwickelbare Flächen beschreiben. Kennt man die Krümmungsaxen dieser beiden abwickelbaren Flächen, so handelt es sich um die Bestimmung der Krümmungsaxe der Enveloppe einer Ebene, welche mit dem Zweiflach in starrer Ver-

bindung steht und der Kante des Zweiflachs parallel läuft, oder im besonderen Falle diese Kante in sich schliesst".

Auch in einer Formel findet die Analogie zwischen einer bewegten Geraden und einem bewegten Ebenenbüschel einen Ausdruck. Schn.

A. Mannheim. Théorème de géométrie cinématique. Nouv. Ann. (3) IX. 227-228.

Es bewege sich ein starres System. In demselben mögen Gerade aufgefasst werden, welche von einem Punkte a auslaufen. Jede dieser Geraden beschreibt bei der Bewegung des Systems eine geradlinige Fläche, und in Beziehung auf diese kommt jeder dieser Geraden ein Centralpunkt für eine bestimmte Lage zu. Alle diese Centralpunkte liegen auf einem Umdrehungscylinder, welcher die Schraubenaxe für die augenblickliche Bewegung des Systems enthält, und dessen senkrechter Querschnitt den Abstand des Punktes a von dieser Axe zum Durchmesser hat. Dieses Theorem wird aus den einfachsten Elementen der Kinematik hergeleitet. Schn.

A. Mannheim. Sur le déplacement d'un double cône. C. R. CXI. 634-636, 817-819.

Ein Doppelkegel sei zusammengesetzt aus zwei gleichen Rotationskegeln. Die gemeinschaftliche kreisförmige Basis (C) sei in einer verticalen Ebene gedacht. Symmetrisch zu dieser Ebene mögen zwei Gerade D_1 und D_2 liegen, welche sich in einem Punkte o dieser Ebene schneiden: Auf diese beiden Geraden sich stützend, möge der Doppelkegel eine rollende Bewegung machen. Die Ebene $(D_1 D_2)$, welche senkrecht zu (C) gestellt ist, enthält die augenblicklichen Drehungsaxen, und zwar stehen auch sie senkrecht zu (C), sind also unter einander parallel. Der Ort der Drehungsaxen in dem starren Gebilde, dessen Bewegung durch die des Doppelkegels bedingt ist, ist demnach ein Cylinder, dessen Erzeugende senkrecht gegen die Verticalebene C gerichtet sind. Der senkrechte Querschnitt dieses Cylinders ist, wie sich ergiebt, eine logarithmische Spirale. Die Be-

wegung des Doppelkegels kann also auch dadurch erzeugt werden, dass ein mit ihm fest verbundener Cylinder von der gekennzeichneten Art auf der Ebene $(D_1 D_2)$ der Bahnlinien rollt. Der Ort der Berührungspunkte des einen der Kegel mit der Bahnlinie D_1, auf welche er sich bei der Bewegung stützt, ist eine Curve, welche die Erzeugenden dieses Kegels unter demselben Winkel schneidet, also eine loxodromische Curve. Dasselbe gilt natürlich auch entsprechend für den anderen Kegel. Auf dem mit dem Kegel in Verbindung gedachten Cylinder ist dieser Ort der Berührungspunkte eine Schraubenlinie.

In einer zweiten Mitteilung setzt Herr Mannheim voraus, dass sich der Doppelkegel auf zwei Schraubenlinien bei der Bewegung stütze, welche auf einem Umdrehungscylinder, der senkrecht zur Ebene (C) gestellt ist, sich befinden, und welche symmetrische Lage gegen diese Ebene haben. Die Bewegung des Doppelkegels ist alsdann auch dadurch hervorzubringen, dass ein mit ihm starr verbundener Cylinder, dessen senkrechter Querschnitt eine logarithmische Spirale ist, sich auf jenem Rotationscylinder derartig abwälzt, dass die Erzeugenden beider Cylinder bei dem Bewegungsvorgang nach und nach in einander fallen. Diese Bewegungsform ist allgemeinerer Natur als diejenige, welche in der ersten Mitteilung angenommen worden ist; denn lässt man den Rotationscylinder in eine Ebene übergehen, so werden die Schraubenlinien die Bahngeraden D_1 und D_2. Es ist also die erste Bewegungsform als eine Bewegungsform besonderer Art in der zweiten enthalten. Schn.

G. Suslow. Ueber die Krümmung der Flächen. Arbeiten der VIII. Versammlung der russischen Naturforscher und Aerzte. St. Peterburg. 1890. Math. u. Astr. 54-55. (Russisch.)

Thomson und Tait (Treatise on Natural Philosophy) betrachten die Krümmung der Flächen von einem etwas von dem gewöhnlichen abweichenden Standpunkte aus. Der Zweck der Mitteilung des Herrn G. Suslow ist, diese Theorie in einer ein-

facheren Form darzustellen und auf einige aus ihr sich ergebenden Sätze hinzuweisen. Am Ende seines Berichtes bemerkt er, dass diese Methode von grossem Nutzen ist bei Untersuchungen über das Rollen einer Fläche auf einer anderen, sowie über die Stabilitätsbedingungen des Gleichgewichts einer schweren Fläche auf einer anderen. Bb.

G. Königs. Sur l'oscillation de la vitesse angulaire dans le mouvement d'un corps solide libre. S. M. F. Bull. XVIII. 131-135.

Es bewege sich ein Ellipsoid um seinen Mittelpunkt derart, dass es auf einer festen Berührungsebene, ohne zu gleiten, rollt, und zwar sei die Winkelgeschwindigkeit in jedem Augenblick proportional dem Richtstrahl nach dem Berührungspunkte. Ist das Ellipsoid ein Trägheitsellipsoid, so sind die nach der Grösse geordneten Halbaxen der Bedingung unterworfen $\frac{1}{c^2} < \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$, und aus dieser wird bekanntlich geschlossen, dass die Herpolodie, d. i. die Bahn des Berührungspunktes in der Berührungsebene, keine Inflexionspunkte besitzt. In der vorliegenden Arbeit zieht der Verf. aus jener Bedingungsgleichung eine andere Folge. Entspricht der Richtstrahl R' der kleinsten Winkelgeschwindigkeit und R'' der grössten, so ist $\varrho = \frac{R'}{R''}$, also ist das Verhältnis der kleinsten zur grössten Winkelgeschwindigkeit bei einem ganz beliebigen Ellipsoid in den Grenzen eingeschlossen

$$1 > \varrho^2 > \frac{b^4}{a^2b^2 - c^2(a^2-b^2)},$$

und die untere Grenze kann beliebig klein werden, wenn b und c hinlänglich klein gegen a gewählt werden. Wenn dagegen ein Trägheitsellipsoid gewählt wird, so hält sich ϱ^2 innerhalb der Grenzen

$$1 > \varrho^2 > \frac{a^2+b^2}{2a^2},$$

und die untere Grenze kann nicht unter ½ herabsinken. Es liegt demnach in diesem Falle ϱ zwischen 1 und $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Da $\frac{1}{\sqrt{2}}$ angenähert $\frac{7}{10}$ ist, so kann die Winkelgeschwindigkeit bei der Rotation eines festen Körpers um einen Punkt nur zwischen engen Grenzen variiren, und zwar erreicht die grösste Veränderung der Winkelgeschwindigkeit noch nicht $\frac{3}{10}$, also noch nicht ein Drittel ihres Maximalwertes. Schn.

E. Novarese. Sull' accelerazione di second'ordine nel moto rotatorio intorno a un punto. Torino Atti XXVI. 302-309.

Bei der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt sind von Hrn. Schell in den beiden Auflagen seiner „Theorie der Bewegung und der Kräfte" die Ausdrücke für die Projectionen der Beschleunigungen zweiter Ordnung auf die Coordinatenaxen abgeleitet worden; doch stimmen die Resultate in beiden Auflagen nicht völlig überein. Hr. Novarese hält weder die einen, noch die anderen Formeln für genau und berechnet unter Benutzung von Betrachtungen einer früheren Untersuchung (Studio sull' accelerazione di ordine n nel moto di una retta, Torino Atti XXIV, F. d. M. XXI. 1889. 856) die folgenden Formeln für jene Projectionen:

$$J_x^{(2)} = -3\omega\omega' x + (\omega^2 - \omega'' + \omega\psi^2) y + \omega\psi\left(\omega + \frac{\psi}{R}\right) z,$$
$$J_y^{(2)} = -(\omega^2 - \omega'' + \omega\psi^2) x - 3\omega\omega' y - (2\omega'\psi + \omega\psi') z,$$
$$J_z^{(2)} = \omega\psi\left(2\omega - \frac{\psi}{R}\right) x + (2\omega'\psi + \omega\psi') y.$$

Hierin bedeuten: x, y, z die Coordinaten des betrachteten Punktes; ω die Winkelgeschwindigkeit um die momentane Rotationsaxe OI; die Accente Ableitungen nach der Zeit; $\psi = \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}$, wo a, b, c die Richtungscosinus von OI sind; R den Hauptkrümmungsradius für den unbeweglichen Kegel des Ortes der Rotationsaxen. Im zweiten Teile des Aufsatzes werden einige

Formeln betreffs der Krümmung und der Torsion der Bahncurve eines beliebigen Punktes des beweglichen Systems entwickelt.

Lp.

G. F. W. Baehr. Sur les points d'inflexion de l'herpolhodie de Poinsot. Amst. Versl. en Meded. (3) VII. 328-360, Delft. Ann. de l'Éc. Polyt. VI. 27-51.

Behandelt die Poinsot'sche Herpolodie, specieller die Frage, ob sie Wendepunkte habe. Nachdem Hr. de Sparre dieselbe in der französischen Akademie auf die Tagesordnung gebracht hatte, wurde sie in der letzten Zeit wiederholentlich besprochen. Meistens aber geschah solches mittels der das mechanische Problem ausdrückenden Integrale. Hier aber ist das Problem rein mathematisch aufgefasst, indem Verf. die Herpolodie als den auf einer Ebene durch den Pol eines Ellipsoids, dessen Berührungsebene in constanter Distanz vom Mittelpunkte liegt, beschriebenen Weg betrachtet. Das in dieser Weise in Gleichung gebrachte Problem bezeichnet die Herpolodie, deren Krümmungsradius sich berechnen lässt. Hieraus geht hervor, dass bei Ellipsoiden, welche als centrale Trägheitsellipsoide vorkommen, die Herpolodie weder Wendepunkte noch Inflexionspunkte haben kann, bei anderen Ellipsoiden können sie unter gewissen Umständen vorkommen. Schliesslich behandelt der Verf. die besonderen Fälle, wenn zwei Axen des Ellipsoids einander gleich sind und die Distanz der Berührungsebene vom Mittelpunkte der mittleren Axe gleich ist. Im ersten Falle ist die Herpolodie ein Kreis, im zweiten eine mit der logarithmischen Spirale verwandte Spirale; beides schon von Poinsot gefundene und besprochene Schlussfolgerungen. (Vergl. die früheren Untersuchungen von Herrn Hess über denselben Gegenstand F. d. M. XII. 1880. 649. Lp.)

G.

Ph. Gilbert. Sur l'herpolhodie de Poinsot et sur un appareil de MM. Darboux et Koenigs. Brux. S. sc. XIV A. 42-43, B. 25-34.

Geschichtliche Darstellung der neueren Untersuchungen über

die Herpolodie; einfacher Beweis des Hess'schen Satzes über die Abwesenheit von Wende- und Rückkehrpunkten auf dieser Curve; Beschreibung eines Apparats zur Aufzeichnung dieser merkwürdigen Curve und eines anderen, mit dem ersteren verwandten Apparates. Mn. (Lp.)

F. Reuleaux. Offenes Rundschreiben. Berlin. Druck von H. S. Hermann. 8 S. 4°.

Eine Streitschrift gegen Herrn Burmester. Sie betrifft die Art und Weise, wie Herr Burmester in seinem „Lehrbuch der Kinematik" Arbeiten des Herrn Reuleaux benutzt hat.

Schn.

C. Rodenberg. Ueber Wesen und Aufgaben der Kinematik mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse höherer Schulen. Hoffmann Z. XXI. 3-18, 161-180.

Bericht auf S. 92 dieses Bandes.

R. Wirth. Ueber elliptische Bewegung. Marburg. 26 S. 4°.

K. v. Szily. Ein Beitrag zur Behandlung der Punktbewegung. Berlin. 13 S. 8°. (1889.)

Capitel 3.

Statik.

A. Statik fester Körper.

R. Lauenstein. Die graphische Statik. Elementares Lehrbuch für technische Unterrichtsanstalten und zum Gebrauch in der Praxis. Mit 155 Holzschnitten. Stuttgart. J. G. Cotta. VIII u. 152 S. gr. 8°.

Das Buch ist für den Unterricht an Baugewerkschulen sowie

zum Gebrauch in der Praxis bestimmt und beschränkt sich auf die Behandlung der im Hochbau hauptsächlich vorkommenden Aufgaben. Nachdem zuerst das ebene Kräftesystem hinsichtlich Zusammensetzung, Zerlegung, Gleichgewicht und statischer Momente betrachtet ist, folgt die graphische Bestimmung des Inhaltes, des Schwerpunkts und des Trägheitsmoments ebener Flächen. Hierauf wird der einfache Balken bei permanenter Belastung und das Fachwerk bei permanenter Belastung (Dachstühle mit Berücksichtigung des Winddrucks) betrachtet, unter Vorführung einer grösseren Anzahl von praktischen Beispielen. Weiter folgt die Bestimmung des Erddrucks (nach Rebhann) und die Berechnung von Mauerkörpern und von Gewölben (nach Culmann). — Das Buch ist hübsch geschrieben und dürfte seinem Zweck gut entsprechen. Hk.

W. Ritter. Anwendungen der graphischen Statik. Nach C. Culmann. II. Teil: Das Fachwerk. Mit 119 Textfiguren und 6 Tafeln. Zürich. Meyer u. Zeller. XI u. 229 S. gr. 8°.

Der II. Teil des Werkes (über dessen Plan in F. d. M. XX. 1888. 913 berichtet wurde) behandelt die Theorie des Fachwerks. Er giebt in den 2 ersten Capiteln zunächst die gebräuchlichen Berechnungsmethoden (nach Cremona, Culmann, Zimmermann, Ritter) in praktischer Form, mit specieller Anwendung auf Parallelträger, Parabelträger, Schwedlerträger, Pauliträger und Dachstühle. Umfasst der hier abgehandelte Stoff „ungefähr dasjenige, was der Durchschnittstechniker zu wissen braucht“, so wenden sich die 4 weiteren Capitel an den wissenschaftlich tiefer Dringenden, indem sie sich mit den feineren Fragen befassen, deren Lösung meist die Beiziehung der Elasticitätslehre erfordert und zur Zeit den wichtigsten Gegenstand des wissenschaftlichen Interesses bildet. Der Verfasser hat hier dasjenige aus der neueren Fachwerk-Litteratur, was bleibenden Wert besitzt, in selbständiger Behandlung verarbeitet und — vielfach geklärt durch seine eigenen Untersuchungen — in einer für die praktische Verwertung vorzüglich geeigneten Form zur Darstellung

gebracht. Die Klarheit und Durchsichtigkeit des Vortrages wird ihm viele Freunde erwerben. Das 3. Capitel behandelt zunächst die Bestimmung der elastischen Formänderungen eines Fachwerks nach den Methoden von Williot, Mohr, Müller-Breslau, sowie vom Verfasser selbst (mittels der „elastischen Gewichte" unter Benutzung der Elasticitätsellipse des Fachwerks). Auf Grund der entwickelten Gesetze wird hierauf im 4. Capitel die Berechnung des statisch unbestimmten Fachwerks besprochen. Das 5. Capitel behandelt die aus der Vernietung der Knotenpunkte entstehenden, secundären Spannungen und lehrt deren Bestimmung auf graphischem Wege (nach eigener Methode sowie nach dem Näherungsverfahren Landsberg's). Das 6. Capitel endlich giebt das Wesentlichste über die Constitution und die Berechnung räumlicher Fachwerke. Hk.

L. CREMONA. Graphical statics. Two treatises on the graphical calculus and reciprocal figures in graphical statics. Translated by Th. H. Beare. London. 168 S.

G. DARZENS. Note sur le théorème de Varignon. J. de Math. spéc. (3) IV. 6-8.

Das Gesetz der Momente ($A = xY - yX$ etc. in der Statik) ist das einzige, für welches der Varignon'sche Satz gilt, dass die Summe der Momente der Componenten gleich dem Momente der Resultante ist. Dies wird dadurch bewiesen, dass A gleich einer willkürlichen Function $\varphi(x, y, z;\ X, Y, Z)$ etc. gesetzt und nun diese Function bestimmt wird. Lp.

F. KOSCH. Beiträge zur Theorie ebener Kräftesysteme. Schlömilch Z. XXXV. 155-173.

Die Arbeit gehört in das Capitel der Astasie; doch giebt der Verfasser diesen Zusammenhang nicht an, indem er im Eingange nur die älteren Autoren Möbius, Minding, Schweins citirt. „Die Arbeiten dieser drei Forscher geben keinen weiteren Aufschluss

über die Eigenschaften der Seitenkräfte und der Centrallinie, speciell über die Veränderungen ihrer Lagen bei gewissen Aenderungen des Kräftesystems .... Die folgenden Untersuchungen wollen daher die Theorie ebener Kräftesysteme nach obiger Richtung erweitern; zugleich sind der Vollständigkeit und Einheitlichkeit der Darstellung wegen auch einige bereits bekannte Sätze noch einmal abgeleitet worden."

Die Darstellung bedient sich der Mittel der synthetischen Geometrie, hebt aber nicht hervor, welche von den Resultaten neu sind. Als Beispiele teilen wir die vom Verfasser am Schlusse zusammengestellten Ergebnisse der §§ 10—17 mit:

Teilt man die Kräfte eines ebenen Kräftesystems in zwei Gruppen, deren eine nur constante Kräfte enthält, während die Kräfte der anderen Gruppe ihre Intensität proportional verändern, so 1) beschreibt die Resultante einen Strahlenbüschel erster Ordnung, 2) erzeugt der Hauptmittelpunkt und sein Gegenpunkt je eine kreisförmige Punktreihe $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{F}$, 3) umhüllen die Centrallinie und die Mittelpunktstrahlen denselben Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$ oder beschreiben zwei Strahlenbüschel erster Ordnung, 4) bewegt sich der Centralpunkt auf einer Ellipse $\mathfrak{E}^{(2)}$, deren Hauptaxe gleich der Summe, deren Nebenaxe gleich der Differenz der Durchmesser der beiden Kreise $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{F}$ sind, deren Mittelpunkt die Mitte der Centrale dieser beiden Kreise ist, und welche den Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$ in den Endpunkten eines Durchmessers berührt, bezw. die Mittelpunkte der beiden Strahlenbüschel erster Ordnung zu Endpunkten eines Durchmessers hat. In besonderen Fällen, wenn $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{F}$ gleichen Durchmesser haben, degenerirt die Ellipse $\mathfrak{E}^{(2)}$ zu einem Durchmesser des Kegelschnitts $\mathfrak{C}^{(2)}$. Alle diese erzeugten Gebilde sind projectivisch auf einander bezogen und enthalten die entsprechenden Elemente der beiden Gruppen des Systems. Wenn endlich die beiden Resultanten der Gruppen parallel sind, so beschreibt die Resultante einen Parallelstrahlenbüschel; der Hauptmittelpunkt, sein Gegenpunkt und der Centralpunkt je eine gerade Punktreihe, während die Centrallinie eine Parabel umhüllt. Lp.

C. Ibrügger. Ueber die Anziehung eines homogenen Kugelabschnitts. Greifenberg i. Pomm. 10 S. 4°.

Referat in Abschnitt X, Cap. 5.

G. Emery. Sulle curve funicolari sollecitate per nodi scorrevoli. Separatabzug aus den Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL) (3) VII. (1889.) 29 S.

G. Emery. Nota supplementare alla Memoria: Sulle curve funicolari sollecitate per nodi scorrevoli. Napoli. Tip. della R. Accademia delle sc. fis. e mat. 1890. 11 S. 4°.

Es mögen auf einen biegsamen Faden solche Kräfte wirken, deren Angriffspunkte längs des Fadens beliebig verschiebbar sind. Hängen diese Kräfte von mehreren verschiedenen Ursachen ab, und bezeichnet man die Componenten der auf irgend einen Punkt (x, y, z) wirkenden Kräfte durch $P_{lx}ds$, $P_{ly}ds$, $P_{lz}ds$, wo s die Bogenlänge bedeutet, so kann man schreiben:

$$P_{lx} = \varepsilon_{l_1}X_{l_1} + \varepsilon_{l_2}X_{l_2} + \cdots,\quad P_{ly} = \varepsilon_{l_1}Y_{l_1} + \varepsilon_{l_2}Y_{l_2} + \cdots,$$
$$P_{lz} = \varepsilon_{l_1}Z_{l_1} + \varepsilon_{l_2}Z_{l_2} + \cdots,$$

wo $(X_{l_1}, Y_{l_1}, Z_{l_1})$, $(X_{l_2}, Y_{l_2}, Z_{l_2})$, ... die der ersten, zweiten Ursache zuzuschreibenden Teilkräfte, ε_{l_1}, ε_{l_2}, ... von Punkt zu Punkt variirende Coefficienten, also Functionen von s sind. Setzt man:

$$\int_0^s \varepsilon_{li}\,ds = m_i,$$

$$(\alpha)\qquad Q_x = X_{l_1} + \frac{dm_2}{dm_1}X_{l_2} + \cdots,\quad Q_y = Y_{l_1} + \frac{dm_2}{dm_1}Y_{l_2} + \cdots,$$
$$Q_z = Z_{l_1} + \frac{dm_2}{dm_1}Z_{l_2} + \cdots,$$

und bezeichnet durch (P_{ix}, P_{iy}, P_{iz}) die etwa vorhandenen Kräfte mit festen Angriffspunkten, so sind die Gesamtcomponenten im Punkte (x, y, z):

$$P_x = P_{ix} + Q_x\frac{dm_1}{ds},\quad P_y = P_{iy} + Q_y\frac{dm_1}{ds},\quad P_z = P_{iz} + Q_z\frac{dm_1}{ds}.$$

Zu den gewöhnlichen Gleichgewichtsbedingungen:

$$P_x\left(dy.d\frac{dz}{ds}-dz\,d\frac{dy}{ds}\right)+P_y\left(dz\,d\frac{dx}{ds}-dx\,d\frac{dz}{ds}\right)$$
$$+P_z\left(dx\,d\frac{dy}{ds}-dy\,d\frac{dx}{ds}\right)=0,$$

$$P_x dx+P_y dy+P_z dz = d\left[\frac{P_x d\frac{dx}{ds}+P_y\,d\frac{dy}{ds}+P_z d\frac{dz}{ds}}{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}\,ds\right]$$

kommt noch die eine hinzu:

$$Q_x dx+Q_y dy+Q_z dz = 0.$$

Es ergiebt sich hieraus die merkwürdige Thatsache, dass eine Gleichgewichtsfigur in den folgenden zwei Fällen im allgemeinen nicht existirt:

a) Wenn die rechten Seiten von (α) keine höheren Ableitungen von x, y, z als die ersten enthalten.

b) Wenn die rechten Seiten von (α) keine höheren Ableitungen von x, y, z als die zweiten enthalten, und von m_1 frei sind. Dass es aber selbst in diesen Fällen eine Gleichgewichtsfigur geben muss, ist — wie der Verfasser betont — ganz einleuchtend; und das erhaltene Resultat sagt bloss aus, dass das Gleichgewicht nicht stattfinden kann, ohne dass die Function m_1 von s unstetig wird.

Wird die Freiheit der Angriffspunkte (Knoten) durch gewisse Bedingungen beschränkt, so kann man in jedem Falle eine Gleichgewichtsfigur erhalten. Dies geschieht zum Beispiel, wenn jeder Knoten genötigt wird, auf einer bestimmten Fläche oder Linie zu bleiben, zwei Fälle, welche der Verfasser ausführlich behandelt. Es werden dann einige interessante Anwendungen untersucht, und die erste Abhandlung schliesst mit der Ermittelung einiger bereits aufgestellten Resultate mit Hülfe der Variationsrechnung.

Die „Nota supplementare" enthält einige Erläuterungen über das Princip der in der Abhandlung gebrauchten Methode. (Vergl. das Referat F. d. M. XXI. 1889. 885.) Vi.

E. Cavalli. Contribuzione alla teoria delle trasmissioni telodinamiche. Rom. Acc. L. Rend. (4) VI_1. 244-251.

Bei den Kraftübertragungen durch lange Seile, welche über Rollen laufen, erfordert die analytische Behandlung der Aufgabe die Berechnung von Kettenlinien, was nur mit ziemlichem Aufwand von Arbeit zu leisten ist. Daher behilft man sich in der Praxis mit Näherungen, die mehr oder weniger genau sind. Der Verfasser versucht daher zum Zwecke schnelleren und doch genaueren Verfahrens die graphische Methode. „Der Grad der Genauigkeit, der ihr zukommt, und die Einfachheit der Constructionen, deren sie bedarf, dürften vielleicht keinen Zweifel an der Schicklichkeit und Zweckmässigkeit der bezeichneten Untersuchungen bestehen lassen.“ Lp.

E. Ovazza. Sulla resistenza di attrito fra vite e madrevite. Torino Atti XXVI. 215-235.

Indem die Schraubenmutter als fest, die Schraube als beweglich mit verticaler Axe und von einem Gewichte Q in der Richtung der Axe angegriffen vorausgesetzt wird, stellt sich der Verfasser die beiden Aufgaben:

A) Bestimmung des Momentes M des Paares, welches in einer Normalebene zur Axe des Mechanismus wirkt und die Kraft Q sowie den begleitenden Reibungswiderstand zu überwinden vermag, sowohl wenn man den Mechanismus in den der Bewegung zunächst liegenden Zustand bringt, als auch wenn man ihn in gleichförmiger Bewegung erhält, sobald er den Ruhezustand verlassen hat.

B) Bestimmung der geometrischen Bedingungen, denen der Mechanismus genügen muss, damit er beim Aufhören der Kraft in Ruhe bleibt, während der Hauptwiderstand Q anhält.

Nach Aufstellung der allgemeinen Gleichungen (für Schrauben, die von zwei Schraubenflächen mit gerader Leitlinie begrenzt werden) wird die übliche angenäherte Behandlung vorgeführt; dann werden neue, genauere Theorien entwickelt, welche weniger willkürliche Annahmen über das Gesetz des normalen

Einheitsdruckes längs der Berührungsfläche zwischen Schraube und Mutter machen, und hierbei neue Mechanismen gesondert von gebrauchten behandelt. Die im letzteren Falle auftretenden elliptischen Integrale werden auf die Fundamentalintegrale zurückgeführt, und zuletzt werden die erhaltenen Formeln, deren Wiedergabe zu viel Platz beanspruchen würde, für einzelne besondere Fälle zusammengestellt. In einer Schlussbemerkung giebt der Verf. an, dass einige durchgeführte Zahlenrechnungen einerseits sehr gute Uebereinstimmungen seiner Formeln mit dem Versuche ergeben hätten, und dass andererseits die üblichen Formeln nur als rohe Annäherungen gelten könnten. Lp.

Hacker. Ueber statisch bestimmbares Netzwerk und statisch unbestimmbares Fachwerk im Raume. Hannov. Zeitschr. XXXVI. 25-58.

Der Verfasser wiederholt zunächst den Beweis von Föppl (Schweizer Bauztg. 1888), dass Netzwerke im Raume mit festen Auflagerpunkten und ohne Spitze nicht standfest sind; giebt dann ferner Mittel an, vermöge deren derartige Systeme standfest gemacht werden können, und berechnet endlich die Spannungen in einem solchen Systeme.

Weiter werden statisch bestimmbare Netzwerke mit in einer Ebene verschieblichen Auflagerpunkten und mit einer Spitze oder einem inneren ausgesteiften Ringe behandelt.

Zum Schluss wendet sich der Verfasser den statisch unbestimmten Fachwerken im Raume zu, deren Berechnung im wesentlichen auf der Anwendung des Satzes von Castigliano beruht.

F. K.

A. C. Elliott. On Rankine's formula for earth pressure. Edinb. Math. S. Proc. VIII. 77-80.

Bei dem Versuche, die Rankine'sche Behandlung der mechanischen Principien des Erddrucks gegen eine Mauer in elementarer Weise zu erläutern, benutzt der Verfasser ein in diesem Aufsatze erörtertes Verfahren, welches vom mathematischen Ge-

sichtspunkte aus als eine directe Lösung der Aufgabe angesehen werden kann: Gegeben ist der Winkel zwischen zwei conjugirten Zwängen (stresses); ihr Verhältnis zu bestimmen, wenn die grösste Schiefe bei jedem Schnitte einen gegebenen Wert hat. Die mitgeteilte Lösung ist so durchgeführt, dass sie die Bekanntschaft mit der Theorie des Zwanges, welche Rankine annahm, nicht einschliesst. Gbs. (Lp.)

J. J. van Rijn. Traagheidsmomenten en equivalente massas. Diss. Utrecht. van Boekhoven. 42 S.

Diese Dissertation handelt von der Theorie der Trägheitsmomente. Nach den einführenden Definitionen wird im ersten Abschnitt gehandelt von den Trägheitsellipsoiden mit dann folgender Prüfung derjenigen von Poinsot, Binet, Clebsch und Legendre. Der Verfasser betrachtet dabei die beiden letzteren als die reciproken der beiden ersteren. Darauf werden die Lage und die Grösse der Axen dieser Ellipsoide bestimmt. Es folgt die Berechnung der Trägheitsmomente, wobei der Verfasser der Reihe nach folgende Gesichtspunkte behandelt und untersucht: die Huygens'sche Methode, die Integrationsmethode, die Differentiationsmethode für Schalen von Körpern, die Methode der symmetrischen Flächen, die Methode von Townsend für Rotationskörper, die der gleichförmigen Systeme und die Inversionsmethode.

Der zweite Abschnitt behandelt die Trägheitsproducte nach Hâton de la Goupillière's Théorie nouvelle de la géométrie des masses. Es wird dabei angegeben, welchen Einfluss die Drehung der Flächen um eine Axe, die parallele Verschiebung der Axe und die Drehung der Axe um einen festen Punkt auf die Momente haben; weiter wird die graphische Darstellung nach der Methode von Mohr und Land besprochen.

Im dritten Abschnitt wird von den äquivalenten Massen gehandelt, d. h. solchen, bei denen die Trägheitsmomente hinsichtlich aller Geraden gleich sind. Darauf erörtert der Verfasser die Eigenschaften von Systemen, die hinsichtlich einer bestimmten Axe gleiche Trägheitsmomente haben, und von äquivalenten

Systemen, und endlich bespricht er kurz die Möbius-Grassmann'sche Methode. G.

BÉGHIN. Méthode d'approximation pour calculer le moment d'inertie et la position du centre de gravité d'une aire plane. S. M. F. Bull. XVIII. 152-154.

Der Verfasser zerschneidet die Figur durch Parallelen zur Rotationsaxe in Streifen und nimmt an, dass das Trägheitsmoment eines solchen Streifens das arithmetische Mittel zwischen den Trägheitsmomenten zweier Rechtecke sei, welche die eine oder die andere begrenzende Parallele zur Grundlinie, den Abstand beider zur Höhe haben. Die Endformel wird besonders einfach, wenn man die aufeinander folgenden Abstände der Parallelen als Kubikwurzeln aus den Gliedern einer arithmetischen Progression wählt. Aehnlich wird beim Schwerpunkte verfahren. Lp.

M. KOHN. Experimentelle Bestimmung des Trägheitsmomentes rotirender Maschinenteile. Civiling. (2) XXXVI. 525-528.

Um die Trägheitsmomente cylindrischer Massen, welche um ihre Axe drehbar sind, zu bestimmen, legt der Verfasser einen Riemen über den zu untersuchenden Körper und hängt an die Enden zwei verschiedene Gewichte $G_1 > G_2$. Ist dann Rr das Moment der Zapfenreibung, $m_r.r^2$ das Trägheitsmoment, so hat man für die Beschleunigung

$$p = g\frac{G_1-G_2-R}{G_1+G_2+m_r g} = \frac{2s}{t^2},$$

wo s den Weg und t die Zeit bedeutet. Um R zu eliminiren, vermehre man G_1 um ein Gewicht a und vermindere G_2 um dieselbe Grösse, dann wird zur Zeit t ein anderer Weg s_1 gehören. Derselbe bestimmt sich, da der Zapfendruck und damit die Reibung ungeändert geblieben ist, vermittelst der Formel:

$$g\frac{G_1+a-(G_2-a)-R}{G_1+G_2+m_r g} = \frac{2s_1}{t^2}.$$

Aus beiden folgt das Trägheitsmoment:

$$\left[\frac{t^2 a}{s_1 - s} - \frac{G_1 + G_2}{g}\right] r^2.$$

Die Angabe einiger Versuche bildet den Schluss der Abhandlung.

F. K.

B. Hydrostatik.

P. Duhem. Des principes fondamentaux de l'hydrostatique. Toulouse Ann. IV. C. 1-35.

Der Verfasser bezeichnet als Ziel seiner Abhandlung, die strenge Ableitung und naturgemässe Verknüpfung der hydrostatischen Gesetze vermöge des Princips der virtuellen Verrückungen zu sichern. Nachdem er kurz das in Frage stehende Princip in seiner grössten Allgemeinheit, d. h. mit Rücksicht auf nicht umkehrbare Verrückungen, besprochen hat, wendet er sich seiner eigentlichen Aufgabe zu. Dieselbe wird dahin präcisirt, dass eine flüssige Masse mit teils festen, teils freien Grenzen gegeben ist. Auf die Flüssigkeit wirken äussere Kräfte und auf die freie Oberfläche Druckkräfte. Es sollen die Bedingungen aufgefunden werden, unter welchen die Flüssigkeit im Gleichgewichte ist. Dabei werden die Druckkräfte nicht von vorn herein normal zur Oberfläche angenommen, vielmehr ergiebt sich diese Bedingung als Folge des an die Spitze gestellten Princips. Ein auszüglicher Bericht ist nicht gut möglich, wenn man nicht gerade das verwischen will, worin der Hauptwert der Abhandlung besteht. Wir begnügen uns daher, die Leser des Jahrbuchs auf die an feinen Wendungen reiche Abhandlung hinzuweisen.

F. K.

E. Oekinghaus. Zur Theorie der Gleichgewichtsfiguren incompressibler Flüssigkeitsmassen. Wochenschr. f. Astr. (2) XXXII. 369-372, 382-383 (1889).

Der Verf. wirft die Frage auf, ob das dreiaxige Ellipsoid

als Gleichgewichtsfigur einer incompressiblen Flüssigkeit seinen Charakter als solches bewahren wird, wenn auch äussere, und zwar Attractionskräfte und damit in Beziehung tretende Centrifugalkräfte darauf einwirken, und fasst die Ergebnisse seiner Rechnungen am Schlusse des Aufsatzes in den Satz zusammen: „Eine incompressible Flüssigkeitsmasse, welche ausser einer Rotation um die eigene Axe eine Umlaufsbewegung um einen Centralkörper hat, kann in dem Falle noch ein dreiaxiges Ellipsoid sein, wenn die Masse des Ellipsoids der Masse des Centralkörpers gleich ist, die Bewegung um diesen in einem Kreise erfolgt und die Rotationsaxe auf der Bahnebene senkrecht ist."

Lp.

G. H. Bryan. On the stability of a rotating spheroid of perfect liquid. Lond. R. S. Proc. XLVII. 367-376.

Der Verf. verweist auf seinen Aufsatz: „On the waves of a rotating liquid spheroid of finite ellipticity" (Lond. Phil. Trans. CLXXX. 187-219, F. d. M. XXI. 1889. 967), in welchem er den Satz aufgestellt hat, es scheine nicht möglich, eine vollständige Untersuchung der Stabilitäts-Kriterien für Maclaurin's Sphäroid zu geben, wenn die dasselbe bildende Flüssigkeit frei von jeder Spur von Viscosität wäre, und das Gleichgewicht einer Unterbrechung durch eine Störung von ganz allgemeinem Charakter unterliege. Seit der Niederschrift jener Abhandlung hat er jedoch die Frage der Probe einer Zahlenrechnung in dem Falle einfacherer Typen der Störung unterzogen, und die erzielten Ergebnisse waren derartig, dass sie die Ausdehnung auf eine ganz allgemeine Störung zuliessen.

Er erachtet, dass die Ergebnisse des vorliegenden Aufsatzes auf bündige Weise darthun, dass, wenn Maclaurin's Sphäroid aus einer völlig invisciden Flüssigkeit gebildet wird, es durchaus stabil ist, wenn seine Excentricität kleiner als 0,9528867 ist. Ueberschreitet die Excentricität diese Grenze, so wird die sphäroidische Form instabil, und die Flüssigkeit nimmt die Gestalt eines Ellipsoids an.

Cly. (Lp.)

C. Cranz. Anwendung der Functionentheorie auf ein hydrotechnisches Problem. Böklen Mitt. III. 16-23.

Das Problem betrifft die Gestalt des Grundwasserspiegels in der Umgegend des Zusammenflusses zweier Ströme, welche sich unter rechtem Winkel treffen.

Das Coordinatensystem wird so gewählt, dass die x und y in die Richtung der Ufer der beiden Flüsse fallen, deren Sohle als in derselben horizontalen Ebene liegend angenommen wird. Die Höhe des Grundwasserspiegels im Punkte (x, y) sei z. Durch Betrachtungen, die dem Referenten durchaus nicht einwandfrei erscheinen, erhält der Verfasser für $v = z^2$ die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Die Betrachtungen über die Lösung sind verfehlt, wie schon daraus hervorgeht, dass der Ausdruck

$$C \sin \text{hyp}(px) \sin(py) + h^2$$

in Bezug auf auf x und y unsymmetrisch ist. F. K.

E. Janisch. Ueber einige Formen von Densimetern, bei welchen gleichen Dichtenintervallen gleiche Teilstrichdistanzen entsprechen. Hoppe Arch. (2) IX. 332-334.

Es handelt sich um die Aufgabe, wie die Spindel eines Araeometers zu gestalten wäre, damit die in der Aufgabe genannte Bedingung erfüllt ist. Praktisches Interesse hat diese Aufgabe, wie der Verfasser selbst hervorhebt, nicht. Die für die Lösung erforderlichen Hülfsmittel sind elementar.

F. K.

Capitel 4.

Dynamik.

A. Dynamik fester Körper.

G. K. Suslow. Von der Kräftefunction, welche gegebene particuläre Integrale zulässt. Kiew 1890. 114 S. (Russisch.)

Es wird folgende Frage des umgekehrten Problems der Mechanik gelöst: Es sind mehrere Gleichungen zwischen den Coordinaten des materiellen Systems und den willkürlichen Constanten gegeben; die Zahl der letzteren ist um eins geringer als die Zahl der Freiheitsgrade des Systems; es wird eine Kräftefunction gesucht, welche die gegebenen Gleichungen als Integrale zulässt.

Im ersten Abschnitte werden diejenigen simultanen Gleichungen abgeleitet, denen die gesuchte Function U genügen muss.

Es seien $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ die Coordinaten des Systems; die gegebenen Gleichungen können immer auf die Form:

(α) $F_1(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k) = C_1, \quad F_2 = C_2, \quad \ldots, \quad F_{k-1} = C_{k-1}$

gebracht werden, wo $C_1, C_2, \ldots, C_{k-1}$ willkürliche Constanten sind. Das Coordinatensystem $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ ersetzen wir durch ein neues: $F_1, F_2, \ldots, F_{k-1}, \omega$, wo ω eine der früheren Coordinaten ist; die lebendige Kraft nimmt dann folgende Form an:

$$2T = A_{kk}\omega'^2 + 2\omega' \sum_{i=1}^{k-1} A_{ik}F'_i + \sum_{i=1}^{k-1} F'_i \sum_{j=1}^{k-1} A_{ij}F'_j.$$

Differentiirt man die Gleichungen (α) nach der Zeit und nimmt Rücksicht auf das Integral der lebendigen Kraft $T - U = h$, so findet man als notwendige und genügende Bedingung für die Lösung unserer Frage, dass U eine Lösung folgender Gleichungen sei:

$$A_{kk}\frac{\partial U}{\partial F_j} - A_{jk}\frac{\partial U}{\partial \omega} + (U+h)N_j = 0 \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, k-1).$$

Die Function h ist willkürlich, darf aber ω nicht enthalten, d. h. es ist $\frac{\partial h}{\partial \omega} = 0$. Der Coefficient N_j ist:

$$N_j = \frac{\partial A_{kk}}{\partial F_j} + \frac{A_{jk}}{A_{kk}} \cdot \frac{\partial A_{kk}}{\partial \omega} - 2\,\frac{\partial A_{jk}}{\partial \omega}.$$

Für ein willkürliches Coordinatensystem $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ müssen die vorigen Gleichungen durch folgende ersetzt werden:

$$\frac{1}{\frac{\partial \theta}{\partial \psi_1}} \left\{ \frac{\partial U}{\partial \omega_1} + \frac{U+h}{\theta} \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial \omega_1} \right) - \sum_i \psi_i \frac{\partial}{\partial \omega_i} \frac{\partial \theta}{\partial \psi_1} \right] \right\} = \cdots$$

$$\cdots = \frac{1}{\frac{\partial \theta}{\partial \psi_k}} \left\{ \frac{\partial U}{\partial \omega_k} + \frac{U+h}{\theta} \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial \omega_k} \right) - \sum_i \psi_i \frac{\partial}{\partial \omega_i} \frac{\partial \theta}{\partial \psi_k} \right] \right\}.$$

Hier ist

$$\theta = \sum_{i\nu} A_{i\nu} \psi_i \psi_\nu; \quad \psi_i = \frac{\partial J}{\partial \frac{\partial F}{\partial \omega_i}}; \quad J = \sum \pm \frac{\partial J}{\partial \omega_k} \cdot \frac{\partial J_1}{\partial \omega_1} \cdots \frac{\partial J_k}{\partial \omega_{k-1}}.$$

Die Differentialquotienten in den Klammern sind zu nehmen, indem man θ als Function von ω und ψ betrachtet; h genügt der Gleichung $\psi_1 \frac{\partial h}{\partial \omega_1} + \cdots + \psi_k \frac{\partial h}{\partial \omega_k} = 0$.

Im zweiten Abschnitte werden die simultanen Gleichungen für U mit Hülfe der Kirchhoff'schen Klammern bestimmt. Diesen Klammern kann man folgende Form geben:

$$L_j \frac{\partial K}{\partial \omega} + 2K \frac{\partial L_j}{\partial \omega} + N_j = 0; \quad K = A_{kk}(U+h); \quad N_{ij} = N_i \frac{\partial h}{\partial F_j} - N_j \frac{\partial h}{\partial F_i};$$

$$A_{kk} L_{ij} = A_{kk} \left(\frac{\partial L_i}{\partial F_j} - \frac{\partial L_j}{\partial F_i} \right) + A_{ik} \left(\frac{\partial A_{jk}}{\partial \omega} - \frac{\partial A_{kk}}{\partial F_j} \right)$$

$$- A_{jk} \left(\frac{\partial A_{kk}}{\partial F_i} - \frac{\partial A_{ik}}{\partial \omega} \right).$$

Die Betrachtung der Klammern führt zu dem Schlusse, **dass das** System immer zum geschlossenen gemacht **werden kann durch** eine passende Wahl der Werte für h (z. B. h = const.), **wenn** der Ausdruck

$$\frac{\partial F}{\partial \omega}\, d\omega - A_{1k}\, dF_1 - \cdots - A_{k-1,k}\, dF_{k-1} - A_{kk}\, d\omega$$

[illegible] in ein vollständiges **Differential über**geht. [illegible] folgt, dass bei einem [illegible] **kleinsten System von** Coordinaten $\omega_1, \ldots, \omega_k$ [illegible] die **lebendige Kraft**

$2T = \Sigma a_{ij}\omega_i'\omega_j'$, die Aufgabe immer möglich ist, wenn man als die gegebenen Gleichungen unabhängige Integrale des Systems:

$$\frac{d\omega_1}{\frac{DV}{D\omega_1}} = \frac{d\omega_2}{\frac{DV}{D\omega_2}} = \cdots = \frac{d\omega_k}{\frac{DV}{D\omega_k}}$$

nimmt. In diesen Gleichungen ist V eine ganz willkürliche Function von $\omega_1, \ldots, \omega_k$, und das Symbol D hat folgende Bedeutung:

$$\frac{Df}{D\omega_i} = \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{k} \Delta_{ij}\frac{\partial f}{\partial \omega_j}, \quad \Delta = \Sigma \pm a_{11}a_{22}\ldots a_{kk}, \quad \Delta_{ij} = \frac{\partial \Delta}{\partial a_{ij}}.$$

Die mechanische Deutung des Resultats ist diese: Ist die gegebene Congruenz von Curven $F_1 = C_1, \ldots, F_{k-1} = C_{k-1}$ (in einem Raume von n Dimensionen) normal zu einem System von Flächen, so lassen sich immer solche ein Potential besitzende Kräfte finden, dass unter ihrer Wirkung das materielle System diese Curven aus einer beliebigen Anfangslage mit constanter ursprünglicher Energie beschreiben kann.

Aus dem Umstande, dass die Gleichungen für U linear sind, folgt eine Verallgemeinerung des Satzes von Curtis: Wenn das System die particulären Integrale (α) bei jeder der Kräftefunctionen $U_1, U_2, \ldots, U_n$ haben kann, so kann es dieselben Integrale auch bei der Kräftefunction $U = A_1U_1 + \cdots + A_nU_n$ haben, wo $A_1, \ldots, A_n$ Constanten sind. Waren dabei die Anfangsenergien bei $U_1, \ldots, U_n$ gleich $h_1, \ldots, h_n$, so wird bei U die Anfangsenergie $h = A_1h_1 + \cdots + A_nh_n$ sein.

Im dritten Abschnitt ist gezeigt, wie man eine Kräftefunction finden kann, welche gegebene Integrale zulässt und die Coordinaten nur in der Combination $\omega(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ enthält. Indem man die abgeleiteten Gleichungen auf die neuen Variabeln $F_1, \ldots, F_{k-1}, \omega$ umformt, gelangt man zu dem Schlusse, dass die Aufgabe nur dann möglich wird, wenn die Coefficienten $P_j = \frac{1}{A_{jk}}N_j$, nach früherer Bezeichnung, die Form

$$\frac{\Phi_j(\omega)}{\sigma(F_1, F_2, \ldots, F_{k-1}) + f(\omega)}$$

haben. Ist das der Fall, so ist die gesuchte Function $U = A.f(\omega)$,

$A = \text{const.}$ Wenn alle P_j gar nicht $F_1, \ldots, F_{k-1}$ enthalten, so ist $P_1 = \cdots = P_{k-1}$ und $U = e^{\int P_j du}$. Somit hat die Aufgabe entweder gar keine Lösung oder nur eine. Eine Ausnahme bildet nur der Fall, wenn $A_{1k} = \cdots = A_{k-1,k} = 0$ ist und A_k die Variable F nicht enthält; dann ist nämlich jede Function f von ω ein U.

Im letzten Abschnitte wird für ein System von zwei Freiheitsgraden (Bewegung eines Punktes auf einer Fläche) eine Kräftefunction gesucht, welche zugleich die beiden Integrale $F_1 = C_1$ und $F_2 = C_2$ zulässt. Betrachtet man F_1 und F_2 als die Coordinaten unseres Punktes und behandelt zuerst den Fall, wenn $A_{12} = 0$ ist, d. h. wenn die Curven F_1 und F_2 orthogonal sind, so erweist sich, dass die Function U im allgemeinen völlig bestimmt ist (bis auf einen constanten Factor), wenn die Aufgabe möglich ist. Das gegebene Netz orthogonaler Bahnen kann ein gemeinsames für mehrere Systeme von Kräften, die ein Potential besitzen, nur in dem Falle sein, wenn dieses Netz aus isothermischen Curven besteht, d. h. wenn das Linienelement der Fläche die Form $ds^2 = \lambda(d\xi_1^2 + d\xi_2^2)$ hat, wo $\xi_1 = \text{Funct.}(F_1)$, $\xi_2 = \text{Funct.}(F_2)$ ist; ausserdem muss der Coefficient λ der Gleichung $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial F_1 \partial F_2} = 0$ genügen.

Zum Schlusse wird eine Methode zur Lösung der Aufgabe in dem Falle, dass A_{12} nicht Null ist, beschrieben. Ms.

W. P. Ermakoff. Bestimmung der Kräftefunction bei gegebenen Integralen. Mosk. Math. Samml. XV. 611-634. (Russisch.)

Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Variabeln in geringster Zahl, welche die Lage der Punkte eines Systems bestimmen, das von der Zeit unabhängigen Bedingungen unterworfen ist; es sind $n-1$ Integrale von der Form $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_i$ gegeben. Der Verfasser sucht eine Kräftefunction U, bei welcher dieselben Integrale der Differentialgleichungen der Bewegung sind. Diese

Aufgabe kann noch anders gefasst werden: Es ist eine Kräftefunction der Art zu bestimmen, dass alle Integrale der Gleichungen:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n},$$

wo $X_1, \ldots, X_n$ bekannte Functionen von den Variabeln $x_1, \ldots, x_n$ sind, zugleich auch Integrale der Differentialgleichungen der Bewegung werden.

Setzt man $\frac{dx_i}{dt} = X_i\sqrt{S}$, so ist die Aufgabe auf die Bestimmung dreier Functionen U, S, S_1 zurückgeführt, welche den Gleichungen:

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = Q_i S + P_i S_1 \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

$$S_1 = X_1 \frac{\partial S}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial S}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial S}{\partial x_n}$$

genügen, in denen

$$P_i = A_{i1} X_1 + \cdots + A_{in} X_n, \quad Q_i = 2\sum_k X_k \left(\frac{\partial P_i}{\partial x_k} - \frac{\partial P_k}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial R}{\partial x_i},$$

und A die Coefficienten im Ausdrucke der lebendigen Kraft $R = \sum A_{ik} X_i X_k$ sind.

Ist $n = 2$, so lässt sich die Aufgabe immer lösen. Ist $n > 2$, so erhält man nach Elimination von S und S_1 Gleichungen von der Form:

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = B_i \frac{\partial U}{\partial x_1} + B_i' \frac{\partial U}{\partial x_2} \qquad (i = 3, 4, \ldots, n).$$

Der Verfasser zeigt, wann diese Gleichungen eine Lösung zulassen, und wie dieselbe zu finden ist. Der specielle Fall, wenn

$$\frac{Q_1}{P_1} = \frac{Q_2}{P_2} = \cdots = \frac{Q_n}{P_n} = H$$

ist, wird besonders erörtert.

Man könnte die Lösung der Aufgabe auch auf einem anderen Wege bewerkstelligen, indem man zwei solche Multiplicatoren D und D_1 suchte, welche den Ausdruck

$$D \Sigma Q_i dx_i + D_1 \Sigma P_i dx_i$$

in ein vollständiges Differential verwandeln; allein die Bestim-

mung dieser Multiplicatoren führt im allgemeinen Falle zu denselben Differentialgleichungen, welche auch nach der vorigen Methode stattfinden.

Die Aufgabe ist in zwei Specialfällen möglich: 1) wenn $\Sigma Q_i dx_i$ ein vollständiges Differential ist, 2) wenn $\Sigma P_i dx_i = K.dv$, wo K und v Functionen von $x_1, \ldots, x_n$ sind.

Als Beispiel bestimmt der Verfasser die Kräftefunction, bei der zwei in einer Ebene auf zwei concentrischen Kreisen sich bewegende Punkte immer von einander gleich weit entfernt bleiben. Ms.

N. E. Joukowsky. Bestimmung der Kräftefunction nach einem gegebenen System von Bahnen. Arbeiten der phys. Section der kaiserlichen Gesellschaft für Freunde der Naturkunde. Moskau. Bd. III. Heft 2. 43-49. (Russisch.)

Der Verfasser löst die vorige Aufgabe (vergl. Suslow und Ermakoff) im Falle eines materiellen Punktes, indem er von der Formel für die Centripetalkraft Gebrauch macht. Es ist ein System von Linien auf einer Fläche oder im Raume gegeben; im letzteren Falle wird vorausgesetzt, dass diesem Liniensystem ein System orthogonaler Flächen entspricht. Es wird verlangt, eine Kräftefunction als Function der Coordinaten zu finden, bei der eine jede der gegebenen Linien als Bahn eines materiellen Punktes dienen kann.

Gesetzt, $p =$ const. sei die Gleichung des Liniensystems oder des Systems der Flächen, die zu den gegebenen Linien orthogonal sind, je nachdem diese Bahnen sich auf einer Fläche oder im Raume befinden; h der Differentialparameter erster Ordnung der Function p; $v^2 = 2(U+H)$ das Integral der lebendigen Kraft: so ist, wenn H für alle Bahnen dasselbe bleibt, $U = h^2.\psi(p)$, wo ψ eine willkürliche Function von p bedeutet; wenn H von einer Bahn zur anderen sich ändert,

$$U = h^2.\psi(p) - H + h^2\int\frac{dH}{h^2}.$$

Wenn die Bahnen auf einer Fläche liegen, derart, dass $p_1 =$ const. ihre Gleichung ist, so ist H eine willkürliche Func-

tion von p_1. Befinden sich aber die Bahnen im Raume, also $p_1 = \text{const.}$, $p_2 = \text{const.}$, so ist $h = f(p, \omega)$ und H eine willkürliche Function von ω, wo ω eine Function von p_1 und p_2 allein bedeutet.

Die beschriebene Methode wird vom Verfasser zur Lösung dreier speciellen Aufgaben angewandt: bei den beiden ersten befinden sich die Bahnen in einer Ebene und sind bei der ersten Parabeln, bei der zweiten concentrische ähnliche Ellipsen, bei der dritten endlich sind die Bahnen gleichseitige Hyperbeln:

$$\frac{y}{x} = p_1, \quad zx = p_2.$$

Ms.

J. Mestschersky. Ueber den Poisson'schen Satz bei Existenz von Bedingungsgleichungen. Arbeiten der sechsten Versammlung der Russischen Naturforscher und Aerzte, 1890. St. Petersburg. I. Abth. 58-63. (Russisch.)

Die Differentialgleichungen der Dynamik nehmen bei Existenz von Bedingungsgleichungen:

$$F_1(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) = 0, \quad F_2 = 0, \; \ldots, \; F_k = 0$$

die Form an:

$$\text{(I)} \begin{cases} \dfrac{dq_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} - \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial q_i} - \cdots - \lambda_k \dfrac{\partial F_k}{\partial q_i} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Die Factoren λ müssen aus den Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 F_s}{\partial t^2} + \frac{\partial A_s}{\partial t} + \left(\frac{\partial F_s}{\partial t} + A_s, H\right) = \lambda_1(F_1, A_s) + \lambda_2(F_2, A_s) + \cdots$$
$$+ \lambda_k(F_k, A_s) \qquad (s = 1, 2, \ldots, k)$$

bestimmt werden, wo die Klammern das Poisson'sche Symbol bezeichnen und $A_s = (F_s, H)$ ist.

Indem der Verfasser die notwendige und hinreichende Bedingung sucht, damit das aus zwei Integralen des Systems (I) gebildete Poisson'sche Symbol im allgemeinen auch ein Integral dieses Systems sei, kommt er zu folgendem Satz: „Sind zwei Integrale $\varphi = \text{const.}$ und $\psi = \text{const.}$ des Systems (I) gegeben,

so ist auch $(\varphi, \psi) =$ const. ein Integral des Systems (oder es ist identisch Null oder identisch gleich einer Constante) in dem Falle, wenn folgende identische Gleichung stattfindet:

$$\sum_{s=1,2,\dots,k} \{(\varphi, F_s).(\psi, \lambda_s) - (\psi, F_s).(\varphi, \lambda_s)\} = 0.$$

Der Beweis des Satzes beruht auf den bekannten Eigenschaften des Poisson'schen Symbols.

Aus diesem Satze folgt als specieller Fall der Jacobi'sche Satz (Nova Methodus § 51, Theorema VII) bei den Annahmen, welche Jacobi macht, nämlich: 1) dass H, F_1, F_2, ..., F_k die Zeit t nicht enthalten, 2) dass t auch im Integral $\varphi =$ const. nicht vorkommt, 3) dass die Identitäten:

$$(\varphi, F_1) = 0, \ \dots, \ (\varphi, F_k) = 0$$

stattfinden.

Der Jacobi'sche Satz behält seine Geltung auch in dem allgemeineren Falle, wenn nur die Voraussetzungen (2) und (3) bestehen, aber die Bedingungsgleichungen und die Function H die Zeit t enthalten können.

Zum Schluss führt der Verfasser als Beispiel an: Wenn $\varphi =$ const. das Integral von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunkts oder von der Erhaltung der Flächenräume des Systems (I) ist (vorausgesetzt, dass letzteres ein solches besitzt), und wenn $\psi =$ const. irgend ein anderes Integral desselben Systems ist, so stellt $(\varphi, \psi) =$ const. auch ein Integral dieses Systems dar (oder es ist identisch Null oder gleich Const.). Ms.

G. Pennacchietti. Sugl' integrali delle equazioni della dinamica. Atti dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania. (4) II. 26 S.

Die vorliegende Abhandlung bietet die Verallgemeinerung früherer Untersuchungen des Verfassers dar; siehe dessen Schriften: Sugl'integrali comuni a più problemi di dinamica (Pisa Ann. II. 121-178) und: Sugl'integrali delle equazioni del moto di un punto materiale (Batt. G. XXIII. 158-167; F. d. M. XVII. 1885. 876).

Es sei $q_1, q_2, \ldots, q_r$ ein System von unabhängigen Coordinaten, welche zusammen mit t die Lage eines beweglichen Systemes von n Punkten zu jeder Zeit bestimmen. Bedeuten x_h, y_h, z_h die Coordinaten irgend eines Punktes, m_h seine Masse, X_h, Y_h, Z_h die Componenten der auf denselben wirkenden Kraft, und setzt man:

$$A_{r,s} = \sum_{h=1}^{n} m_h \left(\frac{\partial x_h}{\partial q_r} \frac{\partial x_h}{\partial q_s} + \frac{\partial y_h}{\partial q_r} \frac{\partial y_h}{\partial q_s} + \frac{\partial z_h}{\partial q_r} \frac{\partial z_h}{\partial q_s} \right),$$

$$B_r = \sum_{h=1}^{n} m_h \left(\frac{\partial x_h}{\partial t} \frac{\partial x_h}{\partial q_r} + \frac{\partial y_h}{\partial t} \frac{\partial y_h}{\partial q_r} + \frac{\partial z_h}{\partial t} \frac{\partial z_h}{\partial q_r} \right),$$

$$C = \sum_{h=1}^{n} m_h \left(\left(\frac{\partial x_h}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_h}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_h}{\partial t}\right)^2 \right),$$

$$M_r = \sum_{h=1}^{n} \left(X_h \frac{\partial x_h}{\partial q_r} + Y_h \frac{\partial y_h}{\partial q_r} + Z_h \frac{\partial z_h}{\partial q_r} \right),$$

$$N_r = q_1'^2 \left(\frac{\partial A_{r1}}{\partial q_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial A_{11}}{\partial q_r} \right) + q_2'^2 \left(\frac{\partial A_{r2}}{\partial q_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial A_{22}}{\partial q_r} \right) + \cdots$$
$$+ q_1' q_2' \left(\frac{\partial A_{r1}}{\partial q_2} + \frac{\partial A_{r2}}{\partial q_1} - \frac{\partial A_{12}}{\partial q_r} \right) + \cdots + q_1' \left(\frac{\partial A_{r1}}{\partial t} - \frac{\partial B_r}{\partial q_1} - \frac{\partial B_1}{\partial q_r} \right) + \cdots$$
$$- \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial q_r},$$

$$D = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1\mu} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{\mu 1} & A_{\mu 2} & \ldots & A_{\mu\mu} \end{vmatrix},$$

$$Q = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1,r-1} & M_1 - N_1 & A_{1,r+1} & \ldots & A_{1\mu} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2,r-1} & M_2 - N_2 & A_{2,r+1} & \ldots & A_{2\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{\mu 1} & A_{\mu 2} & \ldots & A_{\mu,r-1} & M_\mu - N_\mu & A_{\mu,r+1} & \ldots & A_{\mu\mu} \end{vmatrix},$$

so ist die lebendige Kraft:

$$T = \tfrac{1}{2} \{ A_{11} q_1'^2 + A_{22} q_2'^2 + \cdots + 2 A_{12} q_1' q_2' + \cdots + 2 B_1 q_1' + 2 B_2 q_2' + \cdots + C \},$$

und die Bewegungsgleichungen nehmen die folgende Form an (§ 1):

$$\frac{d^2 q_s}{dt^2} = Q_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, p).$$

An diese Form anknüpfend, fragt der Verfasser zuerst (§ 2) nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür,

dass die zwei verschiedenen Problemen entsprechenden Gleichungssysteme:

$$\text{(A)}\qquad \frac{d^2 q_s}{dt^2} = Q_s, \quad \frac{d^2 q_s}{dt^2} = Q_s^{(1)}$$

$2\mu-2$ gemeinschaftliche, t explicit nicht enthaltende erste Integrale:

$$\alpha_\nu = F_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_\mu, q_1', q_2', \ldots, q_\mu') \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 2\mu-2)$$

besitzen (wo die α willkürliche Constanten sind). Setzt man:

$$k_i = \frac{Q_{i+1} - Q_{i+1}^{(1)}}{Q_1 - Q_1^{(1)}}, \qquad l_i = Q_{i+1} - k_i Q_1,$$

so findet man, dass:

$$k_i = \frac{q_{i+1}'}{q_1'}, \quad l_i = q_1'^2\, \varphi_i\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_\mu, \frac{q_2'}{q_1'}, \frac{q_3'}{q_1'}, \ldots, \frac{q_\mu'}{q_1'}\right)$$

sein muss, und dass F_ν sich auf eine homogene Function nullten Grades der q_s' reducirt. Die $2\mu-2$ Integrale können also die Form:

$$\begin{aligned}
q_2 &= f_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2\mu-2}, q_1), \\
q_3 &= f_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2\mu-2}, q_1), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
q_\mu &= f_{\mu-1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2\mu-2}, q_1), \\
\frac{q_2'}{q_1'} &= f_\mu(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2\mu-2}, q_1), \\
\frac{q_3'}{q_1'} &= f_{\mu+1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2\mu-2}, q_1), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\frac{q_\mu'}{q_1'} &= f_{2\mu-2}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2\mu-2}, q_1)
\end{aligned}$$

annehmen.

§ 3 ist der Anwendung der erhaltenen Resultate auf die Bewegung eines festen Körpers gewidmet.

Dann wendet sich der Verfasser zur Untersuchung einiger Systeme von je $2\mu-2$ gemeinschaftlichen, t explicit enthaltenden ersten Integralen (§ 4) und von je $2\mu-3$ gemeinschaftlichen, von t unabhängigen ersten Integralen (§ 5) der Gleichungssysteme (A).

Vi.

J. Graindorge. Intégration des équations de la dynamique. Liège Mém. V. 290 S.

Ausführung der Inauguraldissertation des Verfassers von 1871 (F. d. M. III. 1871. 168, Darboux Bull. II. 199-200), die eine zusammenfassende Uebersicht über die Arbeiten von Lagrange, Poisson, Bour, Darboux, Mayer enthielt, nebst Anwendungen auf die Störungstheorie. Mn. (Lp.)

R. Lehmann-Filhés. Ueber einige Fundamentalsätze der Dynamik. Astr. Nachr. CXXV. No. 2980. 49-62.

Es wird untersucht, wie die Fundamentalformeln für die Bewegung eines Systems materieller Punkte sich gestalten, wenn statt der rechtwinkligen Coordinaten neue Coordinaten q mittels Gleichungen eingeführt werden, in denen die Zeit t explicite vorkommt. Die lebendige Kraft T wird im allgemeinen nicht eine homogene Function zweiten Grades der q', sondern man findet $T = T_0 + T_1 + T_2$, worin T_0 die q' nicht enthält, T_1 und T_2 in ihnen homogen vom ersten bezw. zweiten Grade sind. Das Hamilton'sche Princip und die zweite Lagrange'sche Form der dynamischen Gleichungen gelten unverändert; die Hamilton'schen Gleichungen dagegen und seine partielle Differentialgleichung erfahren die Modification, dass als charakteristische Function H in ihnen nicht $T-U$, sondern T_2-T_0-U zu nehmen ist. Der Uebergang auf die Form, welche Hr. C. Neumann (Schlömilch Z. XI.) Hamilton's partieller Differentialgleichung mit Rücksicht auf die Probleme relativer Bewegung gegeben hat, ist leicht zu machen. Zum Schluss wird näher auf die Gleichungen für einen Massenpunkt eingegangen. Mk.

G. Helm. Ueber die analytische Verwendung des Energieprincips in der Mechanik. Schlömilch Z. XXXV. 307-320.

Der Verfasser spricht den Zweck seines Aufsatzes in den folgenden Worten aus:

In den folgenden Ausführungen soll allgemein gezeigt werden, dass der zunächst aus allgemeinen energetischen, besonders physikalisch-technischen Gesichtspunkten gefolgerte Satz:

„Bei jeder möglichen Veränderung bleibt die Energie unverändert,“

zu den Differentialgleichungen der Dynamik führt. Für die formelle Entwickelung der Lehre von der Energie scheint es mir wesentlich, zu entscheiden, ob die Mechanik nur, wie bisher, den Beweis führen kann, dass die aus ihren Principien gezogenen Folgerungen mit dem Energiegesetz in Einklang stehen, oder ob umgekehrt dieses Energiegesetz an Stelle jener Principien zur allgemeinen Grundlage der Mechanik gemacht werden kann.

Es ist kaum nötig, der Untersuchung noch die Bemerkung voranzuschicken, dass das eben ausgesprochene Energieprincip, welches als allgemeines Princip der Mechanik hervortreten soll, nicht mit dem Satze von der Erhaltung der Energie verwechselt werden darf, der ja nur für gewisse Systeme Gültigkeit hat, die man als conservativ bezeichnet.

Es würde zweckmässig sein, diesen der Mechanik geläufigen Satz zum Unterschied von dem eben angeführten Energieprincip, das sich wesentlich als eine Gleichung zwischen Differentialen herausstellt, als das Energie-Integral zu bezeichnen.

Lp.

Dautheville. Sur une transformation de mouvement. Ann. de l'Éc. Norm. (3) VII. 361-374.

Es seien S und S_1 zwei Flächen, und man lasse einem reellen Punkte der ersten einen reellen Punkt der zweiten entsprechen. Nach Tissot entspricht einem orthogonalen Liniensysteme der einen Fläche ein orthogonales System der anderen Fläche. Auf diese beiden orthogonalen Systeme mögen die Elemente der Flächen bezogen werden, so dass die Linienelemente von S und S_1 sich in den Formen darstellen:

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2; \quad ds_1^2 = E_1 du^2 + G_1 dv^2.$$

Die Bewegung eines Punktes von der Masseneinheit auf der Fläche S sei in der Form von Lagrange beschrieben durch

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial u'}\right)-\frac{\partial T}{\partial u}=P;\qquad u'=\frac{du}{dt};$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v'}\right)-\frac{\partial T}{\partial v}=Q;\qquad v'=\frac{dv}{dt};\qquad 2T=Eu'^2+Gv'^2,$$

wo P und Q nur von u und v abhängen.

Ein zweiter Punkt, dessen Masse gleichfalls die Einheit sei, bewege sich auf der Fläche S_1, und es seien seine Coordinaten Functionen einer neuen Variable t_1, welche an t durch die Gleichung $dt_1=\lambda(u,v)dt$ geknüpft sein mag. Die Bewegung des zweiten Punktes wird alsdann bestimmt durch das Gleichungssystem:

$$\frac{d}{dt_1}\left(\frac{\partial T_1}{\partial u_1'}\right)-\frac{\partial T_1}{\partial u}=P_1;\qquad u_1'=\frac{du}{dt_1};$$
$$\frac{d}{dt_1}\left(\frac{\partial T_1}{\partial v_1'}\right)-\frac{\partial T_1}{\partial v}=Q_1;\qquad v_1'=\frac{dv}{dt_1};\qquad 2T_1=E_1u_1'^2+G_1v_1'^2,$$

und es entsteht nunmehr die Frage: Ist es möglich, die Function λ derart zu bestimmen, dass P_1 und Q_1 unabhängig sind von u_1' und v_1', also nur abhängig, wie in dem obigen System, von u und v?

Die Analyse dieser Frage führt den Verfasser auf sechs Bedingungsgleichungen zwischen λ, E, G, E_1, G_1 und den ersten partiellen Derivirten dieser Grössen nach u und v. Von diesen sechs Bedingungsgleichungen enthalten vier die Grösse λ und ihre Derivirten nicht. Die vier sind notwendige und ausreichende Bedingungen, dass das gestellte Problem überhaupt eine Lösung zulässt, und ihre Form lässt erkennen, dass in ihnen diejenigen Bedingungen sich darstellen, welche ausdrücken, dass die geodätischen Linien beider Flächen sich entsprechen. Sind diese Bedingungen erfüllt, so führt die Integration dieser vier letzten Gleichungen nach Darboux (Leçons sur la théorie générale des surfaces) auf die Gleichung $\frac{E}{E_1}=VU^2$, wo V eine Function von v und U eine Function von u ist. Mit Hülfe dieser Gleichung wird für λ die Form gewonnen $\lambda=\frac{k}{VU}$, in welcher k eine Constante bedeutet.

Dem besonderen Fall, dass die eine Fläche eine Ebene wird, ist der zweite Teil der Arbeit gewidmet. Die Bewegung eines Punktes in der Ebene sei durch die Gleichungen gegeben

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y,$$

und es werde vorausgesetzt, dass X und Y nur Functionen der rechtwinkligen Coordinaten x und y seien. Bezieht man die zweite Fläche auf ein System krummliniger Coordinaten, welches durch eine Schar geodätischer Linien und deren rechtwinklige Trajectorien gebildet ist, so ist der Ausdruck für ein Linienelement $ds^2 = du^2 + C^2dv^2$. Auf dieser Fläche bewege sich ein Punkt von der Masse $= 1$ gemäss den Gleichungen:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt_1}\left(\frac{\partial T}{\partial u'}\right) - \frac{\partial T}{\partial u} = P; & u' = \frac{du}{dt_1}; \\ \frac{d}{dt_1}\left(\frac{\partial T}{\partial v'}\right) - \frac{\partial T}{\partial v} = Q; & v' = \frac{dv}{dt_1}; \end{cases} \quad 2T = u'^2 + v'^2,$$

und es handelt sich nunmehr um die Aufgabe, die Transformationen von der Form

$$x = f(u, v); \quad y = \varphi(u, v); \quad dt_1 = \lambda(u, v)dt$$

so zu bestimmen, dass die Gleichungen (1) sich in die Gleichungen (2) umbilden mit der Bedingung, dass P und Q unabhängig sind von u' und v'.

Die Untersuchung führt wieder zu sechs Bedingungsgleichungen, und diese vereinfachen sich durch die Annahme, dass die Schar geodätischer Linien von dem Punkte ausgehe, welcher auf der Fläche dem Punkte $x = 0$, $y = 0$ entspricht. Aus diesen Gleichungen wird als eine notwendige Folge hergeleitet

$$-\frac{1}{C}\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} = \text{const.},$$

und da dieser Ausdruck das Krümmungsmass der Fläche darstellt, so ist die gesuchte Transformation nur ausführbar, wenn die gegebene Fläche eine constante Krümmung besitzt. Es wird nunmehr diese Eigenschaft der Fläche vorausgesetzt und die vollständige Darstellung der Functionen f, φ, λ gegeben für die

drei Fälle, dass die Krümmung Null, positiv oder negativ ist. Ihre Formen zeigen wieder, dass die Transformationen solche sind, welche die Geraden der Ebene in geodätische Linien der Fläche überführen. Schn.

Dautheville. Sur une transformation de mouvement. C. R. CXI. 877-878.

Anzeige der in vorstehendem Bericht dargelegten Ergebnisse. Schn.

A. Schmidt. Ueber den Begriff der Centrifugalkraft und die Ableitung ihres Gesetzes. Böklen Mitt. III. 59-77.

Der Aufsatz, ein Vortrag in der mathematisch-naturwissenschaftlichen Section der Reallehrerversammlung, kritisirt die Einführung dieses Begriffs sowohl in den elementaren als auch in wissenschaftlichen Werken über Mechanik und schlägt vor, das Wort „wegen seiner historischen Berechtigung und seiner Popularität" noch einige Zeit in Capitelüberschriften stehen zu lassen, sonst aber diesen „zweizüngigen Begriff", dessen man zur Erklärung der Erscheinungen entraten kann, aus den Lehrbüchern zu tilgen. Lp.

A. Walter. Der freie Fall, berechnet aus dem Gravitationsgesetze. Wien. Ber. XCIX. 521-533.

Der Verf. berechnet den freien Fall eines materiellen Punktes unter Berücksichtigung 1) der Rotation der Erde, 2) der Veränderlichkeit der Schwere in verschiedenen Höhen, 3) des Luftwiderstandes in der Form $\alpha v + \beta v^2$. Die Integration der Differentialgleichungen wird nach der Methode der unbestimmten Coefficienten durch Potenzreihen bewirkt. Wenn die z-Axe vertical, die x-Axe horizontal nach Norden, die y-Axe nach Osten gerichtet ist, so findet er:

$$x = 3\omega^4 \cdot \frac{G+r\omega^2}{g} \cdot \cos\varphi . \sin^2\varphi \cdot \frac{t^4}{24} + \cdots,$$

$$y = 2\omega G \cos\varphi \cdot \frac{t^3}{6} - 4\alpha\omega G \cos\varphi \cdot \frac{t^4}{24} + \cdots,$$

$$z = g \cdot \frac{t^2}{2} - \alpha g \cdot \frac{t^3}{6} + \left\{ g\left(\alpha^2 - 2\beta g + \frac{2G}{r} - \omega^2 + 3\omega^2 \sin\varphi\right) + 3r\omega^4 \frac{G}{g} \cos^2\varphi . \sin^2\varphi \right\} \frac{t^4}{24} + \cdots.$$

Hierin bedeutet ω die Rotationsgeschwindigkeit der Erde, r den nach dem Beobachtungsorte gerichteten Erdradius, g die Erdbeschleunigung für den Anfangspunkt der Bewegung, G die Erdbeschleunigung unter dem Aequator. Für die Beschleunigung b und die Geschwindigkeit v in einem gegebenen Zeitpunkte wird berechnet:

$$b = g - \alpha g t + \left\{ g\left(\alpha^2 - 2\beta g + \frac{2G}{r} - \omega^2 + 3\omega^2 \sin^2\varphi\right) + r\omega^2 \frac{G}{g} \cos^2\varphi \left(10 \frac{G}{r} - 3\omega^2 + 12\omega^2 \cos^2\varphi\right) \right\} \frac{t^2}{2} + \cdots,$$

$$v = gt - \alpha g \frac{t^2}{2} + \left\{ g\left(\alpha^2 - 2\beta g + \frac{2G}{r} - \omega^2 + 3\omega^2 \sin^2\varphi\right) + 3r\omega^2 \frac{G}{g} \cos^2\varphi \left(\frac{3G}{r} - \omega^2 + 4\omega^2 \sin^2\varphi\right) \right\} \frac{t^3}{6} + \cdots.$$

Von der reichen, das Problem betreffenden Litteratur führt der Verf. am Beginne seiner Arbeit nur Gauss (Werke V. 495 u. 497) und Hoppe (Archiv LXIV. 96) an. Lp.

H. Hammerl. Beitrag zum Fall auf der schiefen Ebene und zur Pendelbewegung. Mährisch Trübau. 16 S. 8°. (1889.)

P. Appell. Sur les lois de forces centrales faisant décrire à leur point d'application une conique quelles que soient les conditions initiales. American J. XIII. 153-158.

Die Centralkräfte, welche als blosse Functionen der Lage ihren Angriffspunkt einen Kegelschnitt als Bahncurve beschreiben lassen, sind zufolge einer von Hrn. Bertrand gegebenen Anregung

gleichzeitig von Hrn. Darboux und Halphen bestimmt worden (C. R. LXXXIV, F. d. M. IX. 1877. 638ff.), und Hr. Battaglini hat das etwas verallgemeinerte Problem bald darauf ebenfalls gelöst. Ohne der analytischen Lösung Halphen's und ihrer Darstellung durch Hrn. Tisserand in seiner Mécanique céleste etwas Wesentliches hinzufügen zu wollen, teilt der Verf. jetzt nur die Methode mit, welche er in seiner Vorlesung gebraucht hat, um die Halphen'sche Rechnung möglichst abzukürzen. Diese Methode besteht in einer Anwendung der Homographie in der Mechanik, deren Theorie im vorangehenden Jahre an derselben Stelle gegeben ist (vgl. F. d. M. XXI. 1889. 904). Die beiden möglichen Gestalten der Gesetze sind bekanntlich:

$$F_1 = -\frac{\mu r C^{\frac{3}{2}}}{(Bx+Ey+C)^3},$$
$$F_2 = \frac{\mu r}{(Ax^2+2Dxy+Fy^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Lp.

D. Leite. Sobre o theorema d'Euler-Lambert. Teixeira J. X. 29-33.

Der betreffende Satz der Himmelsmechanik, welcher die Zeit als Function der Bahnaxe, der Sehne des von einem Planeten beschriebenen Bogens und des arithmetischen Mittels der beiden nach den Endpunkten des Bogens gezogenen Fahrstrahlen ausdrückt, wird rein geometrisch bewiesen, unter Benutzung einer Transformation ebener Flächen. Der Verfasser betrachtet der Reihe nach elliptische, hyperbolische und parabolische Bahnen.

Tx. (Lp.)

P. Nowikoff. Ueber die Stabilität der elliptischen Bewegung eines Punktes, welcher von zwei unbeweglichen Centralpunkten nach dem Newton'schen Gesetze angezogen wird. Arbeiten der VIII. Versammlung der russischen Naturforscher und Aerzte. 1890. St. Petersb. Math. u. Astr. 38-41. (Russisch.)

Herr P. Nowikoff beweist, dass die elliptische Bewegung

unter Wirkung der genannten Kräfte stabil ist in Bezug auf alle Ablenkungen, die in der Bewegungsebene stattfinden, und bildet die Gleichungen der unendlich wenig von Ellipsen abweichenden Bahnen. Bb.

E. Oekinghaus. Einige neue Relationen aus der Bahngeometrie der Himmelskörper. Wochenschr. für Astr. (2) XXXI. 369-373, 379-381. (1888).

I. In der Centralbewegung nach dem Newton'schen Gesetz ist die Summe der vier vom Perihel an gerechneten Zeiten bis zu den Durchschnitten eines Kreises mit der Ellipse auch für alle mit ihm concentrischen Kreise eine constante Grösse, welche selbst dann constant bleibt, wenn die Centra der Kreise auf einer mit der grossen Axe parallelen Geraden fortrücken. II. Alle Normalen, welche von Punkten einer der grossen Axe parallelen Geraden an die Planetenbahn gezogen werden können, begrenzen in ihren Fusspunkten Bogen und damit entsprechende Zeiten, deren algebraische Summe eine constante Grösse ist. Ein dem letzteren Satze entsprechender gilt auch für die parabolische Bewegung. Lp.

E. Oekinghaus. Die Cassini'sche Linie in ihrer Beziehung zur Bewegung der Himmelskörper. Wochenschr. für Astr. (2) XXXI. 313-316. (1888).

Nimmt man den Polarradius einer Curve gleich der Geschwindigkeit v eines Planeten, den Polarwinkel gleich der wahren Anomalie, so ist diese Curve ein Cassini'sches Oval.

Lp.

E. Oekinghaus. Die Lemniskate und die parabolische Bewegung der Himmelskörper. Wochenschr. für Astr. (2) XXXI. 335-336, 377-379. (1888).

Eine gewisse Eigenschaft der Lemniskate gestattet es, die Bewegungsverhältnisse eines in einer Parabel laufenden Kometen auf diese besondere Cassini'sche Curve zu übertragen, nämlich

nicht bloss den Ort und die Geschwindigkeit, sondern auch die Zeit und die von ihr abhängigen Grössen durch eine einfache Construction graphisch darzustellen. Lp.

P. Bohl. Ueber eine Verallgemeinerung des dritten Kepler'schen Gesetzes. Schlömilch Z. XXXV. 188-191.

Folgender Satz wird bewiesen: Es sei ein periodisches System von freien materiellen Punkten gegeben, und es existire für dasselbe eine homogene Kräftefunction von der Dimension k. Lässt man dasselbe System eine andere periodische Bewegung ausführen (von der wir annehmen, dass sie durch stetige Variation der Anfangsbedingungen aus der ersten hervorgehen könne), so verhalten sich die $(-2k)^{\text{ten}}$ Potenzen der Umlaufszeiten umgekehrt wie die $(2-k)^{\text{ten}}$ Potenzen der von einem geeigneten Nullpunkte gezählten Energie ($h = T - U =$ Energie — const.). Findet aber Anziehung umgekehrt proportional der Entfernung statt, so gilt der Satz: Die Differenz zwischen der Energie und dem mit $\Sigma m_k m_i$ multiplicirten natürlichen Logarithmus der Umlaufszeit ist constant. Speciell für ein Newton'sches System gilt: Die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich umgekehrt wie die Kuben der vom erwähnten Nullpunkte gezählten Energie.

Lp.

C. Bonacini. Sul moto di un punto attratto da due centri fissi secondo la legge di Newton. Batt. G. XXVIII. 44-51.

Fortsetzung der Arbeit, über welche F. d. M. XXI. 1889. 908 berichtet ist. In Bezug auf singuläre Bewegungen in dem Falle $k \geqq 0$ fasst der Verf. die Ergebnisse seiner Untersuchung in folgenden Sätzen zusammen: Wenn ein Punkt, welcher der Einwirkung zweier festen, nach dem Newton'schen Gesetze anziehenden Centren unterliegt, anfänglich einen zu der durch ihn und die beiden Centren bestimmten Ebene senkrechten Stoss erhält, sodass die Energie der Centrifugalkraft, welche sich normal zur Verbindungsgeraden der Centren entwickelt, gleich oder

grösser als die der anziehenden Kräfte ergiebt, und die gesamte bewegende Kraft in der Berührungsebene des Umdrehungs-Hyperboloids um jene Gerade mit Brennpunkten in den anziehenden Centren liegt, welches durch die Anfangslage geht, so bewegt sich der Punkt auf diesem Hyperboloide und entfernt sich unbegrenzt, indem er eine Spirale mit einer endlichen Anzahl von Windungen in unendlicher Zeit beschreibt. Umgekehrt, wenn eine beliebige Anfangslage herausgegriffen wird, die jedoch bezüglich der Mittelsenkrechtebene nicht auf der Seite des Centrums der kleineren Anziehung liegt, so lässt sich die Grösse des Stosses berechnen, der dem Punkte zu erteilen ist, damit die fragliche Bewegung stattfinde. Die Schlussparagraphen der Arbeit beschäftigen sich mit den Fällen, dass die beiden Kräfte abstossend wirken, oder die eine anziehend und die andere abstossend. Endlich wird der Fall der ebenen Bewegung kurz erörtert. Lp.

C. Bonacini. Sulla separazione delle variabili nelle equazioni del moto di un punto soggetto all'azione di due centri fissi. Batt. G. XXVIII. 132-137.

Die Lösung des Problems der Bewegung eines von zwei festen Centren nach dem Newton'schen Gesetze angezogenen Punktes beruht hauptsächlich auf dem Umstande, dass in den Bewegungsgleichungen die Variabeln getrennt auftreten; hierdurch ergiebt sich die Möglichkeit, die Wandlungen, welche zufolge der Anfangsbedingungen in der Bahnlinie sich vollziehen, für jede einzelne Coordinate gesondert zu ermitteln. Man kann nun fragen, ob die Untersuchung nach derselben Methode in dem Falle sich erledigen lässt, dass die von den beiden festen Centren ausgehenden Kräfte beliebige Functionen der bezüglichen Fahrstrahlen des beweglichen Punktes sind. Der Verf. beweist, dass die Trennung der Variabeln in den Bewegungsgleichungen nur möglich ist, wenn die beiden Kräfte Newton'sche sind.

Lp.

E. Oekinghaus. Ueber bipolare Anziehungen. Wochenschr. für Astr. (2) XXXII. 97-99, 113-116, 145-150, 177-184. (1889).

I. Ein Punkt beschreibt unter der Einwirkung der Anziehung $f = k^2/r$ zweier gleichen, in den Brennpunkten einer Lemniskate sich befindenden Massenpunkte diese Curve mit gleichförmiger Bewegung, wenn man demselben in der Mitte der Verbindungslinie der Brennpunkte, deren Abstand vom Centrum $c = \pm 1$ ist, eine Geschwindigkeit $k\sqrt{\frac{1}{2}}$ erteilt, deren Richtung mit der Axe den Winkel 45° einschliesst. II. Rechnet man den Bogen einer Lemniskate vom Scheitel bis zu einem beliebigen Punkte mit den Brennstrahlen p und q, so ergeben sich die Anziehungen oder Abstossungen des mit Masse gleichförmig belegten Bogens auf die beiden Brennpunkte nach dem Newton'schen Gesetze umgekehrt wie die Quadrate von p und q. Die Anziehungen für die Rotationsfläche werden ebenfalls berechnet. III. In einer Ebene seien n feste Massenpunkte verteilt, welche nach dem Gesetze $f = m/r^2$ auf einen freien Punkt in derselben Ebene einwirken. Die Differentialgleichung für die Bahncurve bei ebener Bewegung wird in Polarcoordinaten aufgestellt, und für $n = 2$ die Integration durch eine Reihe von der Form

$$r = a + b\cos^2\varphi + c\cos^4\varphi + d\cos^6\varphi + \cdots$$

versucht. Von den früheren Arbeiten, welche sich auf das nämliche Problem beziehen, scheint der Verf. keine Kenntnis zu haben. Man vergleiche die Referate über Bonacini und Haussner in F. d. M. XXI. 1889. 908 ff. Der Fall der besonderen Bewegung in einer Ellipse, bezüglich dessen auf S. 182 die Frage gestellt wird, ob dieses Resultat bekannt sei, ist auf S. 37 der Haussner'schen Dissertation behandelt und auf Legendre zurückgeführt. Lp.

A. de Saint-Germain. Sur un cas particulier du mouvement d'un point dans un milieu résistant. C. R. CX. 1184-1187.

Die bekannten Formeln, welche zur Bestimmung der von dem Widerstande eines sehr dünnen Mittels hervorgerufenen Stö-

rungen in der Bewegung eines Planeten dienen, werden unbrauchbar, wenn man die Excentricität der nicht gestörten Bahn als verschwindend voraussetzt. In diesem Falle muss man eine directe Untersuchung der Bewegung vornehmen, die von dem Verfasser in der vorliegenden Note gegeben wird. Die Geschwindigkeit des Planeten sei v, die Dichte des Mittels λ, sein Widerstand $\lambda v \varphi(v)$. Die Differentialgleichungen für den Radiusvector r und den Polarwinkel θ werden durch Reihen integrirt, und indem die höheren Potenzen von λ vernachlässigt werden, erhält man

$$r = a - 2\lambda a \frac{\omega t - \sin \omega t}{\omega} \varphi(a\omega),$$

$$\theta = \omega t + \lambda\left(\tfrac{3}{2}\omega t^2 - 4\frac{1-\cos\omega t}{\omega}\right)\varphi(a\omega),$$

falls die Anfangsgeschwindigkeit, durch den Anfangsradius a ausgedrückt, den Wert $a\omega$ hat. Hieraus folgt, dass r fortwährend abnimmt, während θ stets wächst. Für $t = 2\pi/\omega$ wird $r' = 0$, also r senkrecht zur Bahn. Nennt man diese Lage ein Perihel und bezeichnet die zugehörigen Werte von r, θ und ω durch a_1, θ_1, ω_1, so ergiebt sich mit Vernachlässigung von λ^2 die Beziehung $a_1^3\omega_1^2 = a^3\omega^2 = \mu$. Geht man von diesem Perihel zum nächsten und so fort bis zum k^{ten}, so folgt ähnlich $a_k^3\omega_k^2 = \mu$.

Für den Fall des Widerstandes proportional einer Potenz der Geschwindigkeit, oder $\varphi(v) = \frac{\alpha . v^n}{2\lambda\pi}$, werden die Werte von a_k, θ_k, t_k berechnet, und es folgt, dass für $n = 3$ die a_k wie die Glieder einer geometrischen Progression abnehmen, die θ_k dagegen wie die einer arithmetischen wachsen. Lp.

J. Andrade. Sur le mouvement d'un corps soumis à l'attraction Newtonienne de deux corps fixes. Sur une extension d'une propriété des mouvements Képlériens. J. de l'Éc. Pol. LX. 1-57, Thèse. Gauthier-Villars et Fils.

Eine Masse 1 in x, y, z sei der Anziehung von festen Massen m_s in den Punkten a_s, b_s, c_s nach dem Newton'schen Ge-

setze unterworfen, U sei die Kräftefunction, h die Constante des Integrals der lebendigen Kräfte, $R = x^2+y^2+z^2$, so hat man:

$$\frac{d^2R}{dt^2} = 2U+4h-2\sum_s m_s\left(\frac{\partial U}{\partial a_s} a_s+\frac{\partial U}{\partial b_s} b_s+\frac{\partial U}{\partial c_s} c_s\right).$$

Daraus ist zu schliessen: Wenn $h \gtreqless 0$ ist, so wächst für den bewegten Körper entweder R von einer gewissen Zeit an unaufhörlich, oder aber, und letzterer Fall tritt immer ein, wenn $h<0$ ist, R bleibt immer endlich. Nun sollen alle festen Massen auf einer Linie, auf der z-Axe, liegen, und es sei g die Constante des Flächensatzes in Bezug auf die xy-Ebene. Wenn $h>0$ und $g \gtrless 0$ ist und $\frac{1}{r_0}$ die positive Wurzel von

$$\frac{\Sigma m_s}{r_0}+h-\tfrac{1}{2}\frac{g^2}{r_0^2} = 0$$

vorstellt, so muss dann jede einzelne Oscillation des bewegten Körpers parallel der Axe durch die festen Centren $> \frac{4hr_0^2}{\Sigma m_s}$ sein. — Die Arbeit behandelt im übrigen die Umkehrung der Quadraturen, auf welche das Problem der Anziehung eines Massenpunktes von zwei festen Centren führt; es werden die Jacobi'schen Integralformeln zu Grunde gelegt und die Functionen $\wp$ und σ eingeführt. Es wird speciell erörtert, wann die angezogene Masse sich auf einem Rotationsellipsoid bewegt, wann die Projection ihrer Bahn auf die Ebene senkrecht zur Axe durch die Centren oder diese Bahn selbst geschlossen, ferner wann sie eine algebraische Curve sein kann; es werden Fälle bezeichnet, in denen die bewegte Masse die Eigenschaften eines Trabanten eines der Centren hat; dabei kann es im Falle $g=0$ eintreten, dass die Stellen ihrer Durchgänge durch die Axe zum Teil dem betreffenden Centrum so nahe kommen, als man will. Besonders merkwürdig ist ein Fall, der ebenfalls an $g=0$ gebunden ist, wo die angezogene Masse sich asymptotisch der Axe durch die Centren nähert. Mk.

H. Poincaré. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. Acta Math. XIII. 1-270.

In dieser Arbeit (der ein vom Könige von Schweden ausgesetzter Preis zuerkannt wurde) wird die Existenz gewisser particulärer Lösungen der Differentialgleichungen der Dynamik nachgewiesen. Sie bringt ferner neue Hülfsmittel zur Beurteilung der Stabilität von Bewegungen. Ein grosser Teil ist dem Studium der Bewegungen mit nur zwei Freiheitsgraden gewidmet. Auf einen Fall solcher Bewegung reducirt sich das Problem der drei Körper, wenn angenommen wird, die Masse des einen, A, sei sehr gross, die eines zweiten, B, sehr klein und die des dritten, C, unendlich klein, ferner dass A und B Kreise um ihren gemeinsamen Schwerpunkt beschreiben und die Bewegung von C in der Bahn dieser Kreise vor sich geht. Die festgestellten particulären Lösungen ermöglichen insbesondere den Nachweis, dass gewisse in der Mechanik des Himmels gebrauchte Reihenentwicklungen nicht convergent sind, vielmehr einen Charakter ähnlich wie die Stirling'sche Reihe für $\Gamma(x+1)$ tragen (wodurch sie praktische Brauchbarkeit behalten); endlich, dass das Problem der drei Körper ausser den bereits bekannten Integralen kein weiteres eindeutiges analytisches in einem noch genauer zu präcisirenden Sinne (s. am Schlusse) zulässt.

Zunächst wird eine Uebersicht über die zu verwendenden allgemeinen Eigenschaften von Differentialgleichungen gegeben. Dabei erfahren die bekannten Sätze über die Möglichkeit, einem Systeme von Differentialgleichungen

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

worin die X Potenzreihen der x vorstellen, durch Potenzreihen nach den Anfangswerten der x und nach t zu genügen, eine Ausdehnung, welche die gleichzeitige Entwickelbarkeit der Lösungen nach Potenzen eines in den X eingehenden Parameters μ betrifft, und gewisse andere Sätze über solche Systeme, die der Verfasser in seiner Inauguralthese (Paris 1879) entwickelt hat, eine Ausdehnung auf den Fall, wo die X noch von t abhängen, und zwar periodische Functionen von t sind. In den in der Arbeit zu betrachtenden Systemen (1) gehen in die X gewisse x_i so ein, dass die X periodische Functionen von ihnen, und zwar

mit der Periode 2π sind; eine particuläre Lösung $x_i = \varphi_i(t)$ von (1) heisst dann periodisch mit der Periode h, wenn $\varphi_i(t+h)$ für diese „angularen" Variabeln x_i bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π gleich $\varphi_i(t)$, für die übrigen „linearen" Variabeln x_i direct $= \varphi_i(t)$ ist.

Es wird nun zuerst der neue Begriff der „Integralinvarianten" zur Behandlung von Fragen über Stabilität eingeführt. Es möge (1) als Gesetz der Bewegung eines Punktes $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ im Raume von n Dimensionen aufgefasst werden. Betrachtet man die Punkte P, die zur Zeit t_0 ein ν-dimensionales Gebiet G_0 erfüllen, so bilden sie zur Zeit t ein gewisses Gebiet G. Ein ν-faches Integral über G, das einen von t unabhängigen Wert besitzt, wird eine „Integralinvariante" (ν^{ter} Ordnung) genannt. So ist z. B. das Volumen $\int dx_1 dx_2 \ldots dx_n$ über jedes Gebiet eine solche Invariante, wenn die X der Bedingung

$$\Sigma \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

genügen. Ferner ist für die kanonische Form der Differentialgleichungen der Mechanik

$$(2) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

das Doppelintegral $\int \Sigma_i dx_i dy_i$ eine Invariante, und es giebt im Probleme der n Körper noch eine Invariante erster Ordnung. Besonders wichtig sind die „positiven" (Integral-) Invarianten, worunter solche n^{ter} Ordnung

$$\int M\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

in welchen M eine positive Function vorstellt, verstanden werden. Die Bedeutung der Integralinvarianten beruht auf dem fundamentalen Satze: Ist das Volumen eine Invariante (oder giebt es überhaupt irgend eine positive Invariante), und bleibt P auf den durch (1) bestimmten Bahnen immer in endlicher Entfernung (es sei jetzt etwa $n = 3$), so giebt es, wenn man eine Region r_0 betrachtet, sie mag noch so klein sein, immer unendlich viele solche Bahnen von P, welche die Region unendlich oft durch-

setzen. Es kann aber auch Bahnen geben, welche sie nur eine endliche Anzahl von Malen durchsetzen; diese sind indes als Ausnahmen zu betrachten, ungefähr so, wie man eine rationale Zahl Ausnahme und eine incommensurable Zahl Regel nennen kann. Nach Hill und Bohlin bleibt in dem eingangs erwähnten Specialfalle des Dreikörperproblems der Radius CA endlich, und nun geht hervor, dass in der Regel A, B, C unendlich oft ihre anfängliche Position so nahe, wie man will, wieder erlangen.

In den meisten Fragen der Dynamik treten gewisse sehr kleine Parameter auf, so dass man natürlich dazu geführt wird, die Lösungen nach den wachsenden Potenzen dieser zu entwickeln; solche Parameter sind in der Mechanik des Himmels die Massen. Es seien in (1) die X Functionen der x und eines Parameters μ; wenn sie von t abhängen, sollen sie periodische Functionen von t mit der Periode 2π sein. Es mögen die Gleichungen (1) für einen Wert von μ eine periodische Lösung $x_i = \varphi_i(t)$ zulassen, und man setze $x_i = \varphi_i + \xi_i$. Das System der Variationsgleichungen von (1)

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial X_i}{\partial x_1}\xi_1 + \frac{\partial X_i}{\partial x_2}\xi_2 + \cdots + \frac{\partial X_i}{\partial x_n}\xi_n$$

besitzt dann particuläre Lösungen $\xi_i = Ae^{\alpha t}\lambda_i(t)$, wobei A eine Integrationsconstante, die λ_i periodische Functionen von t mit der Periode 2π und α eine Constante vorstellen; dabei bestimmt sich $e^{2\alpha\pi}$ als Wurzel einer gewissen Gleichung n^{ten} Grades mit constanten Coefficienten. Die Grössen α heissen die „charakteristischen Exponenten" der periodischen Lösung, und letztere heisst eine stabile, wenn die Quadrate aller α reell und negativ sind (dann bleiben die ξ wenigstens für lange Zeit endlich), sonst eine instabile. Hat das System (1) die kanonische Form (2), so sind die α paarweise gleich und von entgegengesetztem Vorzeichen, und heissen die p Grössen α^2 die „Coefficienten der Stabilität".

Es wird nun gezeigt, dass, wenn die Gleichungen (1) für $\mu = 0$ eine periodische Lösung zulassen, deren Anfangswerte $\varphi_i(0)$ sein mögen, im allgemeinen Functionen β_i von μ sich so bestimmen lassen, dass den Anfangswerten $\varphi_i(0) + \beta_i$ auch noch

für kleine Werte von μ periodische Lösungen von (1) entsprechen. Bei den Gleichungen von der Form (2) gestaltet sich die Sache, weil hier in $F = \text{const.}$ ein Integral da ist, etwas anders. Es sei $p = 3$; F soll nicht von t abhängen, eindeutig in den x und y und eine periodische Function mit der Periode 2π in den y sein, ferner in Bezug auf μ eine Entwicklung

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \cdots$$

besitzen; darin soll F_0 nur von den x abhängen; alle diese Umstände lassen sich gewöhnlich erzielen. Für $\mu = 0$ folgt dann aus (2)

$$x_i = x_i^0 = \text{const.}, \quad y_i = n_i t + \tilde{\omega}_i, \quad n_i = -\frac{\partial F_0}{\partial x_i};$$

die $\tilde{\omega}_i$ sind neue Constanten. Werden x_1^0, x_2^0, x_3^0 so gewählt, dass n_1, n_2, n_3 commensurabel werden, und ist T das kleinste gemeinsame Multiplum von $\frac{2\pi}{n_1}$, $\frac{2\pi}{n_2}$, $\frac{2\pi}{n_3}$, so hat diese Lösung die Periode T. Es sei ψ der Mittelwert von F_1 als periodischer Function von t. Es kann $\tilde{\omega}_1 = 0$ gesetzt werden; das bedeutet nur eine Festsetzung des Nullpunkts von t; wenn dann dieser letzten Lösung für $\mu = 0$ periodische Lösungen für kleine μ benachbart sein sollen, müssen $\tilde{\omega}_2$, $\tilde{\omega}_3$ die zwei Gleichungen

$$\frac{d\psi}{d\tilde{\alpha}_2} = 0, \quad \frac{d\psi}{d\tilde{\omega}_3} = 0$$

erfüllen; diese sind immer lösbar, weil ψ periodisch in $\tilde{\omega}_2$ und $\tilde{\omega}_3$ und endlich ist und deshalb mindestens ein Maximum und ein Minimum besitzt. Nachdem die Existenz solcher benachbarter periodischer Lösungen unter den weiteren Voraussetzungen, dass die Hesse'sche Determinante von F_0 in Bezug auf die x_i^0 und die von ψ in Bezug auf $\tilde{\omega}_2$ und $\tilde{\omega}_3$ nicht Null sind, festgestellt ist, werden diese Lösungen direct nach Potenzen von μ entwickelt. Bei dem Probleme der drei Körper tritt der Ausnahmefall bezüglich der Hesse'schen von F_0 ein; die dadurch eintretende Schwierigkeit lässt sich aber in dem mehrfach erwähnten speciellen Falle dieses Problems umgehen. Weiter wird gezeigt, dass die charakteristischen Exponenten α für die gefundenen Lösungen sich nach steigenden Potenzen von $\sqrt{\mu}$, mit der ersten

anfangend, entwickeln lassen. — Im Falle $p = 2$ gilt Entsprechendes; jedes commensurable System n_1, n_2 führt dann auf mindestens eine stabile und mindestens eine instabile Lösung.

Sei nun wieder $x_i = x_i^0$ eine periodische Lösung von (1) mit der Periode 2π; setzt man $x_i = x_i^0 + \xi_i$, so wird man in erster Annäherung

$$\xi_i = A_1 e^{\alpha_1 t} \varphi_{1i} + A_2 e^{\alpha_2 t} \varphi_{2i} + \cdots + A_n e^{\alpha_n t} \varphi_{ni}$$

haben, worin die φ periodische Functionen von t vorstellen; die Gleichungen für die durch $\xi_i = \Sigma \eta_k \varphi_{ki}$ definirten η_i werden dann

$$\frac{d\eta_i}{dt} = H_i^{(1)} + H_i^{(2)} + \cdots \quad (H_i^{(1)} = \alpha_i \eta_i),$$

wobei $H_i^{(m)}$ den Inbegriff der Glieder vom m^{ten} Grade in Bezug auf die η rechts vorstellen soll. Aus diesen Gleichungen erhält man η_i gleich einer Reihe, die nach den Potenzen der $A_k e^{\alpha_k t} = w_k$ und von $e^{\pm t\sqrt{-1}}$ fortschreitet, und die einen Convergenzbereich hat, wenn alle Grössen α nicht verschwindende reelle Teile von demselben Vorzeichen besitzen (oder wenigstens die A so zum Teil gleich Null gesetzt werden, dass den übrig bleibenden lauter α vom bezeichneten Charakter entsprechen), und wenn zudem die α, was im allgemeinen der Fall sein wird, gewisse lineare Gleichungen nicht erfüllen. Hat man z. B. für $n = 2$ einen reellen positiven und einen reellen negativen Exponenten α, so gewinnt man eine Lösung $x_i^0 + \xi_i$, welche noch von einem Parameter A abhängt und für $t = -\infty$ sich asymptotisch der periodischen Lösung nähert, und eine andere, die sich für $t = \infty$ der periodischen asymptotisch nähert. Die Gesamtheit der Bahnen x_1, x_2, t, welche den asymptotischen Lösungen einer Art für die verschiedenen Werte von A entsprechen, wird eine „asymptotische Fläche" genannt.

Im Falle der Gleichungen (2) kann man die einzelnen Coefficienten dieser, nach Potenzen der w_i und von $e^{\pm t\sqrt{-1}}$ fortschreitenden Reihen für die η_i zwar nicht nach Potenzen von μ, aber nach solchen von $\sqrt{\mu}$ entwickeln; ordnet man dann aber die ganzen Reihen nach den Potenzen von $\sqrt{\mu}$, so erhält man nicht mehr convergente Reihen, sondern solche, welche die η_i nur asymptotisch darstellen. Man sagt, eine Reihe $C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \cdots$

stellt eine Function $F(z)$ asymptotisch für ein sehr kleines z dar, wenn man

$$\lim \frac{F(z) - C_0 - C_1 z - \cdots - C_m z^m}{z^m} = 0$$

für $z = 0$ und jedes m hat.

Im zweiten Teile der Arbeit betrachtet der Verfasser nun namentlich den Fall $p = 2$, Bewegungen mit zwei Freiheitsgraden. Zunächst wird an Beispielen gezeigt, wie man solche Coordinaten einführt, dass jeder Situation des bewegten Systems ein Wertsystem der Coordinaten und umgekehrt entspricht. Dann wird zum genaueren Studium der hier auftretenden asymptotischen Flächen geschritten. Für diese werden Gleichungen

$$x_i = \varphi_i(t, w), \quad y_i = n_i t + \varphi_{i+2}(t, w) \qquad (i = 1, 2)$$

gelten, worin $w = Ae^{at}$ und A beliebig ist, ferner die φ in Bezug auf das explicite t periodisch sind, und für die φ werden asymptotische Reihen $\sigma(t, w, \sqrt{\mu})$ vorhanden sein. Durch Elimination von t und w wird man

$$x_1 = f_1(y_1, y_2), \quad x_2 = f_2(y_1, y_2)$$

und für f_1, f_2 wieder asymptotische Werte $s_1(y_1, y_2, \sqrt{\mu})$, $s_2(y_1, y_2, \sqrt{\mu})$ erhalten, und diese asymptotischen Relationen kann man hier (was im allgemeinen nicht erlaubt ist) auch gliedweise in Bezug auf y_1, y_2 differentiiren. Die f_i haben den Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial f_i}{\partial y_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial f_i}{\partial y_2} + \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0$$

zu genügen; es werden nun mittels dieser Gleichungen die s_i zunächst bis zum Term in $\sqrt{\mu}$, dann bis zu einem beliebigen Term μ^k construirt, und es werden schliesslich die Eigenschaften der exacten Gleichungen der asymptotischen Flächen ausführlich geometrisch erörtert. Dabei tritt die Bedeutung der asymptotischen Darstellung dieser Flächen in Evidenz. — Man hat immer Paare von asymptotischen Flächen, die sich wie zwei Schalen einer Fläche verhalten; es wird, was ein besonders schwieriger Punkt ist, dargethan, dass solche zwei Schalen sich immer schneiden müssen, und es wird dadurch auf die Existenz unendlich vieler doppelt asymptotischer Bahnen, d. h. solcher, die sich sowohl für $t = -\infty$, wie für $t = +\infty$ einer und derselben perio-

dischen Lösung nähern, geschlossen. Weiter wird die Existenz einer neuen Art von periodischen Lösungen dargethan, die sich nicht, wie die erste Art, nach Potenzen von μ entwickeln lassen, sondern, in eine periodische Lösung der ersten Art für einen Wert $\mu = \mu_0$ gewisser Beschaffenheit übergehend, nach gebrochenen Potenzen von $\mu - \mu_0$ entwickelbar sind und deshalb nicht nur für $\mu > \mu_0$, sondern auch für $\mu < \mu_0$ existiren. Schliesslich wird die Nichtconvergenz gewisser, von Lindstedt für das Dreikörperproblem aufgestellter Reihen gezeigt, und endlich bewiesen, dass es in dem am Anfange bezeichneten Specialfall des Dreikörperproblems für die Gleichungen von der Form (2) ausser dem Integral F = const. kein anderes Integral Φ = const. geben kann, das analytisch und eindeutig (und periodisch in y_1, y_2) ist für alle Werte von y_1 und y_2 und für hinreichend kleine Werte von μ, und während x_1, x_2 ein beliebiges, noch so kleines Gebiet durchlaufen. Gäbe es ein solches Integral, so würde man für jede periodische Lösung erster Art

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} : \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} : \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} : \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} = \frac{\partial F}{\partial x_1} : \frac{\partial F}{\partial x_2} : \frac{\partial F}{\partial y_1} : \frac{\partial F}{\partial y_2}$$

haben oder zu einer anderen Folgerung kommen, die jedoch als unzutreffend erkannt wird, wenn alle drei Körper Kreise beschreiben. Aus dem Umstande, dass die Ausdrücke

$$f = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}\frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\frac{\partial F}{\partial x_2}, \dots$$

eindeutige analytische Functionen sein sollen, und andererseits aus der Variabilität, die in den periodischen Lösungen noch da ist, lässt sich dann entnehmen, dass diese Ausdrücke $f, \dots$ identisch Null sein müssen, und damit würde das Integral Φ von F nicht verschieden sein. Mk.

W. Mantel. Studie over de beweging van een stoffelijk punt. Antwoord op prijsvraag 8 voor 1888 uitgeschreven. Nieuw Archief XVII. 52-76.

Die hierin behandelte Preisaufgabe lautet wie folgt: Es ist die Gleichung

$$mv^2 = \frac{m}{2}\frac{d^2(r^2)}{dt^2} - Pr\cos(Pr),$$

in der t die Zeit, v die Geschwindigkeit eines Massenteiles m, P die einwirkende Kraft, r die Entfernung dieses Teiles von einem willkürlichen Coordinatenursprung bedeuten, anzuwenden auf die freie oder gezwungene Bewegung eines materiellen Punktes.

Der Ansatz dieses Problems erfolgt nach der Methode der Quaternionen; allein bei der Ausarbeitung kehrt der Verfasser zu der gewöhnlichen analytischen Behandlung zurück, ebenso wie Villarceau, der sich mit dem nämlichen Problem beschäftigt hat. Nach einigen allgemeinen Betrachtungen über die Bewegungen des Punktes unter dem angegebenen Gesetze behandelt der Verf. einige besondere Fälle, wobei vielerlei Umstände vorkommen, welche sich auf die verschiedenen Formen der Kraftfunction beziehen. Auch die Umkehrung des Problems wird besprochen, nämlich die Kraft zu bestimmen, vermöge deren eine gegebene Curve zu durchlaufen wäre. Darauf kommen die Fälle in Betracht, bei denen sich die Bewegung durch Quadraturen ermitteln liesse, und schliesslich wird die Ausdehnung des Problems auf die Bewegung eines Systems angegeben, wobei die Gleichung wieder in Quaternionenform gebracht wird. G.

A. DE SAINT-GERMAIN. Note sur le problème de mécanique proposé à l'agrégation en 1889. Nouv. Ann. (3) IX. 118-123.

Es seien OX_1, OY_1, OZ_1 drei rechtwinklige Coordinatenaxen; S die durch Gleichung $ze^{x_1+y_1}$ definirte Oberfläche; D die Gerade mit den Gleichungen $x_1 = y_1 = z_1$. Das Axensystem und S drehen sich mit der constanten Winkelgeschwindigkeit ω um die fest angenommene D. Die relative Bewegung eines Punktes M von der Masse 1 zu bestimmen, der auf S bleiben muss und von einer bekannten Kraft F angegriffen wird; ebenso den Druck auf die Oberfläche. Besonderer Fall: F ist die Resultante zweier Kräfte von der Grösse $\omega^2.MO$ und $3\omega^2.MH$, die erste in der

Richtung MO, die zweite in der Richtung des Lotes MH von M auf die Normalebene zu D durch O. Am Anfange befindet sich der Punkt auf OZ_1 mit einer Geschwindigkeit, deren Projectionen auf OX_1 und OY_1 die Grössen $-\frac{2}{3}\omega\sqrt{3}$ und $\frac{2}{3}\omega\sqrt{3}$ haben. Hr. de Saint-Germain entwickelt die Lösung dieser Aufgabe.

Lp.

E. Oekinghaus. Ueber die Bewegung eines Luftballons in ruhiger Luft. Wochenschr. für Astr. (2) XXXIII. 249-254, 257-261.

Der Verf. hat unter demselben Titel schon im Jahre 1889 eine Arbeit in Hoppe's Arch. (2) VII. 445-448 veröffentlicht (F. d. M. XXI. 947). Gegenwärtig werden weniger Annahmen zur Vereinfachung der Lösung gemacht als in dem früheren Aufsatze. Die verticale Bewegung wird untersucht unter der Voraussetzung eines dem Quadrate der Geschwindigkeit proportionalen Luftwiderstandes, im weiteren wird auch die Variation der Bewegung infolge des Auswerfens von Ballast berücksichtigt, und zuletzt wird der Einfluss der Rotation der Erde in Rechnung gestellt. Die benutzte Differentialgleichung der Bewegung lautet:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{ge^{-\frac{y}{a}}}{k} - g - \varrho e^{-\frac{y}{a}}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

wenn y die Höhe, t die Zeit, g die Beschleunigung der Schwere, a etwa 8000 Meter, k und ϱ zwei von den Dimensionen und dem Gewichte des Ballons abhängige Constanten bedeuten. Die Integration dieser Gleichung liefert Formeln für die Zeit und die Geschwindigkeit, von denen wir die für die Zeit hersetzen:

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{\varrho k}{g}}\left(y - y_0 + 2a\ln\frac{1+(1-ke^{\frac{y_0}{a}})^{\frac{1}{2}}}{1+(1-ke^{\frac{y}{a}})^{\frac{1}{2}}}\right).$$

Die Prüfung dieser Formel mit den Daten der Auffahrt von Glaisher (5. Septbr. 1862) ergiebt eine gute Uebereinstimmung.

Lp.

E. Phragmén. Om några med det Poincaré'ska fallet af trekropparsproblemet beslägtade dynamiska uppgifter. Stockh. Vetensk. Bihang. XV. Abt. I. No. 13. 33 S.

Der Verf. betrachtet die Bewegung eines materiellen Punktes auf einer Rotationsfläche unter Einwirkung von Kräften, welche durch eine gewisse Potentialfunction bestimmt sind, unter der Annahme, dass sowohl die Gleichung der Fläche als der Wert des Potentials von einem Parameter μ abhängen, und dass für $\mu = 0$ das Potential unabhängig von der Zeit ist und auf jedem Parallelkreis einen constanten Wert hat. Als Specialfall hiervon geht in der That der von Poincaré in seiner preisgekrönten Abhandlung „Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique" (Acta Math. XIII, Referat oben S. 907 ff.) behandelte Fall des Dreikörperproblems hervor, wenn die Rotationsfläche eine Ebene ist und das Potential

$$= \frac{1-\mu}{r} + \frac{\mu}{r'},$$

wo $1-\mu$ und μ die Massen zweier Punkte sind, welche um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt Kreise mit den Radien r und r' mit constanter Winkelgeschwindigkeit beschreiben. Es wird gezeigt, wie man auch im allgemeinen Falle die Poincaré'sche Untersuchung benutzen kann, um Fälle zu finden, in denen die Bewegung periodisch ist.

Darauf werden die hergeleiteten Gleichungen aus einem anderen Gesichtspunkte betrachtet, nämlich als Ausdruck für ein gewisses Bewegungsproblem in einem zweidimensionalen nicht-euklidischen Raume, welches der Bewegung in einem euklidischen Raume um ein festes, nach Newton's Gesetze attrahirendes Centrum nahezu entspricht. Mit Anschluss hieran erfolgen einige Aeusserungen über die Bedeutung des Krümmungsmasses einer Raumform für die Bewegungserscheinungen und über die schwebende Frage nach dem Krümmungsmasse des wirklichen Raumes. Bdn.

E. Oekinghaus. Ueber eine Brachistochrone der Centralbewegung. Wochenschr. für Astr. (2) XXXIII. 285-291.

Behandlung der Brachistochrone für die Newton'sche Centralkraft c/r^2, ohne dass auf die früheren Behandlungen des Problems Bezug genommen ist (Euler, Mechanica T. II, p. 191).

Lp.

A. Astor. Sur quelques propriétés du mouvement d'un point matériel assujetti à rester sur une surface du second degré. Ann. de l'enseignement sup. de Grenoble I. 231-262. (1889.)

Ausführliches Referat in Darboux Bull. (2) XV_2. 156—162, wodurch die Selbstanzeige des Verf. in derselben Zeitschrift XIII_1. 294 ergänzt wird (vgl. F. d. M. XXI. 1889. 921).

Lp.

Sir R. St. Ball. The theory of permanent screws; being the ninth memoir on the theory of screws. Dublin Trans. XXIX. Part XVII. 613-652.

Wenn ein starrer Körper sich um einen festen Punkt drehen kann, so giebt es im allgemeinen drei Axen, um welche er einzeln, sobald er einmal in Bewegung gesetzt ist, so lange sich zu drehen fortfahren wird, als keine Kräfte einwirken, und diese Axen sind als die permanenten Axen bekannt. Die gegenwärtige Abhandlung erforscht die Theorie der permanenten Schrauben für einen in allgemeinster Weise einem Zwange unterworfenen Körper. Das Wesen der Forschung ergiebt sich aus der folgenden Darlegung. Die Bewegung des Körpers muss eine Windungsgeschwindigkeit um eine gewisse Schraube θ sein, die einem System von Schrauben angehört, das dem Charakter der Zwangskräfte zugehört; allein bei Abwesenheit von Kräften ausserhalb derer, welche aus den Reactionen der Zwangskräfte entstehen, wird die Bewegung im allgemeinen nicht als eine Windung um θ beharren. Um den Körper zur Fortsetzung einer Windung um θ zu nötigen, ist eine Dyname von passender Stärke an einer geeigneten Schraube möglicher Weise anzubringen, und η kann als eine der Schrauben aus dem Systeme gewählt werden, welches den Grad der Freiheit des Körpers

ausdrückt. Wenn die Stärke der Dyname an η Null ist, so ist θ eine permanente Schraube. — Die Erörterung wird in neun Abschnitten durchgeführt und ist durchweg interessant; zugleich fällt klares Licht gelegentlich auf die ganze Theorie, welche diese Abhandlungen veranschaulichen. Es würde jedoch, ohne die Grenzen eines Berichtes zu überschreiten, nicht möglich sein, dem Verf. durch seine Zergliederung zu folgen; der Ref. begnügt sich daher mit der Angabe der Ueberschriften der einzelnen Abschnitte. I. Eine Eigenschaft der kinetischen Energie eines Systems. (Durch eine Gleichung ausgedrückt, welche die kinetische Energie T identisch befriedigen muss.) II. Die allgemeinen Gleichungen der Bewegung mit Schraubenketten-Coordinaten. III. Die hemmende Dynamen-Kette. In diesem Abschnitte wird gezeigt, dass die durch T befriedigte Gleichung ein Ausdruck für die Thatsache ist, dass die hemmende Dynamen-Kette zur augenblicklichen Schrauben-Kette reciprok ist. IV. Die beschleunigende Schrauben-Kette. V. Permanente Schrauben. Die Gleichungen, welche die permanenten Schrauben bestimmen, werden hier aufgestellt. VI. Ein einziger freier Körper. In diesem Falle muss T ausser der in I gefundenen Gleichung noch einer anderen genügen. VII. Die Grade der Freiheit. Hier wird gezeigt, dass, wenn ein starres System zwei Grade der Freiheit hat, es eine, und im allgemeinen bloss eine, unter den Schrauben giebt, um die es sich drehen kann, welche die Eigenschaft einer permanenten Schraube hat. VIII. Drei Grade der Freiheit. In diesem Falle giebt es im allgemeinen drei permanente Schrauben. IX. Uebrige Freiheitsgrade. Für einen starren Körper mit einer Freiheit entweder vierter oder fünfter Ordnung giebt es im allgemeinen drei und nur drei permanente Schrauben. Sind dagegen sechs Grade der Freiheit vorhanden, so ist ihre Anzahl dreifach unendlich. Gbs. (Lp.)

O. Henrici. The theory of screws. Nature XLII. 127-132.

Eine Besprechung des Buches von Hrn. Gravelius (F. d. M. XXI. 1889. 841) unter gleichzeitiger Darstellung der Hauptbegriffe der Ball'schen Theorie. Lp.

W. Hess. Ueber die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue particuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt. Math. Ann. XXXVII. 153-181.

Die im Titel genannten Gleichungen werden zunächst mit Hülfe ihrer bekannten Integrale auf ein System dreier Gleichungen erster Ordnung reducirt, denen folgende Deutung gegeben wird. Es sei O der feste Punkt, ON die Axe des die Bewegung erzeugenden Momentankräftepaars und die Länge $ON = \sqrt{\nu}$ gleich der Grösse des Paars, OT die Axe der instantanen Drehung und $OT = \sqrt{\tau}$ die Grösse der Drehgeschwindigkeit, OZ die Verticale, die Länge $OZ = 1$, OS die Figuraxe (Richtung nach dem Schwerpunkte) und $OS = 1$, ferner P das Maximalmoment der Schwere auf den Körper, μ_1 die Grösse der lebendigen Kraft, ϱ die Componente des Kräftepaars nach der Richtung OS; dann ist τ leicht durch ν, ϱ und μ_1 auszudrücken, und es sind $\frac{1}{2P}\frac{d\nu}{dt}$, $\frac{d\varrho}{dt}$, $\frac{1}{2P}\frac{d\mu_1}{dt}$ bez. gleich der sechsfachen Pyramide $OZNS$ oder $ONST$ oder $OSTZ$. Dieses System von Gleichungen für ν, ϱ, μ_1 besitzt singuläre Lösungen; letztere führen jedoch nur unter speciellen Voraussetzungen über die Gestalt des Körpers zu particulären Lösungen der Euler'schen Gleichungen. Der Verfasser findet: Liegt der Schwerpunkt in einer Hauptebene durch den festen Punkt, und ist, unter A, B, C, G die Trägheitsmomente des Körpers um die zwei Hauptaxen in jener Hauptebene, um die dritte Hauptaxe und um die Figuraxe verstanden, $AB = CG$, so können die Euler'schen Gleichungen, wenn die Axe des die Bewegung erzeugenden Kräftepaars horizontal und senkrecht zur Figuraxe ist, vollständig mittels elliptischer Functionen gelöst werden. In der Einleitung wird diese Lösung des Rotationsproblems den drei bisher bekannten zur Seite gestellt; doch bemerkt der Verfasser selbst, dass diese Lösung Voraussetzungen über den Anfangszustand der Bewegung erheischt, was bei jenen dreien bekanntlich nicht der Fall ist. Mk.

A. Rysánek. Die Gleichungen der Drehung eines freien starren Körpers um seinen Schwerpunkt. Exner Rep. XXVI. 50-53.

Der Verf. findet, dass bei den Ableitungen dieser Gleichungen in den Lehrbüchern der theoretischen Mechanik die Rolle, welche die bei dieser Drehung auftretenden Fliehkräfte spielen, nicht genug ersichtlich wird, und leitet die Gleichungen unter Berücksichtigung jener Fliehkräfte elementar ab.

Lp.

S. Kowalevski. Sur une propriété du système d'équations différentielles qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. Acta Math. XIV. 81-94.

Der Aufsatz bildet eine Ergänzung zum Aufsatze der Verfasserin in den Acta Math. XII. Dort war die Möglichkeit, das Problem der Rotation eines schweren Körpers um einen festen Punkt durch Functionen gewisser Art zu lösen, von den Eigenschaften einer gewissen Determinante abhängig gemacht; diese wird hier berechnet und discutirt. Mk.

Sophie de Kowalevski. Mémoire sur un cas particulier du problème de la rotation d'un corps pesant autour d'un point fixe, où l'intégration s'effectue à l'aide de fonctions ultraelliptiques du temps. Mém. Sav. Étr. (2) XXXI. 62 S. 4°.

S. den Bericht F. d. M. XXI. 1889. 914ff.

E. Padova. Del moto di un corpo non soggetto ad azioni acceleratrici. Ven. Ist. Atti (7) I. 437-444.

E. Padova. Intorno ad alcuni problemi di meccanica. Ven. Ist Atti (7) I. 547-562.

In dem ersten Aufsatze wird die Rotation eines keinen äusseren Kräften unterworfenen Körpers mittels der Weierstrass'schen Functionen $\wp$ und σ dargestellt. Das Gleiche wird in dem zweiten Aufsatze für fünf andere Probleme der Mechanik ge-

leistet, die auf elliptische Functionen führen, und bei welchen keine Kraft oder allein die Schwerkraft in Betracht kommt, so z. B. für das konische Pendel, für die Bewegung eines Rotationskörpers in einer unendlichen Flüssigkeit. Mk.

W. Glaser. Ueber die Wirkung der verschiedenen Massenteilchen eines physischen Pendels. Poske Z. III. 234-237.

M. Koppe. Ueber die Bewegung des Kreisels. Poske Z. IV. 13 S.

Der Verfasser sucht eine Einsicht in den Grund der Bewegungserscheinungen des Kreisels durch elementare Betrachtungen zu gewinnen und lehnt sich an die von Poggendorff herrührende, jedoch nicht genauer durchgeführte Erklärung an.

Mk.

Nanny Lagerborg. Sur le problème du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe. S. M. F. Bull. XVIII. 118-122.

Die Bewegung eines starren Rotationskörpers um einen Punkt seiner Axe lässt sich auf Quadraturen bringen, wenn die Kräftefunction U bloss von dem Winkel θ abhängt, den die Axe des Körpers mit einer festen Geraden einschliesst. Fräulein Lagerborg sucht die Kräftefunction so zu bestimmen, dass in diesem allgemeinen Falle die Lösung auf elliptische Transcendenten führt, und erreicht dies, indem sie setzt:

$$U = \Sigma[L(x^2+y^2)+Mz^2+2Nz]m.$$

Jeder Punkt des Körpers ist also einer ersten constanten Kraft und einer zweiten Kraft unterworfen, welche dem Abstande des Punktes von einer festen Ebene proportional ist. Durch θ ausgedrückt, wird

$$U = (L-M)(C-A)\cos^2\theta + 2N\zeta\cos\theta + \tfrac{1}{2}MC + AL,$$

wenn ζ die z-Coordinate des Schwerpunktes des Körpers ist. Der zweite Teil des Aufsatzes liefert die Zurückführung des elliptischen Integrals erster Gattung für t auf die Weierstrass'sche Normalform, sowie die Ausdrücke für die Euler'schen Winkel φ und ψ durch σ-Functionen. Lp.

---

de Sparre. Sur le pendule de Foucault. Brux. S. sc. XIV B. 284-368.

Die Ergebnisse dieser Abhandlung sind in einer etwas anderen Gestalt am 6. Oct. 1890 der Pariser Akademie der Wissenschaften vorgelegt worden und haben den Gegenstand eines Berichtes des Hrn. Resal am 13. April 1891 gebildet (C. R. CXII. 769). Hr. Gilbert hat auch den zweiten Teil der Abhandlung in Brux. S. sc. XV A. 1—2 besprochen.

Im ersten Teile beschäftigt sich der Verf. mit der Bewegung des Foucault'schen Pendels im luftleeren Raume. Er lenkt zuerst die Aufmerksamkeit darauf, dass man bei der Aufstellung der Gleichungen des Foucault'schen Pendels notwendigerweise die Glieder mit ω^2, dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit der Erde, in Rechnung ziehen muss, obschon man dieselben in den Resultaten vernachlässigen darf. Dies rührt daher, dass die Gleichungen, welche sowohl den Ablenkungswinkel θ des Pendels als auch sein Azimut φ bestimmen, zur Kategorie singulärer Integrale gehören. Er sucht sodann diese Bewegungsgleichungen unter Berücksichtigung der Glieder mit ω^2 und der secundären Störungsursachen (Mondanziehung, Aenderung der Erdanziehung bei einer Verrückung des Pendels). Endlich integrirt er diese Gleichung nach einem Näherungsverfahren und beweist, dass man (wie wenn man die Erddrehung nicht berücksichtigt) die Formel nehmen kann:

$$T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1+\frac{1^2}{2^2}k^2+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}k^4+\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}k^6+\cdots\right\},$$

wenn $2T$ die Schwingungsdauer bedeutet.

In dem zweiten Teile handelt der Verf. von der Bewegung des Foucault'schen Pendels in der Luft. Er beschäftigt sich zunächst mit der Bewegung des gewöhnlichen Pendels mit Schwingungen von beliebiger Weite, indem er den Luftwiderstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional annimmt. Nach Aufstellung der Bewegungsgleichung führt er dieselbe auf eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung zurück, integrirt sie und erhält die Zeit als Function des Ausschlagswinkels gegen die Verticale in der Gestalt eines ziemlich verwickelten Integrales. Aus

dem letzteren leitet er mit der gewollten Annäherung ab: 1) den Winkel des Pendels gegen die Verticale beim Beginne einer Schwingung von gegebener Ordnung, 2) die Dauer einer Schwingung beliebigen Ranges. Somit gelangt er zu der sehr einfachen Folgerung, dass der Luftwiderstand die Dauer der ersten einfachen Schwingung um die Grösse $\frac{1}{12}\gamma\pi\theta_0^2\sqrt{\frac{g}{l}}$ verringert, worin γ ein von der Pendelmasse abhängiger Cofficient, θ_0 der anfängliche Ausschlag ist.

Hierauf macht sich Hr. de Sparre an das verwickeltere Problem des Foucault'schen Pendels. Zuerst betrachtet er die Bewegung der Projection des wirklichen Pendels auf die bloss vorgestellte sogenannte Schwingungsebene und legt dar, dass diese Bewegung durch die Lösung des erstbehandelten Problems gegeben ist. Danach ermittelt er den Einfluss des Luftwiderstandes auf die Schwingungsebene selbst, deren mittlere Geschwindigkeit um das Pendel während einer Schwingung vorgegebenen Ranges zu bestimmen ist. Mehrere Ursachen verwickeln die Aufgabe. Dazu gehört die fortschrittliche Verringerung der Schwingungsweite bei jedem Hin- und Hergange des Pendels; das Vorhandensein singulärer Integrale, bei denen ein Fehler von der Ordnung ω^2 in manchen Gliedern einen Fehler von der Ordnung ω in dem Ergebnisse hervorbringt; das Vorkommen der Zeit als eines Factors in Gliedern, die zuerst klein sind, dann aber beträchtlich wachsen können. Indessen gelingt es dem Verf., indem er unverdrossen alle Erörterungen erledigt und sich alle günstigen Umstände zunutze macht, sich durch alle Schwierigkeiten durchzuwinden und zu beweisen, dass die Drehgeschwindigkeit der Schwingungsebene in der Luft sich von derjenigen, die im luftleeren Raume statthaben würde, wenn die Anfangsbedingungen die nämlichen wären, nur um Glieder von der Ordnung $\gamma\omega$ unterscheidet, d. h. um sehr kleine (Gilbert). Die Abhandlung schliesst mit einigen Zahlenbeispielen. Mn. (Lp.)

DE SPARRE. Sur le mouvement du pendule de Foucault. C. R. CXI. 496-498.

Die Note ist ein Auszug aus einer grösseren Abhandlung des Verfassers, deren Ergebnisse kurz angegeben werden.

Da das Foucault'sche Pendel nicht eine Ebene, sondern sein Endpunkt eine sehr stark abgeflachte Curve beschreibt, so kann man von einer Schwingungsebene eigentlich nicht reden. Aber man kann den Namen „Schwingungsebene" einer Ebene geben, welche während einer Schwingung sich gleichförmig um die Verticale mit einer Winkelgeschwindigkeit von der Ordnung der Rotation ω der Erde derartig dreht, dass das Pendel sich in dieser Ebene zu Beginn und am Ende der betrachteten Oscillation befindet. Wenn man nach dieser Definition der Schwingungsebene mit θ_0 die anfängliche Ablenkung, mit φ_0 das Azimut des Ausgangspunktes, mit λ die Breite des Ortes bezeichnet und der Kürze wegen n für $\omega \sin\lambda$, m für $\omega\cos\lambda$ setzt, so folgt im leeren Raume für die Rotationsgeschwindigkeit der Schwingungsebene:

$$\frac{d\tau}{dt} = -n + \tfrac{1}{4}\left\{n\sin^2\theta_0 + \cos\varphi_0(\theta_0 - \sin\theta_0\cos\theta_0)\right\}\frac{G}{H},$$

wo

$$G = \tfrac{3}{4} + (\tfrac{1}{2})^2\frac{4^2-1}{4}k^2 + \cdots + \left(\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)}\right)^2\frac{4n^2-1}{2n}k^{2n-2} + \cdots,$$

$$H = 1 + (\tfrac{1}{2})^2k^2 + \cdots + \left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots2n}\right)^2 k^{2n} + \cdots,$$

$$k = \sin\tfrac{1}{2}\theta_0.$$

Diese Geschwindigkeit kann in keiner merkbaren Weise von den secundären störenden Ursachen, die auf die Pendelbewegung wirken, beeinflusst werden. Der Luftwiderstand hat einen indirecten Einfluss auf die Rotationsgeschwindigkeit, indem er 1) die Ausschläge verringert, 2) die von der Pendelspitze beschriebene Curve umgestaltet. Lp.

D. Varisco. Sulla deviazione apparente del piano d'oscillazione di un pendolo dovuta alla rotazione terrestre. Seconda edizione. Jesi. Pierdicchi. 6 S. Abzug aus dem Giornale scientifico delle scuole secondarie italiane.

Dieser kurze Aufsatz enthält einen ganz einfachen Beweis

der Foucault'schen Formel. Auf eine nähere Besprechung desselben wollen wir nicht eingehen, da der Verfasser beabsichtigt, wie er uns schriftlich mitteilt, auf den Gegenstand nochmals zurückzukommen. Vi.

A. Mogni. Sulle oscillazioni del pendolo avuto riguardo alla rotazione della terra. Seconda edizione. Jesi. Pierdicchi. Abzug aus dem Giornale scientifico delle scuole secondarie italiane.

Anstatt die Unbekannten des Problemes durch Betrachtung der einwirkenden Kräfte zu bestimmen, führt der Verfasser für dieselben von ihm willkürlich ersonnene Ausdrücke ein. Es braucht kaum gesagt zu werden, dass die dadurch erhaltenen Resultate falsch sind. Vi.

E. Budde. Ueber die sehr schnelle Rotation eines schweren starren Körpers mit einem festen Punkt, der drei ungleiche Hauptträgheitsmomente besitzt. Berl. Phys. Ges. Verh. IX. 15-16.

Ein solcher Körper besitzt keine merkliche Nutation und eine regelmässige Präcession, wenn er sich zu Anfang mit unendlicher Winkelgeschwindigkeit um eine Momentanaxe dreht, die der Axe des grössten oder des kleinsten Trägheitsmoments unendlich nahe liegt. Lp.

A. de Saint-Germain. Note sur le problème de mécanique proposé au concours d'agrégation en 1890. Nouv. Ann. (3) IX. 546-552.

1) Bei einem homogenen Tetraeder $OABC$, dessen drei Kanten in O auf einander senkrecht stehen und die Länge haben:

$$OA = a = \sqrt{2},\quad OB = b = 1,\quad OC = c = \sqrt{3},$$

die Richtung und Grösse der Axen des Trägheitsellipsoids P für den Schwerpunkt G zu finden.

2) Die Bewegung des Tetraeders unter der Voraussetzung zu bestimmen, dass die Schwere nicht einwirkt, und dass die anfängliche Bewegung auf eine Rotation zurückkommt, deren Axe

durch G geht und deren Componenten längs der grösseren, mittleren und kleineren Axe von P bezw. $p_0 = \sqrt{6+\sqrt{5}}$, $q_0 = 0$, $r_0 = \sqrt{6-\sqrt{5}}$ sind.

Der Verf. teilt in seinem an Hrn. Rouché gerichteten Schreiben die Resultate und die zu ihrer Ermittelung führenden Rechnungen mit. Lp.

C. H. C. Grinwis. Over twee vormen van energie bij rollende beweging. Amst. Versl. en Meded. (3) VII. 47-63.

Der Aufsatz handelt von der kinetischen Energie bei der rollenden Bewegung eines Körpers, wobei der Verf. besonders die Gesetze beachtet, welchen die Energieformen folgen, wenn die rollende Reibung berücksichtigt wird, deren Kenntnis noch sehr beschränkt ist. Es wird genauer angegeben, was bei der Bewegung eines schweren Rotationskörpers auf einer rauhen Horizontalebene geschieht, wenn die Axe immer der Ebene parallel bleibt. Es werden die beiden Teile der Energie, die der gleitenden Bewegung und die der Rotation, gesondert behandelt; doch wird dem sehr geringen Widerstande wider das Rollen, dessen Gesetze durchaus unbekannt sind, keine Rechnung getragen. Aus den auf diese Weise erhaltenen Formeln werden einige Schlussfolgerungen abgeleitet und näher erklärt. G.

P. Molenbroek. Over de zuiver rollende beweging van een lichaam over een willekeurig oppervlak. Nieuw Archief XVII. 130-157.

Diese Abhandlung schliesst sich einer des Herrn Schouten (siehe F. d. M. XX. 1888. 951) über den nämlichen Gegenstand an. Es wird darin gehandelt von der rein rollenden Bewegung eines Ringes oder Reifens auf einer horizontalen flachen Ebene. Hierbei kommen Grössen vor, welche den Ort des Berührungspunktes bestimmen, deren nähere Bezeichnung zum Zwecke der Untersuchung sich als unnötig ergiebt. Es können aber Fälle vorkommen, bei denen die Kenntnis dieser Grössen durchaus erforderlich ist; deswegen behandelt der Autor den Stoff noch einmal.

Er geht aus von den Lagrange'schen Grundgleichungen für die Bewegung eines Systems und wendet weiter die bekannte Kirchhoff'sche Methode an, indem er dabei die Bedingung einführt, dass der rollende Körper den festliegenden fortwährend in einem Punkte zu berühren hat und der Berührungspunkt nicht verschoben werden darf. In dieser Weise werden die Bewegungsgleichungen aufgestellt und in besonderen Fällen gelöst. In erster Reihe wird behandelt die rollende Bewegung eines Ringes oder eines Ellipsoids auf einer horizontalen Ebene, dann die eines geraden kreisförmigen Cylinders oder Kegels und einer Kugel auf einer geneigten Ebene, schliesslich die einer Kugel auf einer festliegenden Kugel. Dabei lassen sich die Bewegungsgleichungen nicht integriren, während bei anderen verwickelteren Fällen die Aufstellung jener Gleichungen mit Hülfe dreier unabhängigen Grössen unüberwindliche Schwierigkeiten bietet. Wenn dabei auch noch dem Einfluss der Reibung Rechnung getragen wird, so ist die Lösung der hier gestellten Aufgaben fast ohne Ausnahme geradezu unmöglich. G.

H. Resal. Étude du mouvement d'un double cône paraissant remonter, quoique descendant, sur un plan incliné. C. R. CXI. 547-553.

Der Verfasser giebt die mathematische Theorie der Bewegung des in älteren physikalischen Kabinetten sehr verbreiteten, sogenannten bergan laufenden Doppelkegels, zuerst für absolut starre Körper, danach unter Berücksichtigung der Elasticität und der rollenden Reibung. Eine Wiedergabe der erzielten Resultate würde den Abdruck complicirter Formeln und die Erläuterung der vielen in ihnen vorkommenden Grössen erfordern, erscheint dem Referenten aber schon deshalb unnötig, weil das ganze Problem ja ein einfaches ist und bei Anwendung des Princips von der Erhaltung der Energie (wie der Verf. auch gelegentlich bemerkt) sich mit elementaren Mitteln erledigen lässt. Lp.

D. Bobylew. Ueber die Bedingungen des Rollens ohne Gleitung. Arbeiten der VIII. Versammlung der russischen Naturforscher und Aerzte. St. Petersburg. 1890. Math. u. Astron. 70-73. (Russisch.)

Die Bedingungen des Rollens ohne Gleitung bieten ein Beispiel für eine Art von Zwang dar, der durch Gleichungen, welche die Coordinatenparameter mit ihren ersten Differentialquotienten nach der Zeit verbinden, ausgedrückt wird. D. Bobylew leitet die Reactionen eines Zwanges dieser Art ab. Bb.

Th. Sloudsky. L'influence du frottement dans les mouvements rotatoires des corps célestes. Bulletin de la Société Impér. des Naturalistes de Moscou. No. 3. 1890. 1-11. (Französisch.)

Der Verfasser beweist, 1) dass bei constanter Grösse und Richtung des Hauptmoments der Bewegungsgrössen eines starren Körpers um seinen Schwerpunkt die lebendige Kraft ihren geringsten Wert erhält in einer Rotation um die Hauptaxe des grössten Trägheitsmoments; 2) dass unter Einfluss von Kräften, welche ein Potential besitzen, eine Flüssigkeit, wenn sie sich wie ein starrer Körper bewegt, um eine feste Axe rotiren muss.

Indem der Verfasser voraussetzt, dass die Bewegung der verschiedenen Zonen der Sonnenoberfläche einer der empirischen Formeln von Carrington, Faye, Spörer, Zöllner folgt, berechnet er den Wert des Verhältnisses $T-T_m:T$, wo T_m die lebendige Kraft beim Rotiren der Sonne als eines starren Körpers bedeutet und T die lebendige Kraft bei der Annahme, dass die Bewegungen der verschiedenen Zonen nach einer der oben angeführten Formeln stattfindet; er findet für dieses Verhältnis die Werte 0,002 nach den Formeln von Carrington und Faye, 0,003 nach der Spörer'schen und 0,005 aus der Formel von Zöllner. Bb.

E. Vallier. Sur les méthodes actuelles de balistique. Rev. d'Art. XXXVI. 42-62, 153-173.

Der auf dem Gebiete der Ballistik ein berechtigtes Ansehen geniessende Verfasser giebt zuerst eine historische Uebersicht

über die Entwickelung der bezüglichen Lehren in der neueren Zeit.

In Folge von Versuchen aus den Jahren 1868/69 hatte der General Mayevski das Luftwiderstandsgesetz durch verschiedene eingliedrige Ausdrücke von der Form $c.v^n$ dargestellt und die zugehörigen Bahncurven nach einem vom General Didion angegebenen Kunstgriffe berechnet. Falls man ein einziges Gesetz benutzen wollte, bezeichnete er die Form $c.v^4$ als diejenige, welche die grösste Annäherung gäbe.

Um dieselbe Zeit leitete Bashforth in England aus seinen Versuchen das Widerstandsgesetz $c.v^3$ ab, in welchem der Coefficient c mit der Geschwindigkeit sich ändert, und berechnete Tafeln für die auf einander folgenden Curvenelemente, indem er innerhalb jedes Bogens c constant annahm. Hierauf beruhen die auch in Frankreich gebräuchlichen ballistischen Formeln für den directen Schuss.

Im Jahre 1880 kam Hr. Siacci in Italien auf den Gedanken, die Gegenbeschleunigung $F(v)$ der Luft einzuführen und alle Elemente der Bahncurve als Functionen der jeweiligen Geschwindigkeit und der Anfangsgeschwindigkeit auszudrücken. Durch diese Methode wurden die Elemente mit Hülfe einer numerischen, ein für alle Mal berechneten Tafel erhalten, und diese Methode wurde für den directen Schuss unterhalb eines Abgangswinkels von 15° allgemein angenommen. Vier Functionen $D(u)$, $A(u)$, $J(u)$, $T(u)$, welche von $F(u)$ abhängen, sind von Hrn. Siacci berechnet worden, und mittels dieser „Siacci'schen Functionen", die in der Ballistik dieses Gelehrten stehen und in der Revue d'Artillerie XVII. 45 (1880) abgedruckt sind, erhält man alle bezüglichen Grössen in folgender Form:

Es sei $u = \alpha v \cos\theta$, $u_0 = \alpha v_0 \cos\varphi$, so wird

$$x = \frac{c}{\alpha}\{D(u)-D(u_0)\},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{c\alpha}{2}\left(\frac{A(u)-A(u_0)}{D(u)-D(u_0)} - J(u_0)\right),$$

$$p = p_0 - \tfrac{1}{2}c\alpha\{J(u)-J(u_0)\},$$

$$t = c\{T(u)-T(u_0)\}.$$

In dieser Form ist die Siacci'sche Theorie in die Werke über Ballistik aufgenommen worden, so z. B. von Mayevski in „Solution des problèmes du tir de plein fouet et du tir courbe“, von Ingalls in sein „Handbook of problems in exterior ballistics“, indem beide Autoren die Methode sachgemäss ausgebildet haben. Die bedeutsamste Erweiterung hat diese Theorie durch Hrn. Sabudski erfahren, über dessen hierher gehörige Schrift in F. d. M. XX. 1888. 955 ausführlich berichtet ist. Hr. Siacci hat seinerseits in der Rivista d'Artiglieria e Genio 1889 eine Tafel der Werte seines Parameters β gegeben, vermöge deren man seine Formeln auch für den Bogenschuss verwerten kann. Beide Autoren haben jedoch noch nicht die Frage vollständig zum Abschluss gebracht, wenn die Anfangsgeschwindigkeit sehr beträchtlich ist.

Hier setzt nun der Verfasser mit seinen eigenen neuen Forschungen ein, indem er an seine früheren Untersuchungen anknüpft, über deren letzte in F. d. M. XIX. 1887. 953 berichtet ist. Die Formel zwischen den Coordinaten X, Y eines Punktes der Bahncurve, von welcher er ausgeht, ist:

$$Y = p_0 X - \frac{gX^2}{2v_0^2 \cos^2\varphi} - g\int_0^X (X-x)^2 \frac{f(v)}{v^4 \cos^2\theta}\,dx.$$

Die angenäherte Berechnung des Integrals dieser Formel bildet naturgemäss das Hauptthema der weiteren Abhandlung, auf deren Einzelheiten wir nicht eingehen wollen.

Wir setzen nur noch die Schlussfolgerung für Anfangsgeschwindigkeiten über 600 m her.

„In diesem Falle geben für den directen Schuss die Siacci'schen Tafeln oder auch die ballistischen, aus dem quadratischen Gesetze abgeleiteten Logarithmen die Lösung der Aufgabe, falls die Ankunftsgeschwindigkeit nicht unter 400 Meter sinkt. Bei grösseren Abgangswinkeln hat man besonders mit kleinen Kalibern zu befürchten, dass die Sabudski'schen Tafeln zu ungenau werden. Bis ihr Verfasser Abhülfe geschaffen hat, muss man in gewissen Fällen diese Tafeln vervollständigen, indem man einen ersten und einen letzten Bogen der Bahnlinie getrennt berechnet, die durch einen grossen Sabudski'schen Bogen verbunden

sind. Zum Zwecke einer besonderen Forschung ermöglicht die Methode der Geschwindigkeiten, deren Princip wir angedeutet haben, und das wir in einem besonderen Capitel entwickeln, alle Lösungen des Problems (Geschwindigkeit, Aufschlagswinkel, Schussweite u. s. w.)". Lp.

F. Siacci. Sur la solution exacte du problème balistique. Rev. d'Art. XXXV. 493-497.

Versteht man unter β eine unbekannte Function, so kann man in dem Falle eines Luftwiderstandes cv^3 die Formel zwischen dem Schusswinkel φ, der Anfangsgeschwindigkeit V und der Schussweite X in der Gestalt aufstellen:

$$(1) \qquad \frac{V^2 \sin.2\varphi}{gX} = 1 + \tfrac{2}{3}(\beta c V X) + \tfrac{1}{6}(\beta c V X)^2.$$

Der Verf. wirft die Frage auf, welchen Wert man für β zu setzen habe, damit die Formel (1) genau die Abhängigkeit zwischen V, φ und X darstelle. „Man hat noch nicht versucht, β als Function von V und X mittels einer nach den fallenden Potenzen des ballistischen Coefficienten geordneten Reihe auszudrücken." Für das Widerstandsgesetz $c.v^3$ hat der Verf. die drei ersten Glieder der Reihe berechnet. Setzt man $\mathrm{tg}\,\varphi = p_0$, $gX\left(\frac{c}{g}\right)^{\frac{2}{3}} = X'$, so lautet dieselbe:

$$\frac{\beta}{\cos\varphi} = 1 + \tfrac{2}{5}p_0^2 + \tfrac{1}{5}\left(1 + \frac{53}{210}p_0^2\right)\left(\frac{p_0 X'}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$+ \frac{11}{105}p_0\left(1 + \frac{829}{990}p_0^2 + \frac{3977}{27225}p_0^4\right)\left(\frac{X'}{2}\right)^3.$$

Die zugehörigen Zahlenrechnungen sind von Hrn. Parodi ausgeführt und in der Rivista d'Artiglieria e Genio veröffentlicht worden, wo auch Hr. Siacci ausführlichere bezügliche Aufsätze abgedruckt hat. Lp.

J. C. Adams. On certain approximate formulae for calculating the trajectories of shot. Nature XLI. 258-262.

In der Nachschrift zu einem Artikel des Hrn. W. D. Niven „On the calculation of the trajectories of shot" (Lond. R. S.

Proc. XXVI. 268-287) hat der Verf. ohne Beweis einige Formeln angegeben, die sich auf einen begrenzten Bogen der Bahnlinie beziehen, wenn der Widerstand der n^{ten} Potenz der Geschwindigkeit proportional ist. In diesen Formeln ist der Winkel zwischen der Sehne des Bogens und der Tangente in irgend einem seiner Punkte stets als eine kleine Grösse behandelt. Da der Beweis dieser Formeln nicht auf der Hand liegt, so teilt Herr Adams die bezüglichen Rechnungen mit und macht am Schlusse des Artikels einige Bemerkungen über das Gesetz des Luftwiderstandes, für welches je nach der Grösse der Geschwindigkeiten der Ausdruck proportional der zweiten, dritten oder sechsten Potenz der Geschwindigkeit gefunden ist. Lp.

J. M. Ingalls. Handbook of problems in exterior ballistics. Part I. Direct fire. Fort Monroe. [Rev. d'Art. XXXVI. 482.]

L. Roulin. La balistique intérieure en Angleterre. Rev. d'Art. XXXV. 216-226.

Besprechung des Buches von Hrn. J. A. Longridge: „Internal Ballistics“ (London, 1889), in welchem der englische Gelehrte u. a. den Zweck verfolgt, seine Landsleute mit den wichtigen bezüglichen Arbeiten des französischen Forschers Sarrau bekannt zu machen. Lp.

Fr. Bashforth. A revised account of the experiments made with the Bashforth chronograph, to find the resistance of the air to the motion of projectiles, with the application of the results to the calculation of trajectories, according to J. Bernoulli's method. Cambridge. University Press. [Nature XLII. 409-412.]

N. Sabudsky. Zusatz zur Lösung der Probleme des indirecten Schiessens. St. Petersburg. 1890. 1-27.

Um die Lösung nach der vom Verfasser vorgeschlagenen Methode bei den grossen Anfangsgeschwindigkeiten, welche jetzt

durch Kanonen erreicht werden, zu ermöglichen, wird in diesem Zusatze eine Fortsetzung der ballistischen Tafeln gegeben, welche sich in der Abhandlung des Verfassers: „Ueber die Lösung der Probleme des indirecten Schiessens und über den Winkel für die grösste Schussweite“ (F. d. M. XX. 1888. 955) befinden; es sind auch einige die Lösung dieser Probleme betreffende Bemerkungen angeführt. Bb.

N. Sabudsky. Notiz zur Lösung der Probleme des indirecten Schiessens. St. Petersburg. 1890. 1-6. (Russisch.)

Einige Aufklärungen, veranlasst durch eine, die 1888 gedruckte Abhandlung des Verfassers betreffende Bemerkung von Hrn. Siacci. Bb.

E. Lombard. Quelques questions de tir indirect de siège. Rev. d'Art. XXXVI. 325-356, 411-427.

Während es sich in dem grösseren Teil der Arbeit um praktische Lösungen der Fragen handelt, wie man beim indirecten Schusse das unsichtbare Ziel nach den Angaben eines oder zweier seitlich aufgestellten Beobachter über die abgegebenen Schüsse schnell treffen kann, giebt eine am Schlusse befindliche Note die Herleitung der Formeln, welche dazu gedient haben, die Wahrscheinlichkeiten zu berechnen, Schüsse in der Beobachtungszone zu erhalten (Schiessen mit zwei seitlichen Beobachtern) und ebenso Schüsse in der Wirksamkeitszone. Lp.

A. Weigner. Ueber den Einfluss grosser Positionswinkel auf die Treffpunktslage beim Schiessen unter Anwendung von für Ziele im Mündungshorizont berechneten Aufsätzen. Mitt. üb. Art. u. Genie. XXI. 1-16.

Beim Beschiessen eines bedeutend erhöhten oder vertieften Zieles muss ein kleinerer Aufsatz angewandt werden, als jener ist, welcher für ein in derselben Entfernung, jedoch im Mündungshorizont befindliches Ziel zutrifft. Mit anderen Worten:

wenn beim Beschiessen eines im Mündungshorizonte befindlichen Zieles Ziel- und Treffpunkt zusammenfallen, wird unter sonst gleichen Voraussetzungen beim Beschiessen eines in derselben Entfernung befindlichen, beträchtlich erhöhten oder vertieften Zieles der Treffpunkt über den Zielpunkt fallen. Dies wird bewiesen. Lp.

A. D'AMBLY. Pointage en direction dans le tir de siège et de place avec la règle mod. 1883. Rev. d'Art. XXXV. 342-355, 417-435.

Aufstellung und mathematische Begründung der hauptsächlichsten Vorschriften für das Richten der Geschütze unter Bezug auf das angezogene Instrument. Lp.

A. BERTRANG. Des variations dans le tir des canons rayés et de la détermination scientifique des règles pratiques du tir de ces canons. Bruxelles. Muquardt. (1889.)

P. TOUCHE. Sur le calcul de la résistance de l'air. Rev. d'Art. XXXVI. 131-144.

Der Verf. berechnet nach einer Methode, die von manchen Willkürlichkeiten nicht frei ist, Mittelwerte für den Widerstand längs der Axe des sich bewegenden Geschosses und vergleicht die erhaltenen Formeln mit den Versuchsergebnissen für ein gegebenes Geschoss, wobei sich eine leidliche Uebereinstimmung herausstellt. Lp.

---

v. SCHEVE. Erörterung über die Anwendung eines parabolischen oder eines anderen veränderlichen Dralls. Arch. f. Art. u. Ing. XCVII. 1-11.

Ableitung des „neuen Drallgesetzes“: Die Tangente des Drallwinkels muss proportional dem Quotienten Zeit durch Geschwindigkeit des Geschosses im Rohrinnern sein, dann ist die Drehbeschleunigung eines Punktes der Geschossoberfläche an allen bezüglichen Teilen der Rohrscala gleich gross. Lp.

N. Stojanoff. Ueber die Bahn eines scheibenförmigen Geschosses. Journal f. d. russ. Art. 1890. No. 7. 637-648. 1 Figurentaf. (Russisch.)

In dieser Abhandlung wird die Bahn eines scheibenförmig gestalteten Geschosses bestimmt. Der Verfasser setzt voraus, dass die Scheibe nicht rotirt, dass ihre Axe eine unveränderliche, zur Anfangsgeschwindigkeit senkrechte Richtung beibehält; richtet die y-Axe längs der Anfangsgeschwindigkeit, die auf ihr senkrechte x-Axe gerade abwärts und erhält folgende Gleichungen für die Bewegung des Mittelpunktes der Scheibe:

$$x = \frac{1}{A}\log\frac{e^{kt}+e^{-kt}}{2}, \quad y = Vt - \frac{g\sin\alpha}{2}t^2,$$

wo $k=\sqrt{Ag\cos\alpha}$ ist, g die Beschleunigung der Schwerkraft, V die Anfangsgeschwindigkeit, α den Winkel zwischen der Anfangsgeschwindigkeit und der Horizontalebene (nach oben gerechnet) bedeuten; ferner ist

$$A = K\frac{\sigma}{p}\pi R^2$$

gesetzt, und σ stellt das Gewicht der Volumeneinheit Luft, p das Gewicht des Geschosses, R den Halbmesser der Scheibe, K die Constante des Luftwiderstandes dar.

Die Formeln stimmen vollkommen mit den von Hrn. Joukowsky gefundenen (F. d. M. XXI. 1889. 932) überein.

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich, dass die Geschwindigkeit längs der y-Axe in dem Augenblicke $V:g\sin\alpha$, dem die Ordinate $V^2:2g\sin\alpha$ entspricht, gleich Null wird, und dass von einem Punkte an, in welchem die Richtung der Bewegung vertical wird, die Bahn-Tangente einer der Anfangsgeschwindigkeit entgegengesetzten Richtung sich nähert.

Wird aber der Widerstand der Luft auf die Seitenfläche der Scheibe berücksichtigt, so ist man genötigt, die aufsteigende Bewegung bei dem Punkte, wo die Geschwindigkeit der x-Axe parallel wird, und die absteigende Bewegung von diesem Punkte an besonders zu behandeln.

Bezeichnet man $\frac{4}{3}K\frac{\sigma}{p}hR$ durch B, wo h die Höhe der

Scheibe ist, so ergiebt sich, dass der Augenblick und die Ordinate, welche dem Teilungspunkte beider Bewegungen entsprechen, resp.

$$\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{V}{b}\right)}{Bb} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2B}\log\left(1+\frac{V^2}{b^2}\right)$$

sind, wo $b^2 = \frac{g\sin\alpha}{B}$ ist, und dass die Tangente des Winkels, welchen die Geschwindigkeit mit der y-Axe bildet, sich dem Grenzwerte

$$-\sqrt{\frac{A}{B}}\operatorname{tg}\alpha$$

nähert. Bb.

N. SABUDSKY. Ueber die Derivation eines flachen Geschosses. Journal f. d. russ. Art. 1890. 1-6.

Eine Ergänzung der Stojanoff'schen Abhandlung, indem hier die Rotation der Scheibe um ihre Symmetrieaxe berücksichtigt und die Derivation des Geschosses berechnet wird. Bb.

P. G. TAIT. Some points in the physics of golf. Nature XLII. 420-422.

Ein Versuch, die Bahncurve des Golfballs aus den ballistischen Formeln zu berechnen. Lp.

F. AUGUST. Ueber die Bewegung freier Ketten in rotirenden Linien. Schlömilch Z. XXXV. 97-120.

Als Fortsetzung der Abhandlung „Ueber die Bewegung von Ketten in Curven" (Schlömilch Z. XXXIII, F. d. M. XX. 1888. 952) bringt der Verf. jetzt die Lösung eines ähnlichen Problems: Die Bewegung von Ketten in gleichförmig rotirenden Curven, also eine Bewegung, bei welcher die Kette ihrer Form nach stets Bogen einer Curve von unveränderter Gestalt ist, welche mit constanter Winkelgeschwindigkeit um eine feste Axe

rotirt, während sich gleichzeitig die ganze Kette in dieser rotirendenden Curve (der „rotirenden Kettenbahn") verschiebt. Ausser den etwa nötigen Spannungen in den Endpunkten werden keine äusseren Kräfte vorausgesetzt. Die beschriebene Bewegung kann sich nur in einer der folgenden, vom Verfasser in der Einleitung zusammengestellten Weisen vollziehen:

1. Ein ganz singulärer Fall ist die Bewegung der Kette längs der Rotationsaxe mit beliebig veränderlicher Geschwindigkeit. Dieser Fall ist selbstverständlich, die Rotation illusorisch.

In allen anderen Fällen muss die relative Geschwindigkeit der Kette in Bezug auf die rotirende Bahn constant sein. Auch giebt es hier zwei singuläre Fälle und den allgemeinen Fall, nämlich:

2. Die rotirende Bahn ist eine Gerade, senkrecht und im allgemeinen windschief gegen die Rotationsaxe.

3. Die rotirende Bahn ist eine Schraubenlinie, die auch in einen Kreis übergehen kann.

4. Im allgemeinen ist die rotirende Bahn eine räumliche oder ebene Curve, welche sich analytisch durch elliptische Functionen ausdrücken lässt.

Als Grenzfälle ergeben sich aus dem allgemeinen Falle 4. ausser den singulären Fällen 2. und 3. auch noch einige andere singuläre Fälle. In dem Schlussparagraphen sind drei Beispiele des allgemeinen Falles genauer betrachtet, und zuletzt ist eine Verallgemeinerung des Resultates besprochen. Lp.

B. Stankewitsch. Zur Theorie des Stosses starrer Körper. Arbeiten der VIII. Versammlung der russischen Naturforscher und Aerzte. 1890. St. Petersb. Physik. 32-34. (Russisch.)

Herr Stankewitsch zeigte in einer früheren Arbeit: „Die kinetische Theorie der Gase in mathematischer Behandlung", Moskau 1885, indem er die Frage vom Stosse der Molekeln als elastischer Kugeln behandelte, dass eine gewisse Functionaldeterminante gleich -1 ist. In der vorliegenden Mitteilung betrachtet er den Stoss von Körpern beliebiger Gestalt, sowohl elastischer,

als unelastischer, und beweist, dass diese Functionaldeterminante stets dem negativ genommenen Restitutionscoefficienten gleich ist.

Bb.

P. G. Tait. On impact. Edinb. Trans. XXXVI. 225-252.

Enthält die Beschreibung der Gestalt eines Apparates, der zu dem Zwecke ersonnen ist, eine graphische Darstellung der Verhältnisse eines Stosses zu liefern, und einen Bericht über die damit angestellten Versuche. Cly. (Lp.)

R. Heger. Die Zusammensetzung der Kräfte in einer starren Ebene. Poske Z. III. 277-280.

Skizze eines Lehrganges, um dem Anfänger den Begriff des Momentes physikalisch zu vermitteln.

A. Kurz. Vom Stosse. Eine didaktische Mitteilung. Exner Rep. XXVI. 146-147.

R. E. Froude. On the soaring of birds, in continuation of an extract from a letter to Sir W. Thomson. Edinb. Proc. XVIII. 65-72.

B. Hydrodynamik.

A. B. Basset. An elementary treatise on hydrodynamics and sound. Cambridge. Deighton, Bell and Co. X + 188 S.

Was den hydrodynamischen Teil dieses Buchs anbetrifft, so besteht derselbe vornehmlich aus jenen Teilen aus des Verfassers Lehrbuch der Hydrodynamik (F. d. M. XX. 1888. 970), welche die höheren Methoden der Analysis, wie Kugelfunctionen, elliptische Functionen und dergleichen, nicht in sich begreifen, und bildet eine vortreffliche Einleitung in die mathematische Theorie eines etwas schwierigen Gegenstandes. Der zweite Teil ist natürlich stark beeinflusst von Rayleigh's klassischem Lehrbuche des Schalls, zeigt jedoch durchweg die ausgeprägte Eigenart des Verfassers selbst. Wir können das Buch warm empfehlen.

Gbs. (Lp.)

N. E. Joukowsky. Eine Abänderung der Kirchhoff'schen Methode zur Bestimmung der Strömung einer Flüssigkeit in einem Raume von zwei Dimensionen bei gegebener constanter Geschwindigkeit längs einer unbekannten Stromlinie. Mosk. Math. Samml. XV. 121-276. (Russisch.)

Die vom Verfasser vorgeschlagene Abänderung der Kirchhoff'schen Methode (Vorl. über Math. Phys. 1876. Vorl. 21) gestattet, Aufgaben über die Bewegung einer teilweise von den Wänden der Gefässe begrenzten Flüssigkeit in einem Raume von zwei Dimensionen zu lösen, ohne zur conformen Abbildung der dem vorliegendem Falle entsprechenden Grenzgebiete Zuflucht zu nehmen, bei beliebiger Zahl der Strahlen und kritischen Punkte, in denen die Geschwindigkeit der Flüssigkeit Null ist.

Es seien x und y die Coordinaten eines Punktes der Flüssigkeit, v die Geschwindigkeit in diesem Punkte, θ der Winkel zwischen der x-Axe und der Richtung der Geschwindigkeit, φ das Geschwindigkeitspotential, ψ die Menge der Flüssigkeit, welche zwischen der Anfangsstromlinie und der betrachteten durchfliesst.

Nach Kirchhoff ist:

$$x+iy=z;\quad \varphi+i\psi=\omega=F(z);\quad \frac{1}{v}(\cos\theta+i\sin\theta)=\zeta=\frac{1}{F'(z)}.$$

Statt der Variable ζ setzt der Verfasser die imaginäre:

$$\vartheta+i\theta=\log w\zeta=\lg\frac{w}{v}+i\theta,$$

wo w die constante Geschwindigkeit in der freien Grenze ist; diese Variable muss eine gewisse Function von w sein. Betrachten wir die Variable $u=\xi+i\eta$ in dem Gebiete $\eta\geqq 0$ und setzen $\varphi+i\psi=\lambda(u)$, $\vartheta+i\theta=\mu(u)$. Die Functionen $\lambda(u)$ und $\mu(u)$ sind in dem betrachteten Gebiete endlich, einwertig, können unendlich werden und Sprünge haben nur beim Umbiegen auf unendlich kleinen Halbkreisen gewisser in der ξ-Axe liegender Punkte; in unendlich entfernten Punkten des Gebietes können die Functionen λ und μ unendlich werden. Es werden folgende Systeme orthogonaler isothermischer Linien betrachtet: $\varphi=$ const.,

$\psi = \text{const.}$, welche das Netz λ, und $\vartheta = \text{const.}$, $\theta = \text{const.}$, welche das Netz μ darstellen (das „Bildungs"- und „Richtungsnetz" des Verfassers).

Diese Netze sind folgender Bedingung unterworfen: Die ξ-Axe muss ganz aus Zweigen der Linien $\psi = \text{const.}$ und zugleich ganz aus Zweigen der Linien $\vartheta = \text{const.}$ und $\theta = \text{const.}$ bestehen.

Wir genügen der Folge dieser Bedingungen, indem wir setzen:

$$(1)\qquad \lambda = F(u) + \alpha_1 \lg\left(\frac{u-\gamma_1}{\beta_1}\right) + \alpha_2 \lg\left(\frac{u-\gamma_2}{\beta_2}\right) + \alpha_3 \lg\left(\frac{u-\gamma_3}{\beta_3}\right) + \cdots,$$

wo $F(u)$ eine ganze rationale Function mit reellen Coefficienten und α, β, γ mit den Indices 1, 2, 3, ... gewisse reelle Grössen bedeuten;

$$(2)\qquad \mu = m\int \frac{f(u)\,du}{\sqrt{(u-c_1)(u-c_2)(u-c_3)\cdots}}, \quad \ldots$$

wo $f(u)$ eine ganze rationale Function mit reellen Coefficienten ist, welche nur in Punkten auf der ξ-Axe oder in der Unendlichkeit unendlich werden kann. Im letzteren Falle ist die Ordnung ihrer Unendlichkeit wenigstens um 1 niedriger als die Ordnung der Wurzel. Die c_1, c_2, c_3, ... bedeuten wieder reelle Grössen, m ist gleich 1 oder i, die Integration ist über irgend eine in dem Gebiete liegende Linie von einem constanten, z. B. auf der ξ-Axe liegenden, Punkte bis zum betrachteten u auszudehnen.

Die Zahl der Punkte $(\gamma, 0)$, welche der Verfasser „Pole" des Netzes λ nennt, ist gleich der Anzahl der Strahlen; der absolute Wert von $\pi\alpha$ giebt die Flüssigkeitsmenge, welche der entsprechende Strahl mit sich bringt.

Die Punkte $(c, 0)$, die Brennpunkte des Netzes μ, teilen die ξ-Axe in Teile, welche bald den Wänden, bald der freien Grenze entsprechen.

Es sei:

$$(3)\qquad f(u) = F_1(u) + \frac{A_1}{u-e_1} + \frac{A_2}{u-e_2} + \frac{A_3}{u-e_3} + \cdots,$$

wo $F_1(u)$ eine ganze rationale Function bedeutet, A und e reelle Grössen sind. Die Pole $(e,0)$ des Netzes μ wählen wir so, dass sie in denjenigen Stellen der ξ-Axe liegen, für welche $\theta = \text{const.}$ Dann entsprechen diese Pole den Eckpunkten der Wände.

Hat man die λ- und μ-Netze construirt, so findet man leicht die Werte von θ und ϑ für jeden Punkt der Curve $\psi = \text{const.}$, indem man das eine Netz auf das andere legt und längs der Curve $\psi = \text{const.}$ fortschreitet.

Diese Methode wendet der Verfasser auf eine grosse Zahl von Problemen an, vor allem auf die schon nach der Kirchhoff'schen Methode gelösten.

1. Ausfluss einer Flüssigkeit aus einem von zwei ebenen unendlichen symmetrischen Wänden begrenzten Gefässe:

$$(4) \qquad \lambda(u) = \alpha \lg \frac{u}{c},$$

$$(5) \qquad \mu(u) = -qi \int_{\infty}^{u} \frac{c}{u} \cdot \frac{du}{\sqrt{u^2 - c^2}},$$

wo q einen Zahlenfactor bedeutet.

2. Stoss eines unbegrenzten Stromes gegen einen symmetrischen Keil, dessen Axe parallel der Richtung des Stromes ist:

$$(6) \qquad \lambda = \varkappa u^2, \quad \mu \text{ nach } (5).$$

Für den Druck ergeben sich die von Hrn. Bobyleff abgeleiteten Formeln.

3. Ausfluss aus einem von zwei ebenen, unendlichen, nicht symmetrischen Wänden begrenzten Gefässe: λ nach (4),

$$(7) \qquad \mu = -qi \int_{\frac{c^2}{e}}^{u} \frac{\sqrt{e^2 - c^2}}{u - e} \cdot \frac{du}{\sqrt{u^2 - c^2}},$$

wo $e < c$ ist.

Der Verfasser bildet die Gleichungen des Umfanges des Stromes und bestimmt die Menge der ausfliessenden Flüssigkeit.

4. Stoss eines unbegrenzten Stromes gegen einen unsymmetrisch in Bezug auf denselben liegenden ungleichbackigen Keil: λ nach (6), μ nach (7).

Es ergeben sich die Formeln des Hrn. Mestschersky (F. d. M. XIX. 1887. 1019).

5. Stoss eines Strahles gegen einen symmetrisch in Bezug auf ihn liegenden gleichbackigen Keil:

$$(8) \qquad \lambda = -\alpha \lg \frac{u^2-\gamma^2}{\beta^2} + \alpha\pi i,$$

μ nach (5).

Bei $\gamma > c$ ergeben sich die Formeln von Kotelnikow in Bezug auf den gleichbackigen Keil (F. d. M. XXI. 1889. 955). Man erhält den von Kotelnikow behandelten Fall, wenn man λ und μ aus (8) und (7) bestimmt.

6. Vom Stosse zweier Flüssigkeitsstrahlen gegen einander. Das von Voigt für den Fall, dass die Strahlen in der Unendlichkeit senkrecht auf einander stehen, gelöste Problem (F. d. M. XVIII. 1886. 903) wird hier bei einem beliebigen Winkel zwischen den Richtungen der Strahlen gelöst. Das Netz λ ergiebt sich, wenn man in (1) setzt $F(u) = 0$, $\alpha_1 = -\alpha$, $\alpha_2 = -\alpha'$, wo $\alpha' > \alpha$, $\alpha_3 = \alpha_4 = \cdots = 0$ ist; $\beta_1 = -\beta$, $\beta_2 = \beta'$, wo $\beta = \frac{2\alpha}{\alpha+\alpha'}\gamma$, $\beta' = \frac{2\alpha'}{\alpha+\alpha'}\gamma$; $\gamma_1 = \gamma$, $\gamma_2 = -\gamma$. Das Netz μ nach (7), wenn $c = \gamma$, $e = \gamma \cdot \frac{\alpha'-\alpha}{\alpha'+\alpha}$.

Es werden die Gleichungen der Umfänge der Strahlen gebildet und die Flüssigkeitsmenge in dem einen und in dem anderen Strahle bestimmt.

Danach geht der Verfasser zur Lösung von Fragen über, die vor ihm noch nicht gelöst worden sind.

7. Vor allem wird der Fall behandelt, dass der Strahl, indem er eine Platte trifft, sich in zwei Teile teilt, von denen der eine eine endliche, der andere eine unendliche Flüssigkeitsmenge mit sich bringt:

$$\lambda = \frac{\alpha}{\gamma}\left(-u + \gamma\pi i - \gamma \lg \frac{u-\gamma}{\gamma}\right),$$

μ nach (5) bei $c < \gamma$ und $q = 1$.

Es wird der Druck gegen die Wand bestimmt.

8. Ausfluss einer Flüssigkeit aus einem Gefässe, welches von oben bedeckt und dessen Breite unendlich, dessen Höhe endlich ist:

λ nach (8), μ nach (5), indem $\gamma < c$ ist.

Es wird die Menge der ausfliessenden Flüssigkeit bestimmt.

9. Druck eines unbegrenzten Stromes einer Flüssigkeit gegen eine gebrochene Platte in dem Falle, dass die Flüssigkeit an dieselbe längs ihrer Seite tritt: λ nach (6), μ nach (7).

Weiter folgt die Lösung von Aufgaben, in denen die Bewegung einer Flüssigkeit mit vielen kritischen Punkten gesucht wird.

10. Ausfluss einer Flüssigkeit aus einem Gefässe von endlicher Breite und unendlicher Länge: λ nach (4), μ findet man nach (2), wenn man setzt:

$$(9) \qquad c_1 = c_2 = c, \quad m = i, \quad f(u) = -q\sqrt{c^2-e^2}\left(\frac{1}{u-e} + \frac{1}{u+e}\right),$$

wo $e < c$ ist. Das Netz μ hat zwei Brennpunkte und zwei Pole.

Aus dem Ausdrucke für die Menge der ausfliessenden Flüssigkeit folgt, wenn man denselben auf den speciellen Fall $q = \frac{1}{2}$ anwendet, dass durch den Zusatz von Seitenwänden die Menge der ausfliessenden Flüssigkeit vergrössert wird im Vergleich zu einem Gefässe von unendlich grosser Breite.

11. Stoss eines von zwei parallelen Wänden begrenzten Stromes gegen einen symmetrisch in Bezug auf denselben liegenden gleichbackigen Keil.

Die Ausdrücke für den Druck auf den Keil erhält man leicht mittels der Formeln der vorigen Aufgabe (10).

Im Falle einer ebenen Wand ($q = \frac{1}{2}$) erweist sich, dass der Zusatz der Wände des Kanals den Druck des Stromes auf die Wand vergrössert.

12. Stoss eines unbegrenzten Stromes einer Flüssigkeit gegen ein rechteckiges Gefäss, das mit der Oeffnung dem Strome entgegen gestellt ist:

λ nach (4). Das Netz μ ergiebt sich durch Addition von (9) und (5), d. h. durch eine Construction, bei der die isothermischen Parameter des neuen Netzes gleich sind der Summe der isothermischen Parameter der addirten Netze.

Die Grösse des Bodens und der Wände, so wie der Druck

gegen den Boden lassen sich durch elliptische Integrale darstellen.

13. Ausfluss einer Flüssigkeit aus einem unendlichen Gefässe durch einen Ansatz, der aus zwei parallelen Wänden besteht:

λ nach (4), μ findet man aus (2), wenn man

$$c_1 = -c_2 = c, \quad c_3 = -c_4 = c', \quad m = 1, \quad f(u) = -\frac{2qcc'}{u}$$

setzt. Der Verfasser zeigt, wie dieses μ-Netz mit 4 Brennpunkten aus einem Netze von confocalen Ellipsen und Hyperbeln erhalten werden kann.

Bei $q = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{\pi}{4}$, wo β die Constante der Integration in (2) ist, ergeben diese Netze die Lösung der Aufgabe. Es erweist sich, dass der Ansatz die Menge der ausfliessenden Flüssigkeit vergrössert.

14. Stoss eines Stromes gegen eine Platte, welche den Eingang in einen Kanal mit parallelen Wänden zudeckt:

λ nach (6), das Netz μ ist dasjenige der vorigen Aufgabe bei $q = \frac{1}{2}$ und $\beta = -\frac{\pi}{2}$. Es werden Ausdrücke für die Dimensionen der Platte, für die Entfernung derselben von der Oeffnung des Kanals, sowie für den Druck des Stromes gegen die Platte gefunden.

15. Stoss eines aus einem Kanale mit parallelen Wänden tretenden Stromes gegen eine Platte:

λ nach (8), das Netz μ ist dasjenige der dreizehnten Aufgabe bei $q = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{\pi}{4}$. Es werden die Gleichungen des Umfangs des Strahles gebildet, die Menge der ausfliessenden Flüssigkeit und der Druck gegen die Platte bestimmt.

16. Concentration eines Strahles durch einen Trichter, der sich auf dem Wege desselben befindet:

λ nach (4), μ ergiebt sich aus (2), wenn man $c_1 = c_2 = -c$, $c_3 = -c_4 = c'$, $f(u) = c'q$, $m = i$, $c' > c$ macht.

Kennt man den Winkel, welchen die Wände des Trichters bilden, und dessen Oeffnung, so können die Breite des Strahles dort, wo er den Trichter trifft, die Menge der ausfliessenden Flüssigkeit und die Concentration des Strahles bestimmt werden.

17. Stoss eines unbegrenzten Stromes gegen eine lange Reihe fester, paralleler Platten:

$$\lambda = -\alpha \lg \sin \frac{\pi u}{a+b},$$

$$\mu = A \int \frac{du}{\cos\left(\frac{\pi u}{a+b}\right) \sqrt{\frac{1}{2}\left\{\cos \frac{\pi a}{a+b} - \cos \frac{\pi \{2u-(b-2x)\}}{a+b}\right\}}},$$

wo $A = \text{const.}$ und $x < \frac{b}{2}$ ist.

Es werden Ausdrücke gebildet für die Länge der Platten, für deren Entfernungen von einander und für den Druck des Stromes gegen diese Platten. Die erhaltenen Resultate werden auf Turbinen angewandt. Ms.

J. Jiewnewitsch. Versuch, die Principien der Kinematik einer tropfbaren, sich gesetzmässig bewegenden Flüssigkeit zu begründen. Nachrichten des prakt. Technologischen Inst. zu St. Petersburg. 1890. 32-102.

C. Chree. On the equations of vortex motion, with special reference to the use of polar coordinates. Edinb. Math. S. Proc. VIII. 43-64.

In diesem Aufsatze werden verschiedene Formen der Bewegungsgleichungen erörtert, und die etwas verwickelten Formen, welche bei dem Gebrauche von Polarcoordinaten entstehen, werden durch bemerkenswert einfache Methoden abgeleitet. In manchen Fällen wird die Flüssigkeit vor der Einführung der Wirbelbewegung als rotirend angenommen, und zwar mit constanter Winkelgeschwindigkeit um eine Axe, und die Gleichungen für diese Bewegung werden mit grosser Vollständigkeit behandelt. Die Analogien zwischen den Gleichungen der Wirbelung

und denen der Elektrodynamik werden ebenfalls besprochen, und die Darstellung ist durchweg anregend. Gbs. (Lp.)

J. H. Michell. On the theory of free stream-lines. Lond. Phil. Trans. CLXXXI. 398-431.

Der Verf. verweist auf die Helmholtz'sche Abhandlung: „Ueber discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen" (Berl. Ber. 1868. 215-228, F. d. M. I. 341), in der gezeigt worden ist, dass einige Fälle stetiger Flüssigkeitsbewegung hinter hervortretenden Kanten fester Hindernisse durch die Annahme einer Discontinuitätsfläche gelöst werden können, auf deren einer Seite die Flüssigkeit in Ruhe ist; ferner auf spätere Untersuchungen von Kirchhoff (1869) und Rayleigh (1876).

Durch die Betrachtung der Abbildungs-Methoden für Polygone, die unabhängig von den Herren Schwarz und Christoffel gegeben sind, wurde der Verf. auf eine neue Transformation geführt, welche im Verein mit denen der eben Genannten eine allgemeine Lösung der Aufgabe freier, nicht zurückgehender Stromlinien mit starren Grenzen giebt. Eine beträchtliche Anzahl interessanter Fälle erwies sich als ziemlich einfach dem Wesen nach, und der Verfasser hat mehrere im einzelnen durchgearbeitet. Diese Probleme nehmen den ersten Teil der Abhandlung ein; im zweiten dagegen werden einige Ausdehnungen der Transformations-Formeln gegeben, welche auf Probleme von Condensatoren und auf die Formen hohler Wirbel in manchen Fällen anwendbar sind. Cly. (Lp.)

A. C. Elliott. On a hydrodynamical theorem. Edinb. Math. S. Proc. VIII. 69-77.

In diesem Aufsatze, welcher eine nach den ersten Principien durchgeführte Theorie von Giffard's Injector enthält, begegnen wir den beiden folgenden Sätzen: Eine Flüssigkeit fliesse stetig, rotations- und reibungslos längs einer Röhre von Stromlinien. A_1, v_1, p_1, ϱ_1 seien bezw. der Flächeninhalt, die Geschwindigkeit, der Druck und die Dichtigkeit in einem Querschnitt, ferner

A_2, v_2, p_2, ϱ_2 die entsprechenden Grössen an einem anderen. Dann erhält man für den gesamten Antrieb in der Secunde, mit Vernachlässigung von Niveau-Unterschieden, die folgenden Ausdrücke: Wenn die Dichte constant ist, so ist der Antrieb $J = 2(p_1 - p_2)\frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2}$; ist dagegen $p = k\varrho^\gamma$ (wo k und γ Constanten sind), so folgt

$$J = \frac{2\gamma}{\gamma - 1}\left(\frac{p_1}{\varrho_1} - \frac{p_2}{\varrho_2}\right)\frac{A_1\varrho_1 \cdot A_2\varrho_2}{A_1\varrho_1 + A_2\varrho_2},$$

ein Wert, der für $\varrho =$ const. auf den ersten zurückkommt.

Gbs. (Lp.)

E. Phragmén. Om ett enkelt fall af stationär rörelse med rotation. Stockh. Öfv. 493-498.

Der Verf. macht darauf aufmerksam, dass die Untersuchungen von Hrn. Picard über partielle Differentialgleichungen im Journ. de Math. (4) VI (1890) ein Mittel geben, durch das man wenigstens in einem gewissen Falle die Bewegung einer Flüssigkeit bestimmen kann, auch wenn andere Rotationen als in einzelnen Wirbelfäden vorkommen. Der behandelte Fall ist der folgende: Auf eine nicht zusammendrückbare Flüssigkeit wirken äussere, durch eine von z unabhängige Potentialfunction definirte Kräfte (x, y, z rechtwinklige Coordinaten), und die Flüssigkeit befindet sich in einer stationären Bewegung, bei welcher die Geschwindigkeit von z unabhängig und zur xy-Ebene parallel ist.

Bdn.

P. Molenbroek. Ueber einige Bewegungen eines Gases bei Annahme eines Geschwindigkeitspotentiales. Hoppe Arch. (2) IX. 157-195.

Für das Geschwindigkeitspotential einer Gasmasse gilt, wie in der vorliegenden Abhandlung zunächst abgeleitet wird, die Gleichung:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\Delta\varphi\right) = \frac{p_0}{\mu_0}\Delta^2\varphi$$

oder

$$\frac{d}{dt}\log\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\tfrac{1}{2}\Delta\varphi\right)=-(k-1)\Delta^2\varphi,$$

je nachdem man das Boyle'sche oder Poisson'sche Gesetz zu Grunde legt. Hierin bedeuten $\Delta\varphi$ und $\Delta^2\varphi$ die Operationssymbole

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Für den Fall, dass es sich um das Fortschreiten eines ebenen Bewegungszustandes handelt, dessen Fortschreitungsrichtung zur Richtung der z-Axe gewählt wird, vereinfachen sich die Gleichungen auf

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+2\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial z}+\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2-a^2\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$$

resp.

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+2\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial z}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\left[\tfrac{1}{2}(k+1)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2+(k-1)\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]=0.$$

Diese Gleichungen formt der Verfasser um, indem er als unabhängige Veränderliche die Grössen $\tau=\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, $\zeta=\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ einführt. Bezeichnet man mit f den Ausdruck

$$\tau t+\zeta z-\varphi,$$

so erhält man im ersten Falle die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\zeta^2}-2\zeta\frac{\partial^2 f}{\partial\tau\partial\zeta}+(\zeta^2-a^2)\frac{\partial^2 f}{\partial\tau^2}=0,$$

welche sich nach Einführung der Grössen

$$\xi=\frac{1}{a^2}(\tau+\tfrac{1}{2}\zeta^2), \qquad \eta=\frac{\zeta}{a}$$

auf

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}=\frac{\partial f}{\partial\xi}$$

reducirt. Nach einigen Betrachtungen über die Integration dieser Differentialgleichung wendet sich der Verfasser der für das Poisson'sche Gesetz gültigen Gleichung zu.

Nach Einführung der Grössen ζ und τ erhält er

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} - 2\zeta \frac{\partial^2 f}{\partial \tau \partial \zeta} + \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2}\left[\frac{k+1}{2}\zeta^2 + (k-1)\tau\right] = 0,$$

welche sich durch Einführung von $\theta = 2\sqrt{\frac{-\tau - \frac{1}{2}\zeta^2}{k-1}}$ in die Gleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = \frac{a}{\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta}$$

verwandelt; in derselben bedeutet a den Wert $\frac{3-k}{k-1} = 3{,}902$. Nachdem auch über diese Gleichung einige Bemerkungen bezüglich der Integration mit Rücksicht auf die zu erfüllenden Grenzbedingungen gemacht sind, wendet der Verfasser sich einer anderen Gattung von Problemen zu, nämlich den Gasbewegungen, welche den Helmholtz-Kirchhoff'schen discontinuirlichen Bewegungen incompressibler Flüssigkeiten entsprechen. Die Differentialgleichung für das Potential lautet hier:

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial x} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial y} = a^2 \Delta^2 \varphi.$$

Für freie Stromlinien muss sein:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = \text{const.}$$

Als unabhängige Veränderliche werden die Grössen q und μ eingeführt, welche sich aus den Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = aq\cos\mu \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = aq\sin\mu$$

ergeben, d. h. die Grösse und Richtung der Geschwindigkeit. Zwischen den Ableitungen von x und y nach μ und q bestehen dann die Gleichungen:

$$-\frac{\partial x}{\partial q}\sin\mu + \frac{\partial y}{\partial q}\cos\mu = \frac{1}{q}\left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\cos\mu + \frac{\partial y}{\partial \mu}\sin\mu\right),$$

$$\frac{\partial x}{\partial q}\cos\mu + \frac{\partial y}{\partial q}\sin\mu = \frac{q^2-1}{q}\left(-\frac{\partial x}{\partial \mu}\sin\mu + \frac{\partial y}{\partial \mu}\cos\mu\right).$$

Die rechte Seite der ersten Gleichung möge gleich $\frac{1}{q^2}v$ und die der zweiten gleich $\frac{q^2-1}{q^2}e^{\frac{1}{2}q^2}u$ gesetzt werden. Dann erhält man für u

und v die Gleichungen:

$$\frac{\partial v}{\partial q} = e^{\frac{1}{2}q^2} \frac{q^2-1}{q} \frac{\partial u}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial v}{\partial \mu} = q e^{\frac{1}{2}q^2} \frac{\partial u}{\partial q}.$$

Aus der leicht einzusehenden Gleichung

$$-\sin\mu\, dx + \cos\mu\, dy = 0$$

erhält man die integrable Gleichung

$$u d\mu + \frac{1}{q} e^{-\frac{1}{2}q^2} v dq = 0$$

für die Stromlinien. Für die freien Grenzen ist dq und damit $u = 0$; für geradlinige, feste Grenzen ist $d\mu = 0$ und damit auch $v = 0$.

Der Verfasser betrachtet genauer Lösungen, bei welchen u die Form $F(q)\cos\alpha\mu$ annimmt.

Des weiteren wird die Differentialgleichung betrachtet, welche für $f = x\frac{\partial \varphi}{\partial x} + y\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \varphi$ als Function von q und μ gilt. Endlich werden ähnliche Betrachtungen für den Fall des Poisson'schen Gesetzes angestellt. F. K.

G. Arendt. Die Dirichlet'sche Lösung des allgemeinen Problems der Bewegung elastischer Flüssigkeiten. Festschrift zur Feier des 200-jährigen Bestehens des französischen Gymnasiums.

Im Anschluss an die Dirichlet'sche Vorlesung über die Integration der partiellen Differentialgleichungen mit Anwendung auf physikalische Probleme wird das im Titel genannte Problem behandelt.

Sind u, v, w die Geschwindigkeitscomponenten, s die Condensation, so bestehen die Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a^2\frac{\partial s}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -a^2\frac{\partial s}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -a^2\frac{\partial s}{\partial z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial s}{\partial t}.$$

Man hat also für s die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}\right),$$

mit der Massgabe, dass s für $t=0$ eine vorgeschriebene Function $f(x, y, z)$ der Coordinaten, und dass für denselben Zeitpunkt

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z}$$

durch eine gegebene Function $F(x, y, z)$ dargestellt wird. Dann ist $s = s' + s''$, wo

$$s' = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} t \sin\theta d\theta d\varphi F(x + at\cos\theta,\ y + at\sin\theta\cos\varphi,\ z + at\sin\theta\sin\varphi),$$

$$s'' = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} t \sin\theta d\theta d\varphi f(x + at\cos\theta,\ y + at\sin\theta\cos\varphi,\ z + at\sin\theta\sin\varphi).$$

Die Geschwindigkeitscomponenten sind

$$u = u_0 - a^2\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t s\,dt, \quad v = v_0 - a^2\frac{\partial}{\partial y}\int_0^t s\,dt,$$

$$w = w_0 - a^2\frac{\partial}{\partial z}\int_0^t s\,dt.$$

Die Doppelintegrale in den beiden Teilen, aus welchen sich die Condensation zusammensetzt, können als Oberflächenintegrale über eine Kugel angesehen werden, die mit dem Radius at um den Punkt x, y, z beschrieben ist. Schneidet diese Kugel das Gebiet der anfänglichen Störung, so kann die Condensation einen von Null verschiedenen Wert haben, dagegen ist die Condensation Null, wenn diese Kugel nicht getroffen wird. Wenn also das Gebiet der anfänglichen Störung ein endliches ist, so ist die Condensation nur so lange von Null verschieden, als t in den Grenzen $\frac{\sigma}{a}$ und $\frac{\sigma_1}{a}$ liegt, wo σ und σ_1 diejenigen Radien sind, deren Kugeln das Störungsgebiet umschliessen. Man betrachte nun Punkte x, y, z, welche auf demselben vom Anfangs-Punkte O ausgehenden Radiusvector, aber in einer Entfernung r liegen, welche gross ist gegen die Dimensionen des ursprünglichen Störungsgebietes. Dann kann das Kugelstück offenbar ersetzt werden durch eine auf dem Radius senkrecht stehende Ebene. Der Abstand dieser Ebene vom Coordinatenanfangspunkte

ist dann offenbar $r-at$. Dann wird $s' = \frac{1}{at}\varphi(r-at)$, wo φ natürlich von der Richtung des Radiusvector abhängt.

Da φ nur so lange einen von Null verschiedenen Wert hat, als $r-at$ in den endlichen Grenzen σ und σ_1 liegt, so kann im Nenner des obigen Ausdrucks r statt at geschrieben werden, sodass $s' = \frac{1}{r}\varphi(r-at)$ wird.

Für den entgegengesetzten Radiusvector wird $s' = \frac{1}{r}\varphi(at-r)$. Das Doppelintegral, von welchem s'' die nach t genommene Ableitung ist, wird $\frac{1}{at}\psi(r-at)$. Also wird, da r selber gross ist und damit auch at, so lange $(r-at)$ in dem Störungsgebiet liegt,

$$s'' = -\frac{a}{r}\psi'(r-at).$$

Für den entgegengesetzten Radius wird $s'' = +\frac{a}{r}\psi'(at-r)$. Demnach erhalten wir

$$s = \frac{1}{r}\{\varphi(r-at) - a\psi'(r-at)\}$$

resp.

$$s = \frac{1}{r}\{\varphi(at-r) + a\psi'(at-r)\}.$$

Zur Bestimmung der Geschwindigkeitscomponenten hat man nun den Ausdruck

$$S = -a^2\int_0^t s\,dt$$

zu bilden, welcher in die beiden Teile zerfällt

$$S' = -\frac{1}{4\pi}\int_0^t \frac{d\,at}{dt}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}(at)^2\sin\vartheta\,d\theta\,d\varphi\,F,$$

$$S'' = -\frac{1}{4\pi\,at}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}(at)^2\sin\vartheta\,d\theta\,d\varphi\,f.$$

Das zweite Integral hat dieselbe Form wie das Integral, welches s' darstellt, das erste hingegen ist ein Raumintegral, welches über eine Kugel mit dem Radius at um x, y, z be-

schrieben ist; bezeichnen wir ein Element mit $d\psi$, mit ϱ seine Entfernung von (x, y, z), so können wir schreiben:

$$S' = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{d\psi}{\varrho} F.$$

So lange das ursprüngliche Störungsgebiet noch nicht erreicht ist, sind S' und S'' gleich Null, und also sind bis zu diesem Zeitpunkte die Geschwindigkeitscomponenten für einen äusseren Punkt gleich Null. Wenn aber die Kugel mit dem Radius at das Störungsgebiet umschliesst, so hat S'' wieder den Wert Null, dagegen hat S' einen von x, y, z abhängigen Wert, der sich jedoch mit t nicht mehr ändert. Es tritt dann ein permanenter Bewegungszustand ein.

Für die Ableitung von S' nach einer beliebigen Richtung (ν) ergiebt sich durch geometrische Betrachtungen:

$$\frac{\partial S'}{\partial \nu} = -\frac{1}{4\pi}\left\{\int \frac{d\psi}{\varrho^2} F\cos\chi + \frac{1}{at}\int d\tau F\cos\chi\right\},$$

wo χ der Winkel ist, den der Radius des Oberflächenelements $d\tau$ der begrenzenden Kugel mit der Richtung der Verrückung einschliesst. Nennen wir R den Radius der Kugel — also $R = at$ —, so wird

$$\frac{\partial S''}{\partial \nu} = -\frac{1}{4\pi}\frac{a}{R}\int dt\left(\frac{2f}{R} + \frac{\partial f}{\partial R}\right)\cos\chi.$$

Nennen wir nun ω_0 die anfängliche Componente der Geschwindigkeit in Richtung der Verschiebung, so erhalten wir für ω, d. h. die Geschwindigkeitscomponente zur Zeit t, den Wert:

$$\omega = \omega_0 - \frac{1}{4\pi}\left(\int \frac{d\psi}{\sigma^2} F\cos\chi + \frac{1}{R}\int d\tau F\cos\chi\right)$$
$$- \frac{a}{4\pi R}\int dt\left(\frac{2f}{R} + \frac{\partial f}{\partial R}\right)\cos\chi.$$

Handelt es sich jetzt wieder um einen Punkt, dessen Entfernung von dem ursprünglichen Störungsgebiet sehr gross ist, so haben wir für Zeitpunkte, in welchen das Störungsgebiet von der begrenzenden Kugel erreicht oder überschritten wird, bei Berechnung der Componente in Richtung des Radiusvector $\cos\chi = 1$

zu setzen; ω_0 ist Null, R sehr gross und also:

$$\omega = -\frac{1}{4\pi R}\int d\tau F - \frac{a}{4\pi R}\int dt \frac{\partial f}{\partial R}.$$

Dagegen wird für irgend eine Verrückung senkrecht zum Radiusvector diese Geschwindigkeitscomponente klein gegen den angegebenen Wert von ω. Zwischen dem angegebenen Werte ω und dem gleichzeitig stattfindenden Werte s besteht dann die Gleichung

$$w = -as.$$

F. K.

O. Tumlirz. Zur Theorie der Flüssigkeitsreibung. Wiedemann Ann. XL. 146-148.

Der Verfasser beweist, dass die von den Kräften, welche auf eine Flüssigkeit wirken, geleistete Arbeit gleich

$$\frac{d}{dt}\tfrac{1}{2}\int(V^2\varrho\, dx\, dy\, dz)dt + 4\mu\int\sigma^2 dx\, dy\, dz\, dt$$

ist. Hierin bedeutet V die Geschwindigkeit, σ die Rotationsgeschwindigkeit. Die anderen Grössen haben die übliche Bedeutung.

F. K.

W. Stekloff. Ueber die Bewegung eines schweren starren Körpers in einer Flüssigkeit. (Zwei Abhandlungen.) Chark. Ges. (2) II. 209-235, 236-244. (Russisch.)

Der Verfasser betrachtet einige Fälle der Bewegung eines schweren starren Körpers, welcher ganz in einer schweren Flüssigkeit untergetaucht ist. Als Anfangspunkt der in dem Körper festen Coordinatenaxen nimmt er den Angriffspunkt der Resultante der Schwerkraft des Körpers und der hydrostatischen Drucke auf seine ganze Oberfläche, und die positive ζ-Axe der unbeweglichen Coordinatenaxen legt er parallel zu dieser Resultante.

Der Verfasser nimmt die Differentialgleichungen der Bewegung des Körpers in der Kirchhoff'schen Form, transformirt sie, indem er die Impulse $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ statt der Geschwindigkeiten u, v, w, p, q, r einführt, wie es Clebsch gethan hat (Mathem. Annalen III: Ueber die Bewegung eines Körpers in einer Flüssig-

keit), und bemerkt dann, dass bei passender Wahl der Richtungen der Axen im Körper die Coefficienten a_{32} und a_{31} und einer der Coefficienten b_{31}, b_{32} im Ausdrucke der lebendigen Kraft:

$$2T = \Sigma\Sigma a_{ik} x_i x_k + 2\Sigma\Sigma b_{ik} x_i y_k + \Sigma\Sigma c_{ik} y_i y_k,$$

wo $a_{ik} = a_{ki}$, $c_{ik} = c_{ki}$ sind, verschwinden. Dann setzt er weiter

$$x_1 = \xi_1 t, \quad x_2 = \xi_2 t, \quad x_3 = \xi_3 t$$

und zeigt, dass

$$\xi_1 = m\gamma_1, \quad \xi_2 = m\gamma_2, \quad \xi_3 = m\gamma_3$$

ist, wo m die Differenz der Masse des Körpers und der von ihm verdrängten Flüssigkeit bedeutet, und γ_1, γ_2, γ_3 die Cosinus der Winkel zwischen den x-, y-, z-Axen und der ζ-Axe sind. Die Betrachtung der transformirten Differentialgleichungen der Bewegung führt den Verfasser zu dem Schlusse, dass ein schwerer Körper, wenn im Ausdrucke der lebendigen Kraft die Coefficienten b_{31} und b_{32} verschwinden, eine gleichförmig beschleunigte Schraubenbewegung längs der ζ-Axe haben kann.

Die Untersuchung geht dann zu anderen Fällen der Bewegung eines schweren starren Körpers über, die bei specielleren Formen des Ausdrucks der lebendigen Kraft möglich sind.

Ein schwerer Körper, dessen lebendige Kraft sich in folgender Weise darstellen lässt:

$$T = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + b_1 x_1 y_1 + b_2 x_2 y_2 + b_3 x_3 y_3 \\ + c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 + c_3 y_3^2,$$

kann sich so bewegen, dass $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ und zugleich

$$\xi_1 = l \operatorname{sinam}\left(\lambda \frac{t^2}{2}\right), \quad \xi_2 = m \operatorname{cosam}\left(\lambda \frac{t^2}{2}\right),$$

$$\xi_3 = n \Delta \operatorname{am}\left(\lambda \frac{t^2}{2}\right)$$

sind.

Hat man $b_1 = b_2 = b_3$, so ist eine solche Bewegung des starren Körpers möglich, bei der y_1, y_2, y_3 constant bleiben und der Anfangspunkt der Coordinaten eine Spirale beschreibt, die gegen eine der ζ-Axe parallele Gerade asymptotisch convergirt.

Ist der Ausdruck der lebendigen Kraft der folgende:

$$2T=k(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2(b_{11}x_1y_1+b_{22}x_2y_2+b_{33}x_3y_3)$$
$$+2b_{12}(x_1y_2+x_2y_1)+2b_{23}(x_2y_3+x_3y_2)+2b_{13}(x_1y_3+x_3y_1)$$
$$+\Sigma\Sigma c_{ik}y_iy_k,$$

so ist eine Bewegung möglich, bei der $y_1=y_2=y_3$ ist und ξ_1, ξ_2, ξ_3 den Differentialgleichungen

$$\frac{d\xi_1}{dt_1}=\xi_2\frac{\partial T_1}{\partial\xi_3}-\xi_3\frac{\partial T_1}{\partial\xi_2},$$
$$\frac{d\xi_2}{dt_1}=\xi_3\frac{\partial T_1}{\partial\xi_1}-\xi_1\frac{\partial T_1}{\partial\xi_3},$$
$$\frac{d\xi_3}{dt_1}=\xi_1\frac{\partial T_1}{\partial\xi_2}-\xi_2\frac{\partial T_1}{\partial\xi_1}$$

genügen, wo

$$2T_1=b_{11}\xi_1^2+b_{22}\xi_2^2+b_{33}\xi_3^2+2b_{23}\xi_2\xi_3+2b_{31}\xi_3\xi_1+2b_{12}\xi_1\xi_2$$

und

$$t_1=\frac{t^2}{2}$$

gesetzt ist.

Diese Bewegung entsteht, wenn man dem Körper einen anfänglichen Impuls längs der ζ-Axe mitteilt. Der Verfasser zeigt, dass in diesem Falle der Anfangspunkt der beweglichen Axen sich gleichförmig beschleunigt längs der ζ-Axe bewegt, und der Körper sich derartig dreht, dass eine Fläche zweiter Ordnung, deren Mittelpunkt im Anfangspunkte der beweglichen Axen liegt und deren Dimensionen sich der Zeit proportional ändern, aber so, dass die Fläche stets sich selbst ähnlich bleibt, auf zwei zur ζ-Axe senkrechten Ebenen rollt, deren Entfernungen vom Anfangspunkte der beweglichen Axen sich der Zeit proportional verändern. Bb.

A. L. Selby. On two pulsating spheres in a liquid. Phil. Mag. (5) XXIX. 113-123.

Das Problem zweier pulsirenden Kugeln wird hier in einer elementareren Art als sonst durch die Methode der Bilder erörtert. Die einführenden Paragraphen enthalten Beweise bekannter Sätze bezüglich der Bilder, indem der Verf. den Gegenstand aus einem von dem Hicks'schen Standpunkte ein wenig abwei-

chenden Gesichtspunkte betrachtet. Ist der Abstand der Kugelmittelpunkte c, so wird die kinetische Energie zuerst bis zu den Gliedern mit c^{-9} ausgewertet und der Mittelwert der Kraft zwischen den Kugeln bestimmt, wenn der Radius von der Form ist $a = a' + \alpha \sin \frac{2\pi t}{T}$, wo a' der mittlere Halbmesser und α eine kleine Grösse ist. Dann wird die Methode auf das allgemeinere Problem angewandt, bei welchem die radialen Geschwindigkeiten auf den Kugeloberflächen Cylinderfunctionen von den Graden m und n bezw. sind, und es wird geschlossen, dass hieraus eine noch allgemeinere Lösung abgeleitet werden kann.

Gbs. (Lp.)

H. Klang. Ueber eine besondere Gattung hydrodynamischer Probleme. I. Teil. Pr. Lötzen. 1890. 16 S. 4°.

Der Verfasser behandelt die Bewegung von Flüssigkeiten im Innern von starren Oberflächen, deren Bewegung gegeben ist. Nach Aufstellung der allgemeinen Bedingungen wird die Kugel und das rechtwinklige Parallelepipedon behandelt. Wesentlich Neues hat Referent in der Abhandlung nicht entdecken können.

F. K.

A. Oberbeck. Ueber die freie Oberfläche bewegter Flüssigkeit; ein Beitrag zur Theorie der discontinuirlichen Flüssigkeitsbewegungen. Wiedemann Ann. XXXIX. 555-564.

Der Verfasser beschreibt folgende Erscheinung: Lässt man eine Flüssigkeit aus einer verticalen Röhre gegen eine horizontale Ebene laufen, so wird sich die Flüssigkeit zunächst in einer sehr dünnen Schicht ausbreiten, welche sich in einer Entfernung von einigen Centimetern plötzlich zu einer Höhe von einigen Millimetern erhebt, sodass eine Unstetigkeit in der Bewegung eintritt. Die mathematische Erklärung der Erscheinung, gegen welche sich nach Meinung des Referenten sehr vieles einwenden lässt, beruht auf der Vorstellung, dass im Verlauf der Bewegung eine Aenderung der Energie eingetreten ist.

Bezeichnet v die Geschwindigkeit, mit welcher die Flüssigkeit in der Entfernung r vom Mittelpunkte strömt, x die Höhe, m die Quantität Flüssigkeit, welche in der Zeiteinheit zuströmt, so ist:

$$m = 2\pi r . x . v.$$

Ferner ist in jedem der beiden Teile

$$v^2 + 2gx = \text{const.}$$

Diese Constante soll nun in beiden Teilen des von der Flüssigkeit erfüllten Gebietes einen verschiedenen Wert haben. Es lässt sich nun leicht nachweisen, dass zu jedem Werte e dieser Constanten ein Minimum von r gehört, welches zu $v = \sqrt{\frac{e}{3}}$ gehört und für x den Wert $\frac{e}{3g}$ liefert, während $r = \frac{gm}{2\pi}\sqrt{\frac{27}{e^3}}$ wird. Dieser Wert r für den zum äusseren Gebiete gehörenden Wert e, welchen der Verfasser nach Meinung des Referenten willkürlich annimmt, soll die Grenze der beiden Gebiete bestimmen.

F. K.

N. E. Joukowsky. Zur Theorie des Fluges. Phys. Ges. St. Petersburg. (2) XXII. 3-10. (Russisch.)

Der Verfasser untersucht die Zugkraft, welche auf den Schwerpunkt eines Körpers wirkt, der in einer incompressiblen, ein sehr grosses unbewegliches Gefäss erfüllenden Flüssigkeit untergetaucht ist; er setzt dabei voraus, dass auf den Körper nur innere Kräfte wirken.

Zunächst wird bewiesen, dass im Falle einer Flüssigkeit ohne innere Reibung und bei Abwesenheit von Discontinuitätsflächen die Arbeit der Zugkraft für eine volle Bewegungsperiode des Körpers um seinen Schwerpunkt gleich Null ist. Für den Fall der Entstehung von Discontinuitätsflächen in einer Flüssigkeit ohne Reibung giebt der Verfasser einen Ausdruck für die Constante der nützlichen Wirkung für einen Apparat, der aus zwei Platten besteht, welche durch einen Stab, der sich schraubenartig bewegt, verbunden sind; danach wird dieselbe Constante

für eine mit Schaufeln versehene Kugel bestimmt, die sich in einer Flüssigkeit mit innerer Reibung bewegt.

Schliesslich wird noch auf eine auf der Wirbeltheorie beruhende Einrichtung eines Apparates hingewiesen, der in der Luft steigen könnte. Ms.

J. Boussinesq. Théorie du régime permanent graduellement varié qui se produit près de l'entrée évasée d'un tube fin, où les filets d'un liquide qui s'y écoule n'ont pas encore acquis leurs inégalités normales de vitesse. C. R. CX. 1160-1166.

J. Boussinesq. Théorie du mouvement permanent qui se produit près de l'entrée évasée d'un tube fin: application à la deuxième série d'expériences de Poiseuille. C. R. CX. 1238-1242.

J. Boussinesq. Théorie du régime permanent graduellement varié qui se produit près de l'entrée évasée d'un tuyau de conduite, où les filets fluides n'ont pas encore acquis leurs inégalités normales de vitesse. C. R. CX. 1292-1298.

Unmittelbar nach Eintritt in eine Röhre wird das Wasser noch nicht jene regelmässige Bewegung angenommen haben, welche es nach Durchlaufung einer längeren Strecke in derselben erreicht. Es werden noch transversale Geschwindigkeiten vorhanden sein; jedoch kann angenommen werden, dass diese sowie ihre Ableitungen klein sind gegen die Geschwindigkeit und Beschleunigung in der Längsrichtung der Röhre. Demzufolge darf vorausgesetzt werden, dass in einem einzelnen Querschnitt der Druck sich nach dem hydrostatischen Gesetze ändert. Ist h die Höhe eines Punktes über einer festen Ebene, p der an dieser Stelle herrschende Druck, ϱ die Dichtigkeit und g die Beschleunigung, so wird, falls die X-Axe die Richtung der Röhre hat, das treibende Gefälle (pente motrice)

$$(1) \qquad J = -\frac{\partial}{\partial x}\left(h + \frac{p}{\varrho g}\right)$$

unabhängig von der Lage des Punktes im Querschnitte sein. Ist $u' = \frac{du}{dt}$, so hat man demgemäss folgende Gleichung:

$$(2) \qquad \frac{s}{\varrho g}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+J = \frac{u'}{g},$$

mit der Massgabe, dass am festen Rande $u = 0$, am freien Rande $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sei. Nachdem diese Gleichung mit dem reciproken Werte der mittleren Geschwindigkeit U multiplicirt ist, eliminirt der Verfasser zunächst J, indem er die durch

$$z - \int \frac{z\,d\sigma}{\sigma}$$

angedeutete Operation anwendet, in welcher $d\sigma$ ein Element des Querschnitts und σ der ganze Querschnitt ist. Er erhält so:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{u}{U}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{u}{U}\right)-\frac{1}{\sigma}\int\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{u}{U}\right)d\chi$$
$$= \frac{\varrho}{sU}\left(u'-\int u'\frac{d\sigma}{\sigma}\right).$$

Es möge nun φ die Function von y und z sein, in welche $\frac{u}{U}$ nach Herstellung des gleichmässigen Zustandes ($u' = 0$) übergeht, und $\varpi = \frac{u}{U} - \varphi$.

Dann hat man

$$\frac{\partial^2 \varpi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varpi}{\partial z^2}-\frac{1}{\varrho}\int\frac{\partial \varpi}{\partial n}d\sigma = \frac{\varrho}{sU}\left(u'-\int u'\frac{d\sigma}{\sigma}\right).$$

Indem Herr Boussinesq diese Gleichung mit $\varphi\,d\sigma$ multiplicirt und integrirt, erhält er mit Rücksicht auf die Differentialgleichung, welcher φ genügt, nach einigen Umformungen:

$$-\int_\chi \frac{\partial \varpi}{\partial n}d\chi \quad \text{oder} \quad -\frac{1}{U}\int_\chi\frac{\partial u}{\partial n}d\chi+\int_\chi\frac{\partial \varphi}{\partial n}d\chi$$
$$= \frac{\varrho\sigma}{sU}\int(\varphi-1)u'\frac{d\sigma}{\sigma},$$

oder, wenn der negative Ausdruck

$$\int_\chi \frac{\partial \varphi}{\partial n}d\chi = -k$$

gesetzt wird:

$$(12)\qquad \int\limits_{\chi} \frac{\partial u}{\partial n}\, d\chi = -kU - \frac{\varrho}{\varepsilon}\,\sigma \int (\varphi - 1) u' \frac{d\sigma}{\sigma}.$$

Integrirt man nun die Gleichung (2) über die ganze Fläche, dividirt durch σ und setzt dann für $\int\limits_{\chi} \frac{\partial u}{\partial n} d\chi$ den vorstehenden Ausdruck ein, so erhält man:

$$(13)\qquad J = k \frac{\varepsilon}{\varrho g} \frac{U}{\sigma} + \frac{1}{g} \int \varphi u' \frac{d\sigma}{\sigma}.$$

Vorausgesetzt, dass der Zustand sehr wenig von dem constanten abweicht, wird u' verhältnismässig klein sein, und φ wird wenig von u abweichen, so dass unter dieser Voraussetzung geschrieben werden kann

$$\int \frac{\varphi u' d\sigma}{\sigma} = \frac{1}{U\sigma} \int u u' d\sigma,$$

und das ist, wie der Verfasser zeigt: $\frac{1}{2U\sigma} \frac{\partial}{\partial x} \int u^2 d\sigma$. Nennt man nun α das Verhältnis des Mittelwertes von u^2 zu U^2, so haben wir, weil $U\sigma$ constant ist:

$$\frac{1}{U\sigma} \frac{\partial}{\partial x} \alpha U^2 = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\alpha U^2}{2}.$$

Demnach ergiebt sich

$$(14)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(h + \frac{p}{\varrho g} + \frac{\alpha U^2}{2g}\right) = -k \frac{\varepsilon}{\varrho g} \frac{U}{\sigma},$$

wo die rechte Seite nichts anderes als der auf die Längeneinheit reducirte Druckhöhenverlust ist. Bei einer kreisförmigen Röhre wird k gleich 8π, und nach Herstellung des regulären Zustandes $\alpha = 2$. Integriren wir nun vom Anfang der Röhre bis zum Ende, so erhalten wir

$$(15)\qquad \frac{8\varepsilon U}{\varrho g R^2} L + \frac{U^2}{g} = h_0 - h_1 + \frac{p_0 - p_1}{\varrho g}.$$

Ist L sehr gross, so dürfen wir das zweite Glied links gegen das erste vernachlässigen und erhalten dann die Formel von Poiseuille. Wenn aber die Röhre nicht hinreichend lang ist, so gilt, wie Herr Couette gezeigt hat (Thèse de doctorat sur le frottement des liquides), Poiseuille's Formel nicht mehr, und es ist eine Ver-

besserung hinzuzufügen, welche grösstenteils durch das Glied $\frac{U^2}{g}$ dargestellt ist. Diese Verbesserung ist jedoch zu klein, was, wie Herr Boussinesq zeigt, in der Substitution von $\frac{u}{U}$ für φ seinen Grund hat. Der Verfasser sucht diesen Uebelstand durch eine überschlägliche Rechnung zu beseitigen. Er setzt zu dem Ende den Fehlbetrag

$$\varphi - \frac{u}{U} = \lambda(\varphi - 1),$$

wo λ eine Function von x allein sein soll, welche vom Anfang der Röhre bis zum Ende von 1 bis 0 abnimmt. Er erhält auf diese Weise für u' den Wert:

$$u' = -\frac{U^2}{2}\frac{d\lambda}{dx}[\varphi^2 - \lambda - \lambda(\varphi^2 - 2\varphi + 1)],$$

und daraus

$$\frac{1}{g}\int_{\sigma} \varphi u' \frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{U^2}{2g}\frac{d\alpha}{dx} - \frac{U^2}{6g}\frac{d\lambda^2}{dx},$$

woraus dann weiter folgt, dass in Formel (15) das Glied $\frac{U^2}{g}$ noch um $\frac{1}{6}$ seines Betrages zu vermehren ist.

Eine genauere Berechnung würde die Abhängigkeit der Grösse $\varpi = \varphi - \frac{u}{U}$ von x und r zu berücksichtigen haben; der Verfasser entwickelt die Differentialgleichung, welcher diese Grösse genügt.

Bis jetzt war der Coefficient der inneren Reibung constant angenommen worden. Bei Röhren grösserer Querschnittsdimensionen ist das nach dem Verfasser nicht mehr statthaft; vielmehr wird der Reibungscoefficient eine von der Gestalt des Querschnitts abhängige Function der Coordinaten sein. Unter dieser Voraussetzung stellt der Verfasser ähnliche Betrachtungen an, wie für den Fall eines constanten Reibungscoefficienten, und gelangt zu einer ganz ähnlichen Formel, nämlich

$$(15b) \qquad b\frac{2}{R}U^2L + (1+4\eta)\frac{U^2}{2g} = h_0 - h_1 + \frac{p_0 - p_1}{\varrho g}.$$

Hierin bedeutet b eine von der Reibung abhängige Constante, $1+\eta$ das Verhältnis des mittleren Wertes von u^2 zu U^2.

F. K.

M. Couette. Études sur le frottement des liquides. Ann. de Chim. et Phys. (6) XXI. 433-510.

M. Couette. Distinction de deux régimes dans le mouvement des fluides. Almeida J. (2) IX. 414-424.

M. Couette. Corrections relatives aux extrémités des tubes dans la méthode de Poiseuille. Almeida J. (2) IX. 560-562.

Der Aufsatz in den Ann. de Chim. et Phys. ist ein Abdruck der Capitel I, II, III der Thèse des Verfassers, während nach der Angabe der Vorrede das rein mathematische Capitel IV derselben über die Theorie der Methode der Oscillationen fortgelassen ist. Aber auch in den drei ersten Capiteln findet man neben den litterarhistorischen Notizen verschiedene mathematische Ableitungen von denjenigen Formeln, welche durch die des weiteren beschriebenen Versuche einer Prüfung unterworfen worden sind. Der zweite, in dem Titel angeführte Artikel enthält einen Auszug der Capitel I und II, der dritte ebenso eine in Capitel III enthaltene theoretische Untersuchung. Von den am Schlusse des Aufsatzes der Ann. de Chim. et Phys. zusammengestellten Ergebnissen über die Gesetze der Bewegung der Flüssigkeiten mögen die folgenden hier Platz finden.

1) Die Bewegung der Flüssigkeiten zeigt zwei verschiedene Arten des Verlaufes: die erste entspricht den einfachsten Integralen der Navier'schen Gleichungen, die zweite nicht. 2) Bei der zweiten Art ist der Ausdruck für die Reibung an der Wand eine parabolische Function zweiten Grades von der mittleren Translations - Geschwindigkeit bezüglich dieser Wand. 3) Der erste Verlauf tritt nur für die geringsten Geschwindigkeiten auf, der zweite nur für die grössten; für die dazwischen liegenden wechseln beide ab. 4) Der erste Verlauf bleibt für Oel und Luft bis zu weit höheren Geschwindigkeiten bestehen, als die ist, bei

der er im Wasser vergeht. 5) Die mittlere Minimalgeschwindigkeit, für welche der zweite Verlauf in Röhren einzutreten beginnt, ist ihren Durchmessern umgekehrt proportional. 6) Die Flüssigkeiten adhäriren, ohne zu gleiten, an der Oberfläche der festen Körper; aber bei dem zweiten Verlauf ändert sich die Geschwindigkeit sehr schnell in der Nähe der Wand. Auf die Einzelheiten der Messung der Coefficienten der inneren Reibung einzugehen, verbietet der Raum. Lp.

P. Serf. Ueber die Integration der Differentialgleichungen eines neuen hydrodynamischen Problems. Diss. Bonn. 1890. 47 S. 8°.

Im Anschluss an C. Neumann's Hydrodynamische Untersuchungen, Leipzig 1883, entwickelt der Verfasser zunächst die Differentialgleichungen für die Rotation eines starren Körpers um einen festen Punkt, wenn im Innern des Körpers sich mehrfach zusammenhängende, mit Flüssigkeit angefüllte Hohlräume befinden. Diese Gleichungen stimmen, beiläufig gesagt, mit denjenigen überein, welche Hr. Wangerin für ein materielles System entwickelt hat, das aus einem um einen festen Punkt drehbaren starren Körper und mehreren anderen Körpern besteht, die sich um einzelne in dem Körper feste Axen frei drehen können. Sie lauten:

$$C'\frac{dp}{dt} = \left(C''q-\frac{h''}{2}\right)r-\left(C'''r-\frac{h'''}{2}\right)q,$$
$$C''\frac{dq}{dt} = \left(C'''r-\frac{h'''}{2}\right)p-\left(C'p-\frac{h'}{2}\right)r,$$
$$C'''\frac{dr}{dt} = \left(C'p-\frac{h'}{2}\right)q-\left(C''q-\frac{h''}{2}\right)p.$$

Sie ergeben die beiden Integrale

$$C'p^2+C''q^2+C'''r^2 = m^2$$
$$\left(C'p-\frac{h'}{2}\right)^2+\left(C''q-\frac{h''}{2}\right)^2+\left(C'''r-\frac{h'''}{2}\right)^2 = n^2.$$

Man kann ferner leicht nachweisen, dass, wenn $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die Richtungscosinus irgend einer im Raum festen Geraden zu den Axen

des Körpers sind, auch

$$\left(C'p-\frac{h'}{2}\right)\alpha_1+\left(C''q-\frac{h''}{2}\right)\alpha_2+\left(C'''r-\frac{h'''}{2}\right)\alpha_3 = \text{const.}$$

ist, sodass

$$\frac{C'p-\frac{h'}{2}}{n},\quad \frac{C''q-\frac{h''}{2}}{n},\quad \frac{C'''r-\frac{h'''}{2}}{n}$$

als die Cosinus einer im Raume festen Geraden zu den Axen des Körpers angesehen werden können. Indem der Verfasser die Grössen p, q, r gleich $\frac{z_1}{z_4}$, $\frac{z_2}{z_4}$, $\frac{z_3}{z_4}$ setzt, verwandelt er zunächst die beiden Integralgleichungen in homogene Gleichungen zweiten Grades. Fasst man dieselben als Gleichungen von Flächen zweiten Grades auf, so kann man dieselben vereinfachen, indem man das gemeinschaftliche Polartetraeder zu Grunde legt. So erhält der Verfasser für p, q, r Ausdrücke von der Form

$$p=\frac{\Sigma\alpha_1^{(i)}y_i}{\Sigma\alpha_4^{(i)}y_i}\qquad (i=1,2,3,4)\quad y_4=1,$$

$$q=\frac{\Sigma\alpha_2^{(i)}y_i}{\Sigma\alpha_4^{(i)}y_i},$$

$$r=\frac{\Sigma\alpha_3^{(i)}y_i}{\Sigma\alpha_4^{(i)}y_i},$$

wo zwischen den drei Grössen y_1, y_2, y_3 die Beziehungen

$$y_1^2+y_2^2+y_3^2=1,\quad \omega_1y_1^2+\omega_2y_2^2+\omega_3^2y_3^2=\omega_4$$

bestehen. Die Zeit t lässt sich dann als elliptisches Integral darstellen, dessen obere Grenze eine der Grössen y ist, sodass sämtliche y sich als elliptische Functionen der Zeit t ergeben. Um nun die Lage des Körpers im Raume zu bestimmen, wird es sich natürlich empfehlen, die oben erwähnte im Raume feste Gerade als eine der Coordinatenaxen zu wählen. Dadurch sind zwei der Euler'schen Winkel bestimmt, der dritte ergiebt sich als elliptisches Integral dritter Gattung.

Zum Schluss wird der Fall $C'=C''$, $h'=h''=0$ genauer discutirt, welcher dem Rotationskörper entspricht. F. K.

L. LECORNU. Problèmes de mécanique infinitésimale. Assoc. Franç. Limoges XIX. 204-213.

Hr. Lecornu untersucht in der Nähe eines Punktes die mechanischen Eigenschaften eines stetigen Mittels, das gleichförmig stetigen Kräften unterworfen ist. „Figurcentrum" eines Elementes von beliebiger Gestalt heisst der Schwerpunkt seines Volumens, wenn keine Dichtigkeitsänderungen vorhanden wären, und „gleichaxig" heisst das Element, wenn seine Hauptträgheitsaxen gleich sind. Dies vorausgeschickt, mögen einige der gewonnenen Ergebnisse folgen.

Die Linie, welche den Schwerpunkt eines gleichaxigen Elementes mit seinem Figurcentrum verbindet, ist eine Normale zur Oberfläche gleicher Dichtigkeit. Damit die in dem Innern eines gleichaxigen Elementes angebrachten Kräfte eine einzige Resultante zulassen, die durch den Mittelpunkt geht, ist es notwendig und hinreichend, dass diese Kräfte von einem Potential herstammen. Das resultirende Paar der Bewegungsgrössen eines gleichaxigen Elementes in Bezug auf seinen Schwerpunkt ist dasselbe, wie wenn dieses Element für den Augenblick fest wäre. Diese Resultate sind im besonderen auf die sphärischen Elemente anwendbar. Sie führen zu einem directen Beweise der grundlegenden Sätze des Hrn. von Helmholtz über die Wirbel, welche in einer vollkommenen Flüssigkeit vorkommen.

Lp.

ÉD. COLLIGNON. Problème de mécanique. Assoc. Franç. Limoges XIX. 100-111.

Aus der Höhe h oberhalb des Wasserspiegels lässt man in das Wasser einen festen homogenen Körper von Kugelgestalt und von sehr kleinem Radius r fallen. Die Dichte des Körpers ist kleiner als die des Wassers. Die Bewegung des Körpers innerhalb der Flüssigkeit zu untersuchen, wenn ihr Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist; insbesondere die Tiefe h' zu bestimmen, bis zu der er vordringt. Ist p das specifische Gewicht des Körpers, p' das des Wassers, a eine Con-

stante, so setzt der Verf. die Differentialgleichung an:

$$\frac{dv}{dt} = -g\left(\frac{p'}{p} - 1 + \frac{v^2}{a^2}\right),$$

deren Integration leicht bewerkstelligt wird. Bei der Discussion der erhaltenen Formeln werden geometrische Darstellungen zur Veranschaulichung herangezogen. Lp.

Éd. Collignon. Examen d'un lieu géométrique. Assoc. Franç. Limoges XIX. 38-49.

Ein schwerer, homogener, prismatischer Stab OA besitzt in O ein Gelenk, um welches er sich drehen kann, und taucht mit dem anderen Ende A in eine Flüssigkeit mit horizontaler Oberfläche HH'. Die Mittellinie OA des Stabes trifft HH' in B; den Ort von B zu finden, wenn das Niveau HH' sich ändert. In Polar-Coordinaten wird dieser Ort durch die Gleichung dargestellt:

$$r^2 = R^2 - \tfrac{1}{3}a^2\text{tg}^2\theta,$$

in welcher die Constante R verschiedene Werte besitzt, wenn der Punkt O ausserhalb und wenn er innerhalb der Flüssigkeit sich befindet. Für einen sehr kleinen Winkel zu beiden Seiten der durch den Gelenkpunkt gelegten Horizontale hört die Formel auf anwendbar zu sein; in diesem Winkel hat die Curve im allgemeinen unendliche Zweige. Vom Einflusse der Capillarität ist abgesehen worden. Lp.

P. Crueger. Die Bedingung des Druckmaximums für eine durch den Stoss einer strömenden Flüssigkeit in Kreisbahn fortbewegte Fläche und die Verwertung der Ergebnisse für die Construction von Wind- bezw. Wasserrädern und Propellern. Pr. Gymn. Stolp. 31 S.

Auf Grund der Hypothese, dass der Druck einer Flüssigkeit gegen eine Fläche proportional dem Quadrate der Normalcomponente der relativen Geschwindigkeit sei, berechnet der Verfasser den Druck, welchen eine Fläche erfährt, deren Mittellinie sich auf einer Kreiscylinderfläche bewegt und sich dabei selbst um diese Mittellinie in gewisser Weise dreht. Dieser

Druck ist natürlich in jedem Augenblick eine Function des Winkels φ, welchen die durch die Axe des Cylinders und durch die Mittellinie der bewegten Fläche gelegte Ebene mit der zur Stromrichtung normalen Ebene einschliesst, des Winkels α, den die Fläche mit dem eben bezeichneten zugehörigen Axenschnitt bildet, und des Verhältnisses a der Geschwindigkeit der Fläche zu der Strömungsgeschwindigkeit, multiplicirt mit dem Quadrate der letzteren selbst. Die Abhängigkeit des Winkels α von φ wird nun zunächst so bestimmt, dass in jedem Augenblick die Arbeitsgeschwindigkeit ein Maximum wird. Das Verhältnis a der beiden Geschwindigkeiten bestimmt der Verfasser so, dass die Arbeitsgeschwindigkeit für $\varphi = 0$ möglichst gross wird. Dann bestimmt der Verfasser auf dem Wege der Rechnung verschiedene Mechanismen, mit deren Hülfe es möglich ist, den ermittelten Zusammenhang $\left[\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right]$ zwischen α und φ zu realisiren. Zum Schluss benutzt der Verfasser die entwickelten Principien zur Construction eines neuen Propellers, der in seiner Wirksamkeit mit der Schaufel und mit dem Ruderrad verglichen wird.

Die Entscheidung der Frage, ob und in wie weit der neue Apparat den älteren überlegen ist, muss bei der Unsicherheit aller derartiger Theorien der Praxis überlassen werden. Die mathematischen Hülfsmittel, welche in der Abhandlung zur Verwendung gelangen, gehen nicht über die Ausführung einfacher Quadraturen hinaus. F. K.

Mau. Untersuchungen über die Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen. Z. f. Bauwesen. XL. 75-102.

Der Verfasser leitet unter Voraussetzungen, die er selbst nicht als völlig bewiesen ansieht, für die Geschwindigkeit die Formel

$$V = \sqrt{\frac{R}{\alpha f_1(J) + \beta f_2(J) R + \gamma f_3(J) R^2}} \sqrt{RJ}$$

ab, in welcher R den Quotienten aus Querschnitt und benetztem Umfang und J das Gefälle bedeutet.

Dann wird dieselbe mit den vom Captain Cunningham 1874 und 1879 vorgenommenen Messungen verglichen.

Weiter vergleicht der Verfasser seine Formel mit der Bazin'schen und mit der Ganguillet-Kutter'schen Formel. Schliesslich werden die von Darcy und Bazin in ihren Recherches hydrauliques mitgeteilten Messungen herangezogen. F. K.

MÖLLER. Zum Studium des Flussbaues. Die Stosskraft des Wassers, die Festigkeit der Sohle, das Geschiebe und die Bewegung feinerer Sinkstoffe. Z. f. Bauwesen. XL. 481-504.

Die durch den Zusatz des Titels vielleicht entstehende Vermutung, dass die Abhandlung mathematisches Interesse haben könnte, ist ungerechtfertigt. F. K.

G. TOLKMITT u. C. RUPRECHT. Ueber das Zuschlagen der Schleusenthore im strömenden Wasser. Z. f. Bauwesen. XL. 131-138.

Discussion im Anschluss an die in F. d. M. XX. 1888. 1010 besprochene Abhandlung des Herrn Tolkmitt. F. K.

E. CAVALLI. Sulla perdita di carico nelle condutture d'aria compressa. Rom. Acc. L. Rend. (4) VI_2. 187-195.

Der Verfasser versucht eine theoretische Bestimmung des Druckhöhenverlustes bei Flüssigkeitsbewegungen, welche unter Druck erfolgen. Grundlage der Untersuchung ist der Gedanke, dass die bei einem Druckverlust Π in der Längeneinheit zur Ueberwindung der Widerstände verwendete Arbeit $\Pi\Omega v$, wo Ω den Querschnitt und v die Geschwindigkeit bezeichnet, gleich der Summe der zur Ueberwindung der Reibung an der Gefässwand verwendeten Arbeit und der zur Ueberwindung der inneren Reibung verwendeten Arbeit sein müsse. Bezeichnet man mit C den Umfang des Querschnittes, mit w die mittlere Geschwindig-

keit an demselben, so wird der erste Teil gleich

$$\tfrac{1}{2}(a+b\gamma w^2)wC$$

gesetzt, während der andere gleich $Cf(v-w)$ gemacht wird. So erhält man:

$$\Pi\Omega v = \tfrac{1}{2}(a+bw^2)wC+Cf(v-w).$$

Der Coefficient f wird $= -\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial\varrho}\right)_{\varrho=R}$, $\Omega = \pi R^2$, $C = 2\pi R$. Nach einer Betrachtung über die Verteilungs-Geschwindigkeit ergiebt sich

$$v = w+\frac{\Pi}{8\varepsilon}R^2, \qquad f = \tfrac{1}{2}\pi R\Pi,$$

$$\Pi R = a+b\gamma w^2.$$

Bei Gasen soll $a = 0$ gesetzt werden dürfen. Für den Coefficienten ε setzt der Verfasser einen Ausdruck von der Form $\varepsilon = \frac{1}{8}\lambda b\gamma w\psi(R)$ und erhält aus dem für v angegebenen Ausdruck

$$\Pi R\frac{R}{\lambda\psi(R)} = b\gamma w(v-w).$$

Eliminirt man aus dieser und der vorher angegebenen Gleichung für Π den Wert w, so folgt

$$\Pi R = \frac{b\gamma v^2}{\left[1+\frac{R}{\lambda\psi(R)}\right]^2},$$

aus welcher Formel sich der Druckhöhenverlust für die Länge L leicht berechnen lässt. F. K.

P. Willner. Die wirtschaftlich zweckmässigste Geschwindigkeit des Wassers in Druckrohren bei künstlicher Hebung. Anordnung von Verteilungsleitungen auf Rieselfeldern. Z. deutsch. Ing. XXXIV. 103-106, 150-152, 1242.

Der Verfasser erörtert zunächst die verschiedenen Kosten, welche Anlage und Betrieb einer Leitung verursachen können. Zur Bestimmung der Rohrweite erhält man nach Lösung einer einfachen Maximumsaufgabe eine Gleichung fünfzehnten Grades. Der zweite Teil beschäftigt sich mit der günstigsten Art, wie Punkte durch Rohrnetze in Verbindung zu setzen sind.

F. K.

R. Mehmke. Die wirtschaftlich zweckmässigste Rohrweite von Druckrohren bei künstlicher Hebung. Z. deutsch. Ing. XXXIV. 1008-1011.

Der Verfasser beschäftigt sich mit einer Vereinfachung der von Herrn Willner abgeleiteten Gleichung und zeigt dann, wie dieselbe vermöge des von ihm selbst entwickelten logarithmisch-graphischen Verfahrens gelöst wird. F. K.

Ph. Forchheimer. Ueber Rohrnetze. Z. deutsch. Ing. XXXIV. 679-681.

Die Abhandlung, welche sich auch an eine im vorhergehenden Bande des Jahrbuches besprochene Abhandlung des Verfassers [p. 975] anschliesst, behandelt ähnliche Aufgaben wie die des Herrn Willner (s. S. 971). Die Aufgabe, die günstigste Anlage eines Rohrnetzes zu finden, wird mit der anderen in Beziehung gesetzt, ein Seilpolygon zu finden, in dessen Seiten Kräfte gegebener Grösse wirken. F. K.

G. Luschka. Graphische Darstellung der Gefällsverteilung bei Axialturbinen. Civiling. (2) XXXVI. 96-102.

Im Anschluss an die von Herrmann (Aachen) eingeschlagenen Untersuchungsmethoden bestimmt der Verfasser für ein gegebenes Geschwindigkeitsdiagramm die Gefällsverteilung und umgekehrt für eine gegebene Gefällsverteilung das Geschwindigkeitsdiagramm.

Die Arbeit hat ein wesentlich technisches Interesse, weshalb wir bezüglich der Einzelheiten auf diese selbst verweisen.

F. K.

J. L. Hoorweg. Experimenteel onderzoek omtrent de beweging van het bloed. Amst. Verhand. K. Ac. v. W. XXVII. 72 S.

Diese Untersuchung über die Blutbewegung ist hauptsächlich experimentell-physikalischer Natur. Es kommen hier aber auch

einige theoretische Betrachtungen vor. Diese beziehen sich auf den Druck in Röhren, durch welche eine Flüssigkeit strömt, auf die Weber'sche Theorie der Wellenbewegung der Flüssigkeiten in elastischen Röhren und deren Anwendung auf die Blutbewegung. G.

K. Keller. Neueste Bestimmung der Wassermenge bei Ueberfällen durch H. Bazin. Z. deutsch. Ing. XXXIV. 880-885.

Wiedergabe der preisgekrönten Versuchsergebnisse des französischen Hydraulikers, welche sich mitgeteilt finden C. R. 1888 und Annales des Ponts et Chaussées 1890. F. K.

E. Ganguillet and W. R. Kutter. A general formula for the uniform flow of water in rivers and other channels. Translated from the German by Rudolph Hering and John C. Trautwine, Jun. London. Macmillan and Co. (1889). [Nature XLI. 411-412.]

A. de Caligny. Recherches d'hydraulique. Belg. Bull. (3) XIX. 313-317, 503-509; XX. 6-10.

R. A. Sampson. On Stokes's current function. Lond. R. S. Proc. XLVIII. 46-52.

Auszug aus einer Abhandlung, die in Lond. Phil. Trans. 1891 erschienen ist. Cly.

A. B. Basset. On the effect of oil on disturbed water. Nature XLI. 297.

Bringt die in einem Aufsatze von Hrn. R. Beynon (Nature XLI. 205-206) besprochenen Thatsachen in Verbindung mit einigen Formeln aus der „Hydrodynamics" des Verfassers.

Lp.

A. KORN. Ueber die Anwendbarkeit combinatorischer Methoden zur Reduction von Problemen der Hydrodynamik, Elektrodynamik und der magnetischen Induction. Diss. Leipzig. 43 S. 8°.

H. BREME. 182 Tafeln zur graphischen Berechnung der Wassermengen und zur Bestimmung der Profilabmessungen der Wasserläufe nach der Formel von Ganguillet und Kutter. Freiburg. Imp. 4°.

O. RIESS. Experimentelle Untersuchungen über das Thomson'sche Gesetz der Wellenbewegung auf Wasser. Exner Rep. XXVI. 102-135.

Von mathematischem Interesse ist in Abschnitt I die Herleitung des „Thomson'schen Gesetzes":

$$v^2 = n^2\lambda^2 = g\left\{\frac{\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi}{\lambda}T\right\},$$

und historisch interessant in Abschnitt V die chronologisch geordnete bezügliche Litteratur von 1804 bis 1889 (S. 133-135).

Lp.

Capitel 5.

Potentialtheorie.

E. MATHIEU. Theorie des Potentials und ihre Anwendungen auf Elektrostatik und Magnetismus. Deutsch von H. Maser. Berlin. J. Springer. X u. 374 S. 8°.

Das Buch zerfällt in zwei Teile, deren erster der Theorie des Potentials gewidmet ist, während der zweite, etwas umfangreichere, die Anwendungen dieser Theorie auf Elektrostatik und Magnetismus behandelt. Die allgemeinen Sätze der Theorie wer-

den durchweg streng analytisch bewiesen. Bei der Ableitung des Dirichlet'schen Princips folgt der Verfasser Dirichlet, ohne auf die gegen dessen Beweisverfahren erhobenen Bedenken Rücksicht zu nehmen. Eigenartig ist die Herleitung der charakteristischen Eigenschaft des Flächenpotentials mittels Ueberganges von einer beliebig gestalteten Massenschicht von endlicher Dicke zu der mit Masse belegten Fläche. An die allgemeinen Sätze über das Newton'sche Potential knüpft der Verfasser nicht nur die entsprechenden Sätze über das logarithmische Potential, sondern unterzieht auch das sogenannte calorische Potential, d. h. die Function, welche der Gleichung $\Delta u = -\alpha^2 u$ genügt, ferner das von Lamé eingeführte zweite Potential, das durch die Gleichung $\Delta\Delta u = 0$ bestimmt wird, endlich das Potential krystallisirter Körper, für welches

$$A\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + C\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

ist, einer eingehenden Betrachtung. Weiter wird die Theorie des Potentials mit derjenigen der Wärme verglichen, woran sich die Transformation von ΔV auf orthogonale krummlinige Coordinaten schliesst. Die Erörterung des Begriffs der isothermen Flächen und Linien führt nebenbei zur Betrachtung der Knotenlinien einer Membran. Der erste Teil schliesst mit einem Capitel über die Anziehung verschiedener Körper, welche von Flächen zweiter Ordnung begrenzt werden.

Im zweiten Teile werden zuerst die allgemeinen Principien der Elektrostatik besprochen und dann auf verschiedene specielle Probleme angewandt, insbesondere solche, welche die Elektricitätsverteilung auf einer und zwei leitenden Kugeln betreffen. Dabei werden einige die Kugelfunctionen betreffende Formeln bewiesen, und es wird die Bedeutung der Transformation durch reciproke Radien für gewisse Probleme der mathematischen Physik erörtert. Ferner wird auch das Potential konischer Leiter behandelt und dabei der Einfluss von Spitzen und Kanten abgeleitet. Im dritten Capitel wird recht ausführlich die Theorie der elektrischen Polarisation dielektrischer Medien dargelegt und auf die Theorie der Condensatoren angewandt. In gleicher Ausführ-

lichkeit folgt die allgemeine Theorie des Magnetismus, und daran schliessen sich endlich specielle Probleme der magnetischen Induction. Dabei gelangen auch die Eigenschaften der diamagnetischen Körper, die magnetische Induction krystallisirter Körper, sowie die Theorie des Erdmagnetismus zur Besprechung. In einem kurzen, von dem Uebersetzer herrührenden Anhange wird die Aufgabe der Elektricitätsverteilung auf zwei Kugeln noch nach einer anderen Methode als im Text behandelt, nämlich mit Anwendung bipolarer Coordinaten.

Hiernach unterscheidet sich das Mathieu'sche Buch von anderen Lehrbüchern der Potentialtheorie teils durch Hereinziehung verwandter Probleme, teils durch die Reichhaltigkeit der Anwendungen. Diese Eigenartigkeit sowohl, als die Klarheit und Gründlichkeit der Behandlung des Stoffes lassen das Werk als durchaus empfehlenswert erscheinen. Die Uebersetzung ist gut.

(Vgl. auch das Referat über das französische Original in F. d. M. XVII. 1885. 1088.) Wn.

H. Hovestadt. Lehrbuch der angewandten Potentialtheorie. (Kleyer's Encyklopädie.) Stuttgart. J. Maier. VIII u. 320 S. 8°.

Der Verfasser macht den Versuch, die wichtigsten Anwendungen der Potentialtheorie, insbesondere die auf Elektrostatik, darzustellen, ohne von den Begriffen der Differential- und Integralrechnung Gebrauch zu machen. Das Potential wird mittels des Begriffs der mechanischen Arbeit definirt; der mathematische Ausdruck für die Grösse dieser Arbeit aber wird selbst in dem einfachsten Falle, dem der Anziehung nach einem festen Centrum, nicht abgeleitet (wenigstens nicht im Texte), sondern einfach dogmatisch gelehrt. In ähnlicher Weise wird eine Reihe von Sätzen der Potentialtheorie benutzt, ohne dass dieselben bewiesen werden. Eine derartige Darstellung, die durchweg mit unbewiesenen Formeln operirt, mag unter Umständen für den Praktiker von Nutzen sein, einen wissenschaftlichen Wert hat sie nach Ansicht des Referenten nicht.

In einem kurzen (16 Seiten umfassenden) Anhange benutzt der Verfasser auch Differential- und Integralrechnung und beweist einzelne der im Text benutzten Formeln. Es handelt sich aber dabei nur um eine Zusammenstellung einzelner zusammenhangloser Rechnungen, die nicht geeignet sind, über die Begriffe der eigentlichen Potentialtheorie genügende Klarheit zu verbreiten; die wichtigsten Sätze dieser Theorie bleiben unbewiesen.

Die Anwendungen der Potentialtheorie auf Elektrostatik umfassen etwa drei Viertel des Buches. Voran geht ein Abschnitt über das Gravitationspotential der (als homogene Kugel angenommenen) Erde. Den Schluss bilden drei Abschnitte über Contactelektricität, über den elektrischen Strom und das elektromagnetische Kraftfeld. Die hier besprochenen Fragen sind keineswegs erschöpfend erledigt, selbst soweit es ohne höhere Rechnung möglich wäre. — Die Darstellung ist durchweg von unnötiger Breite und ermüdender Weitschweifigkeit. Die „erläuternden Beispiele“ und Uebungsaufgaben enthalten meist nur Zahlenbeispiele zu den vorher besprochenen Formeln. Wn.

J. A. Bonifacio. Theoria da funcção potencial e do potential. Porto.

Darlegung des elementaren Teils der Potentialtheorie.

Tx.

G. A. Maggi. Sui principi della teoria della funzione potenziale. Nuovo Cimento. (3) XXVII. 21-33.

Abdruck aus Lomb. Ist. Rend. (2) XXII. 647-57 (F. d. M. XXI. 1889. 980).

H. Poincaré. Sur les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique. American J. XII. 211-294.

In der Einleitung wird die „Familienähnlichkeit“ aller Probleme der mathematischen Physik gekennzeichnet und die Frage erörtert, welchen Wert in diesem Felde absolute mathematische

Strenge hat. — § 1 bringt eine neue, sehr einfache Methode zum strengen Nachweis des Dirichlet'schen Princips. Sie basirt darauf, 1) dass man positive Massen in einer Kugel immer in bestimmter Weise durch Massen auf der Oberfläche ersetzen (es wird dafür gesagt, die Kugel „auskehren") kann mit der Wirkung, dass das Potential für jeden äusseren Punkt sich nicht ändert, für jeden inneren vermindert wird, 2) auf einem von Harnack aufgestellten Convergenzsatze über unendliche Reihen mit positiven Potentialen als Gliedern, und endlich auf folgendem neuen Satze: Ist ein Körper K gegeben, so kann man immer (auf mannigfache Weise) eine unendliche Reihe von Kugeln S_1, S_2, S_3, ... finden, sodass jede Kugel ganz ausserhalb K liegt und jeder Punkt ausserhalb K mindestens einer der Kugeln angehört. Denkt man sich nun eine Kugel Σ, die K ganz im Innern enthält, ihr Radius sei R, und auf ihrer Oberfläche die Masse R gleichmässig verteilt, und kehrt nun der Reihe nach S_1, S_2, S_1, S_2, S_3, S_1, S_2, S_3, S_4, ... aus, so convergirt das Potential V_n derjenigen Verteilung, die man nach n dieser Operationen hat, in jedem Punkte mit wachsendem n nach einem bestimmten Grenzwerte V, und diese Function V löst das Problem der elektrostatischen Verteilung auf der Oberfläche von K. Dabei war zunächst vorausgesetzt, dass in jedem Punkte dieser Oberfläche die Tangentialebene und die zwei Hauptkrümmungsradien völlig bestimmt sind; es dürfen aber auch eine endliche Anzahl konischer Punkte auf der Oberfläche von K liegen. Die Methode lässt sich auch zum directen Beweise des Dirichlet'schen Princips verwenden.

Weiter wird das Fourier'sche Problem der Erkaltung eines Körpers in Angriff genommen. Es ist eine Function V zu finden, die im Innern eines Körpers der Gleichung $\frac{\partial V}{\partial t} = a^2 \Delta V$, an der Oberfläche der Gleichung $\frac{\partial V}{\partial n} + hV = 0$ genügt; a^2 und h sind bestimmte positive Constanten. Die Lösung, die gegeben wird, lässt, wie der Verfasser bemerkt, dieselben Einwände wie Riemann's Beweis des Dirichlet'schen Princips zu. Es bedeute

$d\tau$ das Volumen-, $d\omega$ das Oberflächen-Element des Körpers; es werde

$$A = \int F^2 d\tau, \quad C = \int FG\, d\tau,$$
$$B = h\int F^2 d\omega + \int\left(\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right) d\tau$$

gesetzt, unter F und G Functionen von x, y, z verstanden, die Integrale über den ganzen Körper erstreckt. Es sei U_1 diejenige Function F, für welche $A = 1$, B ein Minimum ist; U_2 diejenige Function F, für welche $A = 1$, $C = 0$ für $G = U_1$ und B ein Minimum ist; U_3 dasjenige F, wofür $A = 1$, $C = 0$ für $G = U_1$, U_2 und B ein Minimum ist u. s. w.; ferner k_p der Wert von $\frac{B}{A}$ für U_p. Es genügt dann U_p den Gleichungen

$$\Delta U_p + k_p U_p = 0 \text{ (im Innern)},$$
$$\frac{\partial U_p}{\partial n} + hU_p = 0 \text{ (an der Oberfläche)}.$$

Man hat immer $k_{p+1} > k_p$ (für $>$ kann hier unter Umständen auch $=$ eintreten), ferner stets $\frac{\partial k_p}{\partial h} > 0$, $\frac{dk_p}{k_p} < \frac{dh}{h}$, weiter, wenn $h > 0$ ist, $k_p > 0$. Es zeigt sich weiter für $h = 0$ und damit auch für alle $h > 0$, zuerst bei Körpern, die sich in eine endliche Anzahl Parallelepipeda, dann weiter bei convexen Körpern und solchen, die sich in eine endliche Anzahl convexer zerlegen lassen, dass k_p mit wachsendem p über alle Grenzen wächst.

Nun wird erwähnt, dass die gesuchte Function V im allgemeinen nicht nach Potenzen von t entwickelt werden kann, und es wird darauf aufmerksam gemacht, mit welcher Vorsicht bei partiellen Differentialgleichungen zu verfahren ist. — Für $t = 0$ soll V gegeben sein. Es sei $A = \int V^2 d\tau$ und A_0 der Wert von A für $t = 0$, so ergiebt sich $A < A_0 e^{-2ak_1 t}$ und damit $\lim A = 0$ für $t = \infty$; ferner ist $A\frac{dB}{dt} - B\frac{dA}{dt} < 0$, das B für $F = V$ genommen. Es sei $J_p = \int VU_p d\tau$ und J_p^0 der Wert von J_p für

$t = 0$, so findet man $J_p = J_p^0 e^{-a^2 k_p t}$. Es sei V_0 die Temperatur V zur Zeit $t = 0$. Macht man den Ansatz

$$V_0 = A_1 U_1 + A_2 U_2 + \cdots + A_p U_p + R_0,$$

so wird $S_0 = \int R_0^2 d\tau$ ein Minimum, was als besonders günstige Bestimmung von $A_1, A_2, \ldots, A_p$ betrachtet wird, wenn man allgemein $A_m = J_m^0 = \int V_0 U_m d\tau$ nimmt.

Setzt man dann

$$V_1 = J_1 U_1 + J_2 U_2 + \cdots + J_p U_p + R,$$

so kann man immer p so gross wählen, dass in einem gegebenen Augenblick $S = \int R^2 d\tau$ so klein wird, wie man will; denn man findet $S < S_0 e^{-a^2 k_{p+1} t}$. Es convergirt also S gegen 0; von R ist dieses nicht bewiesen, doch damit physikalisch höchst wahrscheinlich gemacht.

Von den mannigfachen weiteren Eigenschaften, welche für die U_p nachgewiesen werden, und welche Analoga zu Eigenschaften von Potentialfunctionen darstellen, sei erwähnt, was nicht leicht festzustellen ist, dass diese Functionen im ganzen Körper, nicht allein im Innern, stetig sind; dabei wird vorausgesetzt, der Körper lasse sich in eine endliche Anzahl convexer Körper zerlegen. — Es wird schliesslich darauf aufmerksam gemacht, dass die Fourier'sche Differentialgleichung ja aus Differenzengleichungen hervorgegangen ist, welche den Wärmeaustausch zwischen einer endlichen Anzahl von Molecülen bestimmen, und dass somit die Schwierigkeiten bei Behandlung des Problems der Erkaltung unter Zugrundelegung der Differentialgleichung nur erkünstelte sind. Es wird untersucht, was den Functionen U bei den Differenzengleichungen entspricht, und dies giebt Gelegenheit, die Bedeutung der Aufgabe, eine quadratische Form in eine Summe von Quadraten zu zerlegen, für die Physik eingehend zu erörtern. Mk.

G. KIRCHHOFF. Beweis der Existenz des Potentials, das an der Grenze des betrachteten Raumes gegebene Werte hat, für den Fall, dass diese Grenze eine überall convexe Fläche ist. Acta Math. XIV. 179-183.

Ein bereits vor Jahren verfasster Aufsatz, nach des Verfassers Tode durch Frau Kowalevski mitgeteilt. Die darin von Kirchhoff entwickelte Methode ist dieselbe, die man C. Neumann verdankt, und welche von diesem die Methode des arithmetischen Mittels genannt ist. Mk.

C. NEUMANN. Ueber einige Fundamentalsätze der Potentialtheorie. Leipz. Ber. XLII. 327-340.

Die Sätze, dass für einen Körper von endlicher Ausdehnung und einer an verschiedenen Stellen verschiedenen Dichtigkeit $\varkappa$, die, absolut genommen, eine gegebene positive Grösse nicht überschreitet und eine integrirbare Function der Coordinaten ist, das Potential V, ferner $\frac{\partial V}{\partial x}$ immer existiren und in jedem Punkte stetig sind, ferner, dass bei Voraussetzung gewisser weiterer Eigenschaften von $\varkappa$, welche Hölder (Beiträge zur Potentialtheorie, Inauguraldiss. Stuttgart 1882) bezeichnet hat, $\varDelta V = -4\pi\varkappa$ ist, $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$ stetig sind, werden durch etwas einfachere und mehr anschauliche Betrachtungen als bei Hölder begründet. Es werden zunächst für die absoluten Beträge gewisser, über die Elemente einer Kugel zu erstreckender Summen obere Grenzen bestimmt; nach Absolvirung der darin liegenden elementaren Hülfssätze ergeben sich jene Potentialsätze von selber. Mk.

P. MOLENBROEK. Ein elementarer Beweis des Green'schen Satzes. Wiedemann Ann. XL. 157-160.

Der Kernpunkt ist, dass man sich einen beliebigen Raum durch Kraftlinien in sehr dünne Röhren zerteilt denkt und die Green'sche Formel zuvörderst für eine einzelne Röhre in Erwägung zieht. Mk.

L. Lecornu. Sur une propriété des systèmes de forces qui admettent un potentiel. C. R. CXI. 395-397.

Berechnet man die Drehungsmomente, welche irgend welche wirkenden Kräfte auf ein unendlich kleines Volumenelement V um Axen durch dessen Schwerpunkt O ausüben, so findet man diese sämtlich Null, wenn die drei Hauptträgheitsmomente von V um O gleich sind und zudem die Kräfte ein Potential haben. Daraus kann man leicht die Helmholtz'schen Sätze über Wirbelbewegungen entnehmen. Mk.

M. Gebbia. Su certe funzioni potenziali di masse diffuse in tutto lo spazio infinito. Palermo Rend. IV. 217-252.

Es bedeute K einen Körper oder eine mit einer einfachen oder mit einer Doppelschicht belegte Fläche, und K liege ganz im Endlichen; es sei V das Potential von K. Es wird das Potential solcher Massenverteilungen W über den ganzen unendlichen Raum untersucht, bei welchen die Dichtigkeit in jedem Punkte durch V oder durch eine erste oder eine zweite Ableitung von V nach den Coordinaten dargestellt ist. Es lässt sich das Potential von W dann immer durch ein Integral über K ausdrücken. Es möge die erste der aufgestellten Formeln als Beispiel dienen. Ist K ein Körper, M die Gesamtmasse von K, ϱ die Dichtigkeit in einem Elemente dS von K, R die Entfernung von dS nach dem Punkte, für den das Potential von W in Frage kommt, so ist dieses Potential ∞, wenn $M \gtrless 0$ ist, gleich

$$-2\pi \int_K R\varrho\, dS,$$

wenn $M = 0$ ist. — Die betrachteten Potentiale genügen im ganzen Raume der Poisson'schen Gleichung. — Die Resultate des Aufsatzes sollen demnächst in einer Untersuchung über das Gleichgewicht eines isotropen elastischen Körpers Verwendung finden. Mk.

H. Petrini. Om de till ekvationen $\Delta\Phi = 0$ hörande ortogonala koordinatssystemen. Upsala. Akad. Abh. 1890. 104 S. 8°.

Ausführliche Untersuchungen über die orthogonalen Coordinatensysteme (u, v, w), welche einer particulären Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

die Form

$$\Phi = F(u, v, w) P(u) Q(v) R(w)$$

geben, wo F keine willkürliche Constante enthält, $P(u)$, $Q(v)$, $R(w)$ die Form $P(u) = A_1 P_1(u) + A_2 P_2(u) + \cdots$ haben, während $A_1, A_2, \ldots$ willkürliche Constanten sind, und eine der Functionen P, Q, R ausserdem eine willkürliche Constante enthält. Bdn.

Laplace, Ivory, Gauss, Chasles und Dirichlet. Ueber die Anziehung homogener Ellipsoide. Abhandlungen. Herausgegeben von A. Wangerin. (Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften. Nr. 19). Leipzig. W. Engelmann. 118 S. 8°.

Den Inhalt bilden die folgenden Abhandlungen: 1) P. S. Laplace, Des attractions des sphéroïdes homogènes terminés par des surfaces du second ordre. 1782. Nach Mécanique céleste, T. II. Livre III, Chap. 1 (p. 3—22). 2) James Ivory, aus den Philos. Trans. of the Royal Society of London 1809, p. 345—372. 3) Carl Friedrich Gauss, Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum methodo nova tractata, Commentationes Societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores. Vol. II. 1813. 4) M. Chasles, Neue Lösung des Problems der Anziehung eines heterogenen Ellipsoids auf einen äusseren Punkt. Liouville J. V. 465-488 (1840). 5) P. G. Lejeune Dirichlet, Ueber eine neue Methode zur Bestimmung vielfacher Integrale. Berl. Ber. 1839, 18-25. — Die ersten vier Arbeiten sind nach dem Plane von Ostwald's Klassikern in deutscher Uebersetzung veröffentlicht. Für die Treue derselben sowie für den correcten Abdruck der Formeln bürgt die Sachkunde des Herausgebers, der sich auf dem Felde seiner eigenen Arbeiten bewegt und in den Anmerkungen S. 109-118 dankenswerte historische und sachliche Erläuterungen bietet. Lp.

F. MERTENS. Das Potential einer homogenen Ellipse. Monatsh. f. Math. I. 425-428.

Der Kunstgriff, der auf überraschend einfache Weise zum Ziele führt, besteht darin, das über die Ellipsenfläche mit den Halbaxen A, B erstreckte Doppelintegral

$$(1)\qquad \iint \frac{dx\,dy}{r}$$

[r ist die Entfernung des angezogenen Punktes (a, b, c) von einem Punkte (x, y) der Ellipse] durch das über den Raum $R > 0$ zu erstreckende dreifache Integral

$$(2)\qquad \frac{1}{\pi}\iiint \frac{dx\,dy\,dt}{\sqrt{R}}$$

zu ersetzen, wo

$$R = 1 - \frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} - t^2 r^2$$

ist. In (2) lassen sich die Integrationen nach x und y leicht ausführen, und dadurch geht das dreifache Integral (2) in das einfache

$$(3)\qquad 2AB \int \frac{\sqrt{1-T}\,dt}{\sqrt{(1+A^2t^2)(1+B^2t^2)}}$$

über, wo

$$T = \frac{a^2t^2}{1+A^2t^2} + \frac{b^2t^2}{1+B^2t^2} + c^2t^2$$

ist. Das Integral (3) ist über alle Werte von t auszudehnen, für die $1-T$ positiv ist. Statt dessen braucht man nur über alle positiven t, für die $1-T>0$ ist, zu integriren und dann zu verdoppeln. Setzt man endlich noch $t^2 = \frac{1}{s}$, so erhält man aus (3) unmittelbar den bekannten Ausdruck für das Potential der homogenen Ellipse. Wn.

CH. IBRÜGGER. Ueber die Anziehung eines homogenen Kugelabschnitts. Pr. Gymn. Greifenberg i. P.

Das Potential des homogenen Kugelabschnitts wird dadurch gewonnen, dass man den Abschnitt durch Ebenen, die der

Grundfläche parallel sind, in unendlich dünne Scheiben zerlegt, auf die einzelnen Elementarscheiben den bekannten Ausdruck für das Potential eines homogenen Kreises anwendet und dann summirt. Das so erhaltene Doppelintegral lässt sich durch Vertauschung der Reihenfolge der Integration auf ein einfaches reduciren; und aus diesem ergeben sich unmittelbar die Ausdrücke für die Anziehungscomponenten des Kugelabschnitts. Die resultirenden Integrale werden nicht auf ihre einfachste Form gebracht, sondern in dieser Hinsicht wird auf Grube (Zeitschr. f. Math. XIV; vgl. F. d. M. II. 1869-1870. 758) verwiesen. Aus den Anziehungscomponenten des Kugelabschnitts werden dann durch Differentiation nach dem Kugelradius die Componenten der Anziehung abgeleitet, welche die zu dem Segment gehörige unendlich dünne Kugelschale ausübt. Endlich werden die Resultate noch auf specielle Lagen des angezogenen Punktes angewandt. Dabei bestätigt sich eine von Schellbach (Poske Z. III, vergl. das Referat unten) gemachte Bemerkung, nach welcher der Teil einer unendlich dünnen Kugelschale, der von einem äusseren Punkte sichtbar ist, diesen Punkt ebenso stark anzieht, als der unsichtbare Teil der Schale.

Wesentlich Neues enthält die Arbeit weder hinsichtlich der Resultate noch hinsichtlich der zu ihrer Ableitung benutzten Methode. Wn.

H. Züge. Das Potential eines homogenen Ringkörpers mit elliptischem Querschnitt. J. für Math. CVII. 148-161.

Der Inhalt der Arbeit stimmt, von einigen Aenderungen in der Darstellung abgesehen, mit dem einer Programmabhandlung des Verfassers überein, über die im vorigen Jahre (F. d. M. XXI. 1889. 989) berichtet ist. Wn.

K. Schellbach. Ueber die Anziehung einer homogenen Kugeloberfläche auf einen äusseren Punkt nach dem Newton'schen Gesetze. Poske Z. III. 74-76.

Darstellung des üblichen Beweises ohne Benutzung der Bezeichnung und der Formeln der Infinitesimalrechnung. Die Be-

merkung, „dass in keinem Lehrbuche der Physik die angedeuteten Gesetze auf eine einfache Weise abgeleitet werden", trifft nicht mehr zu, seitdem in Thomson und Tait, Theoretische Physik, § 471, ein ganz elementarer Beweis geliefert ist, der auch schon in andere Werke Aufnahme gefunden hat. Man vergleiche Schell, Theorie der Bewegung und Kräfte, erste Auflage vom Jahre 1870, S. 662. Lp.

M. Thiesen. Détermination de la variation de la pesanteur avec la hauteur au pavillon de Breteuil. Travaux et Mém. du Bur. international des poids et mesures VII. 32 S. Folio.

Aus dieser rein experimentellen, übrigens sehr interessanten Arbeit kommt für das Jahrbuch hauptsächlich nur die Note auf S. 29 in Betracht. „Es liegt ein gewisses praktisches Interesse vor, den Körper von gegebenem Volumen zu kennen, in dessen Nähe die Aenderung der Anziehung ein Maximum ist. Sind r und φ die Polar-Coordinaten der Meridiancurve dieses Umdrehungs-Körpers, e_1 und e_2 die beiden Abstände des angezogenen Punktes vom Coordinatenanfang, λ eine von den Abmessungen des Körpers abhängige Constante, so folgt nach den Principien der Variationsrechnung:

$$0 = \lambda - \frac{e_1 - r\cos\varphi}{(r^2 + e_1^2 - 2re_1\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}} + \frac{e_2 - r\cos\varphi}{(r^2 + e_2^2 - 2re_2\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}},$$

woraus besondere Fälle leicht folgen". So ergiebt sich für $e_2 = \infty$, $e_1 = 0$ z. B. $\lambda r^2 + \cos\varphi = 0$, der Playfair'sche Körper grösster Anziehung. Lp.

C. V. Boys. On the Cavendish experiment. Nature XLI. 155-159.

Vergl. F. d. M. XXI. 1889. 1142. Das Experiment, welches die Gravitations-Constante zu bestimmen geeignet ist, wurde inzwischen mit gleichem Erfolge an verschiedenen Orten wiederholt. Lp.

H. Weber. Ueber eine das Potential elektrischer Ströme betreffende Aufgabe. Naturf. Ges. Bremen. 9.

E. Vorsteher. Darstellung des Potentials des Ellipsoids durch Lamé'sche Functionen. Diss. Berlin. 50 S. 8°.

T. Wakelin. The mechanical principles of a theory of gravitation briefly indicated. Wellington N. Z. (1889.)

Elfter Abschnitt.
Mathematische Physik.
Capitel 1.
Molecularphysik, Elasticität und Capillarität.
A. Molecularphysik.

Manoel B. Bahia. Las unidades. Soc. Argentinea. XXX.

Dieser Artikel enthält eine ausführliche Erörterung der Wahl der fundamentalen und der abgeleiteten Einheiten, welche man bei der Messung physikalischer Grössen gebraucht. Nach der Theorie folgt eine grosse Zahl technischer Anwendungen.

Tx. (Lp.)

C. J. Stoney. On texture in media, and on the non-existence of density in the elemental aether. Phil. Mag. (5) XXIX. 467-478.

Bei den gewöhnlichen Untersuchungen in der Dynamik sind die Integrationen über das Innere der behandelten Körper oder über ihre Oberflächen zu erstrecken. Diese Operation begreift Annahmen in sich, welche mit dem Vorhandenen in der wirklichen sachlichen Natur nicht übereinstimmen. So wird zur Gewinnung des Wasserdrucks gegen eine Schleuse eine Integration über die Oberfläche zwischen dem Wasser und der Schleuse ausgeführt, und diese Integration schliesst die Annahme ein: 1) dass die

Grenze eine Oberfläche ist, und 2) dass die Elemente, in welche wir diese Oberfläche zum Zwecke der Integration geteilt vorstellen, beliebig klein gemacht werden können, ohne dass sie darum aufhören, dem Gesetze des Druckes in schweren Flüssigkeiten unterworfen zu sein. Diese Annahmen werden aber hinfällig, wenn wir die Zerteilung so weit fortgeführt denken, dass sie die Stufe der molecularen Grössen erreichen. Die Grenze zwischen Wasser und Schleuse würde aufhören eine Oberfläche zu sein, es würde die fortwährend sich verschiebende Trennungsfläche zwischen den beiderseitigen Molekeln, welche einzeln auf einander nach ihren besonderen Arten einwirken, in energischer Bewegung sein. Diese Vorgänge sind derartig, dass, wenn unmessbare Anzahlen dieser Einzelwirkungen gehäuft werden, sie angenähert, als Ergebnis des ganzen Treibens, das Gesetz des der Tiefe proportionalen Druckes erzeugen. Was wir also als eine physikalische Eigenschaft des Mittels annehmen, ist in Wirklichkeit ein Festhalten der Häufung einer umfassenden Anzahl einzelner Geschehnisse, die durch eine Art statistischen Processes zusammen gruppirt sind, und dies kann durch den Ausdruck beschrieben werden, dass die dynamischen Eigenschaften des Mittels von seinem Gefüge (texture) herstammen, indem man unter Gefüge alles begreift, was in ihm im engsten Umkreise sich vollzieht. Die Beziehung dieser Anschauung zu den gewöhnlichen dynamischen Eigenschaften der Mittel (Elasticität u. s. w.) wird betrachtet. Der Verfasser unterscheidet den Aether der Elemente von dem Aether als Lichtträger. Der erstere ist durchaus gleichförmig in allen seinen Teilen, bis Bewegungen Unterschiede in ihm hervorrufen, und in allen mathematischen Untersuchungen von Bewegungen in demselben muss ein Massenelement durch ein Volumenelement ersetzt werden; der Aether der Elemente ist einfach der Raum in neuer Anschauung. Andererseits ist der Lichtäther ein gefügtes Mittel, und der Begriff der Dichte kann als Ersatz dafür eingeführt werden, dass man einige der in Wirklichkeit vor sich gehenden Bewegungen einzeln in Betracht zu ziehen hat. Gbs. (Lp.)

E. Ovazza. **Sulle superficie d'influenza per le reazioni, d'ostacolo e molecolari, nei sistemi staticamente determinati.** Torino Atti XXV. 342-364.

In einem statischen System seien als äussere Kräfte nur parallel gerichtete (z. B. Gewichte) vorhanden. Legt man dann an einer Stelle einen Querschnitt senkrecht zur Richtung dieser Kräfte und denkt sich in dieser Richtung an jedem Punkte des Querschnitts eine Kraft P angreifend, so wird die Kraft P in jedem Punkte eine bestimmte reactio hervorrufen, bestehend in einer resultirenden Kraft und einem resultirenden Kräftepaar. Die Reaction kann eine Widerstands- oder eine Molecularreaction sein. Man denke sich nun in jedem Punkte des Querschnitts unter Berücksichtigung des Vorzeichens senkrecht zu dem Querschnitte eine Strecke aufgetragen, welche einer bestimmten Componente proportional ist, so werden die Endpunkte der Strecken eine Fläche erzeugen. Es giebt zu jedem Querschnitte sechs solche Flächen, drei für die Componenten der resultirenden Kraft und drei für die des resultirenden Drehmomentes. Diese Flächen nennt der Verfasser superficie d'influenza per le reazioni. In der vorliegenden Arbeit werden die Grundzüge einer Theorie dieser Flächen entwickelt und angegeben, wie man die Ordinaten der Flächen aus bestimmten virtuellen Verrückungen finden kann. Eine Anwendung auf Specialfälle wird für eine zweite Note versprochen. Br.

W. Voigt. **Ueber die innere Reibung der festen Körper, insbesondere der Krystalle. Teil I.** Gött. Abh. XXXVI. 47 S.

Die Arbeit giebt die Grundlagen einer Theorie der bei elastischen Deformationen auftretenden Widerstandskräfte der inneren Reibung. Wie die elastischen Kräfte als lineare homogene Functionen der Verrückungen, so werden die Reibungskräfte als eben solche Functionen der Verrückungsgeschwindigkeiten angenommen, womit nach des Verfassers Ansicht wahrscheinlich erst ein Fehler dritter Ordnung begangen wird. Im allgemeinen Fall

sind die Reibungskräfte also durch 36 Constanten definirt. Die Reduction dieser Constanten für die Symmetriebedingungen der verschiedenen Krystallsysteme wird vollständig durchgeführt. Im weiteren Verlauf beschäftigt sich der Verfasser mit der Möglichkeit einer experimentellen Prüfung der erhaltenen Resultate und einer experimentellen Bestimmung der Constanten. In Frage würden kommen die Beobachtung der Dämpfung gleichförmiger, sehr langsamer Schwingungen cylindrischer Stäbe oder beliebiger, unendlich kleiner Schwingungen unendlich dünner cylindrischer Stäbe. Für beide Fälle entwickelt der Verfasser entsprechende Formeln. Es treten dabei als typisch gewisse homogene lineare Functionen der Elasticitätsconstanten und ebensolche Functionen der Reibungsconstanten auf. Der Verfasser nennt die einen Elasticitätsmoduln (im allgemeinen Sinne), die anderen Reibungsmoduln und giebt zum Schlusse eine Zusammenstellung der unabhängigen Moduln beider Art für die verschiedenen Krystallsysteme. Br.

E. Boggio-Lera. Una relazione fra il coefficiente di compressibilità cubica, il peso specifico ed il peso atomico dei metalli. Rom. Acc. L. Rend. (4) VI_1. 165-168.

Der Verfasser stellt den Satz auf: „Der kubische Compressibilitätscoefficient einer Substanz ist proportional der in der Volumeneinheit enthaltenen Anzahl von Molekeln und der Aenderung der Entfernung zweier auf einander folgenden Molekeln für die Einheit der Kraft (wenn diese Kraft einen longitudinalen Zug oder Druck ausübt). Ist der Satz richtig, so muss zwischen den in der Ueberschrift erwähnten Grössen eine bestimmte Beziehung bestehen. Die Richtigkeit dieser Beziehung wird an dem vorhandenen, dürftigen Beobachtungsmaterial für Glas und einige Metalle geprüft. Br.

M. Brillouin. Principes généraux d'une théorie élastique de la plasticité et de la fragilité des corps solides. Ann. de l'Éc. Norm. (3) VII. 345-360.

Der Verfasser betrachtet diejenigen Probleme, wo zu einem

System elastischer Kräfte nicht notwendig ein eindeutig bestimmtes System von elastischen Verrückungen gehört, obwohl das Umgekehrte natürlich der Fall ist. Es giebt in solchen Problemen Verrückungen, welche in bestimmten Richtungen gar keine elastischen Kräfte hervorrufen. Für die isotropen Körper werden die beiden Fälle behandelt, wo $\mu = 0$ und wo $3\lambda + 2\mu = 0$ ist. Im ersten Falle rufen nur die Verrückungen, welche das Volumen zu ändern streben, im zweiten nur solche, welche es invariant lassen, elastische Kräfte hervor. Der erste ist charakteristisch für „plastische" Körper, der zweite führt auf die Probleme der Zerbrechbarkeit, Spaltbarkeit u. s. w. Die Betrachtungen, die in Wahrheit viel umfassender sind, als sie sich hier andeuten lassen, und ihre Beziehungen zu den verschiedenen Problemen dauernder Deformation werden entwickelt und auf Krystalle ausgedehnt. In zwei späteren Abhandlungen sollen insbesondere die Probleme der Krystallspaltbarkeit und der Brechbarkeit behandelt werden. Br.

E. Blasius. Beitrag zur geometrischen Krystallographie. Wiedemann Ann. XLI. 538-564.

In der Absicht, die bisherigen vereinzelten Verwertungen der Geometrie der Lage für die Krystallographie auf eine gemeinsame Grundlage zu stellen, entwickelt der Verfasser die allgemeinsten Eigenschaften eines „krystallographischen Netzes", d. h. eines Möbius'schen Netzes, dem als eine Ebene die unendlich ferne angehört. Aus diesem Netze werden dann „krystallographische Ebenenbündel, Ebenenbüschel und Strahlenbüschel" definirt und mit solchen Hülfsmitteln in rein synthetischer Weise eine Reihe von allgemeinen Sätzen der geometrischen Krystallographie abgeleitet. Die Methode wird schliesslich für alle Untersuchungen in dieser Disciplin empfohlen. Br.

K. Fuchs. Ueber die Entstehung organischer Cylindergebilde. Wien. Ber. XCIX. 967-1006.

Den Gegenstand der Untersuchung bilden die beim Wachsen organischer Gebilde auftretenden Spannungen und ihr Einfluss auf die Intensitäten des Wachstums an verschiedenen Stellen. Unter einfachen Annahmen über die Wachstumsfunction wird die mathematische Grundlage entwickelt und auf eine Reihe der einfachsten Fälle, insbesondere auf Cylindergebilde angewandt.

Br.

O. Wiedeburg. Ueber die Hydrodiffusion. Wiedemann Ann. XLI. 675-711.

Die Fick'sche Diffusionstheorie, welche auf der Annahme beruht, dass die in der Zeiteinheit durch die Querschnittseinheit diffundirende Salzmenge von der Concentration an der gedachten Stelle unabhängig und nur dem Concentrationsgefälle proportional sei, stellt bekanntlich die Beobachtungen nicht genügend dar. Der Verfasser erweitert deshalb die Theorie unter der Annahme, dass die diffundirende Menge ausserdem noch einer linearen Function der Concentration selbst proportional sei. Die drei Fälle, in denen sich das Problem (zum Teil auch nur näherungsweise) integriren lässt, geben Lösungen, welche den Fick'schen ganz entsprechend gebaut sind. Nur treten statt einer Diffusions-Constante deren zwei auf, zu denen sich als dritte der Temperatur-Coefficient gesellt. Es folgt eine eingehende Beschreibung der Versuche, die der Verfasser zur Prüfung seiner Theorie mit Kaliumbichromat und Kupfersulfat vorgenommen hat. Die Ergebnisse dieser Versuche werden durch die Formel befriedigend dargestellt. Auch einige frühere Versuche anderer werden discutirt. Zum Schluss wird gezeigt, dass die von Nernst aufgestellte Formel den Beobachtungen nicht gerecht wird.

Br.

E. Riecke. Moleculartheorie der Diffusion und elektrolytischen Leitung. Gött. N. 1890. 509-517.

Der Verfasser giebt auf Grund der kinetischen Theorie der Lösungen eine Anzahl von Formeln für die in Betracht kom-

menden Grössen. Die Concentration der Lösungen wird dabei als so gering angenommen, dass die Zusammenstösse der Molekeln des gelösten Stoffes mit ihresgleichen gegen die Zusammenstösse mit den Molekeln des Lösungsmittels zu vernachlässigen sind. Ebenso muss das Volumen der in der Volumeneinheit enthaltenen Molekeln gegen diese Volumeneinheit selbst zu vernachlässigen sein. Br.

Ch. Éd. Guillaume. Sur la théorie des dissolutions. Almeida J. (2) IX. 91-97.

Man nehme an, eine Lösung sei gerade concentrirt genug, damit die Wirkungssphären der aufgelösten Molekeln sich berühren können; diese Molekeln werden in Wirklichkeit sich so stellen, dass sie die Bedingung erfüllen. Wir werden dann sagen, die Lösung sei in „kritischer Concentration". Fügt man eine gewisse Menge des Auflösungsmittels hinzu, so werden die aufgelösten Molekeln in gewissem Masse frei.

Aus dieser Begriffsbestimmung werden einige Folgerungen abgeleitet. Lp.

Ph. A. Guye. Le coefficient critique et la constitution moléculaire des corps au point critique. Almeida J. (2) IX. 312-326.

Es sei n das Brechungsverhältnis, d die Dichtigkeit eines Stoffs, $R=\frac{n^2-1}{n^2+2}\cdot\frac{1}{d}$, M das Moleculargewicht, ϑ die Temperatur in Graden Celsius, π der Druck, so nennt der Verfasser das Verhältnis

$$\varkappa=\frac{273+\vartheta}{\pi}=VMR,$$

wo V eine Constante bedeutet, den „kritischen Coefficienten". Durch Betrachtungen, welche verschiedenen Gebieten der Physik und Chemie entlehnt sind, zeigt der Verf., dass das Covolumen b der Flüssigkeitsgleichung dem molecularen Brechungsvermögen proportional ist. Wenn man berücksichtigt, dass in der Grund-

gleichung des Hrn. van der Waals

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=R(1+\alpha t)$$

diese Constante b dem vierfachen Volumen gleich ist, das von den sphärisch vorausgesetzten Gasmolekeln unter der Druck- und Volumeneinheit bei 0° eingenommen wird, so kann man, da unter diesen Bedingungen alle Gase dieselbe Anzahl von Molekeln enthalten, auch sagen, die Constante b sei dem wahren Molecularvolumen eines sphärisch vorausgesetzten Molekels proportional. Dies wird durch theoretische Ueberlegungen und durch Vergleiche mit den Daten der Experimente erläutert. Bemerkenswert erscheint auch der Satz: „Der kritische Coefficient eines Körpers ist gleich der Summe der kritischen Coefficienten der Atome, welche sein Molekel ausmachen, in manchen Fällen vermehrt um Coefficienten, die von der Natur der Verbindungen der Atome unter einander abhängen". Lp.

P. De Heen. Détermination des variations que le coefficient de diffusion éprouve avec la température pour des liquides différents de l'eau. Belg. Bull. (3) XIX. 197-206.

A. W. Rücker. The physics and chemistry of the „Challenger" expedition. Nature XLI. 361-364, 416-417.

P. G. Tait. Physical properties of water. Nature XLI. 416.

Während der erste Artikel eine Recension des Werkes enthält, das unter dem Titel „Report on the scientific results of the exploring voyage of H. M. S. Challenger 1873-1876. Physics and chemistry" Vol. II erschienen ist, und in welchem Hr. Tait den Artikel über die Zusammendrückbarkeit des Wassers geliefert hatte, bewegen sich die beiden folgenden Aufsätze in Angriffen und Verteidigung des Hrn. Tait und seines Recensenten. Lp.

C. Barus. The change of the order of absolute viscosity encountered on passing from fluid to solid. Phil. Mag. (5) XXIX. 337-355.

Die Arbeit ist hauptsächlich experimentell; sie enthält zwei Methoden zum Vergleiche des zähen Verhaltens der festen und flüssigen Körper. Gbs. (Lp.)

H. Lamb. On a certain theory of elastic after-strain. Nature XLI. 463.

Kritik des Versuchs, den Hr. K. Pearson in Lond. M. S. Proc. 1889 zu einer mathematischen Theorie der elastischen Nachwirkung gemacht hat. Lp.

B. Elasticitätstheorie.

É. Mathieu. Théorie de l'Élasticité des corps solides. Ire Partie: Considérations générales sur l'élasticité. Emploi des coordonnées curvilignes. Problèmes relatifs à l'équilibre d'élasticité. Plaques vibrantes. IIe Partie: Mouvements vibratoires des corps solides. Équilibre d'élasticité des lames courbes et du prisme rectangle. Paris. Gauthier-Villars et Fils. VIII + 219, IV + 184 S. 4°.

Ausführliche Anzeige beider Teile in Darboux Bull. (2) XIV. 161-164 und XV. 198-202 von Hrn. P. Duhem. „Wir wünschen, dass unsere Uebersicht trotz ihrer Unvollkommenheiten die hervorragenden Eigenschaften dieses Buches in eine gelungene Beleuchtung gebracht habe: die Eleganz, mit welcher die Principien gemäss den Lamé'schen Ideen aufgestellt sind; besonders die Vollendung der drei Capitel über die Torsion und die Biegung der Prismen, über die Stäbe, die Platten und die Membrane; alles, was de Saint-Venant, Kirchhoff, Clebsch und Boussinesq seit fünfzig Jahren an Ausgezeichnetem geschrieben haben, findet man in dieser völlig klaren und eleganten Darstellung gedrängt beisammen. Die beiden Teile des Buches von É. Mathieu

bilden das im weitesten Sinne abgefasste Lehrbuch der Elasticitätstheorie, welches man bis jetzt besitzt."

Als Bestandteile des von dem Verfasser geplanten Traité de Physique mathématique bilden sie dessen VI. und VII. Band. „Warum", klagt Hr. Duhem, „musste dieses mit solcher Schaffenskraft unternommene und fortgeführte Werk unvollendet bleiben? Die Elasticitätstheorie der festen Körper forderte als natürliche Folge eine Elasticitätstheorie des Aethers, in der die Verkettung der Gesetze der Optik darzulegen war gemäss den Principien, die von Fresnel festgelegt und in bewundernswerter Einheit und Harmonie von F. E. Neumann, Mac Cullagh, Green, Lamé und G. Kirchhoff entwickelt sind. In dem Augenblicke, als É. Mathieu die Abfassung dieses Werkes begann, hat der Tod ihn dahin gerafft, und er hat mit Schmerz sein zu wenig vorgeschrittenes Werk verlassen müssen, so dass die Veröffentlichung unmöglich ist". Lp.

E. Glinzer. Grundriss der Festigkeitslehre. Zum Gebrauche an Handwerkerschulen, insbesondere Baugewerk- und Maschinenbauschulen, sowie zum Selbstunterricht. Dresden. G. Kühtmann. VIII + 123 S. 8°.

Entsprechend den Kreisen, für welche das vorliegende Werkchen berechnet ist, verzichtet der Verfasser auf die Anwendung der höheren Mathematik. Deshalb kann er die wichtigsten Sätze der Festigkeitslehre auch nur bis zu einer gewissen Grenze entwickeln, während er die darüber hinausgehenden Sätze bloss dogmatisch anzugeben vermag.

Zug- und Druckfestigkeit, Schubfestigkeit und Drehungsfestigkeit werden abgeleitet. Bezüglich der letzteren ist zu bemerken, dass von der Deformation des Querschnittes, welche mit der Torsion bei allen nicht kreisförmigen Querschnitten verbunden ist, abgesehen wird, ein Verfahren, das nach neueren Untersuchungen nicht ganz gerechtfertigt erscheint.

Die Knickfestigkeit lässt sich, ohne die höhere Mathematik heranzuziehen, nicht ableiten; der Verfasser giebt daher, nach

einem nicht ganz einwandfreien Versuch einer angenäherten Bestimmung, die Euler'sche Formel ohne Beweis an.

Trotz dieser Mängel, welche mehr der Natur der Sache als der fehlenden Geschicklichkeit des Verfassers zugeschrieben werden müssen, dürfte das Werk für seinen Zweck um so mehr geeignet sein, als es eine grosse Zahl gut gewählter Beispiele enthält. F. K.

E. Isè. Sulla deformazione elastica di un corpo isotropo. Atti dell' Accademia Pontaniana. XX. 241-260.

Die Deformation eines elastischen Körpers kann als eine eindeutige Correspondenz:

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0, \quad \varphi_2(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0,$$
$$\varphi_3(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$$

ausgelegt werden, wobei x_1, x_2, x_3 die ursprünglichen, ξ_1, ξ_2, ξ_3 die veränderten Coordinaten irgend eines Punktes des Körpers bezeichnen. Sind die obigen Gleichungen linear, so hat man eine „affine" Correspondenz; im allgemeinen Falle heisst die Deformation:

$$\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_1}\right)_0 x_1 + \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_2}\right)_0 x_2 + \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_3}\right)_0 x_3 + \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial \xi_1}\right)_0 \xi_1 + \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial \xi_2}\right)_0 \xi_2$$
$$+ \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial \xi_3}\right)_0 \xi_3 = 0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

wo $(f)_0$ den Wert von f für $x_1 = x_1^{(0)}$, $x_2 = x_2^{(0)}$, $x_3 = x_3^{(0)}$, $\xi_1 = \xi_1^{(0)}$, $\xi_2 = \xi_2^{(0)}$, $\xi_3 = \xi_3^{(0)}$ bezeichnet, die „im Punkte $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$ tangentiale Affinität". Die „osculirende Affinität" wird analog definirt. — Die vorliegende Abhandlung ist der Untersuchung der Affinität überhaupt, und insbesondere der zu einer beliebigen Deformation tangentialen Affinität gewidmet.

Vi.

E. Padova. Il potenziale delle forze elastiche di mezzi isotropi. Ven. Ist. Atti (7) I. 445-451.

In seiner Abhandlung „La teoria di Maxwell negli spazi curvi" (Rom. Acc. L. Rend. V₁, F. d. M. XXI. 1017) hatte der Ver-

fasser in Anlehnung an die Vorgänge in ebenen Räumen auch für gekrümmte Räume als isotrop diejenigen Medien definirt, bei welchen das Potential durch eine Vertauschung der Coordinaten seine Form nicht ändert.

Der Verfasser zeigt, dass auch für Räume constanter positiver oder negativer Krümmung diese Definition der analytische Ausdruck für die gewöhnlich zu Grunde gelegte Definition der Isotropie ist, dass eine unendlich kleine Kugel durch verschiedene, bezüglich der Intensität äquivalente Kraftsysteme in gleiche Ellipsoide verwandelt wird. F. K.

E. Padova. Estensione del problema di De St. Venant. Rom. Acc. L. Rend. (4) VI_2. 95-102.

Mit Benutzung des Ausdrucks für das elastische Potential, welchen der Verfasser in seiner Abhandlung „La teoria di Maxwell negli spazi curvi“ gegeben, leitet der Verfasser zunächst die Differentialgleichungen des Gleichgewichts eines Körpers für beliebige Coordinaten ab und führt dann die Entwickelung unter speciellen Voraussetzungen über die Form des Linienelementes weiter durch.

Zunächst wird angenommen

$$(ds)^2 = (dx_1)^2+(dx_2)^2+p(dx_3)^2,$$

wo p allein von x_1 und x_2 abhängen soll; dann kann p entweder den Wert 1 oder x_2 annehmen, vorausgesetzt, dass die Coordinaten passend gewählt werden. Die Auffindung der Verrückungen kommt in dem zweiten Fall darauf hinaus, die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{x_2^2}\frac{\partial\Omega}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{x_2^2}\frac{\partial\Omega}{\partial x_2}\right)+\frac{c_1}{x_2^2} = 0$$

zu integriren. Vorausgesetzt ist, dass nur auf die Oberflächen $x_3 =$ const. Kräfte wirken, und zwar auch nur solche, deren Normalcomponente gleich Null ist.

Dann betrachtet der Verfasser den Fall eines schiefen Cylinders, bei welchem das Linienelement die Form

$$(ds)^2 = (dx_1)^2+(dx_2)^2+(dx_3)^2+2\cos\alpha(dx_1\,dx_3+dx_2\,dx_3)$$

hat. Hier kommt es darauf an, eine Function Ω zu finden,

welche der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2} = 0$$

genügt und am Rande vorgeschriebene Werte annimmt.

Die Rechnung, vermittelst deren der Verfasser zu seinen Resultaten gelangt, gestattet leider keinen Auszug. F. K.

G. Appelroth. Einige Anwendungen eines dem Green'schen ähnlichen Satzes auf die Gleichungen des Gleichgewichtes elastischer Körper. Arbeiten der phys. Section der Kaiserl. Gesellschaft für Freunde der Naturkunde. Moskau. III. Hft. 2. 14-17. (Russisch.)

Es werden für isotrope elastische Körper die Gleichung:

$$\frac{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} u_0 = \int (X'_n u + Y'_n v + Z'_n w)\, ds - \int (X_n u_1 + Y_n v_1 + Z_n w_1)\, ds$$

(wo

$$u_1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-x_0}{r}\right) - \frac{2(\lambda+2\mu)}{r(\lambda+\mu)},$$

$$v_1 = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x-x_0}{r}\right),$$

$$w_1 = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x-x_0}{r}\right)$$

ist und X'_n, Y'_n, Z'_n entsprechende Spannungen sind) und zwei andere ihr conjugirte Gleichungen abgeleitet. Bb.

C. Somigliana. Formole generali per la rappresentazione di un campo di forza per mezzo di forze elastiche. Lomb. Ist. Rend. (2) XXIII. 874-882.

Der Verfasser geht aus von einer früher gegebenen Darstellung für die Verrückung an einer Stelle im Innern eines endlichen Gebietes durch die auf dieses Gebiet wirkenden Kräfte und die an der Oberfläche stattfindenden Verrückungen (Annali di Mat. XVII, F. d. M. XXI. 1014) und erörtert zunächst die

Bedingungen, unter welchen die in Frage stehenden Formeln auf den unendlichen Raum ausgedehnt werden können.

Er untersucht dann den Fall, dass das elastische Gleichgewicht durch Kräfte aufrecht erhalten wird, welche von Massen innerhalb gewisser Körper $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ ausgeübt werden, und durch Oberflächenkräfte, welche an $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, sowie an anderen Flächen $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$ angebracht sind. Die letzteren werden als nicht geschlossene Flächen gedacht und dann so fortgesetzt, dass sie den ganzen Raum in zwei Teile zerlegen, von denen der eine die Flächen σ völlig umschliesst.

Indem er nun zunächst für einen Punkt die Verrückung darstellt und die oben erwähnten allgemeinen Formeln auf den Raum anwendet, in welchem der Punkt liegt, und dann weiter einen Ausdruck hinzufügt, welcher verschwindet, erhält er eine für Punkte beider Räume gleichmässig geltende Formel für die Verrückung. Aus dieser werden die Componenten der Deformation abgeleitet und mit deren Hülfe dann die Componenten der elastischen Kräfte bestimmt. So gelangt man schliesslich zu den Ausdrücken für die elastischen Kräfte, durch welche die Wirksamkeit Newton'scher Attractionskräfte dargestellt werden kann.

Zum Schluss wendet der Verfasser seine Aufmerksamkeit den Verhältnissen an den Unstetigkeitsflächen zu. F. K.

Silvio Canevazzi. Contributo alla teoria dei sistemi elastici. Bologna Mem. (4) X. 673-686.

Die hier entwickelten Sätze nehmen ihren Ausgangspunkt von dem Betti'schen Theorem. Letzteres besagt bekanntlich Folgendes: Sind $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$ und $P''_1, P''_2, \ldots, P''_n$ zwei Kraftsysteme, von denen das eine die Angriffspunkte in Richtung der Kräfte des zweiten Systems um $\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_n$ verschiebt, während $\delta''_1, \delta''_2, \ldots, \delta''_n$ die Verschiebungen bedeuten, welche die Angriffspunkte in Richtung der ersten Kräfte durch das zweite System erfahren, so ist:

$$\Sigma P'\delta'' = \Sigma P''\delta'.$$

Sind T'_{pq} und T''_{pq} die Spannungen, welche in den Stäben ent-

stehen, welche den p^{ten} und q^{ten} Knotenpunkt verbinden, λ'_{pq} und λ''_{pq} die zugehörigen Verlängerungen der Stäbe, so ist

$$\lambda'_{pq} = \frac{T'_{pq} l_{pq}}{E_{pq} A_{pq}}, \qquad \lambda''_{pq} = \frac{T''_{pq} l_{pq}}{E_{pq} A_{pq}}.$$

Es ist leicht einzusehen, dass man hat:

$$\Sigma P'\delta'' = \Sigma T'_{pq}\lambda''_{pq} = \Sigma \frac{T'_{pq} T''_{pq} l_{pq}}{E_{pq} A_{pq}} = \Sigma P''\delta'.$$

Es möge sich jetzt das eine Kraftsystem auf eine Einzelkraft P_k reduciren, welche den Wert (1) hat, dann möge $T'_{pq} = (T_{pq})_k$ werden. Die obige Gleichung reducirt sich auf

$$\delta''_k = \Sigma_{(pq)} \frac{T''_{pq}(T_{pq})_k l_{pq}}{E_{pq} A_{pq}}.$$

Nun kann aber T''_{pq} offenbar gleich $\Sigma P''_i (T_{pq})_i$ geschrieben werden, und wir erhalten:

$$\delta''_k = \Sigma_i P''_i \Sigma \frac{(T_{pq})_i (T_{pq})_k l_{pq}}{E_{pq} A_{pq}}.$$

Um jetzt die Horizontalcomponenten des Auflagerdrucks zu berechnen, welcher in einem festen Knotenpunkte entsteht, berechnet man zunächst für eine Einheitskraft dieser Richtung die Grössen $(T_{pq})_B$ und erhält dann die Verschiebung, die in Richtung dieser Grösse durch das gegebene Kraftsystem entstehen würde:

$$\delta_B = \Sigma_i P''_i \Sigma \frac{(T_{pq})_i (T_{pq})_B l_{pq}}{E_{pq} A_{pq}}.$$

Durch die Reaction Q gegen diese Horizontalcomponente entsteht aber nach entgegengesetzter Richtung die Verschiebung:

$$\delta'_B = Q \Sigma \frac{(T_{pq})_B^2 l_{pq}}{E_{pq} A_{pq}}.$$

Man hat also

$$Q = \frac{\Sigma_i P_i \Sigma \dfrac{(T_{pq})_i (T_{pq})_B}{E_{pq} A_{pq}} l_{pq}}{\Sigma \dfrac{(T_{pq})_B^2 l_{pq}}{E_{pq} A_{pq}}} = \Sigma P_i V_i.$$

Dann bestimmt der Verfasser auf dieselbe Weise die Spannung in einem überzähligen Stabe.

Zum Schluss dehnt er seine Auseinandersetzungen auf vollwandige Träger aus. F. K.

E. Fontaneau. Sur l'équilibre d'élasticité des corps isotropes. Assoc. Franç. Limoges XIX. 49-69.

Der Verf. giebt in den Verhandlungen der Gesellschaft S. 146 den Inhalt seiner Arbeit in folgenden Worten an: „Der wesentliche Zweck dieser Arbeit ist der, die partiellen Differentialgleichungen der Elasticität in einem besonderen Falle zu integriren, wenn die elementare Rotation mit einer der Haupt-Dilatationen in der Richtung zusammenfällt. Um jedoch das Problem in Gleichung zu bringen und um es zu discutiren, hat Hr. Fontaneau die Theorie, deren er sich bedient, darlegen müssen, weil sie nicht veröffentlicht ist. Wenn es ihm gestattet ist, die Aufmerksamkeit auf einige Punkte dieser Arbeit zu lenken, so möchte er den Satz hervorheben, welcher es ermöglicht, die beiden Aufgaben des elastischen Gleichgewichts einer sphärischen Enveloppe auf eine einzige zurückzuführen, und ferner die Methode, welche benutzt ist, um den Bedingungen an der Oberfläche zu genügen.“ Lp.

E. Fontaneau. Sur l'équilibre d'élasticité d'une enveloppe sphérique. Nouv. Ann. (3) IX. 455-471.

Es handelt sich um das elastische Gleichgewicht einer Kugelschale, wenn entweder an der Oberfläche Verrückungen oder die Druckkräfte gegeben sind.

Zunächst werden die Beziehungen zwischen den auf zwei verschiedene Coordinatensysteme bezogenen Ableitungen der Verrückungen nach den Coordinaten einerseits und den neun Richtungscosinus andererseits aufgestellt.

Dann werden die Componenten der Verrückung u, v, w durch gewisse Hülfsfunctionen Ω_1, Ω_2, Ω_3 ausgedrückt, welche einer einfachen Potentialgleichung genügen. Unter der Voraussetzung, dass die Functionen Ω homogene Functionen der Coordinaten sind, lassen sich dann umgekehrt die Ω auch durch die u, v, w ausdrücken. Jetzt wird das zweite Coordinatensystem so gewählt, dass die eine Richtung zusammenfällt mit dem Radiusvector eines Punktes; dann erhält man die Function Ω aus-

gedrückt durch die Verrückungen u, v, w, die räumlichen Polarcoordinaten r, ϑ, φ und die Ableitungen der ersteren nach den letzteren. Unter der Voraussetzung der Homogeneität lassen sich die Ableitungen nach r noch ersetzen durch die u, v, w selbst, sodass die fraglichen Functionen Ω an der Oberfläche durch die u, v, w bestimmt sind. Um nun die Lösung des Problems für beliebige u, v, w zu haben, hat man die letzteren nur nach Kugelfunctionen zu entwickeln und dann die Ω aus einzelnen Gliedern zusammenzusetzen.

Um die zweite Aufgabe zu lösen, leitet der Verfasser zunächst für die mit dem Radius multiplicirten Componenten der auf ein Kugelflächenelement wirkenden elastischen Kraft Differentialgleichungen ab, welche ganz ähnlich denen für die Componenten der Verrückung sind. Man kann also zu ihrer Bestimmung das bei der ersten Aufgabe eingeschlagene Verfahren anwenden. Nachdem die in Frage stehenden Grössen gefunden sind, lassen sich, wie der Verfasser zeigt, auch die Verrückungscomponenten finden. F. K.

A. B. Basset. On the extension and flexure of a thin elastic plane plate. London M. S. Proc. XXI. 33-51.

Die meisten Theorien gebogener Platten setzen voraus, dass die Flächenelemente, welche der Mittelebene der Platte parallel sind, keinen Druck erleiden. Dass, genau genommen, diese Voraussetzung nicht immer zutrifft, ist klar; sie wird z. B. offenbar dann unrichtig, wenn auf die Oberflächen der Platte Kräfte wirken. Der Verfasser legt seiner Betrachtung die Annahme zu Grunde, dass die in Frage stehenden Componenten mit abnehmender Dicke der Platte unendlich klein von der zweiten Ordnung werden, und dass ferner diese Grössen eben so wie alle anderen in Frage kommenden Grössen sich nach Potenzen des Abstandes von der Mittelebene entwickeln lassen.

Der Verfasser denkt sich nun durch zwei Paare paralleler Ebenen, welche zu einander und zu der Mittelebene senkrecht stehen, aus der Platte ein elementares rechtwinkliges Parallelepipedon geschnitten. Die Druckkräfte, welche an einer der

Seitenflächen wirken, lassen sich zu drei Einzelkräften, deren Richtungen parallel den Seitenkanten sind, und zu zwei Kräftepaaren vereinigen, deren Axen parallel denjenigen Linien sind, in welchen die vier Seitenebenen des Parallelepipedons die Mittelebene schneiden. Das dritte Kräftepaar, dessen Axe senkrecht zu der Mittelebene steht, kommt deshalb nicht in Betracht, weil zwei der Seitenkanten Differentiale sind.

Durch diese Grössen und durch die Componenten der äusseren Kräfte kann man dann die fünf Integrale

$$\int_{-h}^{+h} \frac{d^2u'}{dt^2}\,dh', \quad \int_{-h}^{+h} \frac{d^2v'}{dt^2}\,dh', \quad \int_{-h}^{+h} \frac{d^2w'}{dt^2}\,dh',$$

$$\int_{-h}^{+h} h'\,\frac{d^2u'}{dt^2}\,dh', \quad \int_{-h}^{-h} h'\,\frac{d^2v'}{dt^2}\,dh'$$

ausdrücken, wo u', v', w' die Componenten der Verrückung eines Punktes sind, der sich im Abstande h' von der Mitte der Platte befindet, und $2h$ die Dicke der Platte bezeichnet.

Die gemachten Voraussetzungen liefern nun für die obigen Integrale die Werte:

$$2h\,\frac{d^2u}{dt^2} + \tfrac{1}{3}h^3E\,\frac{\partial\ddot{K}}{\partial x}, \qquad 2h\,\frac{d^2v}{dt^2} + \tfrac{1}{3}h^3E\,\frac{\partial\ddot{K}}{\partial y}, \qquad 2h\,\frac{d^2w}{dt^2} + \tfrac{1}{3}h^3E\nabla^2\ddot{w},$$

$$-\tfrac{2}{3}h^3E\,\frac{\partial\ddot{w}}{\partial x}, \qquad -\tfrac{2}{3}h^3E\,\frac{\partial\ddot{w}}{\partial y},$$

wo $K = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ ist und sich jetzt alle Grössen auf die Mittelplatte beziehen.

Ferner kann man die vier oben erwähnten Kräftepaare ebenfalls durch w ausdrücken. Ist das geschehen, so erhält man durch Elimination der beiden auf der Mittelebene senkrecht stehenden Componenten der Druckresultanten eine Differentialgleichung für w.

Dann beschäftigt sich der Verfasser mit den Grenzbedingungen, wo besonders die Bedeutung der von Kirchhoff entdeckten Thatsache, dass nicht, wie Poisson angenommen hatte, drei,

sondern nur zwei Grenzbedingungen zu erfüllen sind, erläutert wird.

Nun berechnet der Verfasser das elastische Potential und leitet daraus die noch fehlenden Componenten der auf die Seitenflächen des Parallelepipedons wirkenden Kräfte ab. F. K.

A. B. Basset. On the extension and flexure of cylindrical and spherical thin elastic shells. Lond. Phil. Trans. CLXXXI. 433-480.

Die verschiedenartigen Theorien dünner elastischer Schalen, welche bis jetzt ersonnen wurden, sind in einer kürzlich erschienenen Arbeit von Hrn. Love besprochen worden (Lond. Phil. Trans. CLXXIX. 491-546, F. d. M. XX. 1888. 1075), und es scheint, dass die meisten, wenn nicht alle, auf der Annahme beruhen, dass die drei mit R, S, T gewöhnlich bezeichneten Zwangskräfte Null sind; wie jedoch der Verfasser jüngst ermittelt hat, genügt eine nur oberflächliche Prüfung des Gegenstandes für den Nachweis, dass diese Annahme nicht in Strenge genau sein kann. Indessen kann bewiesen werden, dass, wenn die äusseren Flächen einer dünnen Schale nicht einem Drucke oder tangentialen Zwange unterliegen, diese Zwangskräfte von Grössen abhängen, die dem Quadrate der Dicke proportional sind, und jedesmal, wenn dies der Fall ist, dürfen sie bei der Berechnung des Ausdrucks für die von der Deformation herrührende potentielle Energie als verschwindend behandelt werden, weil sie der fünften Potenz der Dicke proportionale Glieder zur Folge haben, die also vernachlässigt werden dürfen. In dem vorliegenden Aufsatze wird auch durch eine indirecte Methode gezeigt, dass ein ähnlicher Satz in dem Falle cylindrischer und sphärischer Schalen gilt, und dass daher die Hypothese des Hrn. Love, obschon als eine Annahme nicht genügend, zu richtigen Ergebnissen führt. Ein allgemeiner Ausdruck für die von einer Deformation herrührende potentielle Energie in krummlinigen Coordinaten ist auch von Hrn. Love erhalten worden, und die Bewegungsgleichungen nebst den Grenzbedingungen sind hieraus mittels des

Princips der virtuellen Arbeit hergeleitet worden. Wenn dieser Ausdruck und die Gleichungen, zu denen er führt, richtig wären, so würde jede neue Theorie dünner Schalen unnötig sein; allein obgleich diejenigen Teile der Arbeit des Hrn. Love, welche von der Dicke der Schale abhängen, zweifellos richtig sind, so ist der Verfasser doch aus Gründen, die in der Abhandlung beigebracht werden, der Ansicht, dass die vom Kubus der Dicke abhängenden Glieder nicht genau richtig sind. Cly. (Lp.)

A. B. Basset. On the radial vibrations of a cylindrical elastic shell. London M. S. Proc. XXI. 53-58.

Bei der gewöhnlichen Behandlung der Biegung elastischer Platten und Schalen werden die Druckcomponenten für die der Mittelfläche parallelen Elemente gleich Null gesetzt. Die Zulässigkeit dieser Annahme nachzuweisen, ist um so wünschenswerter, als ohne diese Annahme die Aussichten auf eine befriedigende Theorie der Schwingungen von Platten und Glocken ziemlich gering sind.

Eine strenge Lösung erhält man offenbar, wenn man von den allgemeinen Gleichungen der Elasticitätstheorie ausgeht; diesem Vorgehen stellen sich jedoch so grosse mathematische Schwierigkeiten in den Weg, dass im allgemeinen auch dieses Verfahren aussichtslos erscheint.

Einer der wenigen Fälle, in denen diese Behandlung zum Ziele führt, ist derjenige radialer Schwingungen eines cylindrischen Körpers. Hr. Basset behandelt ihn zunächst auf die eben bezeichnete Weise, dann so, wie es bei der Theorie dünner Schalen geschieht. Beidemal ergeben sich dieselben Schwingungszahlen. F. K.

H. Lamb. On the flexure of an elastic plate. Lond. M. S. Proc. XXI. 70-90.

Hr. Lamb geht bei seiner Behandlung des in Frage stehenden Problems von folgenden Gesichtspunkten aus. Für die allgemeine Gestalt der Platte, namentlich ihrer Mittelfläche, wird

nicht die Art, wie die Einzelkräfte und Kräftepaare ein Gebiet von den Dimensionen der Plattendicke, ein sogenanntes Element, angreifen, von Bedeutung sein, sondern nur ihre Grösse. So wird z. B. ein Druck auf einer Seite der Platte keinen wesentlich anderen Effect hervorbringen, als ein Zug auf der anderen Seite.

Der Verfasser betrachtet nun zweierlei verschiedene Deformationen eines Plattenelementes. Die erste ist die von Kirchhoff betrachtete, deren wesentliche Annahmen die sind, dass erstlich die Mittelfläche keine Ausdehnung erleidet, dass zweitens die Linien, welche vor der Deformation auf der Mittelebene senkrecht standen, auch nach der Deformation diese Eigenschaft behalten, und dass drittens ein Flächenelement, welches der Mittelebene parallel ist, keinen Zug oder Druck erleidet.

Bei der anderen Deformation werden die Verrückungen in Richtung der drei Axen durch

$$\alpha = P\left(z - \frac{z^3}{3h}\right), \quad \beta = Q\left(z - \frac{z^3}{3h}\right), \quad \gamma = 0$$

dargestellt. Bei ihr haben die Kräfte, welche auf einen zur Mittelfläche senkrecht stehenden Schnitt wirken, die Richtung der Normale der Platte.

Für beide werden die Componenten und Momente der äusseren Kräfte bestimmt, welche den mit den Deformationen verbundenen elastischen Kräften das Gleichgewicht halten. Durch Superposition beider kann man es erreichen, einer äusseren Normalkraft und zwei Kräftepaaren, deren Axen parallel der x-Axe und der y-Axe sind, das Gleichgewicht zu halten.

Durch eine geeignete mathematische Behandlung gelangt dann der Verfasser zu der gewöhnlichen Beziehung zwischen der Krümmung der Mittelebene einerseits und den in Frage stehenden äusseren Kräften andererseits.

Nun wendet sich der Verfasser den Grenzbedingungen zu. Am Rande der Platte werden sich die Verhältnisse insofern ändern, als dort auch nicht mehr näherungsweise die Bedingungen erfüllt sind, welche im Innern vorausgesetzt wurden. Namentlich wird hier ein Linienelement, das ursprünglich zur Mittelebene

senkrecht war, nach der Deformation diese Eigenschaft nicht mehr haben. Andererseits werden sich diese Abweichungen auf ein Gebiet beschränken, dessen Breite nicht allzu gross im Vergleich zur Dicke der Platte ist. Wesentlich ist nun, dass an dem Normalschnitte, welcher zum Rande senkrecht steht, sich eine Kraft von der Richtung der Flächennormale geltend macht, die nicht nach der Längeneinheit gemessen werden kann, die vielmehr für eine unendlich kleine Länge einen endlichen Wert liefert. Führt man diese in die Gleichgewichtsbedingungen für ein Grenzelement der Platte ein, so erhält man drei Gleichungen. Eliminirt man nun die eben erwähnte unbekannte Kraft, so erhält man die beiden Grenzbedingungen von Kirchhoff.

Als erstes Beispiel zur Erläuterung der allgemeinen Entwickelung behandelt der Verfasser die gleichmässige antiklastische Krümmung, dann Schwingungen, welche sich auf einem von zwei parallelen Geraden begrenzten Bande fortpflanzen. Endlich stellt er Betrachtungen über rechteckige Platten an, welche darin gipfeln, dass in der Nähe der Ecke die Abweichung der deformirten Platte von der Ebene durch Grössen von der vierten Ordnung gegeben wird.

Zum Schluss behandelt der Verfasser noch ein Problem von den Grundgleichungen der Elasticitätstheorie aus. Es ergiebt sich, dass, wenn der Körper in eine dünne Platte übergeht, es thatsächlich für die Deformation gleichgültig ist, ob die äussere Kraft über die Dicke der Platte gleichmässig verteilt ist, oder ob sie nur auf die Oberflächen wirkt. F. K.

H. Lamb. On the deformation of an elastic shell.
Lond. M. S. Proc. XXI. 119-146.

Der Verfasser behandelt die Deformationen gekrümmter Flächen nach denselben Principien wie die der Platten. Es werden wieder zunächst zwei specielle Deformationen und die mit ihnen verbundenen elastischen Kräfte bestimmt. Dann werden die äusseren Kräfte hergeleitet, welche den genannten elastischen Kräften das Gleichgewicht halten. Hiernach werden die Grenzbedingungen aufgestellt. Es versteht sich wohl von selbst,

dass die Rechnungen für den vorliegenden Fall erheblich complicirter sind als für ebene Platten.

Zur Erläuterung wird dann zunächst die Kugelschale herangezogen, eingehender wird die cylindrische Schale behandelt. Zur Darlegung der an den freien Kanten einer offenen cylindrischen Schale gültigen Verhältnisse wird ein specielles Beispiel behandelt. F. K.

H. Lamb. On the deformation of an elastic shell. Nature XLI. 549.

Auszug aus einer, der Lond. M. S. vorgetragenen Arbeit. (Vergl. das Referat S. 1009.) Lp.

H. Schoentjes. Sur les déformations que font naître, dans un hémisphère creux métallique, le choc et la pression d'un corps dur. Belg. Bull. (3) XX. 295-305.

G. Van der Mensbrugghe. Rapport. Ibid. 237.

Die Deformationen haben eine grössere Regelmässigkeit, als man es von vorn herein vermutet hätte. Mn. (Lp.)

C. Chree. On the longitudinal vibrations of aelotropic bars with one axis of material symmetry. Quart. J. XXIV. 340-358.

Im Anschluss an frühere Untersuchungen [Quart. J. XXI. 287, Quart. J. XXIII. 317; F. d. M. XXI. 1060] behandelt der Verfasser in der vorliegenden Abhandlung die Longitudinalschwingungen eines Stabes mit kreisförmigem Querschnitte, dessen Axe zusammenfällt mit einer Symmetrieaxe der Substanz, aus welcher der Stab gefertigt ist. Dann erleidet jedes Teilchen neben der Verrückung w in Richtung der Axe eine Verrückung u_r in Richtung seines Abstandes von der letzteren.

Die Differentialgleichungen für beide werden zunächst aufgestellt und dann Lösungen von der Form:

$$u_r = r\psi(r)\cos(pz-\alpha)\cos kt,$$
$$w = \varphi(r)\cos(pz-\alpha)\cos kt$$

ermittelt, wobei die Functionen $\varphi(r)$ und $\psi(r)$ nach Potenzen von r entwickelt werden. Ausser den Constanten p, α, k treten in diesen Functionen zwei willkürliche Constanten a_0 und a_2 linear und homogen auf.

Die beiden Oberflächenbedingungen, welche zu erfüllen sind, liefern zwei homogene lineare Relationen zwischen a_0 und a_2, aus denen man durch Elimination eine Beziehung zwischen k und p erhält. Die Constante p ergiebt sich aus der Beschaffenheit der Enden des Stabes von der Länge l. Ist ein Ende frei, das andere fest, so muss $p = \frac{1}{l}(2i+1)\frac{\pi}{2}$ sein, hingegen muss bei zwei freien oder festen Enden $p = \frac{1}{l}2i\pi$ sein. Mit de Saint-Venant's Bezeichnung der Elasticitätsconstanten erhält man in zweiter Näherung:

$$\frac{k}{2\pi} = \frac{2i+1}{2l}\left(\frac{E}{\varrho}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{1-\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{a}{l}\right)^2\eta^2\left(\frac{2i+1}{2}\right)^2\right\}$$

resp. $\left[a \text{ Radius des Stabes}\right]$

$$\frac{k}{2\pi} = \frac{i}{2l}\left(\frac{E}{\varrho}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{1-\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{a}{l}\right)^2\eta^2 i^2\right\},$$

$$u_r = a_0 r p \eta \cos kt \cos(pz-\alpha),$$

$$w = a_0(1-\tfrac{1}{2}r^2p^2\eta)\cos kt\cos(pz-\alpha).$$

F. K.

L. Civinini. Intorno a un caso di piccole oscillazioni d'una superficie. Batt. G. XXVIII. 375-379.

Die Entwickelungen beruhen auf der Annahme, dass jedes Linienelement eine normale Zugkraft erleidet, welche eine ganze lineare Function der an derselben Stelle herrschenden Flächendilatation ist. Der Verfasser gelangt auf diese Weise zu Differentialgleichungen für Transversalschwingungen, welche mit denen von Membranen übereinstimmen. F. K.

W. Voigt. Bestimmung der Elasticitätsconstanten für Kalkspat. Unter Benutzung der Biegungsbeobachtungen von Baumgarten. Wiedemann Ann. XXXIX. 412-431.

W. Voigt. Einige Bemerkungen über die Gleitflächen des Kalkspats. Wiedemann Ann. XXXIX. 432-439.

Bericht F. d. M. XXI. 1889. 1038.

W. Voigt. Bestimmung der Elasticitätsconstanten des brasilianischen Turmalines. Wiedemann Ann. XLI. 712-724; Gött. Nachr. 1890. 279-295.

Der mathematische, auf rhomboedrisch-hemiedrische Krystalle bezügliche Teil der Abhandlung ist in früheren Abhandlungen des Verfassers enthalten. F. K.

H. Resal. Sur le mouvement d'un prisme, reposant sur deux appuis, soumis à l'action d'une force normale variable suivant une loi particulière, appliquée en un point déterminé de la fibre moyenne. C. R. CX. 1157-1160.

Die Differentialgleichung der Aufgabe

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -a^4 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$$

wird mit Hülfe der Substitution $y = TX$ auf die Integration der beiden Differentialgleichungen

$$\frac{1}{T}\frac{d^2 T}{dt^2} = -\frac{a^4}{X}\frac{d^4 X}{dt^4} = m^2,$$

$$\frac{d^4 X}{dx^4} = -4k^4 X$$

zurückgeführt, und es wird gezeigt, wie die Integrationsconstanten durch acht Gleichungen von gegebener Form bestimmt werden können. Lp.

A. M. Worthington. Bourdon's pressure gauge. Nature XLI. 296.

A. G. Greenhill. Bourdon's pressure gauge. Nature XLI. 517-518.

Lord Rayleigh. The Bourdon gauge. Nature XLII. 197.

Das Princip des Bourdon'schen Druckmessers wurde zufällig entdeckt (Institution of Civil Engineers XI. 14. 1851). Eine ele-

mentare Erläuterung der Theorie wurde von Lord Rayleigh in Lond. R. S. Proc. 1888 gegeben. Eine mathematische Theorie von Hill in Mess. (2) I. (F. d. M. III. 1871. 503) ist nicht einwandsfrei. Die von Hrn. Worthington versuchte Erklärung findet nicht die Billigung des Herrn Greenhill, welcher der Meinung ist, dass vorläufig die Aufstellung einer quantitativen Formel aussichtslos ist. Lp.

K. Pearson. On Wöhler's experiments on alternating stress. Mess. (2) XX. 21-37.

Es ist lange bekannt gewesen, dass elastische Körper, welche lange wiederholten Vibrationen oder schnellen Wechseln von Zwangskräften unterworfen werden, zuletzt unter weit geringeren Belastungen zusammenzubrechen scheinen, als den statischen Zerbrechungs-Belastungen entspricht. Die praktische Wichtigkeit dieser anscheinenden Ermüdung des Materials hat zu den Versuchen von Fairbairn, Wöhler und Bauschinger geführt. Die sorgfältigen Ergebnisse Wöhler's haben bei vielen Schriftstellern über die Stärke der Materialien die Annahme gewisser Gesetze, unter dem Namen der Wöhler'schen, für die sichere Grenze der Belastungen bei Materialien veranlasst, die Schwingungen unterworfen sind. Diese Gesetze besagen, dass eine moleculare Aenderung in einem Material sich vollzieht, welches einem wiederholten Zwange unterworfen wird, eine Aenderung, welche in demselben, einem continuirlichen Zwange von gleicher Grösse unterworfenen Materiale nicht stattfinden würde. Hr. Pearson widerspricht der Meinung, dass irgend eine deutliche moleculare Aenderung geschieht, die einer Vibration oder wiederholten Belastung eigentümlich wäre. Er glaubt, dass in jedem Falle, bei welchem eine geringere Last als die statische ein Material zerstört und diese Zerstörung molecularen Aenderungen zugeschrieben wird, bei näherem Zusehen die Kinetik des Problems in Wahrheit im Körper einen weit höheren Zwang ergeben wird als eine statische Last derselben Grösse, und dass dies sogar in denjenigen Fällen geschieht, bei welchen nichts von der Art eines Impulses vorhanden ist. In dem vorliegenden Aufsatze erforscht

er die Wirkung der Trägheit des Hebels in Wöhler's Apparat und zeigt, dass diese von Bedeutung sein kann. Noch andere mathematische Untersuchungen bezüglich des Gegenstandes dienen zur Stütze seiner Ansichten. Glr. (Lp.)

J. H. Michell. On the stability of a bent and twisted wire. Mess. (2) XIX. 181-184.

Wenn ein Draht von isotropem Querschnitt, der in natürlichem Zustande gerade ist, gedrillt wird, und wenn man die beiden Enden so verbindet, dass eine continuirliche Curve entsteht, so ist der Kreis eine stabile Gleichgewichtsform für einen unterhalb eines gewissen Wertes liegenden Betrag der Drillung. In diesem Aufsatze untersucht der Verfasser die allgemeinen wesentlichen Gleichungen der Vibration eines gespannten Drahtes und wendet sie auf die Bestimmung der Grenzen der Stabilität in dem obigen Falle an. Glr. (Lp.)

J. Perry. On twisted strips. Phil. Mag. (5) XXIX. 244-247.

G. H. Bryan. On the deformation of twisted strips. Phil. Mag. (5) XXX. 476-480.

Ein gerader Metallstreifen, welchem durch Anwendung eines Drillmomentes ein ständiges gedrilltes Aussehen gegeben worden war, wobei die Axe eine Gerade blieb, zeigte, wenn er einem Zuge in der Richtung der Axe unterzogen wurde, eine Entdrillung (untwisting), welche mit Bezug auf die Längsdehnung gross war. In der ersten Arbeit werden zwei Formeln als Ausdrücke für den Betrag der Entdrillung vorgeschlagen. Nimmt man b und t bezw. als die Breite und Dicke des Streifens, φ als die ständige Drillung auf die Längeneinheit, N die Starrheit und θ den Entdrillungswinkel auf die Längeneinheit, wenn der Zug w ist, so giebt die erste Formel $\theta = \frac{wb\varphi}{4Nt^3}$, die zweite

$$\theta = \frac{3w}{Nt^3}\left\{\frac{1}{2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\varphi b} - \frac{1}{\varphi b}\right\}.$$

Ist φb sehr klein, so fällt die zweite mit der ersten zusammen.

In der zweiten Arbeit wird eine befriedigendere Lösung gesucht, indem man die Aufgabe als einen besonderen Fall der Deformation einer dünnen Platte betrachtet. Braucht man $2a$, $2h$, n bezw. statt b, t, N und bezeichnet den Young'schen Modulus mit E, so ist der für θ gefundene Wert

$$\theta = \frac{w}{16ha^2\left(\frac{1}{15}Ea\varphi + \frac{nh^2}{a^2}\cdot\frac{1}{a\varphi}\right)}.$$

Ist $a\varphi$ sehr klein, so wird dies gleich $wa\varphi/16nh^2$, übereinstimmend mit dem ersten Werte in Hrn. Perry's Note. Beim Anwachsen von φ erreicht jedoch θ bald ein Maximum, nämlich wenn

$$a\varphi = \frac{h}{a}\sqrt{\frac{15}{2(1+\mu)}},$$

wo μ Poisson's Verhältniszahl ist. Ist also h/a klein, so tritt der Maximalwert von θ innerhalb der Grenzen auf, für welche die Annäherung gilt. Gbs. (Lp.)

K. PEARSON. Note on Clapeyron's theorem of the three moments. Mess. (2) XIX. 129-135.

In den Comptes Rendus für 1857 (XLV. 1076-80) hat Clapeyron eine Beziehung zwischen den Momenten in drei auf einander folgenden Stützpunkten eines continuirlichen Balkens gegeben, wenn stetige gleichförmige Lasten auf den beiden Spannweiten verteilt sind. Dieses Ergebnis ist durch Heppel und Weyrauch verallgemeinert worden, aber unter der Annahme, dass die Stützen starr sind. In den meisten wirklichen Fällen sind indessen die Stützen Metallsäulen, welche ebenso elastisch sind wie der continuirliche Träger selbst. Der Zweck der Note ist die Erforschung der Wandelungen, die somit einzuführen sind.

Glr. (Lp.)

J. WEYRAUCH. Zur Vereinfachung der Berechnung durchgehender Träger. Hannov. Zeitschr. XXXVI. 201-206.

Die Berechnung von Trägern bleibt namentlich deshalb trotz

gewisser Vereinfachungen so umständlich, weil man meistens eine sehr grosse Zahl von Belastungsfällen zu berücksichtigen hat. Der Verfasser zeigt an einem concreten Fall eines Trägers von vier Oeffnungen, dass man an Stelle der nach dem sonst üblichen Verfahren zu berücksichtigenden 13 Belastungsfälle mit der Berücksichtigung von sechs Fällen hinreichend genaue Resultate erzielt. F. K.

A. Ramisch. Versuch einer neuen Theorie der excentrischen Zug- und Druckbelastung. Pr. Realsch. mit Fachklassen. Aachen.

Der Verfasser hebt mit Nachdruck hervor, was nie bezweifelt wurde, dass bei vollkommen centrischer Belastung eines Stabes nie eine Durchbiegung stattfinden könne, wie lang derselbe auch sein möge, und fährt dann fort: „Wir erwähnen diesen Fall ausführlich, weil die Theorie der Zerknickungsfestigkeit darauf basirt, dass bei Stäben, die im Verhältnis zu den Dimensionen der Querschnitte sehr lang sind, doch Durchbiegung stattfinden könne, und weil dieselbe dann hieraus durch Anwendung unpassender Formeln unrichtige Resultate erzielt". Diese Kritik ist ungerechtfertigt und entspringt aus einer unrichtigen Auffassung der in Frage stehenden Methode.

Die eigene Methode des Verfassers, die Gestalt eines durch excentrische Belastung deformirten Stabes zu finden, ist unrichtig. Sie beruht nämlich auf der irrigen Annahme, dass die sogenannte neutrale Linie eine äquidistante Curve zur Schwerpunktslinie ist. Dabei ist unter neutraler Linie die Curve verstanden, welche die Querschnitte in solchen Punkten schneidet, deren Fasernelemente weder Contraction noch Dilatation erfahren haben. F. K.

Bertrand de Fontviolant. Sur la statique graphique des arcs élastiques. C. R. CX. 697-700.

Hr. Maurice Lévy hat unter Vernachlässigung der durch die Längsspannung und durch die Querkraft hervorgerufenen Deformationen, welche allerdings klein sind gegen die durch das Bie-

gungsmoment bedingten Formänderungen, die Theorie der elastischen Bogen auf Sätze gegründet, welche sowohl graphisch als analytisch entwickelt werden können. Das Fundament dieser Theorie besteht in der Einführung fictiver Kräfte, welche längs der mittleren Faser des Bogens angreifen.

Die vorliegende Note giebt an, wie diese fictiven Kräfte modificirt werden müssen, damit man auch die oben vernachlässigten Deformationen berücksichtigen kann. F. K.

BERTRAND DE FONTVIOLANT. Mémoire sur la statique graphique des arcs élastiques. Mém. de la Soc. des Ing. civ. 1890. I. 402-450.

Ausführliche Abhandlung, über welche ein Referat in den C. R. gegeben wurde, welches oben besprochen ist. F. K.

G. G. FERRIA. Sulla stabilità delle vôlte caricate colla regola di Schwedler. Torino Atti XXV. 510-518.

Unter Schwedler'scher Belastung versteht der Verfasser eine solche, bei welcher die Druck(Stütz)linie mit der Mittellinie des Gewölbes zusammenfällt. Bei Kreisbogen ist dies der Fall, wenn zwischen der Belastungshöhe z und dem Winkel φ, welchen die Tangente mit der Horizontale einschliesst, die Gleichung

$$z = z_0 \sec^3 \varphi$$

besteht. Dabei ist das Material als unelastisch vorausgesetzt. Der Verfasser untersucht mit Hülfe des Princips von Castigliano, wie sich die Druckverteilung gestaltet, falls das Material als elastisch angesehen wird. F. K.

F. KÖTTER. Beitrag zur Lehre vom Fachwerk. Centralbl. d. Bauverw. X. 71. [F. d. M. XVIII. 1886.]

Im VI. Bande des C.Bl. der Bauverwaltung hatte Hr. Forchheimer den bemerkenswerten Satz bewiesen: Für ein Fachwerk, welches eine Stoffverteilung gleichmässiger Beanspruchung zulässt, wird bei dieser Verteilung sowohl die Einsenkung als auch

die Meistbeanspruchung ein Minimum. Demnach ist unter der angegebenen Voraussetzung diejenige Verteilung zugleich die günstigte, bei welcher die Einsenkung ein Minimum wird.

Dieser Satz wird in der vorliegenden Note unter Benutzung des Princips von Castigliano bewiesen. F. K.

A. Ritter. Ueber die Fortpflanzung der Spannungen in elastischen Körpern. Z. deutsch. Ing. XXXIV. 196-202, 254-256, 1268-1273, 1298-1303.

Wird auf einen einerseits gestützten, ursprünglich im spannungslosen Zustand befindlichen Stab ein am freien Ende angreifender Druck ausgeübt, so werden zunächst die diesem Ende nächstliegenden Teile eine Stauchung erleiden und eine gewisse constante Geschwindigkeit annehmen, während die am gestützten Ende befindlichen Teile anfangs noch in ihrem ursprünglichen Zustande verharren. Die Geschwindigkeit, mit welcher der durch den Druck hervorgerufene Zustand sich fortpflanzt, ist gleich der Geschwindigkeit, welche die einzelnen Teile annehmen. Wenn nun die Stauchung und Geschwindigkeit auch das gestützte Ende ergreift, macht sich dort zunächst, weil das gestützte Ende einer Bewegung nicht fähig ist, eine entgegengesetzte Geschwindigkeit geltend, welche bewirkt, dass, vom Ende ausgehend, nach und nach der ganze Stab zur Ruhe gelangt. In dem Moment, wo das der Fall ist, hat aber der ganze Stab eine Stauchung, die doppelt so gross ist wie diejenige, welcher durch den am Ende wirkenden Druck das Gleichgewicht gehalten werden kann. Deshalb gerät jetzt das freie Ende des Stabes nach entgegengesetzter Richtung in Bewegung und die Stauchung wird zur Hälfte ausgeglichen. Dieser Process pflanzt sich wieder durch den Stab fort und bewirkt, am gestützten Ende angelangt, das Fortschreiten einer, dieser neuen entgegengesetzten Geschwindigkeit, welche, indem sie im Stabe selbst fortschreitet, allmählich die erstere auslöscht, wobei dann noch der Rest der Stauchung vernichtet wird. Nach einer bestimmten Zeit wird sich also der ursprüngliche Zustand wieder hergestellt haben, und das Spiel beginnt von neuem.

Diesen Vorgang und andere ähnliche, z. B. die Fortpflanzung von Torsionsspannungen, die Fortpflanzung der Druckänderungen in atmosphärischer Luft, die Zustandänderung der Luft bei stetigem Wachsen der Kolbengeschwindigkeit, unterzieht der Verfasser einer eingehenden Betrachtung. Unsere Meinung über die Abhandlung bringen wir am besten zum Ausdruck, wenn wir die eigenen Worte des Verfassers hierhersetzen: „Auf alle Fälle empfiehlt sich diese Theorie durch die Anschaulichkeit des Bildes, welches sie von der Fortpflanzung der Spannungsänderung im Innern der elastischen Körper liefert". F. K.

FR. ENGESSER. Ueber zusammengesetzte Druck- und Biegungsfestigkeit. Z. deutsch. Ing. XXXIV. 731-736.

Wenn ein gerader Stab durch excentrischen Druck belastet wird, so ergiebt sich eine Ausbiegung. Bei frei drehbaren Stabenden ergiebt sich die grösste Ausbiegung in der Mitte auf:

$$a_1 = a : \cos\sqrt{\frac{Pl^2}{4EJ}},$$

und dort finden die grössten Druck- und Zugspannungen statt:

$$\sigma = \frac{P}{F}\left(1+\frac{a_1 e}{i^2}\right) = \frac{P}{F}\left(1+\frac{ae}{i^2} : \cos\sqrt{\frac{Pl^2}{4EJ}}\right),$$

$$\sigma_1 = \frac{P}{F}\left(-1+\frac{ae_1}{i^2} : \cos\sqrt{\frac{Pl^2}{4EJ}}\right),$$

oder wenn wir die Euler'sche Knickbelastung $\frac{\pi^2 EJ}{l^2} = P_0$ einführen

$$\sigma = \frac{P}{F}\left(1+\frac{ae}{i^2} : \cos\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_0}}\right).$$

Ist nun die zulässige Druckspannung k, so erhalten wir die Druckbelastung aus:

$$k = \frac{P_1}{F}\left(1+\frac{ae}{i^2} : \cos\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P_1}{P_0}}\right).$$

Bezeichnet man noch mit k_0 die Knickfestigkeit, d. h. den Wert

P_0/F, so erhält man nach einigen Rechnungen

$$P_1 = \frac{Fk_0}{1+\left(\alpha+\frac{ae}{i^2}\right)\frac{k_0}{k}}.$$

In derselben bedeutet α einen gewissen Coefficienten. Man kann die Formel auch so schreiben:

$$P_1 = \frac{F.k}{\frac{k}{k_0}+\alpha+\frac{ae}{i^2}},$$

oder mit

$$w = \frac{i^2}{e},$$

$$P_1 = \frac{F.k}{\frac{k}{k_0}+\alpha+\frac{a}{w}}.$$

Setzt man nun $k_0 = \frac{k}{1+\eta\lambda^2}$, wo η ein Coefficient und λ die specifische Länge, d. h. das Verhältnis von Länge und Trägheitsradius ist, so erhält man

$$P_1 = \frac{F.k}{1+\eta\lambda^2+\alpha+\frac{a}{w}},$$

und zwar nicht nur innerhalb der Grenzen, innerhalb deren Proportionalität zwischen Spannung und Dilatation erfüllt ist.

Der Verfasser entwickelt weiter eine Formel für die zulässige Druckbelastung, wenn eine horizontal gerichtete Kraft $H = \gamma P$ angreift. Nennt man σ die grösste durch das Moment $\frac{Hl}{2}$ hervorgerufene Spannung $\sigma = \frac{Hl}{2Fw}$, so erhält man auf ähnliche Weise wie vorher

$$P_1 = \frac{P_0\left(1-\frac{\sigma}{k}\right)}{1+\frac{k_0}{k}\left(\alpha+\frac{a}{w}\right)-\frac{\sigma}{k}}.$$

Zum Schluss beschäftigt sich der Verfasser mit dem Sicherheitsgrade. F. K.

Fr. Engesser. Ueber Mittelgelenkbalken. Hannov. Zeitschr. XXXVI. 405-410.

Der Verfasser unterzieht zunächst den gewöhnlichen Fachwerkträger, den Mittelgelenkbalken und den Dreigelenkbogen mit Zugstange einer allgemeinen vergleichenden Betrachtung und gelangt zu dem Resultat, dass der erste vor den anderen vom rein technischen Standpunkte aus den Vorzug verdient, und dass also die anderen nur dann anzuwenden seien, wenn ästhetische Rücksichten dafür sprechen. Dann zeigt der Verfasser durch Discussion einer Trägerform, welche den Mittelgelenkbalken und den Dreigelenkbogen als Specialfälle umschliesst, dass die Berechnung eines solchen Trägers sich leicht bewerkstelligen lässt, sobald man nur einen entsprechenden Dreigelenkbogen berechnet hat. Die letztere Aufgabe lässt sich aber verhältnismässig einfach lösen. F. K.

E. Sasse. Stehende Molecularwellen in Constructionsteilen. Deutsche Bauztg. XXIV. 479.

Bei ungleichmässigen Spannungen entstehen Wellen, welche man z. B. bei einem gebogenen Glasstück im polarisirten Licht nachweisen kann. F. K.

Marloh. Die Bestimmung der Biegungslinien von Fachwerksträgern. Z. f. Bauwesen. XL. 514-520.

Entwickelt für die Träger mit Verticalen übersichtliche Formeln zur theoretischen Bestimmung der Durchbiegung. F. K.

R. Land. Beziehungen zwischen Kräfte- und Seilpolygon. Centralbl. der Bauverw. X. 94, 192.

Behandelt die Aufgabe, durch drei Punkte einen Seilzug zu legen. F. K.

H. Müller-Breslau. Zur Berechnung des Zweigelenkbogens. Centralbl. der Bauverw. X. 254.

Fr. Engesser. Zur Berechnung des Zweigelenkbogens. Centralbl. der Bauverw. X. 294-295.

Herr Müller-Breslau hebt hervor, dass die Formel für den Horizontalschub $H = \frac{3Pa(l-a)}{4fl}$ von Hrn. Engesser herrühre, und dass nur die von ihm selbst gegebene Ableitung eine strengere sei. In dieser Formel ist noch nicht die eintretende Verkürzung in Rechnung gezogen; um ihr Rechnung zu tragen, muss man einen Factor hinzufügen, welcher sich bei sehr flachen Bogen auf $1/\left(1+\frac{15}{32}\frac{h^2}{f^2}\right)$ reducirt (f Pfeilhöhe, h die Dicke des Bogens).

Ein anderes von Hrn. Engesser herrührendes Gesetz besagt, dass die Kräfte in den Schrägstäben sich umgekehrt wie die Quadrate der Längen verhalten. Dasselbe ist ebenfalls nur ein angenähertes. Herr Müller-Breslau giebt genauere Formeln für diese Kräfte an.

Herr Engesser entwickelt ebenfalls ein Verfahren für die Berücksichtigung der Verkürzung bei der Bestimmung des Horizontalschubes; ferner giebt er eine Bestimmung des Querschnitts für vollwandige Träger. F. K.

Hansen. Ueber die Berechnung der Durchbiegung eiserner Balkenbrücken. Deutsche Bauztg. XXIV. 54-58.

Mit Hülfe bekannter Regeln der Festigkeitslehre behandelt der Verfasser die durch den Titel hinreichend bezeichnete Aufgabe. Die Ausführung bietet keinen Anlass zu einem Referat. F. K.

N. de Tédesco. Sur la résistance des matériaux. Essai de méthode élémentaire aux ponts rigides et aux ponts articulés. Mém. de la Soc. des Ing. civ. 1890. I. 278.

Bestimmt für einen Träger des Systems Warren die stattfindenden Spannungen; der Uebergang zu dem Falle, dass bei unveränderter Länge die Zahl der Felder unendlich gross wird, liefert die Beanspruchungen für einen Vollträger. F. K.

Z. Zur Frage der Durchbiegungsmessungen und des Einflusses der Fahrgeschwindigkeit auf die Beanspruchung eiserner Brücken. Centralbl. der Bauverw. X. 317.

FR. KICK. Dasselbe. ebenda. 400.

H. ZIMMERMANN. Dasselbe. ebenda. 432.

FR. ENGESSER. Dasselbe. ebenda. 432.

Bei Versuchen, die mit der Brücke über die Dordogne bei Cubzac vorgenommen wurden, hatte man eine Abnahme der Durchbiegung mit zunehmender Fahrgeschwindigkeit beobachtet. Herr Kick versucht die Erscheinung zu erklären. Herr Zimmermann und Herr Engesser weisen nach, dass der Einfluss der Fahrgeschwindigkeit nicht so bedeutend sein könnte, wie die Versuche vermuten lassen, und kommen daher zu dem Resultat, dass dieselben irrig sein müssten. F. K.

FR. ENGESSER. Ueber die Festigkeitsverhältnisse einiger neuerer Eisenbahn-Oberbausysteme. Centralbl. der Bauverw. X. 312-314.

Es wird kurz für das Moment der Schiene bezüglich der senkrechten Lasten die Formel

$$M_1 = Pl\left(0{,}226\sqrt[4]{\psi} + \frac{0{,}171}{1+4{,}5\sqrt[4]{\psi}}\right)$$

abgeleitet, wo $\psi = \frac{6EJ}{Cl^3}$, E der Elasticitätsmodul, J das Trägheitsmoment, l der Abstand der Querschwellen, C die Bettungsconstante, P der grösste Raddruck ist. Es muss hervorgehoben werden, dass die Begründung nicht frei von Willkür ist.

F. K.

H. ZIMMERMANN. Einfluss der Biegung auf die Abnutzung an den Stützflächen der Eisenbahnschienen. Centralbl. der Bauverw. X. 437-438.

Der Verfasser behandelt zur Erläuterung der im Titel bezeichneten Verhältnisse die Aufgabe eines durch eine Einzellast

beanspruchten Trägers, von welchem zunächst angenommen wird, dass er frei aufliegt. Es werden erst die Neigungen der Querschnitte gegen die Verticale bestimmt, und aus ihnen wird die Verschiebung des Trägers abgeleitet; indem man nun nach dem Abstande der Last von der Mitte differentiirt, erhält man die Aenderung der Verschiebung. Den Widerstand der Stütze und damit den Einfluss der Reibung kann man bestimmen. Es ist klar, dass bei einer Bewegung der Last sich dasjenige Ende des Trägers bewegt, welches den kleinsten Stützendruck erfährt, auf dieses kommt also die ganze Aenderung der Verschiebung. Hiernach kann man die Arbeit berechnen, welche zur Ueberwindung der Reibung gebraucht wird. Der Verfasser behandelt dann noch den Fall eines einseitig befestigten Trägers. F. K.

BEDAUX. Position d'un train sur une poutre à deux appuis simples, portant une charge permanente uniforme, donnant le moment fléchissant maximum sous un essieu déterminé. Le Génie civil. XVII. (1890.) 381.

Die im Titel hinreichend gekennzeichnete Aufgabe wird durch Rechnung und Zeichnung gelöst. F. K.

SEIPP. Die räumliche Mitteldrucklinie und über Druckverteilung in Gewölbstützen. Civiling. XXXVI. 565-590.

Der Verfasser zeigt an der Hand eines concreten Beispieles, wie bei einem Gewölbe die Druckverteilung zu bestimmen sei, wenn ausser der verticalen Belastung eine horizontale an der Stirnseite des Gewölbes angreifende Kraft zu berücksichtigen ist. Die Methode ist im wesentlichen rechnerisch, jedoch kommt auch das geometrisch-graphische Verfahren zur Anwendung. Bezüglich der Einzelheiten muss auf die Abhandlung selbst verwiesen werden. F. K.

H. MURAOKO. Ueber die totale Formänderung der Metallplatten beim Abschleifen einer Seite. Civiling. XXXVI. 125-134, Abdruck aus Japan Journal.

In Wiedemann's Annalen XXII. 249 hatte der Verfasser angegeben, dass dünne Platten durch Schleifen auf der bearbeiteten Seite convex werden.

Er teilt gegenwärtig zunächst Versuche mit, aus welchen hervorgeht, dass der Zusammenhang zwischen der Dicke a und dem Krümmungsradius r durch die Formel

$$r = Aa^3$$

verhältnismässig gut dargestellt wird.

Durch eine „provisorische“ Betrachtung sucht der Verfasser sodann, da ihm eine allgemeine Theorie noch nicht gelungen ist, einen Zusammenhang zwischen der Erscheinung und den Constanten der Elasticität abzuleiten. F. K.

A. G. Greenhill. The scientific principles involved in making big guns. Nature XLII. 304-309, 331-334, 378-381.

Eine zusammenfassende Darstellung der Theorie für die Construction der modernen Riesengeschütze. Im letzten Paragraphen äussert sich der Verfasser über die Drahtkanonen mit folgenden Worten:

Wir haben nun die Theorie des Drahtgeschützes beendigt, insofern die Umfangstärke in Betracht kommt, und wegen ihrer experimentellen Bestätigung kann ein interessanter Artikel „On winding and dismantling an experimental wire-wound gun cylinder“ vom Lieutenant W. Crozier (Washington, Juni 1886) Auskunft geben. Gemäss neueren Berichten ist jüngst in Amerika ein zehnzölliges Geschütz vom Hauptmann Crozier nach Entwürfen construirt worden, die auf seinen Versuchsergebnissen beruhen.

Die Theorie der Längsspannungen im Drahtgeschütze ist nicht berührt worden, weil es noch ein Streitpunkt ist, ob das Rohr allein die Längsspannung auszuhalten hat, oder ob letztere teilweise vom Aussenmantel zu tragen ist, da ja die Drahtumwickelung, ausser in Canet's Doppelkegel-System, offenbar unfähig ist, irgend einen Widerstand in dieser Richtung zu leisten.

Das Princip des Hrn. Longridge, ein Rohr mit Draht zu verstärken, der mit passend geänderter Spannung herumgewun-

den wird, dürfte sich im Frieden und im Kriege als nützlich erweisen. Er kann als Beweis anführen, dass ein nach diesem Principe verstärktes Geschütz, das 9,2-zöllige Geschütz, wegen seiner grossen Stärke gewählt wurde, die äusserste Tragweite der modernen Artillerie im Jahre 1888 zu ermitteln, mit den sogenannten „jubilee rounds"; hierbei erreichte man bei einem Abgangswinkel von etwa 40° eine Schussweite von 21000 Yards oder 12 (englischen) Meilen, während das Geschoss 380 Pfund wog und die Mündungsgeschwindigkeit etwa 2360 Fuss in der Secunde betrug.

Es wird kein Anspruch auf Originalität in der oben gegebenen Theorie erhoben, und wir fürchten, dass dem richtigen Forscher nicht immer in gebührender Weise das Verdienst zugeschrieben ist; allein der Versuch ist gemacht worden, die wesentlichen Punkte der Theorie in einer möglichst einfachen Form darzustellen mit der geringsten Benutzung algebraischer Formeln. Ueber den Gegenstand ist in den letzten Jahren so viel geschrieben worden, dass der Leser durch die Mannigfaltigkeit der Bezeichnung und Behandlung verwirrt sein dürfte, und es ist zu hoffen, dass die hier dargestellte graphische Methode den Theoretiker befähigen mag, seine Ergebnisse dem Geschütz-Fabrikanten in einer verständlicheren und überzeugenderen Form mitzuteilen.

Lp.

G. Hartig. Torsionelasticität von Faserbändern. Civiling. XXXVI. 359.

Die Abhandlung hat im wesentlichen praktisches Interesse.

F. K.

Bräuler. Ziegelsteingewölbe aus verzahnten Ringen. Centralbl. der Bauverw. X. 263-264.

Der analytische Teil der Berechnung erscheint unrichtig, zum mindesten ungenau.

F. K.

C. Capillarität.

Lord Rayleigh. On the theory of surface forces. Phil. Mag. (5) XXX. 285-298, 456-475.

Lord Rayleigh. On the tension of water surfaces, clean and contaminated, investigated by the method of ripples. Phil. Mag. (5) XXX. 386-400.

Die ersten beiden Aufsätze geben eine kritische Uebersicht über die Theorie der Oberflächenkräfte mit besonderer Beziehung auf die Leistungen von Young und Laplace. Sie lassen nicht gut einen Auszug zu; der Ref. begnügt sich daher damit, auf diese Abhandlungen zu verweisen, weil sie viel enthalten, was in Betreff der Ansprüche Young's auf diesem Gebiete nicht allgemein bekannt ist, und ausserdem manche bedeutsame Winke des Verfassers für eine befriedigendere Theorie vorkommen. Die letzte Arbeit ist fast ganz experimentell. Eine gute Anzeige derselben steht in Wiedemann's Beiblättern für 1891.

Gbs. (Lp.)

Lord Rayleigh. On the tension of recently formed liquid surfaces. Nature XLI. 566-568.

Auszug aus einem Vortrage vor der Lond. R. S. Lp.

E. Gossart. Mesure des tensions superficielles dans les liquides en caléfaction (méthode des larges gouttes). Ann. de Chim. et Phys. (6) XIX. 173-265, Almeida J. (2) IX. 209-219.

Wenn man einen grossen Quecksilbertropfen, der auf einer Glasplatte ruht, mit einem Tropfen einer beliebigen Flüssigkeit vergleicht, die auf eine sehr heisse Metallplatte geworfen ist („Flüssigkeit in Calefaction“), so wird man zu den folgenden Bemerkungen geführt: 1) Das Calefactions-Phänomen bildet einen besonderen Fall der Capillar-Erscheinungen; denn die Gestalten der beiden Tropfen sind dieselben und müssen es sein. 2) Der caleficirte Tropfen muss sogar einige vorteilhafte Besonderheiten

darbieten. 3) Die Methode der grossen Tropfen liefert sehr bequem ihre Oberflächenspannung unter Umständen, bei denen die anderen Verfahrungsarten eine ziemlich heikle Anwendung gestatten. Mit einem Worte, die Calefactionsphänomene, welche so geistreich von Boutigny erforscht sind, haben in dem doppelt mangelhaften Ausdrucke des „sphäroidalen Zustandes" ein schlechtes Kennwort erhalten. Sie bieten uns weder einen vierten Zustand der Materie, noch eine sphärische oder selbst im allgemeinen sphäroidale Gestalt. Was sie einzig unter dem Gesichtspunkte der Capillaritätsgesetze von dem Quecksilbertropfen z. B. unterscheidet, ist jene Eigenschaft der Tangente an ihrem Meridian- oder Transversal-Schnitte, alle stetig veränderlichen Neigungen zwischen zwei horizontalen Geraden anzunehmen, welche die ganze Dicke des Tropfens enthalten. Der Zweck der Arbeit ist der Beweis dieser Eigenschaft und ihre Anwendung auf die Messung der Oberflächenspannung. Die vier Teile sind: I. Theoretische Darstellung. II. Experimentelle Bestätigungen. III. Ausdehnung der Methode auf die Temperaturänderungen. IV. Anwendungen. Lp.

G. Van der Mensbrugghe. Sur la propriété caractéristique de la surface commune à deux liquides soumis à leur affinité mutuelle. Belg. Bull. (3) XX. 32-37, 253-264.

Wenn die Verwandtschaft (affinité) der beiden Flüssigkeiten die Summe ihrer Oberflächenspannungen übertrifft, so strebt die Resultante der an der Berührungsfläche vorhandenen Vorgänge (actions) nach einer Vergrösserung dieser Oberfläche. Jene Resultante kann „Ausdehnungskraft" heissen. Zahlreiche Versuche oder Beobachtungen zur Bestätigung dieses Gesetzes.

Mn. (Lp.)

G. Van der Mensbrugghe. Sur la condensation de la vapeur d'eau dans les espaces capillaires. Belg. Bull. (3) XIX. 101-110.

Der Wasserdampf verdichtet sich nach einer Formel von Sir

William Thomson leichter auf den Körpern, die unendlich viele capillare Hohlräume besitzen. Dieses Princip erklärt eine Menge von Erscheinungen, insbesondere die Bildung der Nebel und Wolken, wenn in der Atmosphäre feste Partikel sind, welche als Verdichtungskerne dienen. Mn. (Lp.)

K. Fuchs. Ueber die Bewegungen suspendirter Teilchen in der Mischungsschicht zweier Flüssigkeiten. Exner Rep. XXVI. 42-49.

K. Fuchs. Die Molecularkräfte in der Endosmose. Exner Rep. XXVI. 358-363.

K. Fuchs. Randwinkel und Kantenwinkel. Exner Rep. XXVI. 419-425.

K. Fuchs. Ueber den Einfluss der Schwere auf die Mischung zweier Flüssigkeiten. Exner Rep. XXVI. 507-512.

K. Fuchs. Ueber teilweise Mischungen. Exner Rep. XXVI. 664-703.

Fortsetzung der Betrachtungen, über welche in F. d. M. XX. 1888. 1092, XXI. 1889. 1008 berichtet ist, und welche alle die theoretische Begründung von solchen Erscheinungen bezwecken, die durch die Molecularkräfte in den Flüssigkeiten hervorgerufen werden. In Folge der Zersplitterung in eine Reihe einzelner Artikel und des Mangels einheitlicher Zielpunkte ist es unmöglich, über jeden Aufsatz insbesondere oder über die Gesamtheit aller im Zusammenhang zu berichten. Lp.

Capitel 2.
Akustik und Optik.

A. Akustik.

Gouy. Sur la propagation anomale des ondes sonores. C. R. CXI. 910-912.

Der Verfasser zeigt, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit longitudinaler Kugelwellen in der Nähe des Centrums nicht con-

stant ist, sondern sich erst mit wachsendem r asymptotisch dem für ebene Wellen gültigen Werte nähert. F. K.

P. Drude. Ueber die Reflexion und Brechung ebener Schallwellen an der Grenze zweier isotropen mit innerer Reibung behafteter Medien. Wiedemann Ann. XLI. 759-769.

Der Verfasser geht aus von den Differentialgleichungen der unendlich kleinen Bewegungen in Medien mit Reibung. Danach werden die an der Grenze zweier solcher Medien zu erfüllenden Grenzbedingungen formulirt. Mit Rücksicht auf dieselben wird dann die Reflexion und Brechung an der Grenze zweier reibenden Medien untersucht. Bei Medien mit geringer innerer Reibung übt dieselbe auf die in Frage stehende Erscheinung keinen merklichen Einfluss aus; hingegen wird bei Substanzen mit starker innerer Reibung der Einfluss der Reibung ein so starker, dass die Reflexion und Brechung vielleicht dazu dienen können, die Reibung ziffernmässig zu bestimmen. F. K.

W. Voigt. Zur Theorie der Schwingungen gestrichener Saiten. Gött. Nachr. 1890. 502-505.

Durch directe Messung mittels des Vibrationsmikroskops hatte Herr von Helmholtz festgestellt, dass jeder Punkt einer gestrichenen Saite in der Weise schwingt, dass für

$$0 < t < \mathfrak{T}, \quad y = ft + h,$$

und für

$$\mathfrak{T} < t < T, \quad y = g(T-t) + h$$

gesetzt werden kann. Hierbei sind h und $\mathfrak{T}$ Functionen von x, f und g Grössen, welche durch die Gleichung:

$$f\mathfrak{T} = g(T-\mathfrak{T})$$

verbunden sind. Aus Vergleich mit der trigonometrischen Entwickelung für die Schwingungen einer beiderseits eingespannten Saite von der Länge L hatte Herr von Helmholtz gefolgert

$$f = \frac{8P(L-x)}{LT}, \quad g = \frac{8Px}{LT}, \quad p = \frac{4P(L-x)}{L^2},$$

wo P die Amplitude in der Mitte und p an der Stelle x ist. Herr Voigt hebt hervor, dass die Lösung nicht der Differentialgleichung für die Saitenschwingung genügt, was darin seinen Grund habe, dass stillschweigend für alle Punkte dieselbe Phase angenommen sei. Der Verfasser sucht diesen Uebelstand zu beseitigen, indem er setzt für

$$t_0 < t < \mathfrak{T}+t_0, \quad y = f(t-t_0)+h,$$

für

$$\mathfrak{T}+t_0 < t < T+t_0, \quad y = g(T-t+t_0)+h,$$

wo t_0 die Phase ist und somit eine Function von x. Durch das von Herrn von Helmholtz angewandte Verfahren ergiebt sich jetzt

$$\frac{\mathfrak{T}}{T} = \frac{x}{L}, \quad t_0 = -\frac{xT}{2L},$$

f und g behalten ihre von Hrn. von Helmholtz bestimmten Werte; endlich:

$$h = -p = -\frac{4Px(L-x)}{L^2}.$$

Man hat also für

$$-\frac{xT}{2L} < t < \frac{xT}{2L}, \quad y = \frac{8P(L-x)t}{L.T}.$$

dagegen für

$$\frac{xT}{2L} < t < \frac{(2L-x)T}{2L}, \quad y = \frac{8Px(T-2t)}{2LT}.$$

Zum Schluss verweist Hr. Voigt auf eine Abhandlung in den Ber. der Naturf.-Ges. in Freiburg VII. 500. 1880, in welcher Hr. Lindemann, wenn auch auf anderem Wege, zu demselben Resultate gelangt. F. K.

Lord RAYLEIGH. On bells. Phil. Mag. (5) XXIX. 1-17.

Eine vollständige theoretische Untersuchung über die Schwingungen von Glocken wird natürlich nicht beabsichtigt; aber gewisse allgemeine Principien werden festgestellt, und ein Bericht wird erstattet über eine experimentelle Prüfung mehrerer Kirchenglocken, bei deren Verlauf einige merkwürdige Thatsachen sich zeigten. In praxi werden die Glocken als symmetrisch um eine Axe angesehen, und wenn die Symmetrie vollkommen ist, so

hat das System der Knotenmeridiane (d. h. derjenigen, bei denen keine Bewegung senkrecht gegen die Oberfläche stattfindet) keine feste Lage und kann sich so verlegen, dass es der Stelle angepasst ist, wo ein normaler Schlag abgegeben wird. In Wirklichkeit ist jedoch die Symmetrie selten so vollkommen, und theoretisch macht die geringste Abweichung von der Symmetrie im allgemeinen die Lagen der Knotensysteme bestimmt. Für jede Anzahl n von Cyklen giebt es eine erste bestimmte Schwingungsart mit $2n$ Knoten und $2n$ dazwischen liegenden Bäuchen, und eine zweite bestimmte Art, bei welcher die Knoten und Bäuche der ersten Art die Rollen tauschen; ferner sind die Schwingungszahlen in beiden Arten ein wenig verschieden. Ein Schlag kann also einen Ton des einen, oder einen des zweiten Systems erzeugen, oder einen des einen und des anderen, in welchem Falle Stösse vernommen werden. Verschiedene Zahlenergebnisse werden mitgeteilt; doch ist es vielleicht besonders erwähnenswert, dass in dem Falle der Kirchenglocken der fünfte Ton (zu $n = 4$ gehörig) immer derjenige war, welcher mit der angeblichen Höhe des Glockentons stimmte, und dass Intervalle vorkommen (z. B. die falsche Octave), welche für gewöhnlich *als* unleidlich angesehen wären. Der Satz, dass die Schwingungszahlen ähnlicher Körper, welche aus ähnlichem Stoffe bestehen, sich umgekehrt wie die linearen Dimensionen verhalten, wird auch mit Rücksicht auf die Thatsache angezogen, dass Glocken diesem Principe der Aehnlichkeit sich nicht fügen. Gbs. (Lp.)

W. Voigt. Ueber den Zusammenklang zweier einfachen Töne. Wiedemann Ann. XL. 652-660; Gött. Nachr. 159-167.

Ausser den von Hrn. von Helmholtz beobachteten Summen- und Differenztönen hatte Hr. König beim Zusammentönen zweier Töne mit den Schwingungszahlen $n_2 > n_1$ auch Töne mit den Schwingungszahlen

$$n_2 - \nu n_1 \quad \text{und} \quad (\nu + 1)n_1 - n_2$$

beobachtet.

Der Verfasser untersucht, um die Erscheinung mathematisch

zu erklären, die aus zwei Schwingungen zusammengesetzte Bewegung und erörtert die Bedingungen, unter welchen die von Hrn. von Helmholtz und Hrn. König beobachteten Erscheinungen zu Stande kommen. F. K.

B. Theoretische Optik.

Th. Preston. The theory of light. London. Macmillan and Co. XVI + 465 S.

Dieses Buch hilft einem entschiedenen Mangel unter den englischen Lehrbüchern ab, indem es in praktischer Weise das ganze Gebiet der Optik vorführt. In mancher Hinsicht wäre es noch besser ausgefallen, wenn es von Seiten des Lesers ein ausgebildeteres mathematisches Rüstzeug vorausgesetzt hätte. Andererseits hat jedoch die geschickte Benutzung graphischer Methoden das Buch bedeutend brauchbarer für den Durchschnittsleser gemacht, und der Abschnitt in dem Capitel über Diffraction, in welchem graphische Methoden angewandt werden, ist eine fast hinreichende Entschädigung für den Mangel an Bequemlichkeit bei der Ableitung von Formeln, welche durch den Gebrauch der höheren Mathematik sich einstellen würden. Ein Abriss der Hertz'schen Versuche nebst der mathematischen Theorie des elektrischen Vibrators und der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen ist in dem Werke enthalten. Ein Student, der dieses Lehrbuch gut durchgearbeitet hat, dürfte, falls er die nötigen mathematischen Kenntnisse besitzt, in der Lage sein, die schwierigeren Abhandlungen in Angriff zu nehmen, welche in den wissenschaftlichen Zeitschriften erscheinen. Mannigfache Bezüge auf derartige Arbeiten werden in dem Werke genommen, und obgleich sie nicht erschöpfend sind, werden sie sich doch als nützlich erweisen. Gbs. (Lp.)

O. Wiener. Stehende Lichtwellen und die Schwingungsrichtung polarisirten Lichtes. Wiedemann Ann. XL. 203-243.

beanspruchten Trägers, von welchem zunächst angenommen wird, dass er frei aufliegt. Es werden erst die Neigungen der Querschnitte gegen die Verticale bestimmt, und aus ihnen wird die Verschiebung des Trägers abgeleitet; indem man nun nach dem Abstande der Last von der Mitte differentiirt, erhält man die Aenderung der Verschiebung. Den Widerstand der Stütze und damit den Einfluss der Reibung kann man bestimmen. Es ist klar, dass bei einer Bewegung der Last sich dasjenige Ende des Trägers bewegt, welches den kleinsten Stützendruck erfährt, auf dieses kommt also die ganze Aenderung der Verschiebung. Hiernach kann man die Arbeit berechnen, welche zur Ueberwindung der Reibung gebraucht wird. Der Verfasser behandelt dann noch den Fall eines einseitig befestigten Trägers. F. K.

Bedaux. Position d'un train sur une poutre à deux appuis simples, portant une charge permanente uniforme, donnant le moment fléchissant maximum sous un essieu déterminé. Le Génie civil. XVII. (1890.) 381.

Die im Titel hinreichend gekennzeichnete Aufgabe wird durch Rechnung und Zeichnung gelöst. F. K.

Seipp. Die räumliche Mitteldrucklinie und über Druckverteilung in Gewölbstützen. Civiling. XXXVI. 565-590.

Der Verfasser zeigt an der Hand eines concreten Beispieles, wie bei einem Gewölbe die Druckverteilung zu bestimmen sei, wenn ausser der verticalen Belastung eine horizontale an der Stirnseite des Gewölbes angreifende Kraft zu berücksichtigen ist. Die Methode ist im wesentlichen rechnerisch, jedoch kommt auch das geometrisch-graphische Verfahren zur Anwendung. Bezüglich der Einzelheiten muss auf die Abhandlung selbst verwiesen werden. F. K.

H. Muraoko. Ueber die totale Formänderung der Metallplatten beim Abschleifen einer Seite. Civiling. XXXVI. 125-134, Abdruck aus Japan Journal.

In Wiedemann's Annalen XXII. 249 hatte der Verfasser angegeben, dass dünne Platten durch Schleifen auf der bearbeiteten Seite convex werden.

Er teilt gegenwärtig zunächst Versuche mit, aus welchen hervorgeht, dass der Zusammenhang zwischen der Dicke a und dem Krümmungsradius r durch die Formel

$$r = Aa^3$$

verhältnismässig gut dargestellt wird.

Durch eine „provisorische" Betrachtung sucht der Verfasser sodann, da ihm eine allgemeine Theorie noch nicht gelungen ist, einen Zusammenhang zwischen der Erscheinung und den Constanten der Elasticität abzuleiten. F. K.

A. G. Greenhill. The scientific principles involved in making big guns. Nature XLII. 304-309, 331-334, 378-381.

Eine zusammenfassende Darstellung der Theorie für die Construction der modernen Riesengeschütze. Im letzten Paragraphen äussert sich der Verfasser über die Drahtkanonen mit folgenden Worten:

Wir haben nun die Theorie des Drahtgeschützes beendigt, insofern die Umfangstärke in Betracht kommt, und wegen ihrer experimentellen Bestätigung kann ein interessanter Artikel „On winding and dismantling an experimental wire-wound gun cylinder" vom Lieutenant W. Crozier (Washington, Juni 1886) Auskunft geben. Gemäss neueren Berichten ist jüngst in Amerika ein zehnzölliges Geschütz vom Hauptmann Crozier nach Entwürfen construirt worden, die auf seinen Versuchsergebnissen beruhen.

Die Theorie der Längsspannungen im Drahtgeschütze ist nicht berührt worden, weil es noch ein Streitpunkt ist, ob das Rohr allein die Längsspannung auszuhalten hat, oder ob letztere teilweise vom Aussenmantel zu tragen ist, da ja die Drahtumwickelung, ausser in Canet's Doppelkegel-System, offenbar unfähig ist, irgend einen Widerstand in dieser Richtung zu leisten.

Das Princip des Hrn. Longridge, ein Rohr mit Draht zu verstärken, der mit passend geänderter Spannung herumgewun-

den wird, dürfte sich im Frieden und im Kriege als nützlich erweisen. Er kann als Beweis anführen, dass ein nach diesem Principe verstärktes Geschütz, das 9,2-zöllige Geschütz, wegen seiner grossen Stärke gewählt wurde, die äusserste Tragweite der modernen Artillerie im Jahre 1888 zu ermitteln, mit den sogenannten „jubilee rounds"; hierbei erreichte man bei einem Abgangswinkel von etwa 40° eine Schussweite von 21000 Yards oder 12 (englischen), Meilen, während das Geschoss 380 Pfund wog und die Mündungsgeschwindigkeit etwa 2360 Fuss in der Secunde betrug.

Es wird kein Anspruch auf Originalität in der oben gegebenen Theorie erhoben, und wir fürchten, dass dem richtigen Forscher nicht immer in gebührender Weise das Verdienst zugeschrieben ist; allein der Versuch ist gemacht worden, die wesentlichen Punkte der Theorie in einer möglichst einfachen Form darzustellen mit der geringsten Benutzung algebraischer Formeln. Ueber den Gegenstand ist in den letzten Jahren so viel geschrieben worden, dass der Leser durch die Mannigfaltigkeit der Bezeichnung und Behandlung verwirrt sein dürfte, und es ist zu hoffen, dass die hier dargestellte graphische Methode den Theoretiker befähigen mag, seine Ergebnisse dem Geschütz-Fabrikanten in einer verständlicheren und überzeugenderen Form mitzuteilen.

Lp.

G. Hartig. Torsionelasticität von Faserbändern. Civiling. XXXVI. 359.

Die Abhandlung hat im wesentlichen praktisches Interesse.

F. K.

Bräuler. Ziegelsteingewölbe aus verzahnten Ringen. Centralbl. der Bauverw. X. 263-264.

Der analytische Teil der Berechnung erscheint unrichtig, zum mindesten ungenau.

F. K.

C. Capillarität.

Lord RAYLEIGH. On the theory of surface forces. Phil. Mag. (5) XXX. 285-298, 456-475.

Lord RAYLEIGH. On the tension of water surfaces, clean and contaminated, investigated by the method of ripples. Phil. Mag. (5) XXX. 386-400.

Die ersten beiden Aufsätze geben eine kritische Uebersicht über die Theorie der Oberflächenkräfte mit besonderer Beziehung auf die Leistungen von Young und Laplace. Sie lassen nicht gut einen Auszug zu; der Ref. begnügt sich daher damit, auf diese Abhandlungen zu verweisen, weil sie viel enthalten, was in Betreff der Ansprüche Young's auf diesem Gebiete nicht allgemein bekannt ist, und ausserdem manche bedeutsame Winke des Verfassers für eine befriedigendere Theorie vorkommen. Die letzte Arbeit ist fast ganz experimentell. Eine gute Anzeige derselben steht in Wiedemann's Beiblättern für 1891.

Gbs. (Lp.)

Lord RAYLEIGH. On the tension of recently formed liquid surfaces. Nature XLI. 566-568.

Auszug aus einem Vortrage vor der Lond. R. S. Lp.

E. GOSSART. Mesure des tensions superficielles dans les liquides en caléfaction (méthode des larges gouttes). Ann. de Chim. et Phys. (6) XIX. 173-265, Almeida J. (2) IX. 209-219.

Wenn man einen grossen Quecksilbertropfen, der auf einer Glasplatte ruht, mit einem Tropfen einer beliebigen Flüssigkeit vergleicht, die auf eine sehr heisse Metallplatte geworfen ist („Flüssigkeit in Calefaction"), so wird man zu den folgenden Bemerkungen geführt: 1) Das Calefactions-Phänomen bildet einen besonderen Fall der Capillar-Erscheinungen; denn die Gestalten der beiden Tropfen sind dieselben und müssen es sein. 2) Der caleficirte Tropfen muss sogar einige vorteilhafte Besonderheiten

darbieten. 3) Die Methode der grossen Tropfen liefert sehr bequem ihre Oberflächenspannung unter Umständen, bei denen die anderen Verfahrungsarten eine ziemlich heikle Anwendung gestatten. Mit einem Worte, die Calefactionsphänomene, welche so geistreich von Boutigny erforscht sind, haben in dem doppelt mangelhaften Ausdrucke des „sphäroidalen Zustandes“ ein schlechtes Kennwort erhalten. Sie bieten uns weder einen vierten Zustand der Materie, noch eine sphärische oder selbst im allgemeinen sphäroidale Gestalt. Was sie einzig unter dem Gesichtspunkte der Capillaritätsgesetze von dem Quecksilbertropfen z. B. unterscheidet, ist jene Eigenschaft der Tangente an ihrem Meridian- oder Transversal-Schnitte, alle stetig veränderlichen Neigungen zwischen zwei horizontalen Geraden anzunehmen, welche die ganze Dicke des Tropfens enthalten. Der Zweck der Arbeit ist der Beweis dieser Eigenschaft und ihre Anwendung auf die Messung der Oberflächenspannung. Die vier Teile sind: I. Theoretische Darstellung. II. Experimentelle Bestätigungen. III. Ausdehnung der Methode auf die Temperaturänderungen. IV. Anwendungen. Lp.

G. Van der Mensbrugghe. Sur la propriété caractéristique de la surface commune à deux liquides soumis à leur affinité mutuelle. Belg. Bull. (3) XX. 32-37, 253-264.

Wenn die Verwandtschaft (affinité) der beiden Flüssigkeiten die Summe ihrer Oberflächenspannungen übertrifft, so strebt die Resultante der an der Berührungsfläche vorhandenen Vorgänge (actions) nach einer Vergrösserung dieser Oberfläche. Jene Resultante kann „Ausdehnungskraft“ heissen. Zahlreiche Versuche oder Beobachtungen zur Bestätigung dieses Gesetzes.

Mn. (Lp.)

G. Van der Mensbrugghe. Sur la condensation de la vapeur d'eau dans les espaces capillaires. Belg. Bull. (3) XIX. 101-110.

Der Wasserdampf verdichtet sich nach einer Formel von Sir

William Thomson leichter auf den Körpern, die unendlich viele capillare Hohlräume besitzen. Dieses Princip erklärt eine Menge von Erscheinungen, insbesondere die Bildung der Nebel und Wolken, wenn in der Atmosphäre feste Partikel sind, welche als Verdichtungskerne dienen. Mn. (Lp.)

K. Fuchs. Ueber die Bewegungen suspendirter Teilchen in der Mischungsschicht zweier Flüssigkeiten. Exner Rep. XXVI. 42-49.

K. Fuchs. Die Molecularkräfte in der Endosmose. Exner Rep. XXVI. 358-363.

K. Fuchs. Randwinkel und Kantenwinkel. Exner Rep. XXVI. 419-425.

K. Fuchs. Ueber den Einfluss der Schwere auf die Mischung zweier Flüssigkeiten. Exner Rep. XXVI. 507-512.

K. Fuchs. Ueber teilweise Mischungen. Exner Rep. XXVI. 664-703.

Fortsetzung der Betrachtungen, über welche in F. d. M. XX. 1888. 1092, XXI. 1889. 1008 berichtet ist, und welche alle die theoretische Begründung von solchen Erscheinungen bezwecken, die durch die Molecularkräfte in den Flüssigkeiten hervorgerufen werden. In Folge der Zersplitterung in eine Reihe einzelner Artikel und des Mangels einheitlicher Zielpunkte ist es unmöglich, über jeden Aufsatz insbesondere oder über die Gesamtheit aller im Zusammenhang zu berichten. Lp.

Capitel 2.
Akustik und Optik.

A. Akustik.

Gouy. Sur la propagation anomale des ondes sonores. C. R. CXI. 910-912.

Der Verfasser zeigt, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit longitudinaler Kugelwellen in der Nähe des Centrums nicht con-

stant ist, sondern sich erst mit wachsendem r asymptotisch dem für ebene Wellen gültigen Werte nähert. F. K.

P. Drude. Ueber die Reflexion und Brechung ebener Schallwellen an der Grenze zweier isotropen mit innerer Reibung behafteter Medien. Wiedemann Ann. XLI. 759-769.

Der Verfasser geht aus von den Differentialgleichungen der unendlich kleinen Bewegungen in Medien mit Reibung. Danach werden die an der Grenze zweier solcher Medien zu erfüllenden Grenzbedingungen formulirt. Mit Rücksicht auf dieselben wird dann die Reflexion und Brechung an der Grenze zweier reibenden Medien untersucht. Bei Medien mit geringer innerer Reibung übt dieselbe auf die in Frage stehende Erscheinung keinen merklichen Einfluss aus; hingegen wird bei Substanzen mit starker innerer Reibung der Einfluss der Reibung ein so starker, dass die Reflexion und Brechung vielleicht dazu dienen können, die Reibung ziffernmässig zu bestimmen. F. K.

W. Voigt. Zur Theorie der Schwingungen gestrichener Saiten. Gött. Nachr. 1890. 502-505.

Durch directe Messung mittels des Vibrationsmikroskops hatte Herr von Helmholtz festgestellt, dass jeder Punkt einer gestrichenen Saite in der Weise schwingt, dass für

$$0 < t < \mathfrak{T}, \quad y = ft + h,$$

und für

$$\mathfrak{T} < t < T, \quad y = g(T-t) + h$$

gesetzt werden kann. Hierbei sind h und $\mathfrak{T}$ Functionen von x, f und g Grössen, welche durch die Gleichung:

$$f\mathfrak{T} = g(T-\mathfrak{T})$$

verbunden sind. Aus Vergleich mit der trigonometrischen Entwickelung für die Schwingungen einer beiderseits eingespannten Saite von der Länge L hatte Herr von Helmholtz gefolgert

$$f = \frac{8P(L-x)}{LT}, \quad g = \frac{8Px}{LT}, \quad p = \frac{4P(L-x)}{L^2},$$

wo P die Amplitude in der Mitte und p an der Stelle x ist. Herr Voigt hebt hervor, dass die Lösung nicht der Differentialgleichung für die Saitenschwingung genügt, was darin seinen Grund habe, dass stillschweigend für alle Punkte dieselbe Phase angenommen sei. Der Verfasser sucht diesen Uebelstand zu beseitigen, indem er setzt für

$$t_0 < t < \mathfrak{T}+t_0, \quad y = f(t-t_0)+h,$$

für

$$\mathfrak{T}+t_0 < t < T+t_0, \quad y = g(T-t+t_0)+h,$$

wo t_0 die Phase ist und somit eine Function von x. Durch das von Herrn von Helmholtz angewandte Verfahren ergiebt sich jetzt

$$\frac{\mathfrak{T}}{T} = \frac{x}{L}, \quad t_0 = -\frac{xT}{2L},$$

f und g behalten ihre von Hrn. von Helmholtz bestimmten Werte; endlich:

$$h = -p = -\frac{4Px(L-x)}{L^2}.$$

Man hat also für

$$-\frac{xT}{2L} < t < \frac{xT}{2L}, \quad y = \frac{8P(L-x)t}{L.T}.$$

dagegen für

$$\frac{xT}{2L} < t < \frac{(2L-x)T}{2L}, \quad y = \frac{8Px(T-2t)}{2LT}.$$

Zum Schluss verweist Hr. Voigt auf eine Abhandlung in den Ber. der Naturf.-Ges. in Freiburg VII. 500. 1880, in welcher Hr. Lindemann, wenn auch auf anderem Wege, zu demselben Resultate gelangt. F. K.

Lord Rayleigh. On bells. Phil. Mag. (5) XXIX. 1-17.

Eine vollständige theoretische Untersuchung über die Schwingungen von Glocken wird natürlich nicht beabsichtigt; aber gewisse allgemeine Principien werden festgestellt, und ein Bericht wird erstattet über eine experimentelle Prüfung mehrerer Kirchenglocken, bei deren Verlauf einige merkwürdige Thatsachen sich zeigten. In praxi werden die Glocken als symmetrisch um eine Axe angesehen, und wenn die Symmetrie vollkommen ist, so

die mittels dieser Methode berechneten Zahlen für n stimmen mit den Beobachtungen viel besser überein, als bei der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate.

Im zweiten Abschnitt rechtfertigt der Verfasser die Einführung des Gliedes cl^2 (des sogenannten Briot'schen Termes) in die Dispersionsformel (1). Messungen von Mouton und Langley, die den Brechungsexponenten der ultraroten Strahlen in Quarz und Steinsalz betreffen, seien durch eine Formel, in der jenes Glied fehlt, nicht darstellbar. Er berechnet dann verschiedene Beobachtungen nach Formel (1) resp. nach der durch Hinzufügung des Gliedes dl^{-4} erweiterten Formel (1) und legt sich die Frage vor: welches Glied muss man in der Differentialgleichung der einfachen Schwingungen

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

rechts einführen, um einen Terme $\lambda^{-p+s} n^{q-2}$ in der Dispersionsformel zu erhalten? Es ergiebt sich, dass zu diesem Zwecke auf der rechten Seite von (2) ein Summand von der Form

$$K \frac{\partial^p u}{\partial x^q \, \partial t^{p-q}}$$

hinzutreten muss. Den Briot'schen Term der Dispersionsformel erhält man daher, wenn man auf der rechten Seite von (2) ein Glied von der Form $G.u$ hinzufügt, wo G eine Constante ist.

Der dritte Abschnitt handelt von dem Einfluss des Briot'schen Termes der Dispersionsformel auf die Doppelbrechung. Um diesen Einfluss zu ermitteln, wird folgendes Verfahren eingeschlagen: die Differentialgleichungen für die Lichtbewegung in einem Krystall seien ohne Berücksichtigung der Dispersion:

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = F, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = F_1, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = F_2,$$

wo F, F_1, F_2 von den zweiten partiellen Ableitungen der ξ, η, ζ nach den Coordinaten abhängen, und zwar in verschiedener Weise, je nach der zu Grunde gelegten Theorie. Bei Berücksichtigung des Gliedes cl^2 der Dispersionsformel, und zwar dieses Gliedes allein, sind die Gleichungen (3) nach dem oben Gesagten durch

folgende zu ersetzen:

$$(4)\qquad \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = F - G.\xi,\quad \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = F_1 - H.\eta,\quad \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = F_2 - K.\zeta.$$

Für die Functionen F, F_1, F_2 werden nun zunächst diejenigen Ausdrücke gesetzt, welche Lamé in seiner Elasticitätstheorie ableitet, und die bekanntlich zu der Neumann'schen Anschauung über die Lage der Polarisationsebene führen. Es wird untersucht, welche Modification die aus (3) sich ergebenden Gesetze der Doppelbrechung durch Hinzufügung der Glieder $G.\xi$ etc. erfahren. Bei einaxigen Krystallen ergeben sich aus (4) für die Quadrate der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des ordentlichen und ausserordentlichen Strahles Ausdrücke von folgender Form:

$$(5)\qquad \begin{cases} v_o^2 = a^2 + (c^2\cos^2\vartheta + c_1^2\sin^2\vartheta)l^2, \\ v_e^2 = a^2\cos^2\vartheta + a_1^2\sin^2\vartheta + c.l^2, \end{cases}$$

falls ϑ der Neigungswinkel der Wellennormale gegen die Axe ist. Hiernach müsste der Briot'sche Term der Dispersionsformel sich für den ordentlichen Strahl mit ϑ ändern, während derselbe Term für den ausserordentlichen Strahl von ϑ unabhängig wäre. Wenn man dagegen für die Functionen F, F_1, F_2 die Ausdrücke von Boussinesq zu Grunde legt, so ergiebt sich, dass der Briot'sche Term für den ordentlichen Strahl von ϑ unabhängig ist, für den ausserordentlichen Strahl aber sich mit ϑ ändert; und zu dem gleichen Ergebnis führen die Ausdrücke, aus welchen Poincaré in seiner „Théorie mathématique de la lumière“ die Fresnel'sche Theorie der Doppelbrechung ableitet. Uebrigens folgert der Verfasser auch aus rein geometrischen Ueberlegungen, dass man auf Grund der Fresnel'schen und der Neumann'schen Anschauung über die Lage der Polarisationsebene hinsichtlich der Abhängigkeit des Briot'schen Dispersionstermes von dem Winkel ϑ zu entgegengesetzten Resultaten gelangt. Nun ergiebt sich aus Messungen, die Mascart am Kalkspat angestellt hat, dass bei diesem Krystall die Constanten der Formel (1) folgende Werte haben: für den ordentlichen Strahl ist $a = 0{,}37138$, $c = 0{,}00346$; für den ausserordentlichen dagegen wird c unmerklich, während $a = 0{,}45800$ ist. Wäre die Neumann'sche Anschauung über die Schwingungsrichtung des polarisirten Lichtes zutreffend, so müsste

$\frac{1}{n^2}$ für den ordentlichen Strahl bei Veränderungen des Winkels ϑ schon Aenderungen in der dritten Decimale erfahren, während doch die besten Beobachtungen ergeben, dass die Aenderungen von $\frac{1}{n^2}$ höchstens eine Einheit in der fünften Decimale betragen. Der Verfasser schliesst daraus, dass durch seine Discussion die Unhaltbarkeit der Neumann'schen Grundanschauung bewiesen, und dass nur die Fresnel'sche Vorstellung mit den Beobachtungen verträglich sei. Referent kann diesen Beweis nicht für stichhaltig ansehen. Schon der Umstand, dass allein der Einfluss des Briot'schen Termes auf die Doppelbrechung untersucht ist, während die zu den Gleichungen (3) in Folge des Gliedes bl^{-2} hinzutretenden Terme ganz übergangen werden, giebt zu erheblichen Zweifeln an der Richtigkeit der obigen Schlussfolgerung Anlass. Abgesehen davon aber, ist nach des Referenten Ansicht das Verfahren des Verfassers an sich nicht geeignet, zu einer Entscheidung über die Frage zu führen. Denn das Verfahren besteht im Grunde darin, zu den theoretischen Formeln (3) rein empirische Glieder hinzuzufügen (eine andere Bedeutung haben die Terme $G\xi$ etc. nicht). Aus solchen rein empirischen Gliedern aber kann man überhaupt keinen bindenden Rückschluss auf die Grundlagen ziehen, auf denen die theoretischen Formeln beruhen.

Der vierte Teil der Arbeit enthält eine ausführliche Beschreibung eigener Versuche des Verfassers über die Dispersion des Kalkspats nebst genauer Discussion über die Grösse der möglichen Beobachtungsfehler. Diese Messungen, die sich nicht nur auf den sichtbaren, sondern auch auf den ultraroten Teil des Spectrums beziehen, sind hauptsächlich zu dem Zwecke angestellt, die Grösse des Factors c der Formel (1) sowohl für den ordentlichen als den ausserordentlichen Strahl genauer festzustellen, als es die Mascart'schen Beobachtungen gestatten. Aus den neuen Beobachtungen, auf die näher einzugehen hier zu weit führen würde, wird derselbe Schluss gezogen wie oben, ein Schluss, den, wie gesagt, der Referent als beweisend nicht anerkennen kann.

Nebenbei spricht der Verfasser die Ansicht aus, dass es durch Discussion des Briot'schen Gliedes der Dispersionsformel für den ausserordentlichen Strahl vielleicht möglich sein werde, zu entscheiden, ob die Schwingungen dieses Strahles genau oder nur angenähert transversal sind, ob also der Aether incompressibel ist oder nicht. Er gelangt jedoch hinsichtlich dieser Frage zu keinem definitiven Resultat. Uebrigens würden sich hier dieselben Einwendungen erheben lassen, die oben dargelegt sind.

Wn.

H. Kayser und C. Runge. Ueber die Spectren der Alkalien. Wiedemann Ann. XLI. 302-320.

In Verfolg ihrer früheren Untersuchungen teilen die Verf. nun ihre Messungen und Rechnungen für die Linien von *Li*, *Na*, *K*, *Rb*, *Cs* mit; in der Kenntnis der Wellenlängen sind sie um eine Decimale weiter gekommen; es hat sich ergeben, dass die Spectren aller Alkalien in durchaus analoger Weise gebaut sind, dass sich jedes schon dem Aussehen nach in Haupt- und Nebenserien zerfällen lässt, und dass innerhalb jeder Serie das Gesetz $l^{-1} = A + Bn^{-2} + Cn^{-4}$ für eine Reihe aufeinander folgender ganzer Zahlen n mit der Beobachtung ausgezeichnet übereinstimmt.

R. M.

C. Runge. On a method of discriminating real from accidental coincidences between the lines of different spectra. Phil. Mag. (5) XXIX. 462-466.

Einwürfe gegen gewisse Folgerungen von Hrn. Love über diesen Gegenstand. (Phil. Mag. (5) XXV.) Gbs. (Lp.)

Gouy. Recherches théoriques et expérimentales sur la vitesse de la lumière. Première partie: Rayons de direction constante. Ann. chim. et phys. (6) XVI. 262-288.

E. Kobald. Ueber Mac-Cullagh's Differentialgleichungen für Lichtschwingungen in zweiaxigen Krystallen und deren Verallgemeinerung. Wien. Ber. XCIX. 826-845.

Die von Lamé in seiner Elasticitätstheorie abgeleiteten und nach ihm benannten Differentialgleichungen für die Lichtbewegung in krystallinischen Medien rühren, wie der Verfasser bemerkt, eigentlich von Mac-Cullagh her. Zwar giebt Mac-Cullagh in einem Briefe an Brewster (Phil. Mag. VIII. 1835) nur die Ausdrücke für die in der Theorie der Elasticität betrachteten Druckcomponenten an; doch weist eine in dem Briefe enthaltene Bemerkung über die genau transversale Richtung der Schwingungen darauf hin, dass er schon damals im Besitz jener Differentialgleichungen war; und deshalb bezeichnet der Verfasser dieselben als Mac-Cullagh'sche. An die in Rede stehenden Gleichungen werden nun verschiedene Bemerkungen und Erörterungen geknüpft, die folgende Punkte betreffen. 1) Wie Kirchhoff gezeigt hat (Abh. d. Berl. Akad. 1876, vgl. F. d. M. VIII. 647) führt der Green'sche Ausdruck für das Potential der elastischen Kräfte bei Ausschluss longitudinaler Wellen zu denselben Differentialgleichungen wie die Mac-Cullagh'sche Kräftefunction. Der Beweis dafür wird vereinfacht.

2) Bei der Lamé'schen Ableitung der Gleichungen tritt die Schwierigkeit auf, dass man, um nicht zu unzulässigen Folgerungen zu gelangen, aus der Erfahrung die Thatsache entnehmen muss, dass jeder gegebenen Fortpflanzungsrichtung einer Welle zwei Polarisationsrichtungen entsprechen. Es wird gezeigt, dass diese Schwierigkeit nicht besteht, wenn man annimmt, dass den inneren Kräften des betrachteten Mediums ein Potential zukommt. Umgekehrt soll jene Thatsache ein Beweis dafür sein, dass die durch die Aenderung der relativen Lage der Aetherteilchen geweckten Elasticitätskräfte ein Potential besitzen.

3) Die Mac-Cullagh'schen Gleichungen lassen sich, wenn man die Schwingungscomponenten als Differentialquotienten dreier neuen Functionen ausdrückt, auf die Form bringen, die in den Gleichungen der elektromagnetischen Lichttheorie auftritt.

4) Für den Fall einaxiger Medien werden diejenigen Integrale der Mac-Cullagh'schen Gleichungen aufgestellt, die von einem Erregungscentrum aus fortschreitende Wellen darstellen.

5) Dass die Lamé'schen Lösungen der allgemeinen Gleichungen für zweiaxige Medien in den optischen Axen unbestimmt werden, berechtigt nach des Verfassers Ansicht nicht zu dem von Frau v. Kowalevski gezogenen Schlusse, dass diese Lösungen eine physikalisch unmögliche Bewegung repräsentiren. Eine solche Unbestimmtheit liege in der Natur der Sache.

6) Es werden die Mac-Cullagh'schen Gleichungen auf n-Variabeln ausgedehnt und diejenigen Lösungen der verallgemeinerten Gleichungen bestimmt, welche ebenen transversalen Wellen entsprechen. Die Rechnung gestaltet sich analog wie für drei Variabeln. Zu jeder Fortpflanzungsrichtung gehören $n-1$ Werte der Fortpflanzungsgeschwindigkeit; dieselben sind die Wurzeln einer Gleichung $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades. Letztere Gleichung erhält die der Fresnel'schen Gleichung analoge Form nur dann, wenn man zwischen den $\frac{n(n-1)}{2}$ Constanten, die in den Differentialgleichungen auftreten, gewisse Relationen annimmt. Wn.

Issaly. Mémoire sur une double série de surfaces nouvelles comprises entre les deux nappes de la surface de l'onde de Fresnel et sur les cônes isochromatiques circonscrits à ces surfaces. Bordeaux Mém. (3) V. 251-275.

Die Arbeit ist mehr von geometrischem als physikalischem Interesse. Der Verfasser schreibt zwar seinen Resultaten auch eine physikalische Bedeutung zu, ohne dies aber irgend wie zu begründen.

Es handelt sich um die Untersuchung der Gestalten der Flächen, die in der Flächenschar

$$(1) \quad (a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)(x^2+y^2+z^2)$$
$$-[a^2(b^2+c^2)x^2+b^2(c^2+a^2)y^2+c^2(a^2+b^2)z^2]\sin j+a^2b^2c^2 = 0$$

enthalten sind. Für $j=\frac{1}{2}\pi$ geht (1) in die Fresnel'sche Wellenfläche über. Für $j<\frac{1}{2}\pi$ dagegen repräsentirt (1) eine Fläche, die

ganz zwischen den beiden Mänteln der Fresnel'schen Wellenfläche liegt und in Folge dessen Mittelfläche der gebrochenen Wellen genannt wird. Auch diese Mittelfläche besteht aus zwei Mänteln, die aber nicht in einzelnen Punkten, sondern längs vier geschlossener Curven zusammenhängen. Innerhalb der beiden Kegel, welche jene Curven mit dem Anfangspunkte verbinden, liegt kein reeller Flächenpunkt. Jene Curven begrenzen also Oeffnungen der Fläche. Wird $j = \frac{1}{2}\pi$, so ziehen sich die Curven in die vier singulären Punkte der Wellenfläche, die vorerwähnten Kegel in die Radien nach den singulären Punkten zusammen. Der äusserste Wert, den der Winkel j noch annehmen kann, ist der spitze Winkel zwischen den gleichen conjugirten Durchmessern in demjenigen Hauptschnitte eines Ellipsoids mit den Axen a, b, c, welchem die grösste und kleinste dieser Axen angehören.

Nachdem die Schnitte der Fläche (1) mit den Coordinatenebenen für die verschiedenen möglichen Fälle discutirt sind, wird der geometrische Ort derjenigen Curven bestimmt, längs deren die beiden Mäntel der verschiedenen Flächen (1) zusammenhängen; es ergiebt sich dafür die Fläche

$$(2) \qquad (a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)(x^2+y^2+z^2) = a^2b^2c^2.$$

Wichtiger noch als diese Fläche sind die schon oben erwähnten Kegel, welche die singulären Curven mit dem Anfangspunkte verbinden. Diese Kegel werden als „isochromatische“ Flächen bezeichnet; doch hat diese Bezeichnung nach Ansicht des Referenten keinerlei physikalische Bedeutung, da die Flächen (1) keine eigentlichen Wellenflächen sind. Die Schnitte der verschiedenen isochromatischen Kegel mit den drei Coordinatenebenen ergeben Scharen von Curven, die mit den isochromatischen Curven zweiaxiger Krystalle eine gewisse Aehnlichkeit haben. Diese Curvenscharen werden eingehend untersucht, wobei auch die Fälle $a = b$ und $b = c$ ihre Erledigung finden.

Zum Schluss wird kurz angedeutet, wie man die die Flächenschar (1) betreffende Untersuchung auf die allgemeineren Scharen

$$M_2R^2-(N_1R\sin i+N_2\cos i)+1 = 0,$$
$$M_2R^2+(N_1R\cos i-N_2\sin i)+1 = 0$$

ausdehnen kann. Hierin ist $R^2 = x^2+y^2+z^2$, M_2 und N_2 sind gewisse homogene Functionen zweiter Ordnung, N_1 ist eine homogene Function erster Ordnung der Coordinaten, i der variable Parameter. Zur expliciten Darstellung der Resultate gelangt der Verf. für den allgemeinen Fall nicht. Wn.

F. Pockels. Ueber die durch einseitigen Druck hervorgerufene Doppelbrechung regulärer Krystalle, speciell von Steinsalz und Sylvin. Wiedemann Ann. XXXIX. 440-469.

In einer im vorigen Jahrgang besprochenen Arbeit (F. d. M. XXI. 1889. 1073) hatte der Verfasser allgemein den Einfluss elastischer Deformationen auf das optische Verhalten krystallinischer Körper untersucht. In dem vorliegenden Aufsatz werden die Ergebnisse der allgemeinen Theorie auf Krystalle des regulären Systems angewandt. Bei diesen hängt die durch elastische Deformationen bewirkte Aenderung der Lichtgeschwindigkeit von drei der Substanz eigentümlichen Constanten ab. Sieht man jedoch von der absoluten Aenderung der Lichtgeschwindigkeit ab, so kommen nur zwei jener drei Constanten in Frage, und zwar bestimmen dieselben die Stärke der Doppelbrechung für zwei Prismen, deren Längsaxen einer Würfel- bezw. einer Oktaedernormale parallel sind, und welche die gleiche Längs- und Querdilatation erlitten haben. Handelt es sich indessen nicht um gleichförmige Deformation, sondern nur um einseitigen Druck von beliebiger Richtung, so ist für die Lage der optischen Axen allein das Verhältnis jener beiden Constanten, multiplicirt mit einem analogen, von den Elasticitätsconstanten abhängigen Verhältnis, massgebend; das Product der eben erwähnten beiden Quotienten sei $= \frac{b}{a}$. Um die eigentümlichen Verhältnisse, welche bei regulären, durch einseitigen Druck doppelt brechend gemachten Krystallen auftreten können, völlig zu übersehen, braucht man nur zu untersuchen, wie sich die Lage der optischen Axen mit der Druckrichtung sowie mit der Grösse von $\frac{b}{a}$ än-

dert. Je nachdem

$$1)\ \frac{b}{a} > 1, \quad 2)\ 0 < \frac{b}{a} < 1, \quad 3)\ 0 > \frac{b}{a} > -1,$$

oder endlich

$$4)\ \frac{b}{a} < -1$$

ist, ergeben sich andere Endformeln. Diese Formeln werden für die einzelnen Fälle abgeleitet und eingehend discutirt. Der Uebersichtlichkeit wegen beschränkt der Verfasser dabei die Druckrichtung auf die Symmetrieebenen.

Zur Prüfung der Ergebnisse der Theorie hat der Verfasser am Steinsalz und Sylvin Messungen über die relative Verzögerung für verschiedene Beobachtungsrichtungen angestellt. Für die erste dieser Substanzen ist $0 < \frac{b}{a} < 1$, für die zweite ist $\frac{b}{a} < -1$. [Der Fall $0 > \frac{b}{a} > -1$ tritt beim Flussspat ein, während man dem Fall $\frac{b}{a} > 1$ bisher noch nirgends begegnet ist.] Die Abweichungen zwischen Beobachtung und Rechnung übersteigen nicht die Grenzen der Beobachtungsfehler. Wn.

J. Larmor. Rotatory polarization, illustrated by the vibrations of a gyrostatically loaded chain. Lond. M. S. Proc. XXI. 423-432.

Um die Fortpflanzung von Wellen in einem Medium, das die Polarisationsebene dreht, an einem mechanischen Modell zu erläutern, hat Sir W. Thomson in den Proc. Lond. Math. Soc. VI (1875) die Bewegung einer gespannten Kette untersucht, an deren einzelnen Gliedern Schwungräder angebracht sind, die mit constanter Winkel-Geschwindigkeit um ihre Axen rotiren. Während Thomson nur den Fall betrachtet, dass die Axen der Räder sämtlich zur Längsaxe der Kette senkrecht stehen, wird in der vorliegenden Arbeit der allgemeinere Fall behandelt, in dem die (in der Ruhelage parallelen) Axen gegen die Längsrichtung der Kette beliebig geneigt sind. Zunächst werden

unter Berücksichtigung der ursprünglich vorhandenen Rotation die sechs Bewegungsgleichungen für jedes Glied der Kette aufgestellt und daraus die entsprechenden Gleichungen für den Fall abgeleitet, dass die Kette aus unendlich vielen, unendlich kleinen Gliedern besteht, d. h. dass die Kette in einen biegsamen Faden übergeht. Die sechs so gewonnenen Gleichungen enthalten noch die fictiven Kräfte, welche die Verbindung der einzelnen Glieder ersetzen; nach Elimination dieser Kräfte bleiben noch drei Gleichungen für die Bewegung der Kette übrig. Nimmt man an, dass der Querschnitt der Kette sehr klein ist, und abstrahirt von den Torsionsschwingungen, so ergeben sich für die transversale Bewegung zwei Gleichungen von folgender Form:

$$(a) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + c \frac{\partial^3 y}{\partial s^2 \partial t}, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} - c \frac{\partial^3 x}{\partial s^2 \partial t}. \end{cases}$$

Existiren neben den transversalen Schwingungen der Kette noch Torsionsschwingungen, so kommt zu den Gleichungen (a) noch eine dritte Gleichung hinzu; ausserdem aber ist dann auf den rechten Seiten von (a) noch ein vom Torsionswinkel abhängiger Term hinzuzufügen. Wenn endlich die Dimensionen des Querschnitts nicht sehr klein sind, treten auf den linken Seiten der Gleichungen (a) noch Glieder von der Form

$$b_1 \frac{\partial^4 x}{\partial s^2 \partial t^2} \quad \text{resp.} \quad b_2 \frac{\partial^4 y}{\partial s^2 \partial t^2}$$

hinzu.

Der Verfasser leitet zunächst aus der allgemeinsten Form seiner Gleichungen den Wert für die Geschwindigkeit ab, mit der irgend welche Wellen die Kette durchlaufen. Es ergiebt sich dafür eine Gleichung dritten Grades, die discutirt und auf specielle Fälle angewandt wird. Sodann betrachtet er transversale Wellen, die den Gleichungen (a) genügen, und löst folgende Aufgabe: Die ganze Kette bestehe aus drei Teilen; nur für den mittleren Teil sollen die Gleichungen (a) gelten, während für die beiden anderen Teile die Constante c gleich Null ist (d. h. diese Teile sollen nur Schwingungen von der Art aus-

führen, wie gewöhnliche gespannte Saiten). Eine transversale Welle, die in dem einen Endstück entsteht, pflanzt sich durch das mittlere Stück bis zum dritten Teile der Kette fort. Für den Uebergang vom ersten zum zweiten, sowie für den vom zweiten zum dritten Teile gelten die Bedingungen der Elasticitätstheorie: Gleichheit der Verrückungen und Gleichheit des Drucks zu beiden Seiten des trennenden Querschnitts. Es soll der Verlauf der Welle durch die Kette ermittelt werden. Die Aufgabe lässt sich mittels einfacher Rechnungen lösen, und es ergiebt sich, dass, wenn die einfallende Welle geradlinig polarisirt war, die austretende (im dritten Teile) elliptisch polarisirt ist. Die betrachtete Bewegung bildet eine hübsche und verhältnismässig einfache Erläuterung zu dem Durchgang von Lichtwellen durch drehende Medien. Wn.

MONNORY. Pouvoir rotatoire et double réfraction. Almeida J. (2) IX. 277-287.

Die Theorie der gleichzeitigen Wirkungen des Drehungsvermögens und der Doppelbrechung ist von Hrn. Gouy aufgestellt worden. Der Verf. wendet diese Theorie auf die Erforschung der Umwandlung einer geradlinigen Schwingung an, welche durch eine mit dem Drehungsvermögen behaftete, doppeltbrechende Platte senkrecht hindurchgeht. Der einfachste Fall, der einzige, den er prüft, ist derjenige, bei welchem die Schwingung des Einfallsstrahles parallel oder senkrecht zum Hauptschnitt der Platte ist. Die Schwingung des austretenden Strahles ist im allgemeinen elliptisch; sie wird durch den Winkel α ihrer grossen Axe mit der Richtung der Einfallsschwingung und durch das Verhältnis K ihrer beiden Axen bestimmt. Die Frage ist schon von Hrn. Wiener behandelt worden (Wiedemann Ann. XXXV, F. d. M. XX. 1888. 1010), der durch geometrische Betrachtungen den Ausdruck für $tg 2\alpha$ ermittelt hat. Man kann jedoch mit Benutzung der gewöhnlichen analytischen Methode diesen Ausdruck gewinnen, ebenso auch den für das Verhältnis der Axen und danach die vollständige Discussion durchführen. Lp.

H. Schoentjes. Projet d'expériences destinées à vérifier si la lumière polarisée, dont le plan de polarisation oscille, exerce une influence sur le champ magnétique. Belg. Bull. (3) XIX. 444-468.

P. De Heen, C. Lagrange. Rapports. Ibid. 319-321, 321-328.

Der zweite Berichter hebt die Gründe hervor, welche es gestatten, die Cauchy'sche Theorie des Lichtes beizubehalten, selbst wenn die vorgeschlagenen Versuche gelingen.

Mn. (Lp.)

F. H. Wehner. Ueber die Reflexion und Brechung des Lichtes an der Grenze unkrystallinischer Medien. Hoppe Arch. (2) IX. 337-374.

In der vorliegenden Arbeit wird das Problem der Reflexion auf einem von Herrn VonderMühll vorgeschlagenen Wege durchgeführt (Math. Ann. XXVII; vgl. F. d. M. XVIII. 1886. 996). Zunächst betrachtet der Verfasser den Uebergang des Lichtes von einem homogenen Medium zu einem andern auf Grund der vollständigen, durch die Elasticitätstheorie geforderten Grenzbedingungen, während über das Verhältnis der Dichtigkeiten wie über die Beziehung zwischen den Elasticitätsconstanten beider Medien keinerlei Annahmen gemacht werden. Der Umstand, dass die sich ergebenden Formeln wegen der darin auftretenden longitudinalen Wellen mit der Erfahrung nicht in Uebereinstimmung gebracht werden können, führt auf die Annahme, dass zwischen den beiden Medien nicht ein plötzlicher, sondern ein allmählicher Uebergang stattfindet, vermittelt durch unendlich viele, unendlich dünne homogene Schichten. Der Einfluss dieser Uebergangsschicht wird nun genau in derselben Weise behandelt, wie in einer früheren Arbeit des Herrn VonderMühll (Math. Ann. V, vgl. F. d. M. IV. 1872. 521); die auf die Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene bezüglichen Formeln werden auch einfach jener VonderMühll'schen Arbeit entnommen, während für die Schwingungen in der Einfallsebene sich hier andere Formeln ergeben. Der Grund dafür liegt in dem Umstande, dass hier

nicht der Aether als incompressibel angenommen, vielmehr die Möglichkeit longitudinaler Wellen zugelassen wird. Jedoch wird, um die Rechnung mit der Erfahrung in Uebereinstimmung zu bringen, die Bedingung eingeführt, dass longitudinale Schwingungen zwar in der Uebergangsschicht existiren, nicht aber im ersten und letzten Medium in endlicher Entfernung von jener Schicht. Die sich ergebenden Formeln sind recht complicirt und wenig übersichtlich. Ihre Anpassung an die Beobachtungen stösst ebenso, wie dies bei den Von der Mühll'schen Formeln der Fall ist, auf grosse Schwierigkeiten. Die Bedingungen, die erfüllt werden müssen, wenn die Formeln der Erfahrung entsprechen sollen, lassen eine einfache Deutung nicht zu.

Wn.

P. Drude. Das Verhalten der Absorptionscoefficienten von Krystallen. Wiedemann Ann. XL. 665-680.

Wenn Licht senkrecht auf eine Krystallplatte fällt, so bestimmen sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω und der Absorptionscoefficient $\frac{\varkappa}{\omega}$ aus einer quadratischen Gleichung mit complexen Coefficienten, der die Grösse

$$\Omega^2 = \left(\frac{\omega}{1-i\varkappa}\right)^2$$

genügt. Zerlegt man diese Gleichung, die der Verfasser einer früheren Arbeit entnimmt (cf. F. d. M. XIX. 1887. 1086) in einen reellen und einen rein imaginären Teil, so erhält man 2 Gleichungen zur Berechnung von ω und $\varkappa$. Die Rechnung giebt aber keine anschauliche Vorstellung davon, wie jene beiden Grössen von der Lage der Wellennormale gegen die Krystallaxen abhängen. Diese Vorstellung etwas deutlicher zu gestalten, ist der Zweck des vorliegenden Aufsatzes. Zunächst wird gezeigt, wie man, wenn Ω bekannt ist, $\frac{1}{\omega}$ und $\frac{\varkappa}{\omega}$ leicht durch eine geometrische Construction ermitteln kann. Ein einfacher Ausdruck für Ω^2 ferner ergiebt sich, wenn die quadratische Gleichung für Ω^2 in zwei Factoren zerfällt, was bei einaxigen Krystallen der

Fall ist, sowie bei rhombischen Krystallen dann, wenn die Wellennormale in eine Symmetrieebene fällt. Bei einaxigen Krystallen gelingt es daher, durch eine einfache Construction anschaulich zu machen, welche Veränderungen die Absorption in den Fresnel'schen Gesetzen für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des ausserordentlichen Strahles hervorruft. (Der ordentliche Strahl hat constante Absorption und constante Geschwindigkeit).

Eine ähnliche Construction gilt für die drei Symmetrieebenen rhombischer Krystalle. Die weitere Untersuchung dieser Krystalle wird aber nicht allgemein durchgeführt, sondern nur unter der Annahme, dass die Absorption gering ist. In diesem Falle bleiben die Fresnel'schen Gesetze der Fortpflanzungsgeschwindigkeit ungeändert. Es existiren also nur zwei Axen gleicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit, während bei sehr starker Absorption unendlich viele derartige Axen existiren können. Was die Absorption betrifft, so erhält man, wenn man die Grösse $\frac{\varkappa}{\omega}$ auf der Richtung der Wellennormale aufträgt, eine Fläche mit zwei Schalen. Diese Fläche unterscheidet sich aber dadurch von der Wellenfläche, dass die beiden Schalen nicht nur in einzelnen Punkten zusammenhängen, sondern längs gewisser Curvenstücke, die aber nicht geschlossen sind. Von jeder der drei Symmetrieebenen wird die in Rede stehende Fläche in einem Kreise und einer Art von Oval geschnitten; in letzterem liegen die Richtungen des grössten und kleinsten Radius schief zu einander. In einer der drei Symmetrieebenen schneiden sich der Kreis und das Oval in vier Punkten, von denen je zwei einander diametral gegenüberliegen. In dieser Ebene existiren also zwei Axen gleicher Absorption, und an diese schliessen sich ausserhalb der Symmetrieebene unendlich viele andere Axen gleicher Absorption an; diese Axen verbinden den Mittelpunkt der Fläche mit der oben erwähnten Curve, längs deren die beiden Schalen der Fläche zusammenhängen.

Zum Schluss bespricht der Verfasser eine von Becquerel über die Absorption von Krystallen aufgestellte empirische Formel. Dieselbe führt zu anderen Ergebnissen, als die theoretische

Untersuchung des Herrn Drude. Aber wenn die Becquerel'sche Formel auch die Beobachtungen von Becquerel selbst gut darstellt, so widersprechen ihr doch andere Beobachtungen, namentlich solche von Ramsay. Eine Entscheidung kann nur durch weitere Experimente herbeigeführt werden. Wn.

P. Drude. Bestimmung der optischen Constanten der Metalle. Wiedemann Ann. XXXIX. 481-554.

In der wesentlich experimentellen Arbeit werden zunächst die verschiedenen Methoden zur Bestimmung der optischen Constanten der Metalle besprochen, sowie die Umstände, welche störend auf die Beobachtungen einwirken. In dieser Hinsicht kommen hauptsächlich die verunreinigenden Oberflächenschichten in Betracht. Die Wirkung derselben auf das reflectirte Licht ist vom Verfasser in einer früheren Arbeit untersucht (F. d. M. XXI. 1889. 1077); die dort abgeleiteten Formeln werden hier durch die specielle Annahme vereinfacht, dass das Absorptionsvermögen der Oberflächenschicht gegenüber dem des Metalls zu vernachlässigen ist. Sodann wird eingehend erörtert, wie die Beobachtungen über das reflectirte Licht anzustellen sind, um die optischen Constanten des Metalls möglichst genau zu ermitteln; die zur Berechnung dieser Constanten dienenden Formeln entnimmt der Verf. früheren Arbeiten (vergl. F. d. M. XIX. 1887. 1086; XX. 1888. 1114).

Weiter folgt die Mitteilung der Beobachtungen selbst, die sich auf die Bestimmung des Brechungs- und Absorptionscoefficienten verschiedener Metalle, auf ihre Dispersion, endlich auf die Abhängigkeit der Constanten von der Temperatur beziehen. Von den Ergebnissen seien hier folgende erwähnt: Kupfer ist für Natriumlicht das durchsichtigste aller Metalle (Absorptionscoefficient 2,6), Zink das undurchsichtigste (Abs. 5,5). Ferner hat Silber den kleinsten Brechungsexponenten ($n = 0,18$), Antimon den grössten ($n = 3,04$), nach ihm kommt Stahl: Die Herstellungsart und der Härtezustand hat auf die optischen Eigenschaften keinen merkbaren Einfluss. — Nur Blei, Gold und

Kupfer besitzen normale Dispersion des Brechungsvermögens zwischen rotem und gelben Lichte, alle übrigen Metalle haben anomale Dispersion. — Die optischen Constanten ändern sich nur wenig mit der Temperatur.

Auch die Metallreflexion in Flüssigkeiten hat der Verf. der Untersuchung unterzogen; seine Messungen sowohl wie die früherer Beobachter geben Abweichungen von der Theorie in demselben Sinne. Diese Abweichungen lassen sich ungezwungen durch die Annahme von Oberflächenschichten erklären. Zum Schluss vergleicht Herr Drude seine Beobachtungen mit denen anderer Autoren und prüft das Kundt'sche Gesetz sowie einige Relationen der elektromagnetischen Lichttheorie; zu einer definitiven Entscheidung darüber, ob jenes Gesetz und diese Relationen der Wirklichkeit entsprechen, kommt er jedoch nicht.

Wn.

E. Cesaro. Sur la courbe représentative des phénomènes de diffraction. C. R. CX. 1119-1122.

Zur Discussion der durch eine geradlinig begrenzte Oeffnung oder einen Schirm bei divergirend auffallenden Strahlen erzeugten Beugungserscheinungen hat Herr Cornu (Journ. d. phys. III, vgl. F. d. M. VI. 1874. 659) diejenige Curve benutzt, deren rechtwinklige Coordinaten, durch den Bogen v ausgedrückt, gleich den Fresnel'schen Integralen sind:

$$x = \int_0^v \cos\left(\frac{\pi v^2}{2}\right) dv, \quad y = \int_0^v \sin\left(\frac{\pi v^2}{2}\right) dv.$$

Diese, Klothoïde genannte, Curve bildet eine doppelte Spirale mit zwei asymptotischen Punkten und einem Wendepunkte im Anfangspunkte. Der Krümmungsradius in einem beliebigen Curvenpunkte ist dem vom Anfangspunkte an gerechneten Bogen umgekehrt proportional. In der vorliegenden Arbeit wird nun für diejenige Sehne dieser Curve, welche die Punkte v_1 und v_2 verbindet, der Wert abgeleitet:

$$R = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{mod.} \int_0^\infty \left[e^{-\left(\omega^2 - \frac{i\pi}{2}\right)v_1^2} - e^{-\left(\omega^2 - \frac{i\pi}{2}\right)v_2^2} \right] \frac{d\omega}{\omega^2 - \frac{i\pi}{2}}.$$

Verschiebt man den Bogen $v_2 - v_1$ auf der Curve, während seine Länge constant bleibt, so folgt

$$\frac{dR}{ds} = 2\sin\frac{\vartheta}{2}\sin\left(\theta - \frac{\vartheta}{2}\right),$$

wo ϑ der Winkel ist, den die Tangenten in den Endpunkten des Bogens bilden, während θ den Winkel bezeichnet, den die zum Bogen gehörige Sehne mit der Tangente im Punkte v_1 einschliesst, und wo endlich $ds = dv_1 = dv_2$ ist. Die Maxima und Minima von R, von denen die Lage der Diffractionsstreifen bei einer sehr hohen rechteckigen Oeffnung abhängt, treten ein, wenn

$$\vartheta = 2n\pi \quad \text{oder} \quad \vartheta = 2n\pi + 2\theta$$

ist. Herr Poincaré hat in seiner „Théorie mathématique de la lumière“ (Paris 1890) nur die Diffractionsstreifen betrachtet, welche der Bedingung $\vartheta = 2n\pi$ entsprechen. Die der Bedingung $\vartheta = 2n\pi + 2\theta$ entsprechenden Werte von ϑ lassen sich für kleine n durch Reihenentwickelung des in R auftretenden Integrals ermitteln, während für grössere n der Wert von $\frac{1}{2}\vartheta$ nahezu mit den Wurzeln der Gleichung $\operatorname{tg} x = x$ übereinstimmt.

Wn.

A. Grimpen. Ein Beitrag zur Theorie der durch eine kreisförmige Oeffnung erzeugten Beugungserscheinungen. Diss. Kiel. 33 S. 8°.

Schwerd leitet in seinem klassischen Werke über die Beugungserscheinungen (Mannheim 1835) die Formel für die Intensität des an einer kreisförmigen Oeffnung (bei parallel einfallenden Strahlen) gebeugten Lichtes dadurch her, dass er den Kreis durch ein Vieleck mit grosser Seitenzahl ersetzt und dasselbe durch parallele Sehnen in trapezförmige Zonen zerlegt. Dadurch gelangt er zu einer wenig übersichtlichen Endformel, die eine leichte optische Deutung ohne Anwendung numerischer Rechnungen kaum gestattet. Der Verfasser der vorliegenden Dissertation glaubt, dass dieser Mangel an Einfachheit in den Resultaten von der Zerlegung des Vielecks in Trapeze herrührt. Er ändert daher die Schwerd'sche Ableitung dahin ab, dass er das Viel-

eck, dessen Seitenzahl als gerade angenommen wird, durch nach den Ecken gezogene Radien in congruente Dreiecke zerlegt, für die Intensität des an einer dreieckigen Oeffnung gebeugten Lichtes die von Schwerd abgeleitete Formel benutzt und dann summirt. Die Rechnung gestaltet sich ziemlich weitläufig, wenn sie auch übersichtlich bleibt. Das Resultat, das eingehend discutirt wird, hat eine Form, die unmittelbar den Uebergang von dem regulären Vieleck zum Kreise gestattet, und führt auf den bekannten, von der Bessel'schen Function I_1 abhängenden Ausdruck für die Intensität. Zum Schluss wird auch der Schwerd'sche Ausdruck für das Beugungsbild eines regulären Polygons umgeformt und daraus ebenfalls das Resultat für den Kreis abgeleitet. Dann folgen noch einige auf die Berechnung der Bessel'schen Functionen bezügliche Bemerkungen. — Die Ableitung des Resultats mittels der Integralrechnung ist jedenfalls dem hier mitgeteilten, zwar elementaren, aber doch sehr weitläufigen Beweise bei weitem vorzuziehen. Wn.

P. Garbe. Sur les franges des réseaux parallèles. Almeida J. (2) IX. 47-55.

Einige Bemerkungen über die Fransen, welche entstehen, wenn Sonnenstrahlen durch das System zweier identischen Gitter mit parallel gestellten Strichen gehen, und welche als „Diffractionsfransen" und „Interferenzfransen" eine getrennte Besprechung erhalten. Lp.

Hurion. Diffraction par un écran circulaire. Almeida J. (2) IX. 55-57.

Die von Fresnel durch eine einfache Ueberlegung erklärte Entstehung eines centralen weissen Fleckes bei der Diffractions-Erscheinung hinter einem kleinen kreisförmigen Schirme wird rechnerisch erläutert. Lp.

J. Macé de Lépinay. Sur les franges d'interférence produites par des sources lumineuses étendues. C. R. CIX. 137-139. (1889.)

J. Macé de Lépinay. Sur la localisation des franges d'interférence des lames minces isotropes. C. R. CIX. 893-895. (1889.)

An der Hand einfacher Ueberlegungen wird gezeigt, dass es im allgemeinen unmöglich ist, mit einer ausgedehnten Lichtquelle deutliche Interferenzstreifen zu erzeugen, dass dies aber stets gelingt, wenn ein Schirm mit einer sehr schmalen Oeffnung vor die Lichtquelle gesetzt wird. Je nach der Orientirung dieser Oeffnung ist der Ort, an dem die Interferenz zu Stande kommt, ein anderer und anderer. Der Verfasser führt dies speciell für ein keilförmiges Blättchen durch.

Im Anfange der Arbeit findet sich eine gegen eine Arbeit des Referenten gerichtete Bemerkung, die wohl nur auf einem Missverständnis beruhen kann. Der Verfasser meint nämlich, die sogenannte Interferenzfläche der Newton'schen Ringe existire nicht. Richtig an diesem Ausspruch ist, dass eine Fläche, auf der die Ringe in ihrem ganzen Verlauf vollkommen deutlich wären, nicht existirt. Aber das hat Referent auch nie behauptet; er hat wiederholt hervorgehoben, dass vollkommene Deutlichkeit aller Teile eines Ringes nirgends möglich sei. Trotzdem aber kann man fragen: an welchem Orte des Raumes erscheinen ohne Begrenzung der Lichtquelle die Ringe möglichst deutlich? Und die Beantwortung dieser berechtigten Frage führt auf die vom Referenten gefundene Interferenzfläche. Wn.

J. Macé de Lépinay et Ch. Fabry. Théorie de la visibilité des franges d'interférence. C. R. CX. 895-898.

J. Macé de Lépinay et Ch. Fabry. Sur quelques cas particuliers de visibilité des franges d'interférence. C. R. CX. 997-1000.

Eine Interferenzerscheinung werde mittels eines Mikroskopes beobachtet, dessen Axe in sich verschiebbar ist, aber stets längs einer im Raume festen Linie liegt. M sei ein Punkt dieser festen Linie, die zur z-Axe eines Coordinatensystems genommen wird, und auf M sei das Mikroskop eingestellt. Von M aus gelangen

nun unendlich viele interferirende Strahlenpaare in das Instrument; eines dieser Paare ist dadurch ausgezeichnet, dass einer seiner Strahlen mit der z-Axe zusammenfällt, und für dieses Paar sei δ_0 die Wegdifferenz. Dann lässt sich die Wegdifferenz δ eines andern Paares, falls nur der Axe nahe Strahlen in Betracht kommen, so darstellen:

$$(1) \qquad \delta = \delta_0 + \left(P - \frac{A}{D}\right)p + \left(Q - \frac{B}{D}\right)q,$$

falls D der Abstand des Punktes M vom Anfangspunkte der Coordinaten ist, während p, q die Coordinaten des Punktes sind, in dem einer der interferirenden Strahlen die xy-Ebene trifft. P, Q, A, B sind Constanten, die von der Beschaffenheit des Interferenzapparates wie von der Richtung der z-Axe abhängen. Damit nun die Interferenz vollkommen deutlich werde, müsste $\delta = \delta_0$ sein. Das giebt eine Gleichung, die man für beliebige Werte von p, q im allgemeinen nicht erfüllen kann. Bei einer ausgedehnten Lichtquelle kann man daher völlig deutliche Interferenzstreifen im allgemeinen nicht erhalten; wohl aber ist dies möglich, wenn zwischen p und q noch eine lineare Relation existirt; und in diesem Falle bestimmt sich aus der Gleichung $\delta = \delta_0$ die z-Coordinate D des Punktes, für welchen die Deutlichkeit eintritt. Eine solche Relation zwischen p und q erhält man, wenn man die Lichtquelle durch eine schmale Oeffnung begrenzt.

Es wird weiter gefragt, wann die Streifen auch ohne eine solche Begrenzung deutlich erscheinen. Das tritt ein, wenn

$$(2) \qquad \frac{A}{P} = \frac{B}{Q} = m,$$

und man sieht dann die Streifen an dem Orte $D = m$ unter allen Umständen deutlich. Wird ausser der Relation (2) noch die Gleichung

$$(3) \qquad Pp + Qq = 0$$

erfüllt (und dazu ist wieder die Begrenzung der Lichtquelle durch eine schmale Oeffnung erforderlich), so wird D unbestimmt; die Interferenzerscheinung ist nicht nur an einem Orte, sondern überall vollkommen deutlich. Deutliche Sichtbarkeit der Streifen ohne Begrenzung der Lichtquelle hat also stets zur Folge, dass

bei Einschaltung einer geeignet orientirten schmalen Oeffnung die Streifen überall deutlich sichtbar sind. Wn.

J. Macé de Lépinay. Sur la localisation des franges d'interférence des lames minces isotropes. Almeida J. (2) IX. 121-135, 180-185.

Der Inhalt ist in den vorangehenden Berichten enthalten. Lp.

Ch. Fabry. Visibilité périodique des phénomènes d'interférence lorsque la source éclairante est limitée. C. R. CXI. 600-602.

Ch. Fabry. Visibilité périodique des franges d'interférence. C. R. CXI. 788-790.

Der Verfasser sucht die Deutlichkeit einer Interferenzerscheinung für den Fall zu bestimmen, dass vor die Lichtquelle ein ebener Schirm mit einer schmalen Oeffnung gestellt ist. Die Interferenzerscheinung werde in einer Ebene P' beobachtet. Irgend ein Punkt M' von P' empfängt von jedem Punkte M der Schirmöffnung zwei interferirende Strahlen, deren Wegdifferenz Δ sich, wenn man von Gliedern höherer Ordnung absieht, auf die Form bringen lässt:

$$\Delta = \Delta_0 + Ax + By.$$

Darin sind x, y die Coordinaten von M, bezogen auf ein in der Ebene des Schirmes liegendes Coordinatensystem; Δ_0 ist der Wert, den Δ für den Anfangspunkt der Coordinaten hat; letzterer Punkt wird als in der Schirmöffnung liegend angenommen. Durch zweckmässige Wahl der Axen kann man stets erreichen, dass der Coefficient von y verschwindet, also

$$(1) \qquad \Delta = \Delta_0 + ax$$

wird. Die durch die Interferenz des betrachteten Strahlenpaares entstehende Intensität ist proportional $1+\cos 2\pi \frac{\Delta}{\lambda}$, und durch Integration über die Fläche der Oeffnung ergiebt sich, dass die

Gesamtintensität im Punkte M' proportional ist einem Ausdrucke der Form

$$(2) \qquad 1 + V\cos\left(2\pi\frac{\Delta_0}{\lambda} + \varphi\right).$$

Die Buchstaben V, φ haben dabei folgende Bedeutung. Man bilde die über die Fläche S der Oeffnung zu erstreckenden Integrale

$$(3) \qquad F = \iint \sin\left(2\pi\frac{\alpha x}{\lambda}\right)dx\,dy, \quad G = \iint \cos\left(2\pi\frac{\alpha x}{\lambda}\right)dx\,dy,$$

so ist

$$(4) \qquad V = \frac{\sqrt{F^2+G^2}}{S}, \quad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{F}{G}.$$

Aus (2) ergiebt sich einmal die Lage der hellen und dunklen Streifen, sodann aber auch die Deutlichkeit der Interferenzerscheinung, da $2V$ die Intensitätsdifferenz der hellsten und dunkelsten Stellen ist. V heisst der Deutlichkeitscoefficient (coefficient de visibilité) der Interferenzstreifen.

Die Integrale F, G sind dieselben, die bei den durch die Schirmöffnung erzeugten Diffractionserscheinungen auftreten; ihr Wert hängt einerseits von der Form und Grösse der Oeffnung, andererseits von der Lage der Beobachtungsebene P' ab; denn die Lage von P' bestimmt den Wert von α. Durch Aenderung der Lage von P' sowie durch Aenderung der Gestalt der Schirmöffnung kann man die Interferenzstreifen mehr oder weniger deutlich machen; und zwar werden sich im allgemeinen periodische Aenderungen von V ergeben. Wendet man die allgemeinen Formeln auf eine rechteckige Oeffnung an, von der zwei Seiten der y-Axe parallel sind, so wird

$$(5) \qquad \varphi = 0, \quad V = \frac{\sin\pi\frac{\alpha a}{\lambda}}{\pi\frac{\alpha a}{\lambda}},$$

falls a die Breite des Rechtecks ist. Eingehend wird erörtert, wie sich der Ausdruck (5) von V mit a, mit α, endlich mit λ ändert. Zum Schluss wird der Fall, dass die rechteckige Oeffnung gegen die y-Axe geneigt ist, der Betrachtung unterzogen.

Wn.

A. W. Flux. The form of Newton's rings. Phil. Mag. (5) XXIX. 217-243.

A. Wangerin. Observations on a paper by Mr. Flux „On the shape of Newton's rings". Phil. Mag. (5) XXX. 439-440.

In der Einleitung zu seiner Abhandlung giebt Hr. Flux an, dass die analytischen Methoden derselben grösstenteils aus einem Artikel von Hrn. Wangerin in Wiedemann's Annalen XII stammen, und dass die durch ihn erzielten Ergebnisse in allen Beziehungen mit denen seines Vorgängers identisch sind. Er fügt hinzu, dass er von einigen Aenderungen an den Wangerin'schen Methoden, welche in späteren Artikeln entwickelt sind, Nutzen zu ziehen sich bemüht und versucht habe, sie so umzuwandeln und zu verknüpfen, dass daraus eine Methode fliesse, welche ihm befriedigend erscheine. Hr. Wangerin stellt in einer Zuschrift an die Herausgeber des Phil. Mag. fest, dass alles, was Hr. Flux bezüglich der Newton'schen Ringe in reflectirtem Lichte beibringt, vollständig von dem Inhalte seiner Untersuchung gedeckt wird mit Ausnahme eines unwichtigen Ergebnisses; dass ferner der Beweis des Hrn. F., abgesehen von einer verschiedenen Anordnung des Stoffes, nichts enthält, was nicht wörtlich oder dem Sinne nach aus der oben angeführten Abhandlung oder aus einer anderen von ihm über denselben Gegenstand entnommen ist. In einem unwesentlichen Punkte nur unterscheidet sich die Fassung des Hrn. F. von der des Hrn. W., ohne jedoch zu irgend welchen neuen Ergebnissen zu führen. Gbs. (Lp.)

A. Wangerin. Bemerkungen zu einer Arbeit des Herrn A. W. Flux: „Ueber die Form der Newton'schen Ringe". Wiedemann Ann. XL. 738-743.

Der Verfasser bespricht die einzelnen Abschnitte der Arbeit des Herrn Flux (siehe das vorstehende Referat) und vergleicht den Inhalt derselben mit dem seiner eigenen Arbeiten über diesen Gegenstand (vgl. F. d. M. XIII. 1881. 759; XV. 1883. 923). Es ergiebt sich, dass die Uebereinstimmung beider Arbeiten sich

nicht nur auf die Resultate erstreckt (Herr Flux ist zu keinem einzigen Resultate gelangt, das nicht schon vom Verfasser ausgesprochen wäre), sondern auch auf die Einzelheiten der Rechnung, ja auf den grössten Teil der Bezeichnungen und sogar auf die Figuren. Die Flux'sche Arbeit ist deshalb lediglich als eine Reproduction zu bezeichnen, welche weder die Theorie weiterführt, noch die Methode der Ableitung in irgend einer Beziehung verbessert. Dies festzustellen, ist der Verfasser durch eine Bemerkung des Herrn Flux veranlasst, die den Anschein zu erwecken geeignet ist, die Flux'sche Arbeit habe die Theorie erst zu einem befriedigenden Abschluss gebracht.

Auch das, was Herr Flux über die Ringe im durchgehenden Lichte beibringt, besteht in blosser Reproduction von Rechnungen, die Herr Gumlich (cf. F. d. M. XVII. 1885. 1009) in engem Anschluss an die Arbeiten des Verfassers durchgeführt hat.

Wn.

Fr. Pockels. Ueber Interferenzerscheinungen, welche Zwillingsplatten optisch einaxiger Krystalle im convergenten homogenen polarisirten Lichte zeigen. Gött. Nachr. 1890. 259-278.

Es handelt sich um die Berechnung und Discussion derjenigen Interferenzerscheinungen, welche man in einem Polarisationsapparate bei Anwendung von convergentem homogenem Lichte an einer Combination von zwei planparallelen, aus einem einaxigen Krystall unter gleicher Neigung gegen die optische Axe geschnittenen Platten beobachtet, falls dieselben so über einander gelegt sind, dass ihre Hauptschnitte zusammenfallen, die optischen Axen aber in entgegengesetztem Sinne gegen die gemeinsame Plattennormale geneigt sind, so dass die Combination eine künstliche Zwillingsplatte darstellt. Die in Rede stehenden Interferenzerscheinungen sind bereits von Langberg (Pogg. Ann. Erg. Bd. I, 1842), Ohm (Abh. d. Bayr. Akad. VII. 1859), van der Willigen (Pogg. Ann. Jublb. 1874), Bertin (Ann. der chim. (6) II. 1884) untersucht. Die genannten Autoren haben die vier Systeme von Curven gleichen Gangunterschiedes, welche in Platten der

betrachteten Art auftreten können, berechnet. Doch fehlte bisher noch eine Untersuchung darüber, in welcher Weise sich jene Curvensysteme scheinbar überlagern, bezw. sich gegenseitig unterbrechen, und unter welchen Umständen oder in welchen Teilen das eine oder das andere Curvensystem allein auftritt. Der Ausfüllung dieser Lücke ist die vorliegende Arbeit gewidmet. Die Berechnung selbst geschieht nach bekannten Methoden; wesentlich ist die Berücksichtigung der Veränderung, welche die Lage der Schwingungsrichtung innerhalb des Gesichtsfeldes erfährt. Die eingehende Discussion führt zu einer Reihe bemerkenswerter Resultate, auf deren Mitteilung hier verzichtet werden muss. Einige schematische Figuren, die der Arbeit beigegeben sind, dienen zur Erläuterung der gegenseitigen Lage der einzelnen Curvensysteme resp. der dunklen Flecke. Wn.

E. LOMMEL. Die Curven gleicher Lichtstärke in den Axenbildern doppelbrechender Krystalle. Wiedemann Ann. XXXIX. 258-266.

Abdruck einer Arbeit aus den Münchener Berichten Bd. XIX, über die F. d. M. XXI. 1889. 1089 berichtet ist. Wn.

F. LIPPICH. Zur Theorie des Halbschatten-Polarimeters. Wien. Ber. XCIX. 695-724.

H. EKAMA. Manière d'obtenir la constante a^2 dans la théorie d'Airy de l'arc-en-ciel. Almeida J. (2) IX. 97-99.

Ableitung dieser Constante (vergl. Boitel und Mascart, F. d. M. XX. 1888. 1126, XXI. 1889. 1088) durch ein neues Schlussverfahren. Lp.

A. CORNU. Sur le halo des lames épaisses, ou halo photographique, et les moyens de le faire disparaître. Almeida J. (2) IX. 270-277.

Jeder Punkt O einer lichtempfindlichen Glasplatte wird,

wenn er belichtet ist, eine nach allen Richtungen Strahlen aussendende Lichtquelle; diese Strahlen werden von der Rückseite der Glasplatte reflectirt, und zwar total reflectirt, sobald ihr Einfallswinkel grösser ist als der Grenzwinkel für den Uebergang aus Glas in Luft. Diese Erklärung der Erscheinung wird durch den Versuch bestätigt. Lp.

J. C. McConnel. The theory of fog-bows. Phil. Mag. (5) XXIX. 453-461.

Airy's Theorie der Bildung überzähliger Bogen der Sonne innerhalb des gewöhnlichen Regenbogens wird in diesem Artikel auf eine Reihe von Beobachtungen, die Omond auf dem Ben Nevis gemacht hat, angewandt und erhält aus der Untersuchung eine Bestätigung. Gbs. (Lp.)

W. Grosse. Die Lehre von der Interferenz und Polarisation des Lichtes im Unterricht. Poske Z. III. 171-177, 269-277.

C. Geometrische Optik.

E. Lommel. Selbstschatten einer Flamme. Wiedemann Ann. XLI. 135-139, Münch. Ber. XX. 5-10.

Stellt man der Schmalseite der Flamme eines Flachbrenners ein weisses Papierblatt gegenüber, so gewahrt man auf der erleuchteten Fläche einen schmalen dunkleren Streifen, sowohl im reflectirten als im durchscheinenden Licht. Die Erscheinung ist um so auffallender, da die Flamme auf der Schmalseite für die Flächeneinheit eine grössere Leuchtkraft besitzt; sie erklärt sich aber aus der vom Verf. schon (Wiedemann Ann. X) mitgeteilten Formel für die ausgestrahlte Lichtmenge. Es sind die in der Flamme schwebenden glühenden Russteilchen, welche das eigene Licht am Durchgange hindern und in dieser Richtung die dickste Schicht bilden. R. M.

H. MAURER. Ueber die Theorie des Winkelspiegels. Hoppe Arch. (2) IX. 1-17.

Der Verf. hat seine Theorie ausgearbeitet, ohne die umfangreiche Litteratur dieses Gegenstandes (F. d. M. XVII. 1885. 1010) zu kennen. Die Gruppirung seiner Resultate ist eigenartig; er stellt die folgende, alle Fälle umfassende Formel auf:

$$n = 2p + \tfrac{1}{2}\{2-[\gamma-\varphi]-[\alpha-\gamma-\varphi]\} + [\varphi] - 1,$$

wo α den Winkelabstand der Spiegel, γ den Winkelabstand des leuchtenden Punktes von einem der Spiegel, n die Bilderzahl bezeichnet, ferner die ganze Zahl p aus der Gleichung $\pi = p.\alpha + \varphi$, $0 \leqq \varphi < \alpha$ zu bestimmen ist, und wo endlich unter $[x]$ der Wert $+1$, -1, 0 zu verstehen ist, je nachdem $x > 0$, $x < 0$, $x = 0$ ist.

In gewissen Fällen wird die geschweifte Klammer ungerade; wir verweisen darüber auf die Abhandlung selbst und erwähnen nur noch, dass der Verf. auch ausgedehnte Objecte berücksichtigt, und dass er von den geometrisch möglichen Bildern auch die von einem gegebenen Orte aus sichtbaren Bilder bestimmt (vergl. Koppe, F. d. M. XXI. 1889. 1110). R. M.

C. JUEL. Om Konstruktion af anamorfotiske Billeder. Nyt. Tidss. I A. 21-25.

Der Verfasser zeigt, wie man die sogenannten anamorphosischen Bilder für einen Cylinderspiegel und einen Kegelspiegel zu construiren hat. V.

E. GRIMSEHL. Ueber Perspective. Poske Z. III. 177-180.

Zusammenstellung der „Ursachen für die Möglichkeit, einen Körper oder das Bild des Körpers körperlich zu sehen“. Lp.

E. OEHLER. Ableitung der Formel für sphärische Spiegel und Linsen. Poske Z. III. 36.

Ableitungen, die sich durch Kürze empfehlen. Lp.

F. Meisel. Ellipsoidische Isophoten. Versuch einer allgemeineren Theorie der Helligkeitsverteilung auf körperlichen Oberflächen. Exner Rep. XXVI. 58-64.

Die natürlich vorkommenden Körper liegen in Bezug auf ihr Reflexionsvermögen zwischen den Grenzen des vollständig spiegelnden (unsichtbaren) Körpers und des vollständig lichtzerstreuenden Körpers, für welchen das Lambert'sche Gesetz der Helligkeit gilt. Denkt man sich die Helligkeiten, unter welchen ein in beliebiger Richtung bestrahltes Flächenelement in allen möglichen Richtungen erscheint, auf diesen Richtungen selbst aufgetragen, so bilden die Endpunkte dieser Strecken eine Fläche, die „Helligkeitsfläche", bei Zugrundelegung des Lambert'schen Gesetzes eine Halbkugel; die hiernach gefundenen Isophoten bezeichnet daher der Verf. als „sphärische Isophoten". Um dem eben ausgesprochenen Erfordernisse zu genügen, ersetzt er die Halbkugel durch ein halbes Ellipsoid. Indem der betrachtete Flächenpunkt als Coordinatenanfang gewählt wird, ermittelt man die Mittelpunktsgleichung eines Ellipsoids, dessen grösste Halbaxe dem Cosinus des Einfallswinkels α proportional ist und in die Richtung des nach dem gewöhnlichen Spiegelungsgesetze reflectirten Strahls fällt, und dessen eine Hauptebene mit der Einfallsebene zusammenfällt. Der nach dem Auge gerichtete Fahrstrahl dieses Ellipsoids giebt sodann die verhältnismässige Helligkeit an. Dadurch dass zwei nicht näher definirte Constanten gleich genommen werden, geht das dreiaxige Ellipsoid in eine Umdrehungsfläche über. Die Rechnungen werden für eine beleuchtete Kugel durchgeführt und durch Abbildung auf einer „Normalkugel" zur Anschauung gebracht, welche in derselben Weise zur Aufsuchung der ellipsoidischen Isophoten dienen soll, wie die gewöhnliche Normalkugel zur Bestimmung der gewöhnlichen, sphärischen. Lp.

P. Pizzetti. Sulle trajettorie dei raggi luminosi. Ateneo Ligure. IV-V. Sep.-Abdr. 24 S.

Von einem optischen Mittel werde angenommen, dass in

jedem Punkte der Brechungsindex $n = f(u, v, w)$ eine endliche continuirliche, eindeutige und differentiirbare Function der allgemeinen Coordinaten u, v, w dieses Punktes sei; die Trajectorie des dieses Mittel von A nach B durchsetzenden Strahles ist dann durch die Bedingung $\delta\int_A^B n\,ds = 0$ bestimmt. Hieraus ergeben sich zwei Differentialgleichungen, von denen der Verf. zunächst zeigt, dass ihre Integration sich auf Quadraturen reducirt in dem Falle, wo die Flächen $u =$ const., $v =$ const., $w =$ const. eine specielle Art dreifach orthogonaler Flächen bilden. Der Satz, dass die Schmiegungsebene der Trajectorie stets Normalebene der zugehörigen Fläche $n =$ const. ist, ist bekannt; es folgt daraus, dass sämtliche Trajectorien dann und nur dann ebene Curven sind, wenn die Flächen $n =$ const. concentrische Kugeln sind.

Wenn ein System von Trajectorien eine gewisse Oberfläche normal verlässt, so giebt es eine unendliche Schar anderer zu ihnen normaler Flächen; zwischen zwei dieser Flächen hat $\int n\,ds$ längs jeder der Trajectorien denselben Wert; wenn diese Flächen die Bedingung $n =$ const. erfüllen sollen, müssen sie ein System paralleler Flächen sein, die Lichtstrahlen also geradlinig verlaufen.

Wenn die Flächen $n =$ const. Rotationsflächen mit gemeinsamer Axe sind, lässt sich die Differentialgleichung in eine Form bringen, welche von n unabhängig ist; dabei lässt sich der Winkel, den die Schmiegungsebene mit der Meridianebene bildet, mit Vorteil zur Integration einführen, besonders im Falle der cylindrischen und sphärischen Flächen. R. M.

M. Thiesen. Beiträge zur Dioptrik. Berl. Ber. 1890. 799-813.

Der Verf. sucht das Wesen der Gauss'schen Theorie für den Durchgang der Strahlen durch ein „Diopter“ darin, dass dieselbe von der näheren Zusammensetzung des Diopters und von dem Gange des Lichtes in demselben absieht, dass sie die wahre Er-

scheinung durch eine andere ersetzt, welche mit jener an den der Beobachtung zugänglichen Stellen zusammenfällt. Unter diesem Gesichtspunkte ergiebt sich eine Verallgemeinerung auf ein beliebiges axenloses System. Welches auch die Gesetze der Umformung eines Strahlenbündels in ein anderes sind, es muss eine Function von 6 Variabeln (den je 3 Bestimmungsgrössen des ein- und des austretenden Strahls) geben, welche das Diopter in seiner Wirkungsweise als Ganzes charakterisirt. In dem vorliegenden Falle (wie schon bei Hamilton) erweist sich dazu geeignet die Zeit, welche das Licht braucht, um von einem Punkte der einen Grenzfläche zu einem Punkte der anderen Grenzfläche zu gelangen, d. h. $\int n\,ds$. Bezeichnen wir mit T_{12} den Wert dieses Integrals, ausgedehnt von einem Punkte der Fläche (1) zu einem Punkte der Fläche (2), und analog T_{23}, so liefern die Principien der Variationsrechnung eine einfache Vorschrift, wie aus T_{12} und T_{23} die Charakteristik T_{13} abgeleitet werden kann.

Der Verf. erläutert seine Grundsätze zunächst an solchen Dioptern, welche eine Axe haben und in welchen die Strahlen mit der Axe so kleine Winkel bilden, dass sich die Charakteristik nach Potenzen dieser Winkel entwickeln lässt. Behält man alsdann nur die ersten Potenzen bei, so erhält man die bekannten Gesetze der Gauss'schen Dioptrik.

Der für die Praxis besonders wichtige Fall ist dabei der, wo (bei der Beschränkung auf eine brechende Fläche (2)) die Grenzflächen (1) und (3) conjugirt sind, d. h. wo das in (1) vorhandene Object ein geometrisch ähnliches Bild in (3) hat. Er ist für unsere Theorie ein Ausnahmefall; denn die Charakteristik degenerirt alsdann, und hierin sieht der Verf. den Grund, dass ihre wichtige Rolle bis jetzt nicht erkannt wurde.

Der Verf. teilt auch die Resultate mit, welche die Berücksichtigung der zweiten Potenzen ergeben. Der Ausnahmefall verdient wieder das Hauptinteresse; es zeigt sich aber, dass in zweiter Näherung eine scharfe, geometrisch ähnliche Abbildung der Flächen (1) und (3) nur dann stattfindet, wenn 5 Grössen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{J}$ sämtlich verschwinden. Der Verf. nennt sie die

Abbildungsfehler. Der 𝔖-Fehler ist der Krümmungsfehler, der zum Verschwinden gebracht werden kann, wenn die Bildfläche eine andere Krümmung bekommt, der 𝔥-Fehler bedeutet einen Mangel an Proportionalität in den Dimensionen, die drei übrigen Fehler bewirken, dass ein Punkt nicht als Punkt, sondern als Fläche abgebildet wird.

Der Verf. behandelt natürlich in beiden Näherungen auch den Fall, wo ein Diopter $\overline{12}$ auf beiden Seiten von isotropen Medien begrenzt wird, in denen die conjugirten Ebenen (0) und (3) liegen, und berechnet die 5 Fehler dieses Linsensystems; es ergiebt sich hieraus eine Discussion über die Brauchbarkeit des Systems. Dass es unmöglich ist, ein körperliches Object scharf abzubilden, schliesst man leicht; die Möglichkeit, eine Ebene fehlerfrei abzubilden, ist von Herrn Abbe (ohne Beweis) verneint worden, der Verf. glaubt die Frage bejahen zu müssen.

R. M.

K. Schellbach. Beiträge zur geometrischen Optik. Neue Folge. Poske Z. III. 12-15.

§ 1. Zur Brechung des Lichtes. Bemerkungen zur Auflösung der Gleichung vierten Grades bei der Aufgabe: den Punkt der Grenzebene zweier Medien zu suchen, durch welchen der von einem gegebenen Punkte des einen Mediums zu einem gegebenen Punkte des zweiten gebrochene Strahl hindurchgeht. §2. Brechung von Kugelwellen. Geometrische Erläuterungen, aus denen hervorgeht, dass „nicht etwa eine kugelförmige Lichtwelle, die auf eine Ebene einfällt, in dem brechenden Medium ebenfalls als Kugel fortschreitet“. Insbesondere wird die Konchoide in die Betrachtung hineingezogen. § 3. Brechung des Lichts in einer Glaslinse. Für Linsen, die von sphärischen Flächen begrenzt sind und die Dicke d haben, wird die Formel in der Form aufgestellt:

$$\frac{ar}{a-r}+\frac{a'r'}{a'-r'}=d,$$

wo r und r' statt $r/(n-1)$ und $r'/(n-1)$ gesetzt ist. Hieran schliessen sich einige Umformungen und Constructionen. Lp.

M. Koppe. Das Minimum der Ablenkung beim Prisma. Poske Z. III. 76-78.

Kritik des von Hrn. W. Hess in Wiedemann's Ann. XXXVI (F. d. M. XXI. 1889. 1109) gegebenen Beweises nebst Bemerkungen über die Verwendbarkeit des a. a. O. aufgestellten Satzes zu einer einfachen Construction des Strahlenweges u. a. m.

Lp.

A. W. Gravelaar. Das Minimum der Ablenkung beim Prisma. Poske Z. III. 246-247.

C. G. Müller. Der Satz vom Minimum der Ablenkung beim Prisma. Poske Z. III. 247-248.

H. Böklen. Brechung der Lichtstrahlen an von Kugelflächen begrenzten Medien. Böklen Mitt. III. 77-94.

Bedeutet bei einem auf eine beliebige krumme Fläche fallenden Strahl α den Einfallswinkel, β den Brechungswinkel, a die Entfernung des leuchtenden Punktes, b diejenige des Bildes, r den Krümmungsradius am Einfallspunkte, so gilt die Formel:

$$\frac{\cos^2\alpha}{a}+\frac{n\cos^2\beta}{b}=\frac{1}{r}(-\cos\alpha+n\cos\beta).$$

Die Ableitung dieser Grundformel stellt der Verf. an die Spitze seiner dankenswerten Studie und erläutert an der Hand derselben die Constructionen von Jakob Bernoulli (1693), Reusch (1857), Cornu (1863). Im Anschluss daran behandelt er in grosser Vollständigkeit die graphische Darstellung und Berechnung der kaustischen Linien am Kreise für den Fall der Parallelstrahlen; es folgen die Quetelet'schen Sätze (1826) und die Bernoulli'schen Aufgaben über die Evolventen dieser kaustischen Linien und endlich das Problem der Rectification derselben, Tschirnhausen (1682), Leibniz (1689).

R. M.

H. Hartl. Der Gang eines Lichtstrahls in einer Glaskugel. Poske Z. III. 135-136.

Unter Bezugnahme auf die im vorangehenden Jahrgange

(F. d. M. XXI. 1113) von K. Schellbach wieder veröffentlichte Weierstrass'sche Construction giebt der Verfasser ein Verfahren an, das wesentliche Vorteile für den Fall bietet, dass der Gang eines einzigen Lichtstrahles unter Berücksichtigung der stattfindenden teilweisen Reflexionen verzeichnet werden soll. Lp.

M. Mandl. Ueber eine allgemeine Linsengleichung. Wien. Ber. XCIX. 574-578.

Die durch Einführung der Gauss'schen Hauptpunkte eines Linsensystems erzielte Vereinfachung in den Formeln für die Berechnung der Bildweite bleibt auch bestehen, wenn man als Ausgangspunkte der Entfernungsmessung zwei beliebige conjugirte Punkte wählt. Der Verf. hebt hierzu jenes Paar Punkte heraus, bei denen Bild- und Gegenstandsweite, von den brechenden Flächen aus gerechnet, gleich sind, und weist nach, dass zwei solche Punkte stets reell vorhanden sind, und dass sie nie ins Unendliche rücken können, was bei den Hauptpunkten bekanntlich eintreten kann. R. M.

G. Vanni. 1) Sopra una nuova formula relativa alle lenti grosse. Rom. Acc. L. Rend. (4) VI_1. 510-513.

2) Sopra un nuovo metodo di misura delle distanze focali nelle lenti o nei sistemi convergenti. Ibid. 565-568.

In der ersten Note wird die Formel: $F_1/d+F_2/f=1$ entwickelt, in der zur Messung der vier Längen zwei beliebige conjugirte Punkte als Anfangspunkte dienen; wenn der Scheitel der einen brechenden Fläche einer dieser Anfangspunkte ist, so kann man sich dieser Relation zur experimentellen Bestimmung der Gauss'schen Brennweite $F=\sqrt{F_1.F_2}$ bedienen.

Die andere Mitteilung benutzt die bekannte Formel $p.q=F^2$; lautet sie in zweifach veränderter Objectstellung

$$(p+\Delta)(q-\delta)=F^2 \quad \text{resp.} \quad (p-\Delta_1)(q+\delta_1)=F^2,$$

so kann man durch Beobachtung von Δ, Δ_1, δ, δ_1 die drei Unbekannten p, q, F berechnen. R. M.

R. GETSCHMANN. Ueber Linsen von sehr grosser Dicke. Eine Berichtigung und Erweiterung. Exner Rep. XXVI. 247-256.

Der Aufsatz bezieht sich auf die Definition, welche Hr. Ferraris am Schlusse des Artikels 34 seiner „Fundamentaleigenschaften der dioptrischen Instrumente" von convergenten und divergenten Systemen aufgestellt hat, und welche nach dem Verfasser „nicht dem entspricht, was man ganz allgemein unter diesen Worten versteht, und was Ferraris selbst wohl auch im Auge gehabt hat". Lp.

G. FÜCHTBAUER. Zur Construction der Linsenformel. Exner Rep. XXVI. 340-344.

Bemerkungen zur geometrischen Darstellung der Linsenformel:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\frac{1}{f}.$$

Lp.

Capitel 3.
Elektricität und Magnetismus.

C. NEUMANN. Neue Sätze über das elektrostatische und magnetische Potential. Leipz. Ber. XLII. 88-129.

1) „Elektrisches Potential". Zunächst leitet der Verf. einige Sätze über die innere potentielle Energie eines elektrischen Systems ab, welche, obwohl sie bekannt sind, zur Vergleichung mit dem Folgenden hier angeführt werden mögen. Es sei ein System von beliebig bewegten Körpern gegeben, teils Leitern (entweder abgeleitet oder isolirt und geladen), teils Isolatoren. W bezeichne die innere potentielle Energie (das Selbstpotential) des Systems, P^s das Potential des Körpers s auf alle andern, Q^s sein Selbstpotential, V das Gesamtpotential in einem beliebigen Punkte, V_s seinen constanten Wert auf dem Körper s, dessen Ladung E_s sei; ferner bezeichne δW die Aenderung von W

durch eine blosse unendlich kleine Bewegung ohne Aenderung der elektrischen Verteilung (wobei die Bewegung als so langsam angenommen wird, dass beständig elektrisches Gleichgewicht besteht); $d'W$ die Aenderung durch blosse Aenderung des elektrischen Zustandes, $d'_s W$ der von dem Leiter s herrührende Teil von $d'W$, $dW = \delta W + d'W$ die ganze Aenderung. Dann ist

$$W = \tfrac{1}{2}\sum_s P^s + \sum_s Q^s$$

und für einen Leiter

$$\text{(a)} \qquad P^s + 2Q^s = E_s V_s,$$
$$\text{(b)} \qquad d'_s P^s + dQ^s = 0,$$

woraus

$$\text{(c)} \qquad \tfrac{1}{2} dP^s - d'_s P^s = \tfrac{1}{2} d(E_s V_s)$$

und

$$\text{(1)} \qquad d'_s W = d'_s P^s + dQ^s = 0.$$

Da letztere Gleichung für Isolatoren wie für Leiter gilt, so folgt

$$\text{(1a)} \qquad d'W = 0, \quad dW = \delta W,$$

mithin ist die ponderomotorische Arbeit

$$\text{(1b)} \qquad A = -\delta W = -dW.$$

Ist z. B. P das Potential eines Leiters auf ein unveränderliches Feld, so ist nach (c)

$$\tfrac{1}{2} dP - d'P = \tfrac{1}{2} d(EV) \quad \text{oder} \quad \tfrac{1}{2} dP - dP + \delta P = \tfrac{1}{2} d(EV),$$

folglich

$$\delta P = \tfrac{1}{2} d(EV + P).$$

Ist also der Leiter entweder abgeleitet, oder isolirt und geladen, so ist

$$\text{(d)} \qquad \delta P = \tfrac{1}{2} dP, \quad A = -\tfrac{1}{2} dP,$$

d. h. die ponderomotorische Arbeit ist halb so gross, als wenn sich während der Bewegung der elektrische Zustand des Leiters nicht änderte.

2) „Magnetisches Potential". a) In ganz analoger Weise leitet der Verfasser eine Lösung der vielfach behandelten und noch immer streitigen Frage nach der inneren potentiellen Energie eines magnetischen Systems ab. Es sei ein System von teils

temporären, teils permanenten Magneten gegeben; die gesamte Magnetkraft sei α, die von dem Magneten s herrührende α^s, die aller übrigen α^σ, ihre Axen-Componenten α_x, α_y, α_z etc., m das magnetische Moment der Volumeneinheit, m_x etc. seine Componenten; $d\tau_s$ ein Volumenelement des Magneten s; P^s, Q^s, W' seien die analogen Grössen wie oben, also

$$(2)\qquad \begin{cases} P^s = -\int (m_x \alpha_x^\sigma + \cdots) d\tau_s, \quad Q^s = -\tfrac{1}{2}\int (m_x \alpha_x^s + \cdots) d\tau_s, \\ W' = \tfrac{1}{2}\Sigma P^s + \Sigma Q^s. \end{cases}$$

Die Bewegung geschehe wieder so langsam, dass beständig magnetisches Gleichgewicht stattfindet, dass also für einen temporären Magneten

$$(3)\qquad m_x = \varkappa \alpha_x \text{ etc.},$$

wo nach Kirchhoff $\varkappa \doteq \psi(m)$ eine Function von m ist; ferner sei für einen temporären Magneten s

$$(4)\qquad \begin{cases} \varphi'(m) = \dfrac{d\varphi}{dm} = \dfrac{m}{\varkappa}, \quad q_s = \int \varphi(m) d\tau_s, \\ R_s = \int (2\varphi - m\varphi') d\tau_s. \end{cases}$$

Für einen temporären Magneten ist

$$\tfrac{1}{2}P^s + Q^s = -\tfrac{1}{2}\int (m_x \alpha_x + \cdots) d\tau_s = -\tfrac{1}{2}\int \frac{m^2}{\varkappa} d\tau_s$$

$$= -\tfrac{1}{2}\int m\varphi' d\tau_s = \tfrac{1}{2}R_s - q_s,$$

oder

$$(a)\qquad \tfrac{1}{2}P^s + (Q^s + q_s) = \tfrac{1}{2}R_s.$$

Setzen wir ferner zur Abkürzung

$$h = m_x \frac{d\frac{1}{r}}{dx} + \cdots, \quad h' = m_x' \frac{d\frac{1}{r}}{dx'} + \cdots,$$

so ist nach (2)

$$dQ^s = \tfrac{1}{2}\iint d\tau_s d\tau_s' \left[\left(dm_x \frac{dh'}{dx} + \cdots\right) + \left(dm_x' \frac{dh}{dx'} + \cdots\right)\right]$$

$$= \iint d\tau_s d\tau_s' \left(dm_x \frac{dh'}{dx} + \cdots\right) = -\int (\alpha_x^s dm_x + \cdots) d\tau_s,$$

also

$$(b) \quad d'_s P^s + dQ^s = -\int (\dot{\alpha}_x dm_x + \cdots) d\tau_s = -\int \frac{m\,dm}{\varkappa} d\tau_s = -dq_r$$

Aus (a) und (b) folgt

$$(c) \quad \tfrac{1}{2} dP^s - d'_s P^s = \tfrac{1}{2} dR_s = \tfrac{1}{2} \int \frac{m^2 d\varkappa}{\varkappa^2} d\tau_s,$$

und nach (2) und (b) ist

$$(5) \quad d'_s W' = d'_s P^s + dQ^s = -dq_s.$$

Die Gleichungen (a), (b), (c), (5) entsprechen den obigen Gleichungen (a), (b), (c), (1) für ein elektrisches System. Setzen wir nun

$$(6) \quad W = W' + \Sigma q_s = \tfrac{1}{2} \Sigma P^s + \Sigma (Q^s + q_s),$$

wo sich das Σ auf sämtliche temporäre und permanente Magnete bezieht, so ist nach (5) für einen temporären und natürlich auch für einen permanenten Magneten

$$(7) \quad d'_s W = 0,$$

also

$$(7a) \quad d'W = 0, \quad dW = \delta W.$$

Da hiernach die ponderomotorische Arbeit $A = -\delta W = -dW$ ist, so ist W als die innere potentielle Energie des Systems zu bezeichnen. Nach (6) und (a) lässt sich W auch schreiben:

$$(6a) \quad W = \tfrac{1}{2} \Sigma R_s + P_{pt} + W_p,$$

wo das Σ sich auf alle temporären Magnete bezieht, P_{pt} das Potential der permanenten auf die temporären Magnete und W_p die dem W analoge Grösse für die permanenten Magnete bezeichnet. (Der Ausdruck W in Gleichung (6) ist identisch mit dem von Duhem — vgl. F. d. M. XIX. 1887. 1123 — als das innere thermodynamische Potential eines magnetischen Systems bezeichneten Ausdruck. D. Ref.)

b) Ist nur ein temporärer Magnet a und ein permanenter Magnet b vorhanden, so ist nach Gleichung (6a)

$$(8) \quad W = \tfrac{1}{2} R_a + \tfrac{1}{2} P_{ab} + Q^b + q_b.$$

In diesem Falle geht Gleichung (c) über in

$$\tfrac{1}{2} dP_{ab} - d'P_{ab} = \tfrac{1}{2} dR_a \quad \text{oder} \quad \tfrac{1}{2} dP_{ab} - dP_{ab} + \delta P_{ab} = \tfrac{1}{2} dR_a,$$

d. h.

$$(9) \quad A = -\delta P_{ab} = -\tfrac{1}{2} d(P_{ab} + R_a).$$

Bewegt sich also der Körper a aus dem Unendlichen in eine bestimmte Stelle des Feldes und magnetisirt sich dabei, so ist die ganze an ihm vom Felde geleistete ponderomotorische Arbeit, welche zugleich die von sämtlichen inneren Kräften des Systems geleistete Arbeit (Magnetisirungsarbeit) ist,

$$A = -\tfrac{1}{2}(P_{ab}+R_a) = -\tfrac{1}{2}P_{ab}+\int\frac{m^2}{2\varkappa}\,d\tau_a-\int d\tau_a\int_0^m\frac{m}{\varkappa}\,dm.$$

(Uebereinstimmend mit dem von Adler, Wien. Ber. C, 1891, aufgestellten Ausdruck. D. Ref.) Kann $\varkappa$ als constant betrachtet werden, so ist $R_a = 0$, also

$$A = -\tfrac{1}{2}P_{ab},$$

d. h. halb so gross, als wenn der Magnet a ein permanenter wäre, entsprechend der Gleichung (d) für ein elektrisches System.

Lbg.

A. Righi. Sulle forze elementari elettromagnetiche ed elettrodinamiche. II. Bologna Mem. (5) I. 139-187.

In einer früheren Abhandlung (vergl. F. d. M. XXI. 1889. 1124) hatte der Verfasser das allgemeinste Gesetz für die ponderomotorische Wirkung zwischen zwei Stromelementen sowie zwischen einem Stromelement und einem Magnetpol, welches der Bedingung der Aequivalenz eines Elementarstroms mit einem magnetischen Molecül genügt, unter der Voraussetzung aufgestellt, dass die Kraft eines Stromelements auf ein anderes an letzterem angreift. Diese Voraussetzung lässt er in der vorliegenden Untersuchung fallen, indem er mit Korteweg (J. für Math. XC, F. d. M. XII. 1880. 782) auch Kräftepaare als wirkend annimmt.

1) Für die Wirkung zwischen zwei Stromelementen werden folgende Hypothesen zu Grunde gelegt:

a) Die Wirkung ist proportional mit $ii'ds\,ds'$, kehrt also bei Umkehrung des einen oder andern Stromes ihre Richtung um.

b) Die Wirkung ist nur abhängig von der relativen Lage der zwei Stromelemente.

c) Die Stromelemente können durch ihre Componenten ersetzt werden. Um nun die Wirkung von ds auf ds' zu bestim-

men, seien O und O' ihre Mittelpunkte, $OO' = r$; wir nehmen O' zum Coordinatenanfang, die Richtung OO' zur positiven x'-Axe, die Ebene (ds, r) zur $x'z'$-Ebene; ferner sei $\sphericalangle(ds, r) = \vartheta$, $\sphericalangle(ds', r) = \vartheta'$, der Winkel der Ebenen (ds', r) und $(ds, r) = \varphi$, die Axencomponenten von ds und ds' (du, dw) und (du', dv', dw'), die auf r senkrechte Componente von ds' sei dt'. Durch die Hypothesen (a) und (b) werden gewisse Kräfte und Kräftepaare ausgeschlossen, sodass nur folgende an O' wirkende Kräfte und folgende Kräftepaare übrig bleiben:

a) Die Wirkung von du auf du' giebt eine nach x' gerichtete Kraft $= Aii'du\,du'$, wo A, ebenso wie die folgenden B, C, ..., eine unbekannte Function von r ist, welche für $r = \infty$ verschwindet.

b) (dw, dw') giebt eine Kraft nach x', $= Bii'dw\,dw'$.

c) (dw, du') giebt eine Kraft nach z', $= Cii'dw\,du'$, und ein Kräftepaar nach y', $= -Pii'dw\,du'$.

d) (du, dt') giebt eine Kraft nach dt', $= Dii'du\,dt'$, und ein Kräftepaar, dessen Axe a auf der Ebene (ds', r) senkrecht steht, $= Nii'du\,dt'$.

e) (dw, dv') giebt ein Kräftepaar nach x', $= Qii'dw\,dv'$.

Wir haben also folgende in O' angreifende Kräfte:

$$K_{x'} = ii'ds\,ds'[A\cos\vartheta\cos\vartheta' + B\sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\varphi],$$

$$K_{z'} = ii'ds\,ds'.C\sin\vartheta\cos\vartheta', \quad K_{t'} = ii'ds\,ds'.D\cos\vartheta\sin\vartheta'$$

und folgende Kräftepaare:

$$P_{x'} = ii'ds\,ds'.Q\sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\varphi, \quad P_{y'} = -ii'ds\,ds'.P\sin\vartheta\cos\vartheta',$$
$$P_a = ii'ds\,ds'.N\cos\vartheta\sin\vartheta'.$$

Hieraus ergeben sich folgende Componenten der in O' angreifenden Kraft und des Kräftepaares in Beziehung auf drei beliebige rechtwinklige Axen (x, y, z), wenn wir die Richtungscosinus von r mit $r_x = \frac{x'-x}{r}$, r_y, r_z bezeichnen, die Richtungscosinus von ds und ds' mit $(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$ und $(\alpha'_x, \alpha'_y, \alpha'_z)$:

$$\frac{X}{ii'ds\,ds'} = (A\cos\vartheta\cos\vartheta' + B\sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\varphi)r_x$$
$$+ C\cos\vartheta'(\alpha_x - \cos\vartheta\, r_x) + D\cos\vartheta(\alpha'_x - \cos\vartheta' r_x) \text{ etc.},$$

$$\frac{P_x}{ii'\,ds\,ds'} = -P\cos\vartheta'(\alpha_y r_z - \alpha_z r_y) + Q\sin\vartheta\sin\vartheta'\sin\varphi . r_x + N\cos\vartheta(\alpha'_y r_z - \alpha'_z r_y) \text{ etc.},$$

oder wenn wir statt φ' den $\sphericalangle(ds, ds') = \varepsilon$ einführen mittels der Gleichungen

$$\sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\varphi = \cos\varepsilon - \cos\vartheta\cos\vartheta',$$

$$\sin\vartheta\sin\vartheta'\sin\varphi . r_x = (\alpha'_y\alpha_z - \alpha'_z\alpha_y) + \cos\vartheta(r_y\alpha'_z - r_z\alpha'_y) + \cos\vartheta'(\alpha_y r_z - \alpha_z r_y),$$

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} \dfrac{X}{ii'\,ds\,ds'} = (A-B-C-D)\cos\vartheta\cos\vartheta' . r_x + B\cos\varepsilon . r_x + C\cos\vartheta' . \alpha_x + D\cos\vartheta . \alpha'_x \text{ etc.}, \\ \dfrac{P_x}{ii'\,ds\,ds'} = (Q-P)\cos\vartheta'(\alpha_y r_z - \alpha_z r_y) + (N-Q)\cos\vartheta(\alpha'_y r_z - \alpha'_z r_y) - Q(\alpha_y\alpha'_z - \alpha_z\alpha'_y) \text{ etc.} \end{cases}$$

2) Für die Wirkung zwischen einem Stromelement ds und einem Magnetpol m' werden die den obigen analogen Hypothesen aufgestellt, dass dieselbe proportional $m'ids$ und nur von der relativen Lage abhängig ist, und dass sich das Stromelement durch seine Componenten ersetzen lässt. Für die Wirkung von ds auf m' nehmen wir m' zum Coordinatenanfang, Om' zur x'-Axe, die Ebene (ds, r) zur $x'z'$-Ebene und zerlegen ds wieder in die Componenten du und dw nach x' und z'; wir haben dann folgende in m' angreifende Kräfte und folgende Kräftepaare:

a) du giebt eine Kraft nach x', $= Em'idu$.

b) dw giebt zwei Kräfte nach y' und z', $= -Fm'idw$ und $Gm'idw$, und zwei Kräftepaare nach y' und z', $= -Jm'idw$ und $Lm'idw$.

Es ist also

$$K_{x'} = m'ids . E\cos\vartheta,\quad K_{y'} = -m'ids . F\sin\vartheta,\quad K_{z'} = m'ids . G\sin\vartheta,$$

$$P_{x'} = 0,\quad P_{y'} = -m'ids . J\sin\vartheta,\quad P_{z'} = m'ids . L\sin\vartheta .$$

Daraus ergeben sich folgende Componenten der in m' angebrachten Kraft und des Kräftepaares nach drei beliebigen Axen:

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} \dfrac{X}{m'ids} = (E-G)\cos\vartheta . r_x - F(\alpha_y r_z - \alpha_z r_y) + G\alpha_x \text{ etc.}, \\ \dfrac{P_x}{m'ids} = -L\cos\vartheta . r_x - J(\alpha_y r_z - \alpha_z r_y) + L\alpha_x \text{ etc.} \end{cases}$$

Ebenso ergeben sich für die Wirkung eines Pols m auf ein Stromelement ds' die Componenten der in O' angebrachten Kraft und des Kräftepaars

$$\text{(IIa)}\quad \begin{cases} \dfrac{X'}{m\,i'\,ds'} = (E'-G')\cos\vartheta'.r_x - F'(\alpha'_y r_z - \alpha'_z r_y) + G'\alpha'_x, \\ \dfrac{P'_x}{m\,i'\,ds'} = -L'\cos\vartheta'.r_x - J'(\alpha'_y r_z - \alpha'_z r_y) + L'\alpha'_x. \end{cases}$$

3) Aus den Gleichungen (IIa) ergeben sich für die Wirkung eines magnetischen Molecüls vom Moment μ auf ein Stromelement ds' folgende Componenten der in O' angebrachten Kraft und des Kräftepaares, wenn wir den Mittelpunkt O des magnetischen Molecüls zum Coordinatenanfang, OO' zur x-Axe, die Ebene durch OO' und die Axe des Molecüls zur xz-Ebene nehmen und den Winkel zwischen der Axe des Molecüls und der x-Axe mit λ bezeichnen:

$$\text{(1)}\quad \begin{cases} \dfrac{\varphi_x}{\mu\,i'\,ds'} = -\dfrac{dE'}{dr}\cos\lambda\,\alpha'_x + \dfrac{F'}{r}\sin\lambda\,\alpha'_y - \dfrac{E'-G'}{r}\sin\lambda\,\alpha'_z, \\ \dfrac{\varphi_y}{\mu\,i'\,ds'} = -\dfrac{F'}{r}\sin\lambda\,\alpha'_x - \dfrac{dG'}{dr}\cos\lambda\,\alpha'_y + \dfrac{dF'}{dr}\cos\lambda\,\alpha'_z, \\ \dfrac{\varphi_z}{\mu\,i'\,ds'} = -\dfrac{E'-G'}{r}\sin\lambda\,\alpha'_x - \dfrac{dF'}{dr}\cos\lambda\,\alpha'_y - \dfrac{dG'}{dr}\cos\lambda\,\alpha'_z. \end{cases}$$

$$\text{(2)}\quad \begin{cases} \dfrac{\psi_x}{\mu\,i'\,ds'} = \dfrac{J'}{r}\sin\lambda\,\alpha'_y + \dfrac{L'}{r}\sin\lambda\,\alpha'_z, \\ \dfrac{\psi_y}{\mu\,i'\,ds'} = -\dfrac{J'}{r}\sin\lambda\,\alpha'_x - \dfrac{dL'}{dr}\cos\lambda\,\alpha'_y + \dfrac{dJ'}{dr}\cos\lambda\,\alpha'_z, \\ \dfrac{\psi_z}{\mu\,i'\,ds'} = \dfrac{L'}{r}\sin\lambda\,\alpha'_x - \dfrac{dJ'}{dr}\cos\lambda\,\alpha'_y - \dfrac{dL'}{dr}\cos\lambda\,\alpha'_z. \end{cases}$$

Dagegen folgt aus den Gleichungen (I), wenn man an Stelle des magnetischen Molecüls einen auf der Axe desselben senkrechten Kreisstrom vom Moment μ setzt:

$$\text{(1a)}\quad \begin{cases} \dfrac{\varphi_x}{\mu\,i'\,ds'} = \left(\dfrac{-A+B+D}{r} + \dfrac{dB}{dr}\right)\sin\lambda\,\alpha'_y, \\ \dfrac{\varphi_y}{\mu\,i'\,ds'} = \left(\dfrac{-A+C+D}{r} + \dfrac{dC}{dr}\right)\sin\lambda\,\alpha'_x + \dfrac{B-C}{r}\cos\lambda\,\alpha'_z, \\ \dfrac{\varphi_z}{\mu\,i'\,ds'} = \dfrac{C-B}{r}\cos\lambda\,\alpha'_y. \end{cases}$$

$$
(2a)\quad \begin{cases}
\dfrac{\psi_x}{\mu i' ds'} = \dfrac{2(P-Q)}{r}\cos\lambda\alpha'_x + \left(\dfrac{N-Q}{r} - \dfrac{dQ}{dr}\right)\sin\lambda\alpha'_z, \\[2ex]
\dfrac{\psi_y}{\mu i' ds'} = \dfrac{Q-P}{r}\cos\lambda\alpha'_y, \\[2ex]
\dfrac{\psi_z}{\mu i' ds'} = \left(\dfrac{P-N}{r} + \dfrac{dP}{dr}\right)\sin\lambda\alpha'_x - \dfrac{P-Q}{r}\cos\lambda\alpha'_z.
\end{cases}
$$

Für die Wirkung eines Stromelementes ds auf ein magnetisches Molecül vom Moment μ' ergeben sich aus (II) folgende Componenten der im Mittelpunkte O' des Molecüls angebrachten Kraft und des Kräftepaares, wenn wir O zum Anfangspunkte, OO' zur x-Axe, die Ebene durch OO' und die magnetische Axe zur xz-Ebene nehmen: Für die Kraftcomponenten $\dfrac{\varphi'_x}{\mu' i ds}$ etc. gelten die Ausdrücke (1), worin nur statt der gestrichenen Buchstaben die ungestrichenen zu setzen und die Vorzeichen umzukehren sind. Zur Berechnung der Kräftepaare müssen die aus der Verlegung der Kräfte aus den Polen in den Mittelpunkt O' sich ergebenden Kräftepaare hinzugefügt werden; dadurch ergiebt sich

$$
(4)\quad \begin{cases}
\dfrac{\psi'_x}{\mu' i ds} = -\left(G + \dfrac{J}{r}\right)\sin\lambda\alpha_y + \left(F - \dfrac{L}{r}\right)\sin\lambda\alpha_z, \\[2ex]
\dfrac{\psi'_y}{\mu' i ds} = \left(E + \dfrac{J}{r}\right)\sin\lambda\alpha_x + \left(\dfrac{dL}{dr} - F\right)\cos\lambda\alpha_y \\[1ex]
\qquad\qquad - \left(\dfrac{dJ}{dr} + G\right)\cos\lambda\alpha_z, \\[2ex]
\dfrac{\psi'_z}{\mu' i ds} = -\dfrac{L}{r}\sin\lambda\alpha_x + \left(\dfrac{dJ}{dr} + G\right)\cos\lambda\alpha_y \\[1ex]
\qquad\qquad + \left(\dfrac{dL}{dr} - F\right)\cos\lambda\alpha_z.
\end{cases}
$$

Ersetzt man den Magneten durch einen Strom, so erhält man aus den Gleichungen (I)

$$
(3a)\quad \begin{cases}
\dfrac{\varphi'_x}{\mu' i ds} = \left(\dfrac{A-B-C}{r} - \dfrac{dB}{dr}\right)\sin\lambda\alpha_y, \\[2ex]
\dfrac{\varphi'_y}{\mu' i ds} = \left(\dfrac{A-C-D}{r} - \dfrac{dD}{dr}\right)\sin\lambda\alpha_x - \dfrac{B-D}{r}\cos\lambda\alpha_z, \\[2ex]
\dfrac{\varphi'_z}{\mu' i ds} = \dfrac{B-D}{r}\cos\lambda\alpha_y.
\end{cases}
$$

$$(4a)\quad \begin{cases} \dfrac{\psi'_x}{\mu' i ds} = 2\left(\dfrac{N-Q}{r} - D\right)\cos\lambda\alpha_x \\ \qquad\qquad + \left(\dfrac{P-Q}{r} + C - \dfrac{dQ}{dr}\right)\sin\lambda\alpha_z, \\ \dfrac{\psi'_y}{\mu' i ds} = \left(\dfrac{Q-N}{r} + B\right)\cos\lambda\alpha_y, \\ \dfrac{\psi'_z}{\mu' i ds} = \left(\dfrac{N-P}{r} + \dfrac{dN}{dr} - A - D\right)\sin\lambda\alpha_x \\ \qquad\qquad + \left(\dfrac{Q-N}{r} + B\right)\cos\lambda\alpha_z. \end{cases}$$

Soll nun das magnetische Molecül dem Elementarstrom äquivalent sein, so giebt die Identificirung der Gleichungen (1) und (2) mit (1a) und (2a) eine Reihe von Gleichungen, aus denen schliesslich folgt:

$$(5)\qquad E' = G' = J' = L' = 0, \quad F' = \frac{c'}{r^2}.$$

$$(6)\quad \begin{cases} \text{a) } B - C = -\dfrac{2c'}{r^2}, & \text{b) } A - C - D - r\dfrac{dC}{dr} = \dfrac{c'}{r^2}, \\ \text{c) } P = Q, & \text{d) } N - Q - r\dfrac{dQ}{dr} = 0, \end{cases}$$

wo c' eine Constante ist. Die Gleichungen (5) drücken aus, dass die Kraft eines Pols auf ein Stromelement an letzterem angreift und nach dem Biot'schen Gesetz erfolgt. Analog giebt die Identificirung der Gleichungen (3) und (4) mit (3a) und (4a) folgende Endgleichungen:

$$(7)\qquad E = G = J = 0, \quad F = \frac{c}{r^2}, \quad L = \frac{c}{r},$$

$$(8)\quad \begin{cases} \text{a) } B - D = -\dfrac{2c}{r^2}, & \text{b) } A - C - D - r\dfrac{dD}{dr} = \dfrac{c}{r^2}, \\ \text{c) } N - Q = rD, & \text{d) } P - Q - r\dfrac{dQ}{dr} = -Cr. \end{cases}$$

Die Gleichungen (7) drücken aus, dass die Kraft eines Stromelements auf einen Pol am Stromelement angreift und nach dem Biot'schen Gesetz erfolgt.

4) Aus den Gleichungen (5)-(8) ergeben sich schliesslich folgende Gleichungen:

$$(A)\quad E = E' = G = G' = J = J' = L' = 0, \quad F = F' = \frac{c}{r^2}, \quad L = \frac{c}{r},$$

welche das Biot'sche Gesetz ausdrücken, und

$$\text{(B)}\quad \begin{cases} A = \dfrac{c}{r^2} + 2\dfrac{dQ}{dr} + r\dfrac{d^2Q}{dr^2}, \quad B = -\dfrac{2c}{r^2} + \dfrac{dQ}{dr}, \\ C = D = \dfrac{dQ}{dr}, \\ P = Q, \quad N = Q + r\dfrac{dQ}{dr}. \end{cases}$$

Diese Bedingungsgleichungen genügen dem Princip der Reaction, wonach die in einen beliebigen Punkt verlegten Kraftcomponenten des Systems sowie die Kräftepaare die Summe 0 geben müssen. In den Gleichungen (B) drücken die Glieder mit der Constante c eine Kraft aus, welche im Mittelpunkte des afficirten Stromelements angreift und dem Ampère'schen Gesetz entspricht; bezeichnen wir in Beziehung auf beliebige Axen die Componenten der im Mittelpunkte von ds' angreifenden Kraft von ds auf ds' mit $X_a + X_1$ etc., wo X_a die Ampère'sche Kraft ist, und die Componenten des Kräftepaars mit P_x etc., so wird nach (I) und (B), wenn wir

$$\cos\vartheta = -\frac{dr}{ds}, \quad \cos\vartheta' = \frac{dr}{ds'}, \quad \cos\varepsilon = -\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} - r\frac{d^2r}{ds\,ds'}$$

setzen,

$$\text{(9)}\quad \begin{cases} \dfrac{X_1}{ii'\,ds\,ds'} = \left(\dfrac{d^2Q}{dr^2}\dfrac{dr}{ds}\dfrac{dr}{ds'} + \dfrac{dQ}{dr}\dfrac{d^2r}{ds\,ds'}\right)(x-x') \\ \qquad + \dfrac{dQ}{dr}\left(\dfrac{dr}{ds'}\dfrac{dx}{ds} - \dfrac{dr}{ds}\dfrac{dx'}{ds'}\right) = \dfrac{d^2}{ds\,ds'}[Q(x-x')], \\ \dfrac{P_x}{ii'\,ds\,ds'} = -\dfrac{dQ}{ds}\left[(y-y')\dfrac{dz'}{ds'} - (z-z')\dfrac{dy'}{ds'}\right] \\ \qquad + Q\left(\dfrac{dz}{ds}\dfrac{dy'}{ds'} - \dfrac{dy}{ds}\dfrac{dz'}{ds'}\right). \end{cases}$$

Verlegen wir die Kraft in den willkürlichen Coordinatenanfang, so kommt das von der Zusatzkraft herrührende Kräftepaar $y'Z_1 - z'Y_1$ hinzu, und das neue von Q abhängige Kräftepaar wird

$$\text{(9a)}\qquad \frac{P_x'}{ii'\,ds\,ds'} = \frac{d^2}{ds\,ds'}[Q(y'z - z'y)].$$

Diese Form der von der unbekannten Kraft Q abhängigen Zusatzkräfte und Kräftepaare zeigt, dass dieselben verschwinden,

wenn einer der zwei Stromkreise geschlossen ist. Für zwei nicht geschlossene Stromleiter erhalten wir, wenn wir den Anfangs- und Endpunkt von s mit 1 und 2, den von s' mit 3 und 4 bezeichnen:

$$\frac{X_1}{ii'} = Q_{24}(x_2-x_4)-Q_{14}(x_1-x_4)-Q_{23}(x_2-x_3)+Q_{13}(x_1-x_3),$$

$$\frac{P'_x}{ii'} = Q_{24}(y_4 z_2 - z_4 y_2) - \cdots.$$

Hiernach besteht die Zusatzkraft von s auf s' aus vier von den Enden von s ausgehenden und an den Enden von s' angreifenden Kräften $= Qr$, wo r die Entfernung der betreffenden Enden bezeichnet; und zwar sind die Kräfte anziehende zwischen zwei Eintritts- oder zwei Austrittsstellen des Stroms, abstossende zwischen einer Eintritts- und einer Austrittsstelle.

Das Resultat der Untersuchung ist also folgendes: Durch die Bedingung der Aequivalenz der ponderomotorischen Wirkungen eines Elementarstroms und eines magnetischen Molecüls auf ein Stromelement und umgekehrt ist die Wirkung zwischen einem Stromelement und einem Magnetpol vollkommen bestimmt als eine an dem Stromelement angreifende und nach dem Biot'schen Gesetz erfolgende Kraft. Dagegen ergiebt sich die ponderomotorische Wirkung zwischen zwei Stromelementen als eine Summe zweier Teile, von denen der erste eine durch das afficirte Stromelement gehende und dem Ampère'schen Gesetz folgende Kraft ist, während der zweite nur zwischen zwei nicht geschlossenen Stromleitern vorhanden ist und aus vier Kräften zwischen den Stromenden besteht, welche gleich einer unbekannten Function der Entfernung sind. Lbg.

H. Poincaré. Sur la loi électrodynamique de Weber.
C. R. CX. 825-829.

1) Der Verf. berichtigt zunächst ein von Maxwell bei Ableitung des Inductionsgesetzes aus dem Weber'schen Grundgesetz (Maxwell, Elektricität und Magnetismus, II, S. 602) begangenes Versehen, durch welches Maxwell für die in einem

Leiter s' durch einen Strom i inducirte elektromotorische Kraft den Ausdruck findet:

$$(1) \qquad E = -\frac{d(Mi)}{dt} = -i\frac{\delta M}{dt} - M\frac{di}{dt},$$

wo

$$(2) \qquad M = -\iint \frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\,ds\,ds'$$

ist, und wo das Zeichen δ sich auf die Bewegung der Leiter bezieht, während der richtige Wert ist:

$$(3) \qquad E = -\frac{d(Mi)}{dt} + Ji,$$

wo

$$J = \iint ds\,ds'\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{ds'}\frac{\delta r}{dt}\right) - \frac{d}{ds'}\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{\delta r}{dt}\right)\right],$$

welcher nur für zwei geschlossene Leiter mit dem Ausdruck (1) übereinstimmt.

2) Weiter bemerkt der Verf., dass nach dem Weber'schen Grundgesetz die Arbeit der ponderomotorischen Kräfte

$$(4) \qquad A_p = ii'\delta M = \delta(ii'M)$$

sei, und findet es auffällig, dass hiernach die ponderomotorischen Kräfte zweier nicht geschlossenen Ströme nach Weber ein Potential besitzen, was doch nach der Ampère'schen Formel, auf welche das Weber'sche Grundgesetz führt, bekanntlich nicht der Fall ist; er glaubt diesen anscheinenden Widerspruch dadurch erklären zu können, dass das Weber'sche Grundgesetz nur unter der Annahme einer gleichförmigen Strömungsgeschwindigkeit der Elektricitäten zu der Ampère'schen Formel führe, eine Annahme, welche für nicht geschlossene Ströme unzulässig sei. [Diese durch die Gleichungen (2) und (4) ausgesprochene Behauptung des Verfs., welche derselbe auch in seinem Buche „Elektricität und Optik", II, 1892 (S. 35) wiederholt, ist, soviel ich sehe, unrichtig, und damit fällt auch jener vermeintliche Widerspruch, welcher sich durch die angeführte Erklärung unmöglich würde beseitigen lassen. Setzen wir nämlich für zwei Stromelemente

$$(5) \qquad Q = -ii'\,ds\,ds' \cdot \frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'},$$

so ergiebt sich aus dem Weber'schen Grundgesetz oder aus der Ampère'schen Formel

$$(6) \quad A_p = \delta Q + ii' ds ds' \left[\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{ds'}\frac{\delta r}{dt}\right) + \frac{d}{ds'}\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{\delta r}{dt}\right)\right]$$

und nicht $A_p = \delta Q$, wie der Verf. behauptet. Wie sich aus der angezogenen Stelle seines Buches ergiebt, ist der Verf. zu diesem irrtümlichen Wert durch die Erwägung gekommen, dass nach dem Weber'schen Grundgesetz das System zweier Elektricitätsteilchen e, e' bekanntlich eine innere potentielle Energie

$$(7) \quad P = -\frac{ee'}{2c^2}\frac{1}{r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

besitzt, d. h. dass die in der Zeit dt von den gegenseitigen Kräften geleistete Arbeit

$$(8) \quad A = -\frac{dP}{dt}dt$$

ist, und dass man durch Summation der Werte von P für die vier in den zwei Stromelementen sich bewegenden Elektricitätsteilchen den Ausdruck Q in Gleichung (5) erhält. Diese Summe besitzt aber gar nicht den Charakter eines Potentials, weder für die ponderomotorische noch für die gesamte ponderomotorische und elektromotorische Arbeit in den zwei Stromelementen, weil aus Gleichung (8) durchaus nicht für die Gesamtarbeit die Gleichung $A = -\frac{dP}{dt}dt$ folgt, da die auf die vier Elektricitätsteilchen bezügliche Summe $\Sigma\frac{dP}{dt}dt$ nicht $= dt\frac{d}{dt}\Sigma P$ ist; denn in letzterem Ausdruck bezieht sich das Zeichen $\frac{d}{dt}$ nur auf die Aenderung durch Bewegung der Leiter und durch Aenderung der Intensität, d. h. der Strömungsgeschwindigkeit, dagegen in ersterem auch auf die Strömungsgeschwindigkeiten selbst. Bezeichnet man mit δ, d', d'' die Aenderung durch Bewegung der Leiter, Intensitätsänderung und Strömung, so ist

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\delta P}{dt} + \frac{d'P}{dt} + \frac{d''P}{dt},$$

und wenn man dies für die vier Elektricitätsteilchen summirt, so erhält man

$$\Sigma \frac{\delta P}{dt} = \frac{\delta Q}{dt}, \quad \Sigma \frac{d'P}{dt} = \frac{d'Q}{dt}.$$

$$(9) \quad \Sigma \frac{d''P}{dt} = -ii'ds\,ds' \left[\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{ds'}\frac{\delta r}{dt}\right) + \frac{d}{ds'}\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{\delta r}{dt}\right)\right];$$

die Gesamtarbeit der ponderomotorischen und elektromotorischen Kräfte ist also

$$(10) \qquad A = -\delta Q - d'Q - \Sigma \frac{d''P}{dt} dt$$

und die Arbeit der ponderomotorischen Kräfte nach Gleichung (6)

$$(10\text{a}) \qquad A_p = \delta Q - \Sigma \frac{d''P}{dt} dt,$$

woraus sich die Arbeit der elektromotorischen Kräfte

$$A - A_p = -2\delta Q - d'Q$$

ergiebt, übereinstimmend mit dem directen Resultat des Weber'schen Grundgesetzes. Dass der Gleichung (10) zufolge das System zweier nicht geschlossenen Ströme nach dem Weber'schen Grundgesetz keine Energiefunction in dem Sinne besitzt, dass der Zustand des Systems lediglich durch die Lage der Leiter und durch die Stromstärke bestimmt wäre, darüber vergleiche: Lorberg, Bemerkung zu dem Aufsatz von Riecke „Ueber die elektrischen Elementargesetze", Wiedemann Ann. XII. 1881. D. Ref.]

3) Schliesslich macht der Verf. darauf aufmerksam, dass, wenn die Gleichung (1) in jedem Falle, für ungeschlossene wie für geschlossene Leiter, gültig ist, die durch eine unendlich kleine Stromstärke di bei einer unendlich kleinen Bewegung von s in s' inducirte elektromotorische Kraft mit derjenigen identisch ist, welche inducirt wird, wenn der Strom di in der ersten Lage von s verschwindet und in der zweiten wiederentsteht; dazu muss nämlich nach Gleichung (1) sein

$$-di\frac{\delta M}{dt} = M\frac{di}{dt} - \left(M + \frac{\delta M}{dt}dt\right)\frac{di}{dt},$$

welche Gleichung in der That erfüllt ist. Dieser allerdings sehr wahrscheinlichen Hypothese genügt nach Gleichung (3) das Weber'sche Grundgesetz nicht. Lbg.

F. S. Provenzali. Sulle relazioni fra le proprietà ottiche dei corpi e la loro conducibilità per l'elettrico. Rom. Acc. P. d. N. L. Mem. VI. 7-23.

Die Abhandlung sucht die Wahrscheinlichkeit der Hypothese von Secchi zu begründen, dass die transversalen Schwingungen des Aethers Licht erzeugen, seine Verdichtung und Verdünnung Spannungselektricität und seine Strömung nach Art einer Flüssigkeit elektrische Ströme. Danach ergeben sich also die Beziehungen zwischen den optischen Eigenschaften der Körper und ihrer elektrischen Leitungsfähigkeit aus der verschiedenen Beweglichkeit des Aethers in den verschiedenen Körpern. Die durchsichtigen Körper (sostanze vitree) pflanzen vorwiegend transversale Schwingungen fort, polarisiren daher das Licht geradlinig und sind Nichtleiter; die Metalle pflanzen vorwiegend longitudinale Schwingungen fort, sind daher gute Leiter, aber undurchsichtig, und polarisiren das Licht elliptisch (d. h. in viel höherem Masse als die durchsichtigen Körper). Diese Verschiedenheit hängt nicht nur von der chemischen Beschaffenheit, sondern vor allem von der molecularen Structur ab (Beispiel: amorphe und krystallisirte Kohle). Die durchsichtigen Körper sind wegen ihrer grossen Elasticität geeignet, die sehr schnellen transversalen Schwingungen des Aethers zu unterstützen; aber wegen ihrer grossen Starrheit sind die Ausweichungen ihrer Molecüle in so enge Grenzen eingeschlossen, dass sich dieselben ihre Bewegungen nur in geringem Masse mitteilen und noch weniger ihre Aetherhüllen gegen einander austauschen können, weshalb sie schlechte Leiter der Wärme und Elektricität sind. Die Molecüle der Metalle dagegen können wegen ihrer geringen Elasticität die schnellen transversalen Schwingungen des Aethers nicht unterstützen; dagegen in Folge ihrer grossen Beweglichkeit verwandeln sie dieselben in Wärmeschwingungen, und in Folge der damit zusammenhängenden grossen Beweglichkeit ihrer Aetherhüllen tauschen sie letztere aus, d. h. leiten die Elektricität. Lbg.

R. Sissingh. Metingen over Kerr's verschijnsel bij magnetisatie evenwijdig aan het spiegelend oppervlak. Amst. Verh. K. Ac. v. W. XXVIII. 64 S.

Diese Abhandlung trägt in der Hauptsache einen experimentellen Charakter. Sie enthält die Resultate einer vom Verfasser unternommenen Untersuchung über die Kerr'sche Erscheinung bei einer Magnetisirung parallel der spiegelnden Oberfläche; dazu hat der Verfasser viele Messungen angestellt, so dass die Beschreibung der hierzu benutzten Instrumente sowie auch die ausführliche Besprechung der erzielten Resultate den grössten Teil der Abhandlung bilden. Die theoretischen Betrachtungen beziehen sich auf die Intensität des Lichtes polarisirter Strahlen und auf die von Lorentz und Loghem dargestellte Maxwell'sche Lichttheorie. Zumal ward dabei bestimmt, in wie weit die Resultate dieser theoretischen Betrachtungen mit denen des Experiments stimmen. Diese Untersuchung wird später vervollständigt durch eine andere über die Beziehung zwischen der Amplitude und Phase der magnetischen Lichtcomponente bei Polar- und Aequatorial-Reflexion. G.

H. Poincaré. Contribution à la théorie des expériences de M. Hertz. C. R. CXI. 322-326.

1) Der Verf. berichtigt zunächst ein von Hertz bei Berechnung der Schwingungsdauer seines Erregers gemachtes Versehen, welches später auch von Hertz anerkannt worden ist (vgl. Hertz, Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft, Leipzig 1892, S. 287), und wodurch die Schwingungsdauer $\sqrt{2}$-mal zu gross geworden ist. Da Hertz durch Anwendung dieses unrichtigen Wertes mittels der beobachteten Wellenlänge die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Luft gleich der Lichtgeschwindigkeit v fand, so würde der richtige Wert $v\sqrt{2}$ sein. Der Verf. glaubt nicht, dass dieser Widerspruch mit der Maxwell'schen Theorie sich aus der Ungenauigkeit des nach der Formel $\tau = 2\pi\sqrt{CL}$ berechneten Wertes der Schwingungsdauer

erklären lasse, sondern vermutet eher einen Mangel der Maxwell'schen Theorie.

2) Der Verf. giebt weiter (ohne Beweis) eine Methode an, um die verschiedenen möglichen Schwingungsperioden T_1, T_2, ... eines Erregers, nach wachsender Grösse geordnet, für den Fall zu berechnen, dass der Errèger sich in einem von leitenden Wänden eingeschlossenen und von einem Dielektricum mit der Dielektricitäts-Constante 1 erfüllten Raume befindet, sodass keine Dämpfung eintritt. Setzt man nämlich $\nu_i = \frac{2\pi}{T_i}$, so kann man in diesem Falle die Componenten der Magnetkraft α für die Schwingungsdauer T_i setzen:

$$(1) \qquad \alpha_x = \alpha_x^i \cos(\nu_i t) \text{ etc.,}$$

wo die α_x^i blosse Functionen der Coordinaten sind. Es seien nun K_x, K_y, K_z drei Functionen der Coordinaten, welche innerhalb des Dielektricums nebst ihren ersten Differentialquotienten endlich und continuirlich sind, der Gleichung

$$\frac{dK_x}{dx} + \frac{dK_y}{dy} + \frac{dK_z}{dz} = 0$$

genügen und an den Grenzen des Dielektricums (d. h. an den Wänden des Zimmers und an der Oberfläche des Erregers) die Bedingung erfüllen, dass der Vector K tangential zur Oberfläche ist. Dann besitzt die Grösse

$$(2) \qquad \varrho = \frac{\int\left[\left(\frac{dK_z}{dy} - \frac{dK_y}{dz}\right)^2 + \cdots\right] d\tau}{\int (K_x^2 + \cdots) d\tau}$$

offenbar ein Minimum; dieses ist $\varrho_m = \frac{\nu_1^2}{\varkappa^2}$, wo $\varkappa$ die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet, und die ihm entsprechenden Werte von K_x etc. sind die α_x^1, α_y^1, α_z^1 in Gleichung (1). (Der Beweis folgt daraus, dass die Minimums-Bedingung ist $\Delta K_x = -\varrho_m K_x$ etc.; dies sind aber die Differentialgleichungen für α_x^i etc., wenn man $\varrho_m = \frac{\nu_i^2}{\varkappa^2}$ setzt; für das absolute Minimum muss also $\varrho_m = \frac{\nu_1^2}{\varkappa^2}$ sein. D. Ref.) Unterwirft man die Functionen K_x etc. ausser

den obigen Bedingungen noch der Bedingung

$$\int (\alpha'_x K_x + \alpha'_y K_y + \alpha'_z K_z) d\tau = 0,$$

so ist das Minimum von ϱ, welches offenbar grösser als das vorige ist, $= \frac{\nu_2^2}{\varkappa^2}$, und der entsprechende Wert von K_x ist $= \alpha_x^2$; fügt man die Bedingung

$$\int (\alpha_x^2 K_x + \cdots) d\tau = 0$$

hinzu, so erhält man das Minimum von $\varrho = \frac{\nu_3^2}{\varkappa^2}$ und den entsprechenden Wert $K_x = \alpha_x^3$, u. s. w. Lbg.

R. Colley. Recherches théoriques et expérimentales sur la bobine de Ruhmkorff. C. R. CX. 700-703.

Es seien i und J die Intensität des primären und secundären Oeffnungsstromes, M der gegenseitige Inductionscoefficient, l und L die Selbstinductions-Coefficienten, r und R die Widerstände. Wegen des grossen Wertes von L erreicht $\frac{dJ}{dt}$ niemals einen sehr grossen Wert; man kann daher $M\frac{dJ}{dt}$ vernachlässigen, also den primären Strom von dem secundären unabhängig annehmen. Ist der primäre Strom in Folge eines in ihn eingeschalteten Condensators periodisch, so kann man setzen, wenn τ seine Schwingungsdauer, $\frac{2\pi}{\tau} = q$ ist:

$$i = A e^{-\alpha t} \sin(qt + \gamma).$$

Für den secundären Strom ist

$$RJ + L\frac{dJ}{dt} = -M\frac{di}{dt};$$

setzt man hierin den obigen Wert von i, welcher eine gegebene Function von t ist, so giebt die Integration, da $J = 0$ ist für $t = 0$:

$$(1) \qquad J = -ae^{-\frac{R}{L}t} + e^{-\alpha t}(a\cos qt + b\sin qt).$$

Der secundäre Strom besteht also aus einem abnehmenden, nicht periodischen Strome und aus einem periodischen Strome mit abnehmender Amplitude. Die Beobachtung bestätigte diese Folgerung; der Strom ging durch eine mit schwarzem Papier, in welchem sich ein schmaler Spalt befand, bedeckte Geissler'sche Röhre; in einem rotirenden Spiegel zeigten sich helle Streifen, getrennt durch Zwischenräume, welche bei einem kleinen Ruhmkorff vollständig dunkel, bei einem grösseren, wo $\frac{R}{L}$ einen kleineren Wert hatte, sehr lichtschwach waren, und welche weiterhin zu einem homogenen Lichtbande verschmolzen. Lbg.

P. Janet. Extension des théorèmes relatifs à la conservation des flux de force et d'induction magnétiques. C. R. CX. 336-339.

Enthält nur den schon von Maxwell aufgestellten und bewiesenen Satz, dass für jeden magnetischen Inductionsfaden das Product $a dq$ durch den ganzen Raum constant ist, wo a die magnetische Induction, dq den Querschnitt des Fadens bezeichnet. Lbg.

P. Janet. Sur l'aimantation transversale des conducteurs magnétiques. C. R. CX. 453-455, Almeida J. (2) IX. 497-507.

Unter „aimantation transversale“ versteht der Verfasser die Magnetisirung eines Leiters durch einen ihn durchfliessenden Strom. Bezeichnen u_x, m_x, α_x die x-Componente der Stromdichtigkeit, des inducirten magnetischen Moments und der Magnetkraft des Stroms, m_n, α_n die Componenten nach der äusseren Normale des Leiters, Ω das Potential des inducirten Magnetismus, so ist bekanntlich

$$\alpha_x = \frac{dF_z}{dy} - \frac{dF_y}{dz}, \quad \text{wo} \quad F_x = \int \frac{u'_x}{r}\, d\tau',$$

$$\Omega = -\int \left(\frac{dm'_x}{dx'} + \frac{dm'_y}{dy'} + \frac{dm'_z}{dz'} \right) \frac{d\tau'}{r} + \int m'_n \frac{d\sigma'}{r},$$

$$m_x = \varkappa \left(\alpha_x - \frac{d\Omega}{dx} \right).$$

Ist die magnetische Susceptibilität $\varkappa$ constant, so folgt hieraus $\triangle\Omega = 0$,

$$(1) \quad \Omega = \int m'_n \frac{d\sigma'}{r} = \varkappa \int \alpha'_n \frac{d\sigma'}{r} - \varkappa \int \frac{d\Omega'}{dn'} \frac{d\sigma'}{r},$$

(welche Gleichung übrigens schon von Kirchhoff aufgestellt worden ist. D. Ref.) Der Verf. wendet diese Formel auf einen beliebigen unendlichen Cylinder an, dessen Axe parallel der z-Axe sei; hier ist, wenn man die Stromdichtigkeit gleich 1 und $\int \frac{d\tau'}{r}$ gleich P setzt,

$$\alpha_x = \frac{dP}{dy}, \quad \alpha_y = -\frac{dP}{dx}, \quad \alpha_z = 0,$$

also α ist gleich der Newton'schen Anziehungskraft des mit der Dichtigkeit 1 erfüllten Cylinders und steht auf derselben senkrecht. Da die Potentiale in Gleichung (1) blosse Functionen von x und y sind, so kann man sie in bekannter Weise als logarithmische Potentiale einer auf dem Rande s des Querschnitts des Cylinders ausgebreiteten Belegung darstellen, wodurch, wenn man mit ϱ die Entfernung des betrachteten Punktes des Querschnitts von einem Randpunkte bezeichnet, Gleichung (1) übergeht in

$$(2) \quad \Omega = -2\varkappa \int \alpha'_n \log\varrho\, ds' + 2\varkappa \int \frac{d\Omega'}{dn'} \log\varrho\, ds'.$$

Der Verf. wendet diese Formel auf einen elliptischen Cylinder an. [Die ausführliche Arbeit des Verfassers ist in den Annales de l'enseignement supérieur de Grenoble II. 1—93 (1890) unter dem Titel erschienen: Étude théorique et expérimentale sur l'aimantation transversale des conducteurs magnétiques. Vergl. das ausführliche Referat in Darboux Bull. (2) XV_2. 162-166. Red.]

Lbg.

E. Hoppe. Methode zur Prüfung der homogenen Magnetisirung eines Magnetstabes. Hamb. Mitt. II. 105-110.

Bewegt sich ein Magnetpol von der Stärke m in der Nähe eines geschlossenen linearen Leiters, und bezeichnet σ irgend eine durch den Leiter begrenzte Fläche,

$$\alpha_n = -m\frac{d\frac{1}{r}}{dn}$$

die nach der Normale n von σ gerichtete Kraftcomponente des Pols, so ist bekanntlich die durch eine Bewegung von m im Leiter inducirte elektromotorische Kraft:

$$E = -\frac{d}{dt}\int \alpha_n d\sigma = m\frac{d}{dt}\int\frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma = m\frac{dV}{dt},$$

wo V das magnetische Potential des Leiters am Orte des Pols ist. Ist also $\frac{1}{\lambda}$ der Widerstand des Leiters, so ist der Integralstrom, während sich der Pol von einem Punkte 0 nach einem Punkte 1 bewegt:

$$(1) \qquad J = \lambda\int_0^1 E dt = \lambda m(V_1 - V_0).$$

Macht der Pol einen vollständigen Umlauf um die Stromcurve und zurück zum Anfangspunkte in der Richtung von der Südseite zur Nordseite der Stromfläche σ, indem er einmal durch die Stromfläche hindurchgeht, so ist bekanntlich $V_1 - V_0 = 4\pi$; und bei einer Spirale von n Windungen, wenn der Pol einmal aussen herum und durch die ganze Spirale hindurch zum Anfangspunkte zurück geht, $V_1 - V_0 = n.4\pi$. Der Verf. bemerkt nun weiter: „Bewegt sich m auf einer geschlossenen Bahn, welche die Stromfläche nicht oder gleich oft von der Nordseite zur Südseite wie umgekehrt schneidet, so ist $V_1 - V_0 = 0$; daraus wird häufig geschlossen, dass dann auch $J = 0$ sei, dies ist jedoch nur unter besonderen Bedingungen der Fall. Ist in einem Punkte a der Bahn V ein Maximum, in einem anderen Punkte b ein Minimum, so ist beim Uebergang des Pols von a zu b:

$$(2) \qquad J_1 = \lambda m(V_b - V_a)$$

und beim Uebergang von b nach a zurück durch den Rest der Bahn:

$$(3) \qquad J_2 = \lambda m(V_a - V_b).$$

Würden beide Bewegungen zugleich ausgeführt, so wäre $J_1 + J_2 = 0$; finden sie aber hinter einander statt, so ist diese Summation un-

statthaft". (Diese Bemerkung ist in der vorstehenden Form unrichtig oder wenigstens unverständlich. Man kann entweder jeden der zwei Integralströme für sich beobachten, oder ihre Summe, mag diese nun gleichzeitig durch zwei Pole erzeugt werden, oder durch denselben Pol in zwei auf einander folgenden Zeiten, falls man den geeigneten Messapparat anwendet und die ganze Zeit hinreichend kurz ist; und diese Summe ist unter allen Umständen Null, falls die Bahn den Leiter nicht umkreist. Wahrscheinlich hat der Verf. die Beobachtung mit dem Dynamometer im Auge gehabt. Dass hier zwei nach einander verlaufende entgegengesetzte Stromstösse sich in ihren Wirkungen nicht aufheben, ist aber allbekannt und rechtfertigt den obigen Ausdruck einer „häufig" entgegengesetzten Ansicht nicht. Hier wird eben nicht der Integralstrom $\int J dt$, sondern die Grösse $\int J^2 dt$ beobachtet. Es folgt weiter eine Ableitung eines bekannten Satzes über Maximum- und Minimum-Punkte von V im Raume, dessen Zusammenhang mit dem Gegenstand des Aufsatzes nicht ersichtlich ist, sowie eine unrichtige Formel für die inducirende Wirkung eines in der Spirale befindlichen Eisenkerns. D. Ref.)

Der in den Gleichungen (2) und (3) ausgesprochene Fall tritt z. B. ein, wenn ein Magnet um die Axe rotirt, welche mit seiner magnetischen Axe einen Winkel bildet und welche die Axe eines Kreisstroms oder einer Spirale senkrecht schneidet. Denkt man sich den ganzen Magnetismus in der magnetischen Axe concentrirt, so hat jeder Magnetpol die Maximums-Lage a und die Minimums-Lage b in den zwei Momenten, wo er die durch die Drehungsaxe und die Axe der Spirale gelegte Ebene passirt. Lbg.

J. Haubner. Ueber Strombrechung in flächenförmigen Leitern. Monatsh. für Math. I. 247-274, 357-370.

1) Es werde $z = x + iy$ gesetzt; die z-Ebene bestehe aus zwei Teilen I und II vom specifischen Leitungsvermögen μ_1 und μ_2; das Potential sei U, die Stromfunction V, also die Gleichung der Niveaulinien $U =$ const., die der Stromlinien $V =$ const.;

dann ist bekanntlich

$$(1) \quad W = U + iV = f(z).$$

Bezeichnen wir die Werte von U und V in den Teilen I und II mit U_1, U_2 und V_1, V_2, so muss an der Trennungslinie die Gleichung

$$(2) \quad U_1 = U_2$$

stattfinden. Die durch ein beliebiges Linienelement ds, dessen Normale dn sei, in der Zeiteinheit fliessende Elektricitätsmenge ist $= -\mu \frac{dU}{dn} ds = -\mu \frac{dV}{ds} ds$; da nun durch ein beliebiges Stück s der Trennungslinie in beiden Teilen dieselbe Elektricitätsmenge fliessen muss, so ist die zweite an der Trennungslinie zu erfüllende Bedingung die, dass $\mu \int \frac{dV}{ds} ds = \mu(V - V_0)$ in beiden Teilen denselben Wert hat, also $\mu_1 V_1 - \mu_2 V_2 = \text{const.}$, oder da man die Constante gleich Null setzen kann,

$$(3) \quad \mu_1 V_1 = \mu_2 V_2.$$

Das Problem der Strömung in einer aus zwei Teilen von verschiedenem Leitungsvermögen bestehenden Ebene reducirt sich also auf die Auffindung zweier logarithmisch unendlichen Functionen $W_1 = f_1(z)$, $W_2 = f_2(z)$, deren reelle und imaginäre Teile an der Trennungslinie den Gleichungen (2) und (3) genügen.

Ist k der specifische Widerstand des Stoffes, δ die Dicke der Platte, also $\mu = \frac{\delta}{k}$, so ist der Widerstand eines durch zwei Niveaulinien und zwei Stromlinien begrenzten Flächenelements, dessen Dimensionen parallel der Strömung und senkrecht zu derselben λ und β sind,

$$dR = k \frac{\lambda}{\delta \beta} = \frac{1}{\mu} \frac{\lambda}{\beta}.$$

Benutzt man nun das Princip der Abbildung, wonach, wenn man die z-Ebene auf der z'-Ebene durch eine Function $z' = \varphi(z)$ abbildet, U und V auch Potential und Stromfunction in dem entsprechenden Punkte der z'-Ebene sind, so haben, da bei der Abbildung $\frac{\lambda}{\beta}$ ungeändert bleibt, zwei entsprechende Elemente bei-

der Stromnetze denselben Widerstand, folglich auch je zwei entsprechende endliche Flächenstücke. Ist also das Stück der z-Ebene durch zwei Niveaulinien $U = U^1$ und $U = U^2$ und zwei Stromlinien $V = V^1$ und $V = V^2$ begrenzt, und bildet man die z-Ebene auf der W-Ebene ab, so wird das entsprechende Flächenstück ein Rechteck von der Länge $U^1 - U^2$ und der Breite $V^1 - V^2$; sein Widerstand ist also

$$(4) \quad R = \frac{1}{\mu}\frac{U^1 - U^2}{V^1 - V^2} = \frac{U^1 - U^2}{E},$$

wo E die durch das Flächenstück in der Zeiteinheit strömende Elektricitätsmenge bezeichnet.

2) Der einfachste Fall ist der, wo die Trennungslinie mit der x-Axe zusammenfällt und sich im Teil I zwei Elektroden z_1, z_2 befinden, durch welche die Elektricitätsmenge E ein- resp. ausströmt. Setzt man

$$\sigma = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2},$$

und sind z'_1 und z'_2 die conjugirten Punkte zu z_1 und z_2, so ist

$$(5) \quad \begin{cases} W_1 = A - \dfrac{E}{2\pi\mu_1}\left[\log\dfrac{z - z_1}{z - z_2} + \sigma\log\dfrac{z - z'_1}{z - z'_2}\right], \\ W_2 = A - \dfrac{E}{2\pi\mu_1}(1 - \sigma)\log\dfrac{z - z_1}{z - z_2}. \end{cases}$$

Setzt man $z - z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ etc., so sind in I die Niveaulinien und Stromlinien

$$\frac{r_1}{r_2}\left(\frac{r'_1}{r'_2}\right)^\sigma = \text{const.}, \quad \varphi_1 - \varphi_2 + \sigma(\varphi'_1 - \varphi'_2) = \text{const.},$$

in II

$$\frac{r_1}{r_2} = \text{const.}, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \text{const.}$$

Sie sind also im Teil II dieselben zwei Kreisbüschel, als ob die ganze Ebene dasselbe Leitungsvermögen hätte. Da der Kreis durch die Punkte z_1, z_2, z'_1, z'_2 sowohl in I, als auch in II eine Stromlinie ist, so geben die Gleichungen (5) auch die Strömung in einer aus zwei Hälften vom Leitungsvermögen μ_1 und μ_2 bestehenden Kreisfläche, an deren Rande im Teil I die Elektroden liegen. Durch Inversion um ein in I liegendes Inversionscentrum

gehen die zwei Halbebenen in den Innenraum eines Kreises vom Leitungsvermögen μ_2 und in den Aussenraum vom Leitungsvermögen μ_1 über.

3) Die z-Ebene bestehe aus einem von zwei parallelen Geraden 1 und 2, $x = \xi_1$, $x = -\xi_2$ begrenzten Streifen I vom Leitungsvermögen μ_1, und aus den zwei daranstossenden Halbebenen II und III vom Leitungsvermögen μ_2 (die positive Halbebene) und μ_3; die Elektroden α und β mögen in I liegen, und ihre conjugirten Punkte seien α' und β', und es sei

$$\sigma = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}, \quad \sigma' = \frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_1 + \mu_3}.$$

Benutzt man das Princip der Spiegelung, und bezeichnet die Bilder von α in Bezug auf die Geraden 1 und 2 mit α_1^1 und α_1^2, das Bild von α_{n-1}^2 in 1 mit α_n^1, das Bild von α_{n-1}^1 in 2 mit α_n^2, so ist, wenn man $\xi_1 + \xi_2 = \delta$ setzt,

$$(6) \quad \begin{cases} \alpha_{2n}^1 = \alpha + 2n\delta, & \alpha_{2n+1}^1 = -\alpha' + 2\xi_1 + 2n\delta, \\ \alpha_{2n}^2 = \alpha - 2n\delta, & \alpha_{2n+1}^2 = -\alpha^1 - 2\xi_2 - 2n\delta, \end{cases}$$

und den Bedingungen (2) und (3) wird genügt durch

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{2\pi\mu_1}{E} W_1 = A_1 - \log\frac{z-\alpha}{z-\beta} - \sum_{n=1}^{\infty}(\sigma\sigma')^n \log\left(\frac{z-\alpha_{2n}^1}{z-\beta_{2n}^1}\,\frac{z-\alpha_{2n}^2}{z-\beta_{2n}^2}\right) \\ \qquad -\sigma\sum_{n=0}(\sigma\sigma')^n\log\frac{z-\alpha_{2n+1}^1}{z-\beta_{2n+1}^1} - \sigma'\sum_{n=0}^{\infty}(\sigma\sigma')^n\log\frac{z-\alpha_{2n+1}^2}{z-\beta_{2n+1}^2}, \\ \frac{2\pi\mu_1}{E} W_2 = A_2 - (1+\sigma)\sum_{n=0}^{\infty}(\sigma\sigma')^n\log\frac{z-\alpha_{2n}^2}{z-\beta_{2n}^2} \\ \qquad - (1+\sigma)\sigma'\sum_{n=0}^{\infty}\log\frac{z-\alpha_{2n+1}^2}{z-\beta_{2n+1}^2}, \\ \frac{2\pi\mu_1}{E} W_3 = A_3 - (1+\sigma')\sum_{n=0}^{\infty}(\sigma\sigma')^n\log\frac{z-\alpha_{2n}^1}{z-\beta_{2n}^1} \\ \qquad - (1+\sigma')\sigma\sum_{n=0}^{\infty}\log\frac{z-\alpha_{2n+1}^1}{z-\beta_{2n+1}^1}. \end{cases}$$

Durch Inversion mit dem Nullpunkte als Inversionscentrum gehen II und III in Kreisflächen über, welche sich im Nullpunkte berühren, I in den Aussenraum.

Setzt man in den Gleichungen (7) statt der W, welche die Form $\Sigma A_n \log\frac{z-a_n}{z-b_n}$ haben, Functionen von der Form:

$$\Sigma A_n \log \frac{e^z - e^{a_n}}{e^z - e^{b_n}},$$

welche für $z = a_n \pm 2m\pi i (m = 0, 1, \ldots, \infty)$ logarithmisch unendlich werden, so zerfällt die ganze Ebene in zur x-Axe parallele Streifen von der Breite 2π, in denen sich die zwei Elektroden α, β sowie die Werte der W periodisch wiederholen. Die Werte der W in dem Streifen zwischen $y = 0$ und $y = 2\pi$ geben auch die Strömung in einer beiderseits unendlichen Cylinderfläche vom Umfang 2π, deren Punkte durch den Abstand x von der Ebene $x = 0$ und durch die Bogenlänge y, von der Cylinderseite $y = 0$ aus gerechnet, bestimmt sind, welche aus einem Teil I zwischen den Ebenen $x = -\xi_2$, $x = \xi_1$ vom Leitungsvermögen μ_1 und den zwei daran grenzenden Teilen vom Leitungsvermögen μ_2 und μ_3 besteht, und auf welcher sich in dem Teil I zwei Elektroden α, β befinden. Auf die Strömung in dem Teil I des Streifens $(0, 2\pi)$ lässt sich auch durch eine doppelte Transformation die Strömung in einer Ebene zurückführen, welche aus dem Innenraume einer Ellipse vom Leitungsvermögen μ_1 und dem Aussenraume vom Leitungsvermögen μ_2 besteht, wenn beide Elektroden sich entweder innerhalb oder ausserhalb der Ellipse befinden.

Schliesslich werden auch noch die den Formeln (7) analogen Formeln aufgestellt für den Fall, wo sich die zwei Elektroden, statt in dem Teil I, in II oder III befinden. Lbg.

G. Adler. Ueber die Veränderung der elektrostatischen Kraftwirkungen durch eine leitende Wand. Wien. Ber. XCIX. 61-88; Exner Rep. XXVI. 449-472.

1) Auf einen elektrischen Massenpunkt e wirke ein anderer elektrischer Massenpunkt me (wo m positiv oder negativ sein kann); senkrecht zur Verbindungslinie und auf derselben Seite beider Massenpunkte befinde sich eine abgeleitete unendliche leitende Ebene. Die auf dieser entstehende Influenz-Elektricität wirkt bekanntlich auf e wie die zwei elektrischen Bilder $-e$ und $-me$ in Bezug auf die Ebene; bezeichnet also r die Entfernung zwischen e und me, δ die Entfernung des Punktes me von der

Wand, so ist die Gesamtkraft auf e, in der ursprünglichen (d. h. bei fehlender Wand stattfindenden) Richtung gerechnet, wenn e zwischen me und der Wand liegt,

$$(1)\quad K = me^2\left[\frac{1}{r^2} + \frac{1}{(2\delta - r)^2} + \frac{1}{4m}\,\frac{1}{(\delta - r)^2}\right],$$

und wenn me zwischen e und der Wand liegt,

$$(2)\quad K = me^2\left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(2\delta + r)^2} - \frac{1}{4m}\,\frac{1}{(\delta + r)^2}\right].$$

Im ersten Falle giebt es bei negativem Werte von m und im zweiten Falle bei positivem Werte von m einen Wert r_0 von r, für welchen $K = 0$ ist, wo also die ursprüngliche Anziehung, resp. Abstossung in eine Abstossung, resp. Anziehung übergeht. Im zweiten Falle und für $m > 0$ giebt es in der Zone der Anziehung $r = r_0$ bis $r = \infty$ einen Punkt, wo die Anziehung ein Maximum ist. Im ersten Falle und für $m < 0 = -m'$ findet in der Zone der Anziehung $r = r_0$ bis $r = 0$ Verstärkung der ursprünglichen Anziehung statt, wenn $m' > 1$ ist, und das Verhältnis dieser Verstärkung zur ursprünglichen Anziehung hat in einem bestimmten Punkte ein Maximum.

2) Eine abgeleitete Kugel C vom Radius ϱ befinde sich zwischen einem elektrischen Massenpunkte e und einer abgeleiteten unendlichen Ebene E; e und der Mittelpunkt m von C liegen auf einem Lote auf E; die Entfernung des Punktes e von der Ebene und von m sei f und c. Construirt man die Bilder b_1^1, b_1^2 von e in C und E, hiervon wieder die Bilder b_2^2, b_2^1 in E und C etc., so wird bekanntlich die Influenz auf E durch e und sämtliche Bilder b_n^1, die Influenz auf C durch e und sämtliche Bilder b_n^2 bewirkt. Bezeichnen b_n^1, b_n^2 die Bilder von b_{n-1}^2 und b_{n-1}^1 in C und E, f_n die Entfernung zwischen b_n^1 und m (positiv gerechnet, wenn b_n^1 zwischen m und E liegt), p_n die Ladung von b_n^1, ferner

$$(3)\quad f_0 = -c,\quad f_1 = -\frac{\varrho^2}{c},\quad p_0 = e,\quad p_1 = -\frac{e\varrho}{c},$$

so ergiebt sich leicht für $n > 1$

$$(3\text{a})\quad f_n = \frac{\varrho^2}{2(f-c) - f_{n-2}},\quad p_n = \frac{\varrho\, p_{n-2}}{2(f-c) - f_{n-2}}.$$

Die Gesamtkraft auf C rührt von der Wirkung von e und sämtlichen Bildern b_n^2 auf sämtliche Bilder b_n^1 her; diese Doppelreihe vermeidet der Verf. durch Anwendung eines von ihm früher aufgestellten Satzes (vgl. F. d. M. 1887. 1116), welcher folgendermassen lautet.

„Ein System Q teils isolirter und geladener, teils abgeleiteter Conductoren (unter denen sich auch feste elektrische Massen befinden können) gebe vor, resp. nach dem Hineinbringen eines isolirten oder abgeleiteten Conductors C_1 aus dem Unendlichen in das Feld das Potential V^0, resp. V, deren Werte V_1^0 und V_1 auf C_1 seien; e_1 sei die schliessliche Flächendichtigkeit von C_1, E_1 seine Ladung, falls er isolirt ist, φ_1 das Potential auf ihm, wenn er sich im Unendlichen befindet; dann ist der Zuwachs der potentiellen Energie des Systems $C+C_1$ durch Einbringen von C_1 in das Feld

$$W_1 = \tfrac{1}{2}\int e_1 V_1^0 d\sigma_1 + \tfrac{1}{2}E_1(V_1-\varphi_1).\text{“}$$

Für den vorliegenden Fall ist also der Zuwachs der Energie des Systems durch Einbringen der Kugel C in das Feld, wenn σ_1 die Fläche von C bezeichnet:

$$W_1 = \tfrac{1}{2}\int e_1 V_1^0 d\sigma_1,$$

wo V_1^0 nur von e und seinem Bilde $-e$ in E herrührt. Sind also r und r_1 die Entfernung eines Flächenelements $d\sigma_1$ von e und $-e$, so ist

$$V_1^0 = e\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right),$$

also

$$(4)\qquad W_1 = \frac{e}{2}\int \frac{e_1}{r} d\sigma_1 - \frac{e}{2}\int \frac{e_1}{r_1} d\sigma_1 = \frac{e}{2}(V_e - V_{-e}),$$

wo V_e und V_{-e} die Potentiale der Kugel am Orte von e und $-e$ bezeichnen; und die Kraft auf C nach der Richtung von c ist

$$(4\text{a})\qquad K = -\frac{dW_1}{dc}.$$

V_e und V_{-e} rühren aber von den Bildern b_n^1 her, es ist also

$$(5)\qquad V_e - V_{-e} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n\left(\frac{1}{c+f_n} - \frac{1}{2f-c-f_n}\right).$$

Die Convergenz jeder dieser zwei Reihen ergiebt sich aus den Recursionsformeln (3a).

Schliesslich zeigt der Verf. noch durch numerische Ausrechnung für specielle Fälle, dass die Anwesenheit der Wand immer eine Schwächung der ursprünglichen Anziehung des Massenpunktes auf die Kugel zur Folge hat. Lbg.

G. Adler. Ueber eine Consequenz der Poisson-Mosotti'schen Theorie. Wien. Ber. XCIX. 1044-1049.

Wendet man nach Mosotti die Poisson'sche Theorie der Magnetisirung auf die Dielektrica an, und setzt $m_x = k\alpha_x$ etc., wo m_x und α_x die x-Componenten des dielektrischen Moments und der elektrischen Kraft bezeichnen, ferner das Verhältnis des dielektrischen Volumens zum Gesamtvolumen

$$(1) \qquad \frac{v_1}{v} = g,$$

so ist bekanntlich

$$(2) \qquad k = \frac{3}{4\pi} \frac{g}{1-g}.$$

Dadurch bestimmt sich die in der Theorie der Deformation durch Elektrisirung vorkommende Constante

$$k' = v\frac{dk}{dv} = -g\frac{dk}{dg} = -k\left(1+\frac{4\pi}{3}k\right),$$

was für schwach polarisirende Media in $k' = -k$ übergeht. Dies stimmt für Gase mit den Beobachtungen von Boltzmann überein; nach diesen kann man nämlich die Dielektricitäts-Constante beim Druck p:

$$K = 1+4\pi k = 1+\lambda p$$

setzen, wo λ eine Constante bezeichnet; aus $pv =$ Const. folgt aber

$$k' = v\frac{dk}{dv} = -p\frac{dk}{dp} = -\frac{\lambda}{4\pi}p = -\frac{K-1}{4\pi} = -k.$$

(Der Wert von k hängt, auch bei Annahme kugelförmiger Molecüle, von der Gestalt desjenigen Volumens ab, welches man um ein Molecül herum ausschliesst, um die polarisirende Kraft zu

erhalten. Setzt man diese Kraft allgemein

$$\beta_x = \alpha_x + 4\pi h m_x,$$

wo z. B. $h = \frac{1}{3}$ oder 1 oder 0 ist, je nachdem man dieses Volumen mit Poisson als eine Kugel, oder mit Maxwell als einen unendlich abgeplatteten Cylinder, oder als einen unendlich verlängerten Cylinder annimmt, so wird

$$k = \frac{3}{4\pi}\frac{g}{1-3hg}, \quad k' = -k(1+4\pi hg),$$

also für schwach polarisirende Medien immer $k' = -k$. D. Ref.)

Lbg.

P. Czermak. Ein Beitrag zur Construction der Niveaulinien. Wien. Ber. XCIX. 511-520.

Für das aus einem oder zwei elektrischen Punkten bestehende Feld wird die Construction der Niveaulinien in einer durch die Punkte gehenden Ebene angegeben. Lbg.

H. Hertz. Ueber die Grundgleichungen der Elektrodynamik für ruhende Körper. Gött. Nachr. 106-149; Wiedemann Ann. XL. 577-624.

Der Verf. verfolgt in vorliegender Abhandlung den Zweck, die Maxwell'schen Grundgleichungen auf ihre einfachste Form zurückzuführen und namentlich aus denselben den Begriff der elektrischen Verschiebung sowie des aus der Vorstellung von Fernkräften hervorgegangenen Vectorpotentials zu entfernen und durch die Kräfte selbst, welche in jedem Punkte nur durch den Zustand der nächsten Umgebung bestimmt sind, zu ersetzen. (Zur Abkürzung und besseren Uebersichtlichkeit bezeichne ich im folgenden die Componenten eines Vectors v mit v_x, v_y, v_z, und schreibe von den für jede der drei Componenten geltenden Gleichungen immer nur die auf die x-Componente bezügliche hin. Das Axensystem ist als rechtshändig vorausgesetzt. D. Ref.)

1) „Die Grundgleichungen." Die elektrische Kraft E und die Magnetkraft α wird definirt als die mechanische Kraft auf einen bestimmten elektrisirten Körper oder einen Magnetpol,

welcher sich entweder im freien Aether oder in einer unendlich kleinen, der Kraftrichtung parallelen, unendlich gestreckten cylindrischen Höhlung des ponderabeln Mediums befindet. Die hierbei noch unbestimmt bleibende Krafteinheit wird im freien Aether so definirt, dass die Energie der Volumeneinheit ist:

$$(1) \qquad W = \frac{1}{8\pi} E^2 + \frac{1}{8\pi} \alpha^2.$$

Als die Grundgleichungen im freien Aether nimmt der Verf.

$$(2a) \quad -A \frac{d\alpha_x}{dt} = \frac{dE_y}{dz} - \frac{dE_z}{dy}, \qquad (2b) \; A \frac{dE_x}{dt} = \frac{d\alpha_y}{dz} - \frac{d\alpha_z}{dy},$$

wo A eine innere Constante des Aethers ist (die reciproke Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Störung). In einem ponderabeln Medium wird die Energie gesetzt:

$$(3) \qquad W = \frac{K}{8\pi} E^2 + \frac{\mu}{8\pi} \alpha^2,$$

wo K die Dielektricitäts - Constante, μ die Magnetisirungs - Constante (magnetische Permeabilität) des Mediums heisst; dadurch wird E in elektrostatischem, α in magnetischem Mass gemessen. Sollen nun die Grundgleichungen, wenn E und α in den vorigen Einheiten gemessen werden, sich von denen im Aether nur durch eine andere Constante $A\sqrt{K\mu}$ statt A unterscheiden, so müssen dieselben sein

$$-A\mu \frac{d\alpha_x}{dt} = \frac{dE_y}{dz} - \frac{dE_z}{dy}, \qquad AK \frac{dE_x}{dt} = \frac{d\alpha_y}{dz} - \frac{d\alpha_z}{dy}.$$

Da aber in einem Leiter eine sich selbst überlassene elektrische Kraft rasch verschwindet, so werden als die allgemeinen Gleichungen genommen

$$(4a) \qquad -A\mu \frac{d\alpha_x}{dt} = \frac{dE_y}{dz} - \frac{dE_z}{dy},$$

$$(4b) \qquad A\left(K \frac{d}{dt} + 4\pi k\right) E_x = \frac{d\alpha_y}{dz} - \frac{d\alpha_z}{dy},$$

wo k die (elektrostatisch gemessene) Leitungsfähigkeit des Mediums heisst; $\frac{K}{4\pi k}$ ist eine neue Constante des Mediums (die „Relaxationszeit“ nach Cohn). In einem krystallinischen Medium treten an Stelle von $\mu\alpha_x$, KE_x, kE_x lineare Functionen der Kraft-

componenten; setzt man

$$(5)\quad \begin{cases} a_x = \mu_{11}\alpha_x + \mu_{12}\alpha_y + \mu_{13}\alpha_z, & p_x = K_{11}E_x + K_{12}E_y + K_{13}E_z, \\ & u_x = k_{11}E_x + k_{12}E_y + k_{13}E_z, \end{cases}$$

wo a und p die magnetische und elektrische Polarisation („Induction" nach Maxwell), u_x die x-Componente der Dichtigkeit des Leitungsstroms heissen, so gehen die Gleichungen über in

$$(5\text{a})\qquad -A\frac{da_x}{dt} = \frac{dE_y}{dz} - \frac{dE_z}{dy},$$

$$(5\text{b})\qquad A\left(\frac{dp_x}{dt} + 4\pi u_x\right) = \frac{d\alpha_y}{dz} - \frac{d\alpha_z}{dy}.$$

Als „Grenzbedingungen" an der Trennungsfläche zweier verschiedenen Medien nimmt der Verf. die an, dass die Gleichungen (5a) und (5b) auch in einer unendlich dünnen Uebergangsschicht gelten, ohne dass die Grössen hier unendlich werden; ist also die Trennungsfläche parallel der xy-Ebene, so müssen hier die Differentialquotienten nach z endlich, also E_x, E_y, α_x, α_y continuirlich sein; die dritte der Gleichungen (5a) und (5b) giebt dann $\frac{da_z}{dt}$ und $\frac{dp_z}{dt} + 4\pi u_z$ continuirlich. Bezeichnen wir also mit n die Normale der Trennungsfläche, mit s eine beliebige der Trennungsfläche parallele Richtung, so sind die Grenzbedingungen:

$$(6)\qquad E_s,\ \alpha_s,\ \frac{da_n}{dt},\ \frac{dp_n}{dt} + 4\pi u_n$$

continuirlich. Die Energie der Volumeneinheit ist

$$W = \frac{1}{8\pi}(E_x p_x + E_y p_y + E_z p_z) + \frac{1}{8\pi}(a_x\alpha_x + a_y\alpha_y + a_z\alpha_z),$$

und aus den Gleichungen (5) folgt, wenn σ die Oberfläche eines beliebigen Volumens τ, n ihre nach aussen gerichtete Normale bezeichnet,

$$\frac{d}{dt}\int W d\tau = -\int (E_x u_x + \cdots) d\tau$$
$$+ \frac{1}{4\pi A}\int [(E_y\alpha_z - E_z\alpha_y)\cos nx + \cdots] d\sigma,$$

wo der erste Teil rechts die erzeugte Wärme ist.

2) „Elektricitäts- und Magnetismus-Menge". Aus den Gleichungen (5) und den Grenzbedingungen (6) folgt für ein beliebiges Volumen τ mit der Oberfläche σ, deren äussere Normale n ist:

$$0 = \frac{d}{dt}\int\left(\frac{da_x}{dx}+\cdots\right)d\tau = \frac{d}{dt}\int a_n d\sigma,$$

$$0 = \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\int\left(\frac{dp_x}{dx}+\cdots\right)d\tau + \int\left(\frac{du_x}{dx}+\cdots\right)d\tau$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\int p_n d\sigma + \int u_n d\sigma.$$

Setzen wir also die über eine beliebige geschlossene Fläche ausgedehnten Integrale

$$(7)\quad \begin{cases} \mathfrak{M}_w = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int a_n d\sigma = \dfrac{1}{4\pi}\int\left(\dfrac{da_x}{dx}+\cdots\right)d\tau \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int (a_\nu^2 - a_\nu^1)\,ds, \\ \mathfrak{E}_w = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int p_n d\sigma = \dfrac{1}{4\pi}\int\left(\dfrac{dp_x}{dx}+\cdots\right)d\tau \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int (p_\nu^2 - p_\nu^1)\,ds, \end{cases}$$

wo a_ν^1, a_ν^2 und p_ν^1, p_ν^2 die Werte an einer Trennungsfläche s zweier verschiedenen Medien sind, deren Normale ν ist, und nennen $\mathfrak{M}_w$ und $\mathfrak{E}_w$ die in dem Raume τ enthaltene „wahre Magnetismus- und Elektricitäts-Menge", so gehen die vorstehenden Gleichungen über in

$$(7\text{a})\qquad \frac{d\mathfrak{M}_w}{dt} = 0, \qquad \frac{d\mathfrak{E}_w}{dt} = -\int u_n d\sigma,$$

d. h.: durch rein elektrodynamische Vorgänge ändert sich die wahre Magnetismusmenge überhaupt nicht, die wahre Elektricitätsmenge nur durch in den Raum eintretende Leitungsströme. Nach Gleichung (7) können wir $\mathfrak{E}_w$ aus einer Raumdichtigkeit

$$\varepsilon_w = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{dp_x}{dx}+\cdots\right)$$

und aus einer Flächendichtigkeit

$$e_w = \frac{1}{4\pi}\int (p_\nu^2 - p_\nu^1)\,ds$$

auf den Discontinuitäts-Flächen bestehend annehmen. Das Ans-

loge gilt für $\mathfrak{M}_w$; in einem „temporären" Magneten aber muss nach Gleichung (7a) $\mathfrak{M}_w = 0$ sein, also sowohl die Raumdichtigkeit $4\pi\varepsilon_w = \frac{da_x}{dx} + \cdots = 0$, als auch die Flächendichtigkeit $4\pi e_w = a_\nu^2 - a_\nu^1 = 0$. Die über eine nicht geschlossene Fläche σ ausgedehnten Integrale $\int a_n d\sigma$ und $\int p_n d\sigma$ nennt der Verf. die Zahl der durch die Fläche gehenden Kraftlinien (genauer Polarisationslinien).

Unter der „freien" (nach Maxwell „scheinbaren") Elektricitäts- und Magnetismus-Menge versteht der Verf. die Grössen

$$
\text{(7b)} \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_f = \frac{1}{4\pi}\int E_n ds = \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{dE_x}{dx} + \cdots\right)d\tau \\ \qquad\qquad + \frac{1}{4\pi}\int(E_\nu^2 - E_\nu^1)ds, \\ \mathfrak{M}_f = \frac{1}{4\pi}\int \alpha_n d\sigma = \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{d\alpha_x}{dx} + \cdots\right)d\tau \\ \qquad\qquad + \frac{1}{4\pi}\int(\alpha_\nu^2 - \alpha_\nu^1)ds, \end{cases}
$$

welche durch dieselben Ausdrücke dargestellt werden, wie die wahre Elektricitäts- und Magnetismus-Menge im freien Aether.

3) „Ruhende Elektricität und ruhender Magnetismus". Sind die zeitlichen Aenderungen und die Leitungsströme Null, so gehen die Gleichungen (5a) in den Leitern über in $E_x = E_y = E_z = 0$. In Nichtleitern gehen sie über in

$$
\frac{dE_y}{dz} - \frac{dE_z}{dy} = 0 \text{ etc., also } E_x = -\frac{d\varphi}{dx} \text{ etc.}
$$

Die Raum- und Flächendichtigkeit der freien Elektricität ist nach Gleichung (7b)

$$
\varepsilon_f = -\frac{1}{4\pi}\Delta\varphi, \quad e_f = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\varphi_1}{d\nu} - \frac{d\varphi_2}{d\nu}\right),
$$

woraus

$$
\varphi = \int \frac{\varepsilon_f}{r} d\tau + \int \frac{e_f}{r} ds.
$$

Ferner folgt aus den Gleichungen (7) für einen isotropen Körper

$$\frac{d}{dx}\left(K\frac{d\varphi}{dx}\right)+\cdots=-4\pi\varepsilon_w,\quad K_1\frac{d\varphi_1}{d\nu}-K_2\frac{d\varphi_2}{d\nu}=4\pi e_w.$$

Dieselben Gleichungen, nur mit μ statt K, gelten auch für ruhenden Magnetismus, nur dass in einem temporären Magneten nach Gleichung (2) $\varepsilon_w=e_w=0$ ist.

4) „Stationäre Strömung." In einem heterogenen Körper können elektromotorische Kräfte E' auftreten, in Folge deren die sich selbst überlassene Kraft E nicht auf Null, sondern auf E' abfällt; daher setzt der Verf. für diesen Fall in den Gleichungen (5) und (5b)

$$u_x=k_{11}(E_x-E'_x)+k_{12}(E_y-E'_y)+k_{13}(E_z-E'_z).$$

In einer elektromotorischen Grenzschicht zweier verschiedenen Medien wird $E'_n=\infty$, dagegen bleibt $\int E'_n dn=\varphi_{12}$ endlich; da nun u_n endlich bleiben muss, so wird auch E_n unendlich und

$$\int(E_n-E'_n)dn=0,$$

also

$$\int E_n dn=\varphi_{12},$$

welche Gleichung noch zu den Grenzbedingungen (6) hinzukommt. Findet also in einem System isotroper und homogener Leiter, zwischen denen aber elektromotorische Grenzflächen vorkommen, eine stationäre Strömung statt, so folgt aus den Gleichungen (5a), (5b):

$$E_x=-\frac{d\varphi}{dx},\quad u_x=-k\frac{d\varphi}{dx},\quad \frac{du_x}{dx}+\cdots=0,$$

also $\Delta\varphi=0$; ferner ist an einer nicht elektromotorischen Grenzfläche u_n continuirlich, also

$$k_1\frac{d\varphi_1}{dn}=k_2\frac{d\varphi_2}{dn},$$

und an einer elektromotorischen Grenzfläche

$$-\int\frac{d\varphi}{dn}dn=\varphi_1-\varphi_2=\varphi_{12}.$$

5) „Magnetkraft stationärer Ströme". Der bloss von stationären Strömen herrührende Teil der Magnetkraft genügt nach (5a) der Gleichung

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\alpha_x}{dx}+\cdots\right)=0,$$

also wegen des stationären Zustandes auch der Gleichung

$$\frac{d\alpha_x}{dx}+\cdots=0;$$

ferner ist nach Gleichung (5b)

$$\frac{d\alpha_y}{dz}-\frac{d\alpha_z}{dy}=4\pi A u_x.$$

Setzen wir also die über den ganzen unendlichen Raum ausgedehnten Integrale

$$\int\frac{u'_x}{r}\,d\tau'=F_x \text{ etc.},$$

wo F das Vectorpotential heisst, so wird

$$\alpha_x=A\left(\frac{dF_y}{dz}-\frac{dF_z}{dy}\right).$$

In einem System von stationären Strömen und permanenten Magneten, in welchem keine magnetisirbaren Medien vorkommen, also $\mu=1$ ist, ergiebt sich, wenn ψ das Potential der permanenten Magnete, $m=-\frac{1}{4\pi}\Delta\psi$ ihre Raumdichtigkeit bezeichnet, die magnetische Energie

$$W=\frac{1}{8\pi}\int\alpha^2 d\tau=\frac{A}{8\pi}\int\left[\alpha_x\left(\frac{dF_y}{dz}-\frac{dF_z}{dy}\right)+\cdots\right]d\tau$$
$$-\frac{1}{8\pi}\int\left(\alpha_x\frac{d\psi}{dx}+\cdots\right)d\tau,$$
$$=\frac{A}{8\pi}\int\left[F_x\left(\frac{d\alpha_y}{dz}-\frac{d\alpha_z}{dy}\right)+\cdots\right]d\tau+\tfrac{1}{2}\int m\psi\,d\tau,$$
$$=\frac{A^2}{2}\int(F_x u_x+\cdots)\,d\tau+\tfrac{1}{2}\int m\psi\,d\tau=W_s+W_m,$$

wo W_s die elektrokinetische Energie des Stromsystems, W_m die innere potentielle Energie der Magnete bezeichnet; für zwei lineare Ströme ist

$$W_s=ii'\iint\frac{1}{r}\cos(ds,ds)\,ds\,ds'.$$

Die Verschiebung von constant gehaltenen Strömen gegen permanente Magnete bewirkt also keine Aenderung von W. Bei Verschiebung der Ströme gegen einander ist die verbrauchte ponderomotorische Arbeit gleich $-\delta W_s = -\delta W$, also nicht das Aequivalent des Zuwachses von W; dieses Aequivalent wird bekanntlich durch die Induction geliefert.

6) „Induction". Nach Gleichung (5a) treten in einem veränderlichen Magnetfelde elektrische Kräfte auf, deren über einen geschlossenen linearen Leiter s erstreckte Summe sich als elektromotorische Kraft äussert. Dieser Integralwert ist nach Gleichung (5a)

$$(8)\quad E_1 = \int E_s ds = \int \Big[\Big(\frac{dE_y}{dz} - \frac{dE_z}{dy}\Big)\cos nx + \cdots\Big] d\sigma$$
$$= -A\frac{d}{dt}\int a_n d\sigma = -A\frac{dq}{dt},$$

wo q die Anzahl der durch die Stromfläche σ gehenden Polarisationslinien bezeichnet. Lbg.

H. Hertz. Ueber die Grundgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper. Wiedemann Ann. XLI. 369-399.

1) Der Verf. geht von folgender Annahme aus: Die Materie und der in ihr befindliche Aether bewegen sich gemeinsam mit den Geschwindigkeits-Componenten v_x, v_y, v_z, und der Einfluss dieser Bewegung auf die Aenderung des elektrischen und magnetischen Zustandes besteht darin, dass die elektrischen und magnetischen Polarisationslinien mit der Materie fortgeführt werden, als ob sie an derselben fest hafteten. Die ganze in der Zeiteinheit stattfindende Aenderung der Anzahl σa_x der durch ein auf der x-Axe senkrechtes, bewegtes Flächenelement σ gehenden magnetischen Polarisationslinien besteht also aus derjenigen, welche durch die in diesem Punkte wirkende elektrische Kraft hervorgebracht wird, und welche nach Gleichung (5a) der vorhergehenden Abhandlung

$$= -\frac{\sigma}{A}\Big(\frac{dE_y}{dz} - \frac{dE_z}{dy}\Big)$$

ist, und aus der durch die Bewegung allein hervorgebrachten,

welche nach der obigen Hypothese Null ist. Andererseits besteht die ganze durch σ dividirte Aenderungsgeschwindigkeit von σa_x aus folgenden Teilen:

a) Die von der Bewegung von σ unabhängige Aenderung von a_x in dem ruhenden Raumpunkte ist $\frac{da_x}{dt}$.

b) Die Aenderung durch parallele Verschiebung von σ ist $\frac{da_x}{dx}v_x + \frac{da_x}{dy}v_y + \frac{da_x}{dz}v_z$.

c) Die Aenderung durch Drehung von σ ist gleich $a_n - a_x$, wo n die neue Normale von σ bezeichnet. Die Drehung um die der y-Axe parallele Axe um einen Winkel φ giebt

$$a_n - a_x = a_x \cos\varphi - a_z \sin\varphi - a_x = -a_z \sin\varphi = -a_z \frac{dv_x}{dz}.$$

Die Drehung um die der z-Axe parallele Axe um einen Winkel ψ giebt

$$a_n - a_x = a_x \cos\psi + a_y \sin\psi - a_x = a_y \sin\psi = -a_y \frac{dv_x}{dy}.$$

d) Die Aenderung durch eine Ausdehnung $\delta\sigma$ von σ ist

$$a_x \frac{\delta\sigma}{\sigma} = \frac{a_x}{dy\,dz}\left[dy\left(1 + \frac{dv_y}{dy}\right)dz\left(1 + \frac{dv_z}{dz}\right) - dy\,dz\right]$$
$$= a_x\left(\frac{dv_y}{dy} + \frac{dv_z}{dz}\right).$$

Die ganze Summe dieser Aenderungen ist

$$\frac{da_x}{dt} + \left(\frac{da_x}{dx}v_x + \frac{da_x}{dy}v_y + \frac{da_x}{dz}v_z\right) - \left(a_y \frac{dv_x}{dy} + a_z \frac{dv_x}{dz}\right)$$
$$+ a_x\left(\frac{dv_y}{dy} + \frac{dv_z}{dz}\right) = \frac{da_x}{dt} + v_x\left(\frac{da_x}{dx} + \frac{da_y}{dy} + \frac{da_z}{dz}\right)$$
$$+ \frac{d}{dy}(a_x v_y - a_y v_x) - \frac{d}{dz}(a_z v_x - a_x v_z).$$

Wir erhalten auf diese Weise aus Gleichung (5a) und analog aus Gleichung (5b) die Gleichungen

$$(1) \qquad \frac{da_x}{dt} + v_x\left(\frac{da_x}{dx} + \frac{da_y}{dy} + \frac{da_z}{dz}\right) + \frac{d\mathfrak{A}_z}{dy} - \frac{d\mathfrak{A}_y}{dz}$$
$$= -\frac{1}{A}\left(\frac{dE_y}{dz} - \frac{dE_z}{dy}\right),$$

$$(2)\qquad \frac{dp_x}{dt}+v_x\left(\frac{dp_x}{dx}+\frac{dp_y}{dy}+\frac{dp_z}{dz}\right)+\frac{dP_z}{dy}-\frac{dP_y}{dz}$$
$$=\frac{1}{A}\left(\frac{da_y}{dz}-\frac{da_z}{dy}\right)-4\pi u_x,$$

wo

$$(3)\qquad \mathfrak{A}_x = a_y v_z - a_z v_y,\quad P_x = p_y v_z - p_z v_y.$$

2) Setzen wir

$$E_x - A\mathfrak{A}_x = E'_x,\quad a_x + AP_x = a'_x,$$

und bezeichnen die Raumdichtigkeit der wahren Elektricität und des wahren Magnetismus mit ε und m, so gehen die Gleichungen (1) und (2) über in

$$(1\text{a})\qquad -A\left(\frac{da_x}{dt}+4\pi m v_x\right)=\frac{dE'_y}{dz}-\frac{dE'_z}{dy},$$

$$(2\text{a})\qquad A\left(\frac{dp_x}{dt}+4\pi u_x+4\pi\varepsilon v_x\right)=\frac{da'_y}{dz}-\frac{da'_z}{dy}.$$

$A\mathfrak{A}_x$ ist die nach der gewöhnlichen Theorie durch die Bewegung der Materie im Magnetfelde erzeugte elektromotorische Kraft; $-AP_x$ ist eine Magnetkraft, welche in einem Isolator bei seiner Bewegung durch die elektrischen Polarisationslinien hindurch entsteht, und welche die Beobachtung noch nicht nachgewiesen hat. Zu der Kraft $A\mathfrak{A}$ tritt eine elektrische Kraft E' hinzu, welche nach Gleichung (1a) aus folgenden Teilen besteht: dem gewöhnlich als Fernkraft elektrischer Massen betrachteten Teil, welcher übrig bleibt, wenn die linken Seiten der Gleichung (1a) verschwinden, und welcher ein Potential besitzt; ferner aus einer den Gliedern $\frac{da_x}{dt}$ etc. entsprechenden Kraft, der elektromotorischen Kraft der Aenderung des Feldes, deren Linienintegral um eine bewegte Curve s gleich der mit $-A$ multiplicirten Aenderung der Anzahl der durch die ruhende Curve s gehenden Kraftlinien ist; und aus einer von der Bewegung des wahren Magnetismus m mit der Materie herrührenden elektromotorischen Kraft, deren Linienintegral um die Curve $s = -4\pi A\int m v_n\, d\sigma$ ist. Die Magnetkraft a' besteht nach Gleichung (2a) aus der Potentialkraft magnetischer Massen und aus einer Kraft, welche

sich aus der Magnetkraft der Ströme im ruhenden Medium ergiebt, wenn man in die Ströme auch die Aenderung der elektrischen Polarisation und die convective Bewegung der wahren Elektricität s einbegreift.

3) Da in der ruhenden Materie der wahre Magnetismus und, soweit keine Leitungsströme vorkommen, auch die wahre Elektricität sich nicht ändert, und da bei der Bewegung der Materie die Polarisationslinien an der Materie haften, also auch der wahre Magnetismus und die wahre Elektricität, welche durch die Enden der Polarisationslinien bestimmt sind: so ändert sich auch in jedem bewegten Substanzpunkte der wahre Magnetismus nicht, ebenso die wahre Elektricität da, wo keine Leitungsströme vorhanden sind, wie sich auch aus den Gleichungen (1) und (2) ergiebt. Ferner setzt sich die ganze Aenderungsgeschwindigkeit der Anzahl der Polarisationslinien, welche durch eine mit der Materie bewegte Curve s oder eine von derselben umschlossene Fläche σ gehen, zusammen aus der durch die elektrische Kraft E bei ruhender Materie hervorgebrachten, welche nach Gleichung (8) der vorhergehenden Abhandlung $= -\frac{1}{A}\int E_s ds$ ist, und aus der durch die Bewegung der Curve allein veranlassten, welche Null ist; folglich ist das Linienintegral der elektromotorischen Kraft über eine geschlossene Curve s gleich der mit $-A$ multiplicirten Aenderungsgeschwindigkeit der Anzahl der Polarisationslinien, welche durch die mit der Materie bewegte Curve gehen, also, wenn d die von der Bewegung der Curve unabhängige, δ die durch ihre Bewegung allein eintretende Aenderung bezeichnet:

$$(3) \qquad \int E_s ds = -A\left(\frac{d}{dt} + \frac{\delta}{dt}\right)\int a_n d\sigma,$$

wie sich ebenfalls aus Gleichung (1) ergiebt. Die Gleichung (3) gilt auch, wenn die Curve s allein sich durch die ruhende Materie bewegt, falls durch diese Bewegung die magnetische Polarisation ungeändert bleibt, da man sich dann die umgebende Materie mitbewegt denken kann.

4) „Gleitflächen“. Als solche bezeichnet der Verf. Flächen,

an deren beiden Seiten die tangentialen Componenten der Geschwindigkeit v discontinuirlich sind, während die normale Componente immer continuirlich sein muss; auch E, α, p, a, u können hier discontinuirlich sein. Eine solche Gleitfläche betrachtet der Verf. als eine unendlich dünne Uebergangsschicht, in welcher die Grössen sich sehr rasch, aber continuirlich und so ändern, dass die Gleichungen gültig bleiben; hier sind also E, α, p, a, u, v endlich, also auch ihre tangentialen Differentialquotienten; dagegen können die normalen Differentialquotienten $\frac{df}{dn}$ ausser $\frac{dv_n}{dn}$ unendlich sein, aber so, dass $\int \frac{df}{dn} dn = f_2 - f_1$ endlich bleibt und $\int \frac{dv_n}{dn} dn = 0$ ist. Nehmen wir einen Punkt einer Gleitfläche zum Anfangspunkte von sich mit dem Punkte bewegenden Coordinatenaxen, seine Normale zur z-Axe, so geben die auf die x- und y-Axe bezüglichen Gleichungen (1)

$$\int_1^2 v_x \frac{da_z}{dz} dz - (\mathfrak{A}_y^2 - \mathfrak{A}_y^1) = -\frac{1}{A}(E_y^2 - E_y^1),$$

$$\int_1^2 v_y \frac{da_z}{dz} dz + (\mathfrak{A}_x^2 - \mathfrak{A}_x^1) = \frac{1}{A}(E_x^2 - E_x^1),$$

oder da die relative Geschwindigkeit v_z innerhalb der Schicht unendlich klein ist,

$$\int_1^2 a_z \frac{dv_x}{dz} dz = \frac{1}{A}(E_y^2 - E_y^1), \quad \int_1^2 a_z \frac{dv_y}{dz} dz = -\frac{1}{A}(E_x^2 - E_x^1),$$

und ebenso folgt aus den Gleichungen (2)

$$\int_1^2 p_z \frac{dv_x}{dz} dz = -\frac{1}{A}(\alpha_y^2 - \alpha_y^1), \quad \int_1^2 p_z \frac{dv_y}{dz} dz = \frac{1}{A}(\alpha_x^2 - \alpha_x^1).$$

Befindet sich auf der Gleitfläche keine Flächendichtigkeit von wahrem Magnetismus oder wahrer Elektricität, so sind a_z und p_z continuirlich, und die vorstehenden Gleichungen gehen über in

$$a_z(v_x^2 - v_x^1) = \frac{1}{A}(E_y^2 - E_y^1) \text{ etc.}$$

5) Schliesslich berechnet der Verf. aus dem Ausdrucke für die magnetische Energie die in dem System wirkenden ponderomotorischen Druckkräfte;. die sich ergebenden Ausdrücke unter-

scheiden sich von den Maxwell'schen namentlich dadurch, dass die tangentialen Druckkräfte X_y und Y_x etc., welche bei Maxwell verschieden sind, hier gleiche Werte haben. Lbg.

E. Cohn. Zur Systematik der Elektricitätslehre. Wiedemann Ann. XL. 625-639.

Die vorliegende Abhandlung, welche fast gleichzeitig mit der ersten der vorstehenden Abhandlungen von Hertz erschienen ist, verfolgt einen ganz ähnlichen Gedankengang wie diese. Der Verf. setzt die Energie der Volumeneinheit in einem beliebigen Medium (die Bezeichnungen sind aus denen der Hertz'schen Abhandlung ohne weiteres verständlich)

$$(1) \qquad W = \tfrac{1}{2}E^2 + \tfrac{1}{2}M^2$$

und nimmt als die Grundgleichungen an (für ein linkshändiges Axensystem)

$$(2a) \qquad \frac{dM_x}{dt} = V\left(\frac{dE_y}{dz} - \frac{dE_z}{dy}\right),$$

$$(2b) \qquad \left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{T}\right)E_x = -V\left(\frac{dM_y}{dz} - \frac{dM_z}{dy}\right),$$

wo V (die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Störung) und T (die Relaxationszeit) innere Constanten des Mediums sind; durch Einsetzung anderer Constanten werden diese Gleichungen mit den Gleichungen (4a), (4b) von Hertz identisch. Daraus folgt für ein beliebiges Volumen τ mit der Oberfläche σ und der äusseren Normale n

$$\frac{d}{dt}\int W d\tau = -\frac{1}{T}\int E^2 d\tau + V\int [(M_y E_z - M_z E_y)\cos nx + \cdots]\, d\sigma.$$

Ist nun $d\sigma$ ein Element der Grenzfläche zweier verschiedenen Medien, und nehmen wir die x-Axe senkrecht auf $d\sigma$, so muss, damit die Energieströmung auf beiden Seiten von $d\sigma$ dieselbe sei, VM_yE_z und VM_zE_y continuirlich sein; um dies zu erreichen, setzt der Verf.

$$(3) \qquad V = \varepsilon\nu$$

und nimmt für jede in der Trennungsfläche liegende Richtung s εV_s und νM_s continuirlich an; dann wird man auch in einem

nicht homogenen Medium die Gleichungen (2) schreiben können

$$(4a)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{M_x}{\nu}\right)=\frac{d}{dz}(\varepsilon E_y)-\frac{d}{dy}(\varepsilon E_z),$$

$$(4b)\qquad \left(\frac{d}{dt}+\frac{1}{T}\right)\frac{E_x}{\varepsilon}=u_x=-\frac{d}{dz}(\nu M_y)+\frac{d}{dy}(\nu M_z),$$

wo u der „Gesamtstrom" heisst; daraus folgt dann weiter, dass an einer Trennungsfläche auch u_n und $\frac{d}{dt}\left(\frac{M_n}{\nu}\right)$ continuirlich sind. Weiter folgt aus diesen Gleichungen

$$(5)\qquad \frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{M_x}{\nu}\right)+\cdots\right]=0,\qquad \frac{du_x}{dx}+\cdots=0.$$

Die Vectoren $\frac{E}{\varepsilon}$, $\frac{M}{\nu}$, u lassen sich durch die Anzahl von zu ihnen parallelen Linien darstellen, welche durch eine auf ihnen senkrechte Flächeneinheit hindurchgehen, und welche der Verf. elektrische und magnetische Kraftlinien und Stromlinien nennt; dann kann man die Gleichung (5) sowie die Continuität von $\frac{d}{dt}\left(\frac{M_n}{\nu}\right)$ und u_n so aussprechen: Endpunkte von Stromlinien befinden sich weder im Innern eines Mediums noch auf der Trennungsfläche zweier verschiedenen Medien, und die Endpunkte magnetischer Kraftlinien haben sowohl im Innern als auch auf der Trennungsfläche eine unveränderliche Lage. Setzen wir ferner die Anzahl der von der Volumeneinheit ausgehenden elektrischen Kraftlinien

$$\varrho=\frac{d}{dx}\left(\frac{E_x}{\varepsilon}\right)+\cdots,$$

so folgt aus Gleichung (4b)

$$\left(\frac{d}{dt}+\frac{1}{T}\right)\varrho=0,\quad \text{also}\quad \varrho=\varrho_0 e^{-\frac{t}{T}}.$$

Je nachdem T endlich oder unendlich ist, je nachdem also ϱ mit wachsender Zeit gegen Null convergirt oder unveränderlich ist, heisst das Medium ein Leiter oder ein Nichtleiter. Da an der Trennungsfläche zweier Nichtleiter nach Gleichung (4b) $\frac{d}{dt}\left(\frac{E_n}{\varepsilon}\right)$ continuirlich ist, so folgt: Aus einem beliebigen Anfangszustande geht immer ein Zustand hervor, in welchem die elektrischen

Kraftlinien im Innern der Leiter keine Endpunkte haben, im Innern der Nichtleiter und an der Trennungsfläche zweier Nichtleiter unveränderliche Endpunkte.

Der Rest der Abhandlung beschäftigt sich mit der Ableitung weiterer erfahrungsmässiger Folgerungen über statische Zustände und stationäre Strömung. Lbg.

J. Stefan. Ueber elektrische Schwingungen in geraden Leitern. Wien. Ber. XCIX. 319-339; Wiedemann Ann. XLI. 400-420.

1) Bei periodischen Strömen von grosser Schwingungszahl kann man nach einer Bemerkung von Lippmann (vgl. F. d. M. XXI. 1889. 1131) den Widerstand vernachlässigen; dann bestimmt sich die Verteilung der Stromdichtigkeit im Querschnitte des Leiters durch die Bedingung, dass die elektrokinetische Energie U ein Minimum ist. Verzweigt sich z. B. ein Strom in zwei Zweigströme i_1 und i_2, in denen dieselbe elektromotorische Kraft E wirkt, so ist

$$U = Mi_1 i_2 + \tfrac{1}{2}L_1 i_1^2 + \tfrac{1}{2}L_2 i_2^2$$

und bei Vernachlässigung der Widerstände der zwei Zweige

$$E = L_1 \frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt},$$

was die Bedingung dafür ist, dass U bei gegebenem Werte von $i_1 + i_2$ ein Minimum ist; und dasselbe lässt sich bei Verzweigung des Stroms in unendlich viele Stromfäden beweisen. Da man U auch als magnetische Energie betrachten kann, so lässt sich die Bedingung der Stromverteilung im Querschnitte auch so aussprechen, dass für einen constanten Wert des Gesamtstroms die magnetische Energie ein Minimum wird. Nun ist für einen geraden Leiter von kreisförmigem Querschnitte die magnetische Energie im äusseren Raume von der Verteilung unabhängig, indem der Strom so wirkt, als ob er in der Axe concentrirt wäre; die obige Bedingung reducirt sich also darauf, dass die magnetische Energie innerhalb des Leiters ein Minimum ist, was bekanntlich stattfindet, wenn der Strom in einer unendlich dünnen Schicht an der Oberfläche des Leiters concentrirt ist, da dann

im Inneren der Stromröhre die Magnetkraft und also auch die magnetische Energie Null ist. Dasselbe kann man bei dünnen Drähten auch in dem Falle annehmen, wo die Intensität nicht auf der ganzen Länge eines Stromfadens denselben Wert hat, da die Selbstinduction in einem Stücke des Drahtes hauptsächlich von der Aenderung des Stroms in diesem Stücke selbst herrührt. Daraus erklärt sich die bekannte Beobachtung von Hertz, wonach sehr schnelle elektrische Schwingungen nur längs der Oberfläche des Drahtes stattfinden und vom Widerstande und der magnetischen Beschaffenheit unabhängig sind.

2) Ist der Widerstand nicht zu vernachlässigen, so ist die Stromverteilung eine andere; der Verf. führt für dieselbe die in einer früheren Abhandlung (Wien. Ber. XCV. 1887) aufgestellten Gleichungen an. Bezeichnen l und a Länge und Radius des geradlinigen Drahtes, σ seinen specifischen Widerstand, μ seine magnetische Permeabilität, u die Stromdichtigkeit in der Entfernung ϱ von der Axe, u_1 ihren Wert an der Oberfläche, J den Gesamtstrom, E die im ganzen Querschnitt als constant betrachtete äussere elektromotorische Kraft,

$$L = 2l\left(\log\frac{2l}{a} - 1\right)$$

den Inductionscoefficienten des axialen Stromfadens auf einen Stromfaden an der Oberfläche, so lauten diese Gleichungen

$$(1)\qquad \frac{du}{dt} = \frac{\sigma}{4\pi\mu}\left(\frac{d^2u}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{du}{d\varrho}\right)$$

und an der Oberfläche

$$(2)\qquad E = l\sigma u_1 + L\frac{dJ}{dt}.$$

Der Verf. löst diese Gleichungen für den Fall einer grossen Schwingungszahl, wo die Stromdichtigkeit nur in geringer Tiefe unter der Oberfläche einen merklichen Wert hat, und knüpft daran numerische Berechnungen des scheinbaren Widerstandes und Selbstinductions-Coefficienten, welche ganz andere Werte ergeben als für gewöhnliche Ströme. In der Höhlung eines röhrenförmigen, von einem periodischen Strome durchflossenen Leiters ist die totale elektromotorische Kraft, welche aus der

äusseren und der des Leiters besteht, sehr klein; der Verf. beschreibt Versuche, welche er über diese Schirmwirkung einer Stromröhre angestellt hat. Lbg.

J. Stefan. Ueber die Theorie der oscillatorischen Entladung. Wien. Ber. XCIX. 534-548; Wiedemann Ann. XLI. 421-434.

Der Verf. behandelt den Entladungsstrom eines Condensators in einem dicken Draht, indem er dafür die Gleichungen (1) und (2) der vorhergehenden Abhandlung benutzt, nämlich, wenn P_1 und P_2 die Potentiale auf den Condensatorplatten zur Zeit t bezeichnen:

$$(1)\qquad \frac{du}{dt} = k\left(\frac{d^2u}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{du}{d\varrho}\right), \quad \text{wo} \quad k = \frac{\sigma}{4\pi\mu},$$

und an der Oberfläche

$$(2)\qquad P_1 - P_2 = l\sigma u_1 + L\frac{dJ}{dt}.$$

Mit Hülfe der Gleichung

$$J = -C\frac{d(P_1-P_2)}{dt},$$

wo C die Capacität des Condensators, kann man die Gleichung (2) auch in folgende umformen, wenn man

$$\frac{1}{CL} = m^2, \qquad \frac{2\mu l}{aL} = \frac{n}{\sqrt{k}}$$

setzt:

$$(2a)\qquad \left(\frac{d^2}{dt^2} + m^2\right)\left(\frac{du}{d\varrho}\right)_1 + \frac{n}{\sqrt{k}}\frac{d^2u_1}{dt^2} = 0.$$

Der Verf. löst diese Gleichungen für den Fall, dass die Stromdichtigkeit nur in einer im Vergleich zum Radius a des Drahtes sehr geringen Tiefe x unter der Oberfläche einen merklichen Wert hat, in welchem Falle die Gleichungen übergehen in

$$(3)\qquad \frac{du}{dt} = k\frac{d^2u}{dx^2},$$

$$(3a)\qquad \left(\frac{d^2}{dt^2} + m^2\right)\left(\frac{du}{dx}\right)_0 - \frac{n}{\sqrt{k}}\frac{d^2u_0}{dt^2} = 0 \quad \text{für} \quad x = 0.$$

Zu diesem Zweck setzt er

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{2\sqrt{kt}}} e^{-\eta^2} f(x + 2\eta\sqrt{kt})\, d\eta,$$

welcher Ausdruck der Gleichung (3) und der Bedingung $u = 0$ für $t = 0$ genügt, und bestimmt die Function f mittels der Gleichung (3a). Es ergiebt sich, dass der Gesamtstrom J aus zwei oscillatorischen Bewegungen mit abnehmender Amplitude besteht, von denen die eine viel früher erlischt als die andere.

Lbg.

E. Lecher. Eine Studie über elektrische Resonanzerscheinungen. Wien. Ber. XCIX. 340-361; Wiedemann Ann. XLI. 850-870.

1) Gegenüber den Platten A, A' eines etwa 1 m langen Hertz'schen Erregers befinden sich die Platten B, B' des Resonators, von denen zwei parallele Drähte von mindestens 4 m Länge und 10—50 cm Abstand ausgehen; über die dem Erreger abgewandten Enden dieser Drähte ist eine Geissler'sche Röhre ohne Elektroden gelegt, welche in Folge der Potentialdifferenz zwischen den Drahtenden leuchtet. Ueberbrückt man nun die Paralleldrähte an irgend einer Stelle durch einen Draht, so verschwindet das Leuchten, ausser wenn die Brücke an gewissen Stellen aufgelegt ist. An einer solchen Stelle kann man die Drähte durchschneiden und ihre Enden durch eine zweite Brücke verbinden, ohne das Leuchten zu beeinträchtigen; ferner bleibt die Röhre leuchtend, wenn man sie beliebig bis in die Nähe der Brücke verschiebt, wird aber dunkel, wenn man die Drähte hinter der Röhre verkürzt, und wird dann erst beim Zurückschieben der Brücke nach BB' hin wieder leuchtend. Hieraus folgt, dass die Bedingung für das Leuchten der Röhre die ist, dass die zwei in der Brücke zusammenstossenden Drahtkreise, in deren zweitem durch die in der Brücke stattfindende Hauptschwingung eine secundäre Schwingung erzeugt wird, sich in Resonanz befinden müssen.

2) Die Drahtenden werden mit zwei Condensatorplatten verbunden, über welche die Röhre gelegt wird; über zwei benach-

barte Stellen der zwei Drähte, an deren jeder eine Ueberbrückung das Leuchten bewirkt, werden zwei Brücken β, β' gelegt, wodurch das Leuchten ungeändert bleibt; da nun die Mitte jeder Brücke ein Knotenpunkt des Potentials sein muss, so ist die Länge des aus beiden Brücken und den zwischenliegenden Drähten bestehenden Kreises, welche 1964 cm betrug, gleich einer Wellenlänge λ, und die Schwingungsdauer τ ist dieselbe wie in dem aus β' und den zwei Drahtenden bestehenden Kreise. Letztere aber lässt sich berechnen aus dem Selbstpotential der Strombahn, nämlich $L = 2l\left(\log\frac{2l}{\varrho} - \frac{3}{4}\right)$, und aus der Capacität des Condensators $C = \frac{R^2}{4\delta}$, wo R der Radius und δ die Entfernung der Condensatorplatten; es ist nämlich, wenn v die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet,

$$\tau = \frac{2\pi}{v}\sqrt{CL}.$$

Ist also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Draht gleich der in der Luft, so muss $\lambda = 2\pi\sqrt{CL}$ sein, und in der That ergab die Rechnung $2\pi\sqrt{CL} = 2034$ cm, was mit dem obigen Werte $\lambda = 1964$ cm übereinstimmt. Lbg.

M. Planck. Ueber die Erregung von Elektricität und Wärme in Elektrolyten. Wiedemann Ann. XXXIX. 161-186.

Der Verf. betrachtet eine von einem galvanischen Strome durchflossene, ungleichmässig concentrirte Lösung beliebig vieler Elektrolyte, wobei er die Annahme von Nernst (Zeitschr. f. phys. Chemie II), dass schon von Anfang an im Innern keine freie Elektricität auftrete, fallen lässt.

1) Es sei eine ungleichmässig concentrirte wässerige Lösung beliebig vieler binärer Elektrolyte gegeben, welche so verdünnt ist, dass man alle Ionen als dissociirt und also an der Elektricitätsleitung teilnehmend annehmen kann. Für den s^{ten} Elektrolyten bezeichne v_s und v_s' die Beweglichkeit des positiven und negativen Ions (d. h. die durch die mechanische Krafteinheit einem Gramm-Aequivalent — (G-A) — erteilte Geschwindigkeit),

c_s und c'_s die Concentration in irgend einem Punkte (x, y, z), d. h. die Anzahl $(G\text{-}A)$ in der Volumeneinheit, p_s und p'_s den osmotischen Druck, also $p_s = p_0 c_s$, $p'_s = p_0 c'_s$, wo p_0 eine für alle Ionen gleiche Constante ist; ferner φ das elektrostatische Potential, ε die mit $1(G\text{-}A)$ verbundene Elektricitätsmenge. Die osmotische Kraft nach irgend einer Richtung ν auf die Volumeneinheit ist $= -\frac{dp_s}{d\nu}$, die elektrostatische Kraft $= -\varepsilon c_s \frac{d\varphi}{d\nu}$, also die Gesamtkraft auf die Volumeneinheit

$$K_s = -\frac{dp_s}{d\nu} - \varepsilon c_s \frac{d\varphi}{d\nu}.$$

Die dadurch hervorgebrachte Geschwindigkeit ist $w_s = \frac{K_s}{c_s} v_s$, mithin die in der Zeiteinheit durch eine auf ν senkrechte Flächeneinheit gehende Anzahl $(G\text{-}A)$

$$\text{(a)} \qquad N_s = w_s c_s = K_s v_s = -\frac{d}{d\nu}(p_s v_s) - \frac{\varepsilon}{p_0} v_s p_s \frac{d\varphi}{d\nu}.$$

Setzen wir also

$$\text{(1)} \qquad V = \sum_s v_s p_s, \quad V' = \sum_s v'_s p'_s,$$

so ist die Anzahl $(G\text{-}A)$ aller in der Zeiteinheit durch eine auf ν senkrechte Flächeneinheit hindurchgehenden positiven und negativen Ionen (für die in entgegengesetzter Richtung durchgehenden Ionen mit entgegengesetztem Zeichen genommen):

$$\text{(2)} \qquad N_\nu = -\frac{d(V+V')}{d\nu} - \frac{\varepsilon}{p_0}(V-V')\frac{d\varphi}{d\nu},$$

und die Stromdichtigkeit

$$\text{(3)} \qquad u_\nu = -\varepsilon \frac{d(V-V')}{d\nu} - \frac{\varepsilon^2}{p_0}(V+V')\frac{d\varphi}{d\nu}$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{p_0}(V+V')\left[-\frac{d\varphi}{d\nu} - \frac{p_0}{\varepsilon}\frac{1}{V+V'}\frac{d(V-V')}{d\nu}\right].$$

Die Leitungsfähigkeit ist also $\frac{\varepsilon^2}{p_0}(V+V')$, und in Folge der ungleichmässigen Concentration tritt ausser dem Potentialgefälle noch in jedem Punkte eine elektromotorische Kraft

$$E = -\frac{p_0}{\varepsilon}\frac{1}{V+V'}\frac{d(V-V')}{d\nu}$$

auf; im stromlosen Zustande muss also überall ein Potentialgefälle $\frac{d\varphi}{d\nu} = E$ vorhanden sein.

2) Da die in der Zeiteinheit in die Volumeneinheit eintretende Anzahl $(G\text{-}A)$ positiver Ionen der Art s gleich $\frac{dc_s}{dt} = \frac{1}{p_0}\frac{dp_s}{dt}$ ist, so ergeben sich aus Gleichung (a) die Bewegungsgleichungen

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{dp_s}{dt} = p_0 v_s \Delta p_s + \varepsilon v_s \left[\frac{d}{dx}\left(p_s \frac{d\varphi}{dx}\right) + \cdots\right], \\ \frac{dp'_s}{dt} = p_0 v'_s \Delta p'_s - \varepsilon v'_s \left[\frac{d}{dx}\left(p'_s \frac{d\varphi}{dx}\right) + \cdots\right]. \end{cases}$$

Misst man φ und die Dichtigkeit ϱ der freien Elektricität in magnetischem Mass, wodurch $\varepsilon = 9628$ wird, und bezeichnet mit φ_σ und ϱ_σ die Werte in elektrostatischem Mass, mit K die Dielektricitätsconstante des Wassers in elektrostatischem Mass $(=80$ nach Cohn), so ist

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{p_0}\Sigma(p_s - p'_s), \quad K\Delta\varphi_\sigma = -4\pi\varrho_\sigma,$$

oder da $\frac{\varrho_\sigma}{\varrho} = \frac{\varphi}{\varphi_\sigma} = \varkappa (= 3.10^{10})$ ist,

$$(b) \quad K\Delta\varphi = -4\pi\varkappa^2\varrho = -\frac{4\pi\varkappa^2\varepsilon}{p_0}\Sigma(p_s - p'_s),$$

mithin nach Gleichung (4):

$$(5) \quad -\frac{K}{4\pi\varkappa^2\varepsilon}\frac{d\Delta\varphi}{dt} = \Delta(V - V') + \frac{\varepsilon}{p_0}\left[\frac{d}{dx}\left((V+V')\frac{d\varphi}{dx}\right) + \cdots\right].$$

Sind also für einen bestimmten Anfangszustand die p_s und φ bekannt, so ergiebt sich für den folgenden Augenblick φ aus Gleichung (5), die p_s aus Gleichung (4) etc. Wegen des grossen Wertes von $\varkappa^2$ ändert sich φ ungemein rasch, d. h. das System ladet sich fast momentan mit freier Elektricität; während dieses „Ladungsvorgangs" kann man in Gleichung (5) die Concentrationen als unveränderlich ansehen. Dann folgt der langsam verlaufende „Diffusionsvorgang", während dessen φ beständig der Gleichung (5), worin die linke Seite Null zu setzen ist, genügt, d. h. der

Gleichung

$$(5a)\quad \Delta(V-V')+\frac{s}{p_0}\left[\frac{d}{dx}\left((V+V')\frac{d\varphi}{dx}\right)+\cdots\right]=0;$$

daraus folgt für einen beliebigen Raum mit der Oberfläche σ und der Normale ν

$$\int\left[\frac{p_0}{s}\,\frac{d(V-V')}{d\nu}+(V+V')\frac{d\varphi}{d\nu}\right]d\sigma=0,$$

d. h. nach Gleichung (3) $\int u_\nu\, d\sigma=0$; also in einen geschlossenen Raum strömt im ganzen keine Elektricität ein noch aus. Ferner ist $\varrho=-\frac{K}{4\pi\varkappa^2}\Delta\varphi$ immer sehr klein, aus Gleichung (b) folgt also mit grosser Annäherung

$$\Sigma p_s=\Sigma p_s' \quad \text{oder} \quad \Sigma c_s=\Sigma c_s'.$$

Durch die Gleichung (5a) und durch die von aussen eintretenden Ströme, d. h. nach Gleichung (3) durch die Werte von $\frac{d\varphi}{d\nu}$ an der Oberfläche, ist bei gegebener Zusammensetzung der Lösung φ bis auf eine additive Constante bestimmt; da nun die Gleichungen (3), (4), (5a) ungeändert bleiben, wenn man alle p_s und den Wert von u_ν an der Oberfläche mit einem Factor n multiplicirt, dagegen φ ungeändert lässt, so bleibt durch jene Aenderung φ ungeändert, was ein von Nernst aufgestellter Satz ist.

3) Wärmeentwickelung. Die Energie der freien Elektricität ist verschwindend klein, da sie

$$\int\varrho\varphi\, d\tau=-\frac{K}{4\pi\varkappa^2}\int\varphi\Delta\varphi\, d\tau$$

ist. Die potentielle moleculare Energie sowie die elektromoleculare Energie ist Null, da die Ionen dissociirt sind und ihre Ladung beibehalten; und auch die kinetische Energie kann man vernachlässigen. Daher ist der Energiezuwachs in irgend einem Raumteile τ gleich der erzeugten Wärme; andererseits ist er gleich der von aussen in den Raum eingeführten Arbeit. Die eingeführte elektrische Arbeit ist gleich der durchgegangenen Elektricitäts-

menge, multiplicirt mit ihrem Potential-Abfalle, also, wenn ν die innere Normale der Oberfläche des Raumes bezeichnet,

$$= \int u_\nu \varphi d\sigma.$$

Die durch $d\sigma$ eintretende Druckarbeit A ist gleich dem Druck mal der Volumenverminderung; letztere ist für irgend eine Art von Ionen $= w_s d\sigma$, wo w_s die Geschwindigkeit, also nach Gleichung (a) die Arbeit $A_s = p_s w_s d\sigma = p_0 N_s d\sigma$, mithin für alle Ionen $A = p_0 N_\nu d\sigma$. Folglich ist die erzeugte Wärme

$$(6) \qquad W = \int (\varphi u_\nu + p_0 N_\nu) d\sigma.$$

Sie besteht also aus der durch die durchgehenden Ströme und aus der durch die Bewegung der Materie erzeugten; letztere ist dieselbe, als wenn jedes $(G\text{-}A)$ der positiven und negativen Ionen eine Wärmemenge p_0 mit sich führte.

4) Sind alle Grössen bloss von x abhängig, so gehen die Gleichungen (5a) und (3) über in

$$(5\text{b}) \qquad f(t) = \frac{p_0}{\varepsilon} \frac{d(V-V')}{dx} + (V+V') \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{p_0}{\varepsilon^2} u_x,$$

die Stromdichtigkeit u_x ist also eine blosse Function der Zeit, z. B. constant, wenn ein constanter Strom durch die Lösung geschickt wird. Ist ausserdem nur ein einziger Elektrolyt vorhanden, so geht diese Gleichung über in

$$-\frac{d\varphi}{dx} = \frac{p_0}{\varepsilon} \frac{v-v'}{v+v'} \frac{d \log p}{dx} + \frac{p_0}{\varepsilon^2 (v+v')} \frac{1}{p} u_x,$$

und die zwei Gleichungen (4) reduciren sich auf die von dem durchgehenden Strome unabhängige Diffusions-Gleichung

$$\frac{dp}{dt} = \frac{2vv'}{v+v'} p_0 \frac{d^2 p}{dx^2}.$$

Der Verf. wendet diese Gleichung auf den Fall zweier sich berührenden Lösungen desselben Elektrolyten von anfangs gleichmässiger Concentration an, durch welche ein Strom geht.

Lbg.

M. Planck. Ueber die Potentialdifferenz zwischen zwei verdünnten Lösungen binärer Elektrolyte. Wiedemann Ann. XL. 561-576.

Unter Beibehaltung der Bezeichnungen der vorhergehenden Abhandlung werden statt der osmotischen Drucke p_s die Concentrationen $c_s = \frac{p_s}{p_0}$ eingeführt, und die Gesamtconcentration wird gesetzt:

$$c = \Sigma c_s = \Sigma c_s';$$

ein Strom soll nicht durch die Flüssigkeit hindurchgehen. Die dortige Gleichung (5b) lässt sich nicht zur Berechnung der Potentialdifferenz an der Grenze zweier verschieden zusammengesetzten Lösungen, z. B. zweier verschiedenen Elektrolyte, anwenden, da sie die c_s als continuirliche Functionen von x voraussetzt. Der Verf. nimmt daher eine Grenzschicht von der sehr kleinen Dicke δ an, in welcher die $\frac{dc_s}{dx}$ und $\frac{d\varphi}{dx}$ sehr grosse, aber endliche Werte haben; nach Gleichung (4) sind hier auch die $\frac{dc_s}{dt}$ sehr gross, es tritt also sehr schnell ein — der Beobachtung allein zugänglicher — Zustand ein, in welchem die $\frac{dc_s}{dt}$ endliche Werte haben, welche gegen die $\frac{dc_s}{dx}$ vernachlässigt werden können. In diesem annähernd stationären Zustande gehen die Gleichungen (4) von $x = 0$ bis $x = \delta$, indem wir mit A_s, A_s' von t abhängige Integrationsconstanten bezeichnen, über in

$$(1) \quad p_0 \frac{dc_s}{dx} + \varepsilon c_s \frac{d\varphi}{dx} = A_s, \quad p_0 \frac{dc_s'}{dx} - \varepsilon c_s' \frac{d\varphi}{dx} = A_s'.$$

Daraus folgt, wenn wir $\Sigma A_s = A$, $\Sigma A_s' = A'$ setzen,

$$(2) \quad A = p_0 \frac{dc}{dx} + \varepsilon c \frac{d\varphi}{dx}, \quad A' = p_0 \frac{dc}{dx} - \varepsilon c \frac{d\varphi}{dx},$$

$$A + A' = 2p_0 \frac{dc}{dx},$$

also

$$(3) \quad c = \frac{A + A'}{2p_0} x + C = \frac{c_2 - c_1}{\delta} x + c_1,$$

wo c_1 und c_2 die Gesamtconcentrationen für $x = 0$ und $x = \delta$ bezeichnen. Ferner folgt aus Gleichung (2)

$$(4) \qquad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{A - A'}{2\varepsilon c} = \frac{1}{2\varepsilon}\,\frac{(A - A')\,\delta}{(c_2 - c_1)x + \delta c_1},$$

$$(5) \qquad \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{(A - A')\delta}{2\varepsilon(c_2 - c_1)} \log \frac{c_2}{c_1} = \frac{p_0}{\varepsilon} \log \xi,$$

wo

$$\xi = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{\frac{(A - A')\delta}{2p_0(c_2 - c_1)}}.$$

Setzt man $V = \Sigma v_s c_s$, $V' = \Sigma v_s' c_s'$, so folgt aus Gleichung (1)

$$\Sigma v_s A_s - \Sigma v_s' A_s' = p_0 \frac{d(V - V')}{dx} + \varepsilon(V + V')\frac{d\varphi}{dx} = 0$$

nach Gleichung (5b) der vorhergehenden Abhandlung; setzt man also

$$\Sigma v_s A_s = \Sigma v_s' A_s' = C,$$

so folgt aus den Gleichungen (1)

$$(6) \qquad p_0 \frac{dV}{dx} + \varepsilon V \frac{d\varphi}{dx} = C, \quad p_0 \frac{dV'}{dx} - \varepsilon V' \frac{d\varphi}{dx} = C.$$

Setzt man in der ersten dieser Gleichungen den Wert von $\frac{d\varphi}{dx}$ aus (4) ein, so lässt sich dieselbe leicht integriren, und aus den Gleichungen für die Werte V_1 und V_2 für $x = 0$ und $x = \delta$ lässt sich die Integrationsconstante eliminiren; verfährt man ebenso mit der zweiten Gleichung (6), setzt $\frac{c_2}{c_1} = k$ und drückt $(A - A')\delta$ durch ξ aus, so ergiebt sich schliesslich

$$(7) \qquad \frac{V_2 \xi - V_1}{V_2' - V_1' \xi} = \frac{k\xi - 1}{k - \xi}\,\frac{\log k - \log \xi}{\log k + \log \xi},$$

aus welcher Gleichung ξ zu bestimmen und in Gleichung (5) einzusetzen ist. In dem speciellen Falle zweier verschieden concentrirten Lösungen eines einzigen Elektrolyten wird

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_2'}{V_1'} = k,$$

und Gleichung (7) geht über in

$$\log \xi = \frac{v' - v}{v' + v} \log k,$$

also Gleichung (5) in die bekannte Gleichung

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{p_0}{s} \frac{v' - v}{v' + v} \log \frac{c_2}{c_1}.$$

Lbg.

F. Richarz. Ueber die galvanische Polarisation von Platinelektroden in verdünnter Schwefelsäure bei grosser Stromdichtigkeit. Wiedemann Ann. XXXIX. 68-88, 201-235.

1) Bei so kleinen Elektroden, wie sie der Verf. benutzte, ist die Ohm'sche Methode der Einschaltung eines Widerstandes nicht anwendbar, weil die elektromotorische Kraft und der Widerstand nicht constant sind, wovon sich der Verf. auch durch die Beobachtung überzeugte. Namentlich der Widerstand der Zersetzungszelle nimmt mit wachsender Intensität bedeutend ab, einmal wegen der starken Erwärmung der Flüssigkeit um die Elektroden, welche bis zum Sieden gehen und ein auch schon von andern Physikern beobachtetes Leidenfrost'sches Phänomen hervorbringen kann; ferner in Folge der bei grösserer Intensität vermehrten Leichtigkeit der Gasentwickelung; endlich in Folge der Arbeitsleistung der Diffusion aus den gesättigten Schichten um die Elektroden nach den ferneren, ungesättigten hin.

2) Der Verf. wendet folgende Methode an. Im Nebenschluss des die Zersetzungszelle enthaltenden Hauptkreises befindet sich ein Galvanometer mit einem im Vergleich zu dem der Hauptleitung sehr grossen Widerstande, sodass anfangs nur ein ganz schwacher Strom durch das Galvanometer geht; in einem bestimmten Moment öffnet ein Helmholtz'scher Pendelunterbrecher den Zweig zwischen Hauptleitung und Galvanometerleitung und unterbricht nach einer sehr kurzen Zeit τ auch die Galvanometerleitung. Ist während der Zeit τ nun i der Strom, A die elektromotorische Kraft im Hauptkreise, P der Selbstinductions-Coefficient des Galvanometers, W der Widerstand der ganzen Leitung gleich dem des Galvanometers, so ist

$$A = Wi + P\frac{di}{dt},$$

woraus, wenn i_0 den schwachen Strom im Galvanometer zu Beginn der Zeit τ bezeichnet,

$$\int_0^\tau A\,dt = W\left[\int_0^\tau i\,dt + \frac{P}{W}(i_\tau - i_0)\right] = W\int_0^\tau i\,dt,$$

mit Vernachlässigung des kleinen Wertes von $\frac{P}{W}$. Bezeichnet man mit H, H', H'' die Werte von $\int_0^\tau i\,dt$, wenn sich im Hauptkreis einmal die Batterie E nebst der Zersetzungszelle, dann die Batterie allein, dann ein Normalelement N befindet, so ist

$$WH = \int_0^\tau (E-p)\,dt, \quad WH' = E\tau, \quad WH'' = N\tau,$$

woraus

$$(1) \qquad \frac{1}{N\tau}\int_0^\tau p\,dt = \frac{H'-H}{H''}.$$

H, H', H'' wurden in der gewöhnlichen Weise aus dem Stromstosse des Galvanometers bestimmt; die Beobachtung ergab dann den der Zeit τ entsprechenden Mittelwert der Polarisation, welche rasch abfällt. Aus diesen Mittelwerten für verschiedene Zeitintervalle τ (0,008 bis 0,0006 Sec.) lässt sich unter Voraussetzung eines linearen Abfalls von p während der Zeit τ der Anfangswert p_0 berechnen; derselbe ergab sich nicht höher als etwa 2,5 *D*. Lbg.

F. Streintz und G. Neumann. Beiträge zur Theorie des Secundärelements. Zweite Mitteilung. Wiedemann Ann. XLI. 97-112.

Um das elektromotorische Verhalten der verschiedenen Bleiverbindungen, welche im Secundärelement möglicherweise in Wirksamkeit treten können (die verschiedenen Oxydationsstufen und das Sulfat) zu prüfen, wurde die betreffende Substanz S in zwei Glasröhren eingepresst, von denen die eine mit einer Platin-, die andere mit einer Blei-Elektrode versehen war, und die eine oder andere Elektrode mit dem einen Quadrantenpaare eines Elektrometers, die in Schwefelsäure stehende Zinkplatte eines

anderen Gefässes mit dem zweiten Quadrantenpaare verbunden; die Substanz und die Schwefelsäure standen durch einen mit Schwefelsäure getränkten Wollfaden mit einander in Verbindung. Der Unterschied der zwei Potentialdifferenzen des Elektrometers, wenn einmal die Platinelektrode, das andere Mal die Bleielektrode angewandt wird, ist dann

$$(Pb, Pt)+(Pt, S)+(S, Pb);$$

ist dies Null, so gehorcht die Substanz S dem Spannungsgesetze, leitet also metallisch. Dies fand nur bei dem Superoxyd statt, während sich bei allen andern Substanzen elektrolytische Leitung zeigte. Weitere Versuche mit einer reinen oder durch Liegen an der Luft mit Suboxyd bedeckten Bleiplatte in Schwefelsäure, combinirt mit einer Zinkplatte, führten zu dem Schluss, dass nach vollendeter Ladung des Secundärelements die Oberfläche der positiven Platte aus reinem Superoxyd, die der negativen aus Blei mit absorbirtem Wasserstoff besteht, und dass bei der Entladung die Oberfläche der negativen Platte zunächst in Sulfat, dann teilweise in Superoxyd übergeht, das Superoxyd der positiven Platte oberflächlich in Sulfat. Lbg.

A. Heydweiller. Ueber die galvanische Ausmessung langer Drahtspulen. Wiedemann Ann. XLI. 876-888.

Die Abhandlung enthält eine Modification der von Kohlrausch angegebenen Methode, durch welche dieselbe auch für beliebig lange Spulen brauchbar wird. Es werden die Drehungsmomente der Spule auf eine Tangentenbussole in der ersten oder zweiten Hauptlage beobachtet, wenn die Spule und die Bussole von demselben Strom einmal in gleicher, dann in entgegengesetzter Richtung durchflossen werden, und zwar bei zwei verschiedenen Entfernungen; daraus ergiebt sich die Länge und der Windungsradius der Spule. Lbg.

W. G. Hankel. Die galvanische Kette. Wiedemann Ann. XXXIX. 369-389; Leipz. Ber. XLI. 378-399.

Schon in F. d. M. XXI. 1889. 1142 besprochen.

Lbg.

TH. LIEBISCH. Ueber thermoelektrische Ströme in Krystallen. Wiedemann Ann. XXXIX. 390-394; Gött. Nachr. 1889. 531-535.

Siehe F. d. M. XXI. 1889. 1176. Lbg.

E. WARBURG. Zur Theorie der galvanischen Polarisation, insbesondere der capillar-elektrischen Erscheinungen. Wiedemann Ann. XLI. 1-17.

1) Ein Elektrolyt, z. B. Schwefelsäure, befinde sich zwischen zwei Quecksilber-Elektroden, einer H_0 mit sehr grosser, unveränderlicher Oberfläche, einer H mit kleiner, veränderlicher Oberfläche s; zwischen ihnen werde durch eine äussere elektromotorische Kraft eine beliebige Potentialdifferenz $V_0-V=y$ aufrecht erhalten; nach einem kurzen Strome tritt dann ein elektrischer Gleichgewichtszustand ein, in welchem die äussere Potentialdifferenz durch eine elektromotorische Kraft der Polarisation aufgehoben wird. Nach der Theorie von Helmholtz entsteht diese Polarisation dadurch, dass der polarisirende Strom ein Ladungsstrom ist, d. h. dass die Ionen, ohne ihre Ladung abzugeben, die Dichtigkeit ϱ der elektrischen Doppelschicht an H ändern, indem, wenn q die von H_0 nach H gegangene Elektricitätsmenge bezeichnet, $dq=-d(\varrho s)$ ist. Bezeichnet nun σ die Oberflächenspannung auf H, so ist die bei der umkehrbaren Zustandsänderung aufzuwendende freie Energie, d. h. Arbeit gegen äussere Kräfte, indem man den Zustand des Systems durch die unabhängigen Variabeln y und s bestimmt annimmt,

$$(1)\qquad dW = ydq+\sigma ds = (\sigma-y\varrho)ds - sy\frac{d\varrho}{dy}dy,$$

woraus, da dW ein vollständiges Differential ist, $\varrho=\dfrac{d\sigma}{dy}$ folgt. Für das Maximum von σ ist also $\varrho=0$, mithin die Potentialdifferenz an H, wenn F das Potential in der Flüssigkeit bezeichnet, $V-F=4\pi\delta\varrho=0$, mithin $y=V_0-F=$ der natürlichen Potentialdifferenz.

2) Der Verf. stellt eine andere Theorie auf; danach ist der

polarisirende Strom ein Leitungsstrom, d. h. die Ionen werden an den Elektroden elektrolytisch, also unelektrisch, abgeschieden, verändern aber hier selbst die Potentialdifferenz, indem sie die Concentration der Flüssigkeit an den Elektroden, welche nach früheren Beobachtungen des Verf. Quecksilbersalz enthält, ändern. Die Flüssigkeit vom Volumen v enthalte Quecksilbersalz in gleichförmiger Dichtigkeit γ, ausserdem aber auf H eine Uebergangsschicht, in welcher das Salz die Flächendichte c hat; die ganze veränderliche Masse des Salzes ist also, da an H_0 wegen der grossen Oberfläche c_0 und s_0 als constant angenommen werden können,

$$(2) \qquad M = v\gamma + sc.$$

Vor Eintritt der Polarisation ist c eine blosse Function von γ; um dieselbe zu bestimmen, denken wir uns eine Quecksilbermasse in der Flüssigkeit, ferner γ und s unabhängig von einander veränderlich. Ist Fdm die aufzuwendende Arbeit, um die Salzmenge dm aus einem bestimmten Normalzustande in die Flüssigkeit überzuführen und gleichmässig zu verteilen, so ist die für die umkehrbare Zustandsänderung $(d\gamma, ds)$ aufzuwendende Arbeit

$$dW = FdM + \sigma ds = \left(vF + sF\frac{dc}{d\gamma}\right)d\gamma + (Fc + \sigma)ds,$$

woraus, da dW ein vollständiges Differential und v, c sowie die freie Energie F der Lösung blosse Functionen von γ sind,

$$(3) \qquad c\frac{dF}{d\gamma} = -\frac{d\sigma}{d\gamma}.$$

Es mögen nun nach dieser Gleichung im Gleichgewichtszustande zwei Werten γ_0, γ die Werte c_0, c entsprechen, und es werde beim Zustand (γ_0, c) eine Salzmenge δm auf umkehrbarem Wege bei constanter Temperatur und Druck von der Oberfläche des Quecksilbers ins Innere der Flüssigkeit gebracht. Um die dazu nötige Arbeit zu berechnen, werde zuerst, während c ungeändert bleibt, γ_0 auf γ gebracht, wozu, wenn m_0 und m die γ_0 und γ entsprechenden Salzmengen sind, die Arbeit $\int_{m_0}^{m} Fdm$ nötig ist. Dann werde δm von der Oberfläche ins Innere gebracht, was wegen des Gleichgewichtszustandes (γ, c) eine umkehrbare Zu-

standsänderung ist und die Arbeit $p\frac{dv}{dm}\delta m$ erfordert. Schliesslich werde die Masse $m+\delta m$ auf $m_0+\delta m$ gebracht, wozu die Arbeit $\int_{m+\delta m}^{m_0+\delta m} F dm$ nötig ist. Die ganze Arbeit ist also

$$(4)\qquad A=\int_{m_0}^{m} F dm+\int_{m+\delta m}^{m_0+\delta m} F dm+p\frac{dv}{dm}\delta m=\left(F_0-F+p\frac{dv}{dm}\right)\delta m.$$

3) Sind nun anfangs H_0 und H leitend verbunden, sodass an beiden der natürliche Zustand (γ_0, c_0) herrscht, und geht in Folge Einschaltung der elektromotorischen Kraft y ein Leitungsstrom von H_0 nach H, so wird an H durch den ausgeschiedenen Wasserstoff Salz zersetzt und Quecksilber ausgeschieden, wodurch c_0 in c übergeht; an H_0 wird Schwefelsäure ausgeschieden und Salz gebildet, wobei wegen der grossen Oberfläche c_0 sich nicht merklich ändert; die Zustandsänderung besteht also darin, dass von der Oberfläche von H auf die von H_0 Salz übergeführt wird. Während die Elektricitätsmenge dq von H_0 nach H und die Salzmenge αdq, wo α das elektrochemische Aequivalent des Salzes, von H nach H_0 übergeht, denken wir uns diese Zustandsänderung so bewirkt, dass die Salzmenge αdq bei H, wo der Zustand (γ_0, c) herrscht, von der Oberfläche ins Innere, und bei H_0, wo der Gleichgewichtszustand (γ_0, c_0) herrscht, aus dem Innern auf die Oberfläche gebracht wird; die dazu nötige Arbeit ist nach Gleichung (4)

$$dW=\left(F_0-F+p\frac{dv}{dm}\right)\alpha dq-p\frac{dv}{dm}\alpha dq=(F_0-F)\alpha dq,$$

während nach Gleichung (1) $dW=y dq$ ist; die Potentialdifferenz, welche der Polarisation das Gleichgewicht hält, ist folglich

$$(5)\qquad y=\alpha[F(\gamma_0)-F(\gamma)],$$

wo γ_0 und γ die den Flächendichtigkeiten c_0 und c beim Gleichgewicht entsprechenden Raumdichtigkeiten sind. Aus den Gleichungen (5) und (3) folgt

$$\frac{dy}{d\gamma}=-\alpha\frac{dF(\gamma)}{d\gamma}=\frac{\alpha}{c}\frac{d\sigma}{d\gamma},$$

oder

$$(6) \qquad \frac{d\sigma}{dy} = \frac{c}{\alpha}.$$

Setzt man nach Lippmann $\frac{d^2\sigma}{dy^2} = \text{Const.} = -\lambda$, so folgt aus Gleichung (6) $c_0 - c = \alpha\lambda y$, und für das Maximum von σ, wo $c = 0$ ist, $c_0 = \alpha\lambda y_m$. Lbg.

A. Sokoloff. Zur Theorie der Polarisationsströme.
Arbeiten der phys. Section der Kaiserlichen Gesellschaft für Freunde der Naturkunde. Moskau. III. Hft. 2. 22-43. (1890.) (Russisch.)

Der Verfasser giebt eine kurze Uebersicht über den gegenwärtigen Zustand der Frage nach der Polarisation der Elektroden, gedenkt des Versuchs Witkowsky's, eine mathematische Theorie der Polarisationsströme zu geben, und führt die von diesem Gelehrten gefundenen empirischen Formeln für die Intensität des Stromes der Polarisation und Depolarisation im Verhältnis zur Zeit an. Danach legt der Verf. seine eigene Theorie der Polarisation dar und wendet sie auf die folgenden drei Fälle an: 1) wenn nur auf einer Elektrode Gas entwickelt wird, 2) wenn beide Elektroden Gas entwickeln, und 3) wenn auf der einen Elektrode Gas entwickelt, auf der anderen ein fester Elektrolyt ausgeschieden wird.

Herr Sokoloff stellt sich das Voltameter als ein Paar cylindrischer, durch eine enge Röhre verbundener Gefässe vor, auf deren Böden sich runde Platten befinden, welche die ganze Fläche der Basis einnehmen und als Elektroden dienen; sowohl die unteren Flächen der Platten als auch die an denselben festgelöteten Drähte der Leiter sind mit einer isolirenden Schicht bedeckt. Die auf jeder der Elektroden sich entwickelnden Gase diffundiren nach oben durch die über der Elektrode sich befindende Flüssigkeitssäule und steigen dann von der Oberfläche der Flüssigkeit in die Luft.

Setzt man voraus, dass die Diffusion des Gases nach den Gesetzen der Wärmeleitung vorgeht, und dass die elektromotorische Kraft der Polarisation proportional der Dichtigkeit $\bar{\varrho}$

des sich auf der Oberfläche ausscheidenden Gases ist; nennt man ϱ die Dichtigkeit des Gases in anderen Schichten der Flüssigkeit, E die elektromotorische Kraft der Batterie, r den Widerstand der Kette, i die Intensität des vollen Stromes, a die Constante der Diffusion, und richtet man die positive z-Axe vom Boden des Gefässes nach oben, so erhält man mit dem Verf. die folgenden Gleichungen für den ersten Fall:

$$\frac{d\varrho}{dt} = a^2 \frac{d^2\varrho}{dz^2}, \quad E - p\bar{\varrho} = ir$$

(wo p die Constante der Polarisation bedeutet). Ausserdem muss auf der freien Oberfläche der Flüssigkeit, also wenn $z = l$ ist, $\varrho = 0$ sein und beim Beginn des Experiments, wenn $t = 0$, überall $\varrho = 0$ sein.

Der Verf. löst diese Gleichungen und leitet für ϱ, $\bar{\varrho}$, i Ausdrücke in der Gestalt unendlicher Reihen ab. Nimmt man aber die Constante der Diffusion a^2 als unendlich klein an, so erhält man folgende Ausdrücke für $\bar{\varrho}$ und i:

$$\bar{\varrho} = \frac{E}{p}\left(1 - \frac{2ba}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha^2 t}}{\alpha^2 + b^2 a^2} d\alpha\right),$$

$$i = \frac{E}{p}\frac{a^2 s}{\gamma}\left(\frac{1}{l} + \frac{2b^2 a}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha^2 t}}{\alpha^2 + b^2 a^2} d\alpha\right),$$

wo s die Fläche der Elektrode, γ das elektrochemische Aequivalent des sich entwickelnden Gases und

$$b = \frac{\mu}{a^2}, \quad \mu = \frac{p\gamma}{rs}$$

ist.

Die hier vorkommenden Integrale können durch das Integral

$$\Theta(u) = \int_0^u e^{-u^2} du$$

ausgedrückt werden, so dass $\bar{\varrho}$ und i sich in folgender Weise darstellen lassen:

$$\bar{\varrho} = \frac{E}{p}\left\{1 - e^{\frac{\mu^2}{a^2}t}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\Theta\left(\frac{\mu}{a}\sqrt{t}\right)\right)\right\},$$

$$i = \frac{E}{\mu r}\left\{\frac{a^2}{l} + \mu e^{\frac{\mu^2}{a^2}t}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\Theta\left(\frac{\mu}{a}\sqrt{t}\right)\right)\right\}.$$

In den ersten Augenblicken der Polarisation, so lange die Grösse $\frac{\mu}{a}\sqrt{t}$ noch so klein ist, dass ihre fünften und höheren Potenzen verachlässigt werden können, erhält man für $\bar{\varrho}$ und i folgende angenäherte Ausdrücke:

$$\bar{\varrho} = \frac{E\mu}{ap}\sqrt{t}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} + \frac{\mu}{a}\sqrt{t}\right),$$

$$i = \frac{Ea^2}{\mu r l} + \frac{E}{r}\left(1 - \frac{2\mu\sqrt{t}}{a\sqrt{\pi}}\right);$$

das heisst also, dass in den ersten Augenblicken die Dichtigkeit des Gases proportional $\sqrt{t}$ wächst, die Stromstärke aber proportional derselben Grösse abnimmt.

Bei genügend grossem t, wenn $\frac{\mu}{a}\sqrt{t}$ wegen des geringen Wertes von a sehr gross wird, können $\bar{\varrho}$ und i näherungsweise so dargestellt werden:

$$\bar{\varrho} = \frac{E}{p}\left\{1 - \frac{a\sqrt{\pi}}{\mu\sqrt{t}}\left(1 - \frac{a^2}{2\mu^2 t}\right)\right\},$$

$$i = \frac{E}{\mu r}\left\{\frac{a^2}{l} + \frac{a\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}}\left(1 - \frac{a^2}{2\mu^2 t}\right)\right\},$$

d. h $\bar{\varrho}$ und i sind schon umgekehrt proportional $\sqrt{t}$, und da das Product μr von r unabhängig ist, so hängen die beiden ersten Glieder im Ausdrucke für i von dem Widerstande der Kette nicht ab.

Wird das dritte Glied im Ausdrucke für i vernachlässigt, so ergiebt sich die Formel von Witkowsky.

Bei der Behandlung der Fälle der zweiten Art, wenn also Gas an beiden Elektroden entwickelt wird, gelangt der Verf. zu Lösungen, die derjenigen der Fälle erster Art analog sind. In Fällen der dritten Art, wenn auf einer der Elektroden ein fester Elektrolyt ausgeschieden wird, findet der Verf., dass in den ersten Augenblicken nach dem Schliessen des Stromes die Dichtigkeit $\bar{\varrho}$ des Gases und die Oberflächendichte des festen Elektrolyten mit $\sqrt{t}$ proportional wachsen, die Stromstärke i aber pro-

portional derselben Wurzel abnimmt; ist t sehr gross gegen $\frac{1}{a^2}$, so nimmt die Dichtigkeit $\bar{\varrho}$ des Gases umgekehrt proportional mit $\sqrt{t}$ ab, die Oberflächendichte des festen Elektrolyten wächst nach demselben Gesetze, die Stromstärke nimmt aber umgekehrt proportional zu $\sqrt{t^3}$ ab, so dass $\bar{\varrho}$ und i zu verschwinden streben, die Dichtigkeit des Elektrolyten aber gegen einen bestimmten Grenzwert convergirt. Bb.

S. Swetowidoff. Ueber die hydrodynamischen Analogien des Magnetismus und der Elektricität. Arbeiten der phys. Section der Kaiserlichen Gesellschaft für Freunde der Naturkunde. Moskau. III. Hft. 1. 84-89. (Russisch.)

S. Swetowidoff. Entwurf der kinetischen Hypothese der Elektricität und des Magnetismus. Arbeiten der VIII. Versammlung der russischen Naturforscher und Aerzte. 1890. St. Petersburg. Physik. 20-23. (Russisch.)

Hier wird bewiesen: 1) dass derjenige Zustand des intermolecularen Mittels, welcher nach Maxwell's Untersuchungen für die Erklärung der Fernwirkungen von Magneten genügt, der Existenz einer Strömung zugeschrieben werden kann, welche im Aether, als einer Flüssigkeit, stattfindet, und der das Geschwindigkeitspotential $\varphi = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varrho}} P$ entspricht, wo P das Potential der magnetischen Kräfte und ϱ die Dichtigkeit der Flüssigkeit bedeuten; 2) dass man sich theoretisch eine solche Strömung im Raume zwischen den elektrisirten Leitern vorstellen kann, dass die ihr entsprechenden Wirbelfäden mit den Kraftlinien des elektrostatischen Feldes zusammenfallen. Bb.

W. Stschegljajew. Zur Frage über die Veränderung des Widerstandes im magnetischen Felde. Arbeiten der phys. Section der Kaiserl. Gesellschaft für Freunde der Naturkunde. Moskau. III. Hft. 2. 4-9. (Russisch.)

Der Verf. geht von den bei Maxwell im Treatise on electricity and magnetism angeführten Relationen zwischen den elastischen Spannungen und den Componenten der magnetischen Induction, der magnetischen Kraft und des Stromes aus und zeigt, dass bei dem Magnetisiren in der Stromrichtung der Widerstand des Leiters wächst, dagegen bei dem Magnetisiren senkrecht zur Richtung des Stromes proportional dem Quadrate der magnetisirenden Kraft abnimmt. Indem der Verf. weiter die Componenten der elektrischen Verschiebung in Betracht zieht, beweist er die Existenz der elektromotorischen Kräfte, welche Hall's Phaenomen hervorbringen. Bb.

Ulbricht. Ueber einige wichtige elektrische Erscheinungen und ihre mechanische Deutung. Civiling. XXXVI. 318-321.

Der Vortrag beschäftigt sich mit dem Vergleich elektrischer und hydrodynamischer Erscheinungen. Es wird z. B. die Formel

$$J = \frac{E}{W}$$

verglichen mit den Formeln, welche für den Durchfluss durch eine mit porösem Material gefüllte Röhre gelten. Des weiteren vergleicht der Verf. die Formel für die Entladung des Condensators mit den Schwingungen einer Flüssigkeit in communicirenden Gefässen. F. K.

Sir W. Thomson. On the time-integral of a transient electromagnetically induced current. Phil. Mag. (5) XXIX. 276-280.

Der Verf. entwickelt im Texte die Ansicht, dass das Zeitintegral des Schliessungsstromes grösser sein müsse als das des Oeffnungsstromes, nimmt indessen dieselbe in einer Nachschrift zurück. Ist nämlich w' der Widerstand und L' der Selbstinductions-Coefficient des secundären Kreises, M der gegenseitige Inductions-Coefficient, i' die inducirte Stromstärke, so ist

$$w'i' = -M\frac{di}{dt} - L'\frac{di'}{dt}.$$

Ist nach der Zeit τ also i constant und $i' = 0$ geworden, so würde, wenn w' constant wäre,

$$(1) \quad w' \int_0^\tau i' dt = M(i_0 - i_\tau),$$

also für beide Ströme gleich $\pm M i_\tau$ sein. Diese Annahme aber hielt der Verf. ursprünglich nicht für richtig, da der Schliessungsstrom langsamer verlaufe, sich daher in grössere Tiefe erstrecke und folglich für ihn w' einen mit der Zeit veränderlichen und im Mittel kleineren Wert habe als beim Oeffnungsstrome. In der Nachschrift dagegen rechtfertigt er die gewöhnlich angenommene Gleichung (1) folgendermassen. Denken wir uns den secundären Strom in einzelne Stromfäden von dem Querschnitte dq', dem Widerstande $\frac{l'}{\sigma' dq'}$ und der Stromdichtigkeit u' zerlegt, so ist für irgend einen dieser Stromfäden, für den statt M der Wert μ gilt,

$$\frac{l'}{\sigma'} u' = -\mu \frac{di}{dt} - L' dq' \frac{du'}{dt} - S,$$

wo S die elektromotorische Kraft der Stromschwankungen aller übrigen Stromfäden bezeichnet. Da nun

$$\int_0^\tau \frac{du'}{dt} dt = 0, \quad \int S dt = 0,$$

so folgt

$$\frac{l'}{\sigma'} \int_0^\tau u' dt = \mu(i_0 - i_\tau),$$

was wieder die Gleichung (1) giebt. Lbg.

J. J. Thomson. On the passage of electricity through hot gases. Phil. Mag. (5) XXIX. 358-366, 441-449.

1) Der Verf. geht von der Annahme aus, dass der Durchgang der Elektricität durch ein Gas auf einer Spaltung seiner Molecüle in Atome beruhe, welche ihre entgegengesetzten Ladungen mit sich führen. Dadurch erklärt sich die bekannte Thatsache, dass ein Gas, durch welches eine elektrische Entladung geht, für die kleinste fremde elektromotorische Kraft leitend wird. Ueber eine andere Art der Spaltung der Gasmolecüle,

nämlich durch Temperaturerhöhung, handeln die vorliegenden Versuche.

Das Gas befand sich in einer sieben Zoll langen Platinröhre, welche in einem Ofen bis zum Glühen erhitzt wurde, und in deren beide Enden, durch Glasröhren isolirt, die Elektroden hineinragten; im Kreise befand sich eine Daniell'sche Batterie und ein Galvanometer. Die Leitung begann immer erst bei Rotglut. In vielen Gasen (Luft, Stickstoff, Kohlensäure, Wasserdampf) war sie so gering, dass der Verf. sie durch Zerstäubung der Elektroden verursacht hält. In anderen (Joddampf, Salmiakdampf, HCl, KCl, NaCl) sehr bedeutend; bei letzteren ist eine Dissociation bei höherer Temperatur teils bekannt, teils wurde sie vom Verf. nachgewiesen. In den Fällen, wo trotz eintretender Dissociation keine Leitung nachzuweisen war (z. B. Wasserdampf und Ammoniak), sind wahrscheinlich die Dissociations-Producte nicht Atome, sondern Molecüle. Auch Metalldämpfe, welche sich in einem irdenen Tiegel entwickelten, wurden untersucht; dieselben leiteten teils gar nicht, teils besser als Luft, am besten K und Na. Da die meisten Metalle einatomig sind, so scheint es, dass ihre Atome die Fähigkeit besitzen, eine elektrische Ladung anzunehmen und abzugeben.

2) Ueber die Leitungsfähigkeit der Luft wurden besondere Versuche angestellt, bei denen eine an beiden Enden offene Platinröhre durch einen galvanischen Strom zum Glühen gebracht wurde. Es zeigte sich eine starke oder gar keine Leitung, je nachdem sich die positive Elektrode am oberen oder unteren Ende der Röhre befand; danach scheint der Strom ein Convectionsstrom zu sein, bei welchem die aufsteigende Luft negative Elektricität mit sich führt.

3) Wurde bei einem gut leitenden Gase die eine Elektrode aus der Platinröhre entfernt und, nachdem sie sich abgekühlt hatte, wieder eingesetzt, so begann die Leitung erst wieder, nachdem die Elektrode abermals glühend geworden war.

4) Eine Polarisation des Gases durch den durchgegangenen Strom war nicht zu entdecken. Lbg.

J. J. Thomson. **Some experiments on the velocity of transmission of electric disturbances, and their application to the theory of the striated discharge of gases.** Phil. Mag. (5) XXX. 129-140.

1) Um die Annahme zu prüfen, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektrischer Schwingungen längs eines Drahtes gleich der Lichtgeschwindigkeit in dem umgebenden Dielektricum ist, lässt der Verf. den Draht sich in einem Punkte B in zwei Zweige BM, BM' von den Längen l und l' spalten, deren Enden M, M' durch eine Funkenstrecke verbunden sind; das Minimum der Funkenstrecke findet statt, wenn die Potentiale in M und M' gleich sind. Ist v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in dem mit Luft umgebenen Zweige l, v' in dem mit einem andern Dielektricum umgebenen Zweige l', ferner $\varphi_0 \cos nt$ das Potential in B, P und P' das Potential in M und M', so ist

$$\varphi_0 \cos nt = P \cos \frac{nl}{v} = P' \cos \frac{nl'}{v'};$$

beim Minimum der Funkenstrecke muss also $\frac{l}{v} = \frac{l'}{v'}$ sein. Durch Veränderung von l ergab sich in Paraffin $\frac{v'}{v} = \frac{l'}{l} = 4:5,4$, in Schwefel $\frac{v'}{v} = 4:6,81$, welche Zahlen nahezu gleich den reciproken Quadratwurzeln aus den Dielektricitätsconstanten sind, wodurch die obige Annahme bestätigt wird.

2) Aus noch nicht beendigten Versuchen schliesst der Verf., dass auch in Gasen die Elektricität sich mit einer der Lichtgeschwindigkeit vergleichbaren Geschwindigkeit fortpflanzt. Nimmt man nun an, dass hierbei die Elektricität durch die geladenen Atome fortgeführt wird (vgl. die vorhergehende Abhandlung), so kann man schwerlich voraussetzen, dass hierbei die Atome sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, da dann die ihnen mitgeteilte kinetische Energie grösser sein würde als die potentielle elektrische Energie der Leiter, zwischen denen die Entladung übergeht. Der Verf. stellt daher folgende Theorie auf. Durch die elektromotorische Kraft werden zunächst die Gasmolecüle in der

Nähe der einen Elektrode, z. B. der negativen, auf einer gewissen endlichen Strecke gespalten, und ein positives Atom begiebt sich an die Elektrode, worauf die übrigen Atome der Kette sich wieder vereinigen. Findet diese Wiedervereinigung in einer Zeit T statt, und soll die Entladung mit der Lichtgeschwindigkeit V fortschreiten, so muss die Wiedervereinigung auf einer Strecke VT stattfinden und am anderen Ende derselben ein negatives Atom ausgeschieden werden, welches dann gewissermassen die negative Elektrode für eine weitere Fortsetzung der Entladung bildet. So löst sich die ganze Entladungsbahn in einzelne „Grotthus'sche Ketten“ von der Länge VT auf, deren Enden die Grenzflächen je einer der Schichten bilden, aus denen die geschichtete Entladung besteht. Hiermit stimmt die Wirkung eines Magneten auf die Schichten überein, indem sich dabei jede einzelne Schicht wie ein biegsamer Leiter mit befestigten Enden verhält. Nimmt man für T die zum Durchlaufen des halben mittleren Molecularabstandes mit der mittleren molecularen Geschwindigkeit nötige Zeit, so ergiebt sich für die Dicke VT der Schichten in der That ein Wert von der Ordnung des beobachteten. In der Zeit, wo zwischen den Enden einer Schicht eine Elektricitätsmenge 1 übergeht, ist die geleistete elektrische Arbeit gleich der Potentialdifferenz φ zwischen den Enden der Schicht; diese muss gleich dem durch die chemischen Aenderungen eintretenden Zuwachs w der potentiellen Energie sein, den man als constant annehmen kann. Befinden sich also n Schichten zwischen den Elektroden, und ist K das Potentialgefälle zwischen der ersten Schicht und der Kathode, so ist die Potentialdifferenz zwischen den Elektroden, wenn zwischen ihnen die Entladung stattfindet,

$$P = K + nw.$$

Ist folglich l die Entfernung der Elektroden, λ die Dicke einer Schicht, λ_0 die Dicke der Schicht an der Kathode, so ist

$$n = \frac{l - \lambda_0}{\lambda},$$

mithin

$$P = K - \frac{\lambda_0}{\lambda} w + \frac{w}{\lambda} l = K' + al,$$

d. h. das Entladungspotential ist eine lineare Function der Funkenlänge, was mit den Beobachtungen von Paschen (Wied. Ann. XXXVII) übereinstimmt. Lbg.

A. B. Basset. An electromagnetic theory of quartz. Phil. Mag. (5) XXX. 152-160.

1) Der Verf. untersucht einen Krystall mit drei zu Coordinatenebenen genommenen Symmetrieebenen, welcher Rotations-Polarisation zeigt, wenn die Wellennormale mit einer der drei Krystallaxen zusammenfällt; diese Rotationen werden durch drei Constanten p_x, p_y, p_z bestimmt. Die x-Componenten der dielektrischen Verschiebung, der elektromotorischen Kraft und der magnetischen Induction seien f_x, E_x, a_x. Statt der Maxwell'schen Gleichungen $E_x = \frac{4\pi}{K_x} f_x$ etc., wo K_x, K_y, K_z Constanten sind, setzt der Verf.

$$(1) \qquad E_x = \frac{4\pi}{K_x} f_x + (p_z \dot{f}_y - p_y \dot{f}_z) \text{ etc.}$$

Die übrigen Gleichungen sind die Maxwell'schen, nämlich

$$(2) \qquad \frac{df_x}{dx} + \frac{df_y}{dy} + \frac{df_z}{dz} = 0,$$

$$(3) \qquad \dot{a}_x = \frac{dE_y}{dz} - \frac{dE_z}{dy},$$

$$(4) \qquad 4\pi\mu \ddot{f}_x = \frac{d\dot{a}_z}{dy} - \frac{d\dot{a}_y}{dz} = \triangle E_x - \frac{d}{dx}\left(\frac{dE_x}{dx} + \frac{dE_y}{dy} + \frac{dE_z}{dz}\right).$$

Setzt man

$$(5) \qquad \begin{cases} A_x^2 = \dfrac{1}{\mu K_x}, \quad \Omega = A_x^2 \dfrac{df_x}{dx} + A_y^2 \dfrac{df_y}{dy} + A_z^2 \dfrac{df_z}{dz}, \\ \dfrac{d}{dw} = p_x \dfrac{d}{dx} + p_y \dfrac{d}{dy} + p_z \dfrac{d}{dz}, \end{cases}$$

so ergiebt sich

$$(\mathrm{I}) \qquad \ddot{f}_x = A_x^2 \Delta f_x - \frac{d\Omega}{dx} + \frac{1}{4\pi\mu} \frac{d}{dw}\left(\frac{d\dot{f}_y}{dz} - \frac{d\dot{f}_z}{dy}\right).$$

2) In einem isotropen Medium, in welchem die Wellennormale mit der z-Axe zusammenfällt, ist $p_x = p_y = p_z = p$,

$A_x = A_y = A_z = A$, wodurch die Gleichungen (I) übergehen in

$$\ddot{f}_x = A^2 \frac{d^2 f_x}{dz^2} + \frac{p}{4\pi\mu} \frac{d^2 \dot{f}_y}{dz^2}, \quad \ddot{f}_y = A^2 \frac{d^2 f_y}{dz^2} - \frac{p}{4\pi\mu} \frac{d^2 \dot{f}_x}{dz^2}.$$

Setzt man hierin

$$f_x = L e^{\frac{2\pi i}{\tau}\left(\frac{z}{V} - t\right)}, \quad f_y = M e^{\frac{2\pi i}{\tau}\left(\frac{z}{V} - t\right)},$$

so ergiebt sich

$$V_1^2 = A^2 + \frac{p}{2\mu\tau}, \quad V_2^2 = A^2 - \frac{p}{2\mu\tau}, \quad M = \pm iL,$$

und der Drehungswinkel ist in erster Annäherung, übereinstimmend mit dem Biot'schen Gesetze:

$$\psi = \frac{\pi z}{\tau}\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right) = \frac{\pi p}{2\mu\tau^2} \frac{z}{A^3} = \frac{\pi p}{2\mu\lambda^2} \frac{z}{A}.$$

3) Im Quarz ist, wenn wir seine Axe zur z-Axe nehmen, $p_x = p_y = 0$, $p_z = p$, $A_x = A_y$; für eine auf der Axe senkrechte, z. B. in die x-Axe fallende Wellennormale verschwindet daher das der Rotation entsprechende Glied in den Gleichungen (I), übereinstimmend mit der Beobachtung. Legen wir die xz-Ebene durch die Wellennormale und setzen

$$\frac{f_x}{c_x} = \frac{f_y}{c_y} = \frac{f_z}{c_z} = e^{\frac{2\pi i}{\tau}\left(\frac{lx + nz}{V} - t\right)},$$

so folgt aus den drei Gleichungen (I)

$$(V^2 - A_x^2)(V^2 - A_x^2 n^2 - A_z^2 l^2) = \left(\frac{p}{2\mu\tau}\right)^2 n^2,$$

woraus sich für $l = 0$, $n = 1$ wieder die zwei obigen Werte von V ergeben.

4) Gleichungen von derselben Form wie die Gleichung (I) erhält man auch aus der Elasticitäts-Theorie, wenn man mit Lord Rayleigh und Sir W. Thomson annimmt, dass die Beschaffenheit des Aethers in einem ponderabeln Medium dieselbe ist wie im Vacuum, und dass die Wirkung der Materie sich auf Kräfte

$$-\varrho_x \ddot{u}_x, \quad -\varrho_y \ddot{u}_y, \quad -\varrho_z \ddot{u}_z$$

reducirt, wo u_x, u_y, u_z die Componenten der Verschiebung und die ϱ Constanten sind. Bezeichnet man dann mit n die Con-

stante der Starrheit des Aethers, setzt

$$\frac{du_x}{dx} + \frac{du_y}{dy} + \frac{du_z}{dz} = \vartheta,$$

und fügt dieselben der Rotation entsprechenden Glieder hinzu wie in den Gleichungen (I), so werden die Gleichungen

$$(\varrho + \varrho_x)\ddot{u}_x = n\Delta u_x - n'\frac{d\vartheta}{dx} + \frac{d}{dw}\left(\frac{d\dot{u}_y}{dz} - \frac{d\dot{u}_z}{dy}\right).$$

Lbg.

J. A. Ewing. Contributions to the molecular theory of induced magnetism. Phil. Mag. (5) XXX. 205-222.

Der Verf. sucht nachzuweisen, dass man bei der Theorie der drehbaren Molecular-Magnete keine elastischen Directionskräfte oder Reibungswiderstände zu Hülfe zu nehmen braucht, sondern dass die Kräfte, welche die magnetischen Molecüle auf einander ausüben, genügen, und dass auch die Erscheinungen der Hysteresis sich aus der Instabilität der den intermolecularen magnetischen Wirkungen entsprechenden Gleichgewichtslagen erklären. Lbg.

O. J. Lodge. On the electrostatic force between conductors conveying steady or transient currents. Phil. Mag. (5) XXX. 230-243.

Die Abhandlung enthält einige (allerdings nur näherungsweise) Berechnungen des Verhältnisses der elektrostatischen und elektrodynamischen Kraft zweier Stromleiter. Es mögen sich z. B. zwei Teile eines von demselben stationären Strome i durchflossenen Drahtes parallel im Abstande a einander gegenüberstehen, der eine, bewegliche, von der kleinen Länge l, der andere sehr lang; der Widerstand zwischen ihren einander gegenüberstehenden Mitten sei R, ihre mittlere Potentialdifferenz $P = Ri$, die Elektricitätsmenge auf der Längeneinheit im Mittel $s = \mp CRi$, wo C die Capacität der Längeneinheit, die Dielektricitätsconstante des umgebenden Mediums K, sämtliche Grössen in elektrostatischem Mass. Dann ist die elektrostatische Anziehung auf den Draht l, wenn $\angle(r, a) = \vartheta$:

$$F = \frac{\varepsilon^2}{K}\int_0^l ds \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\vartheta}{r^2} ds' = \frac{2\varepsilon^2}{aK}\int_0^l ds \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta\, d\vartheta$$
$$= \frac{2l}{aK}\varepsilon^2 = \frac{2l}{aK} C^2 R^2 i^2.$$

Die elektrodynamische Abstossung ist, wenn v die Lichtgeschwindigkeit bedeutet:

$$F' = -\frac{i^2}{v^2}\frac{dM}{da}, \quad \text{wo} \quad M = \int_0^l ds \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds'}{r},$$

also

$$F' = \frac{i^2}{v^2}\int_0^l ds \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\vartheta}{r^2} ds' = \frac{2l}{a}\frac{i^2}{v^2},$$

folglich

$$\frac{F}{F'} = \frac{C^2 R^2 v^2}{K} = \frac{C^2 R_1^2}{K v^2},$$

wo $R_1 = Rv^2$ den Widerstand in magnetischem Mass bezeichnet. Ist ϱ der Radius des Drahtes, so kann man setzen

$$C = \frac{K}{4\log\frac{a}{\varrho}},$$

wodurch sich ergiebt

$$\frac{F}{F'} = K\left(\frac{R_1}{4v\log\frac{a}{\varrho}}\right)^2,$$

oder da, wenn z den Widerstand in Ohm bezeichnet, $R_1 = z.10^9$, $v = 30.10^9$ ist,

$$\frac{F}{F_1} = K\left(\frac{z}{120\log\frac{a}{\varrho}}\right)^2.$$

Z. B. für $4\log\frac{a}{\varrho} = 18{,}4$, $z = 552$, $K = 1$ würden die zwei Kräfte sich gerade aufheben. Aehnlich berechnet der Verf. das Verhältnis für einen periodischen Strom, z. B. den Entladungsstrom einer Leidener Flasche. Lbg.

R. BLONDLOT. Sur une loi élémentaire de l'induction électromagnétique. Almeida J. (2) IX. 177-180.

Beweis des folgenden „Elementargesetzes“: Die Aenderung in der Magnetisirung eines magnetisirten Elementes erzeugt ein elektrisches Feld, welches, abgesehen von der Umwandlung der magnetischen Kräfte in elektrische, mit dem magnetischen Felde identisch ist, das nach der Formel von Biot und Savart ein Stromelement erzeugen würde, welches die Stelle des magnetisirten Elementes einnähme, und dessen Intensität gleich der nach der Zeit genommenen Ableitung des magnetischen Momentes dieses Elementes wäre. Lp.

J. PIONCHON. Remarque sur la théorie des électromètres absolus. Almeida J. (2) IX. 231-233.

Aus der Formel $dT = \frac{1}{2}(V_1 - V_2)^2 dC$, in welcher V_1 und V_2 die Potentiale zweier Leiter bedeuten, dT die Arbeit der an dem beweglichen Leiter angebrachten elektrischen Kräfte, dC die Zunahme der Capacität des Systems, werden Folgerungen für den ebenen, den cylindrischen und den sphärischen Condensator gezogen. Lp.

A. GRAY. On the dynamical theory of electromagnetic action. Phil. Mag. (5) XXX. 441-455.

1) Sind zwei Stromkreise i_1, i_2 mit den äusseren elektromotorischen Kräften E_1, E_2 und den Widerständen R_1, R_2 gegeben, und setzt man die elektrokinetische Energie

$$(1) \qquad T = \tfrac{1}{2}L_1 i_1^2 + \tfrac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2,$$

so ist bekanntlich

$$(2) \qquad E_1 - R_1 i_1 = \frac{d}{dt}(L_1 i_1 + M i_2), \quad E_2 - R_2 i_2 = \frac{d}{dt}(L_2 i_2 + M i_1).$$

Daraus ergiebt sich der Ueberschuss der Arbeit der äusseren elektromotorischen Kräfte über die erzeugte Wärme dQ:

$$(3) \qquad C = (E_1 i_1 + E_2 i_2)dt - dQ = dT + i_1 i_2 dM = dT + A,$$

wo A die Arbeit der ponderomotorischen Kräfte bezeichnet. Der

Verf. untersucht die Bedingungen, unter denen die Gleichung (3) auch für ein System eines Stroms und einer Magnetschale sowie zweier Magnetschalen gilt, indem er die Magnetschale durch einen Strom ersetzt und für diesen $E = R = 0$ annimmt.

2) Setzt man für ein System beliebig vieler Ströme

$$(4) \qquad T = \tfrac{1}{2}\sum_k \sum_l M_{kl} i_k i_l$$

und bezeichnet mit N_k die magnetische Induction durch die Stromfläche k, also, wenn B die magnetische Induction, B_n ihre Componente nach der Normale der Stromfläche σ_k des Stromes k bezeichnet,

$$(5) \qquad N_k = \frac{dT}{di_k} = \int B_n d\sigma_k,$$

so ist

$$(6) \qquad T = \tfrac{1}{2}\sum_k N_k i_k.$$

Die bekannte Gleichung

$$(7) \qquad T = \frac{1}{8\pi}\int BH d\tau,$$

wo H die Magnetkraft bezeichnet und die Integration sich über das ganze Magnetfeld erstreckt, leitet der Verf. folgendermassen ab. Ist s eine beliebige, den Strom k umkreisende, geschlossene Bahn, H_k die Magnetkraft dieses Stromes, H_{ks} ihre Componente nach s, so ist bekanntlich $i_k = \frac{1}{4\pi}\int H_{ks} ds$. Nun kann man für jeden Punkt von s eine andere durch ihn hindurchgehende und durch den Strom k begrenzte Fläche σ_k nehmen, welche auf allen sie schneidenden Inductionslinien senkrecht steht; dann wird

$$N_k i_k = \frac{1}{4\pi}\int B d\sigma_k \int H_{ks} ds.$$

Das ganze Magnetfeld lässt sich durch solche, durch den Strom k begrenzte Flächen zerlegen; ferner kann man statt jedes Elementes ds auch das einer anderen Curve nehmen, welche in dem betreffenden Punkte auf dem Elemente $d\sigma_k$ senkrecht steht; dann wird $d\sigma_k ds = d\tau$, H_{ks} die Componente von H_k nach der Richtung von B, folglich

$$N_k i_k = \frac{1}{4\pi}\int BH_{ks} d\tau,$$

mithin, wenn H_B die Componente der gesamten Magnetkraft H nach der Richtung von B bezeichnet,

$$T = \tfrac{1}{2}\sum_k N_k i_k = \frac{1}{8\pi}\int BH_B d\tau,$$

was, da man die Richtungen von B und H als zusammenfallend annehmen kann, mit Gleichung (7) identisch ist.

3) Werden die Stromstärken unendlich wenig geändert, so ist nach Gleichung (5) $\delta N_k = \int \delta B_n d\sigma_k$, folglich nach dem vorhergehenden Beweise

$$i_k \delta N_k = \frac{1}{4\pi}\int \delta B_n d\sigma_k \int H_{ks} ds = \frac{1}{4\pi}\int H_{ks}\delta B d\tau.$$

Nach Gleichung (2) ist $i_k \delta N_k$ die bei der Aenderung der Stromstärken aufgewandte Arbeit der Batterie des Stromes k (oder vielmehr deren Ueberschuss über die erzeugte Wärme); folglich ist die ganze Batterie-Arbeit

$$C = \sum_k i_k \delta N_k = \frac{1}{4\pi}\int H_s \delta B d\tau = \frac{1}{4\pi}\int H\delta B d\tau,$$

während die Aenderung der elektrokinetischen Energie nach Gleichung (7) ist

$$\delta T = \frac{1}{8\pi}\int \delta(HB) d\tau.$$

Die Differenz

$$C - \delta T = W = \frac{1}{8\pi}\int (H\delta B - B\delta H) d\tau$$

ist also derjenige Teil der an das Medium abgegebenen Energie, welcher nicht in elektrokinetische Energie verwandelt wird. Wird durch die Ströme Eisen zwischen zwei Werten H_1, H_2 der Feldkraft magnetisirt, so ist für kleine Feldkräfte $W > 0$, von einem gewissen Werte von H an $W < 0$; im ersten Stadium der Magnetisirung giebt also die Batterie Energie an das Eisen ab, während im zweiten Stadium der Bedarf an elektrokinetischer Energie zum Teil nicht durch die Batterie, sondern durch das Eisen gedeckt wird. Der Verf. sieht hierin eine Bestätigung der Theorie der Magnetisirung von Ewing (vgl. das obige Referat S. 1145). Lbg.

J. TROWBRIDGE. Motion of atoms in electric discharges. Phil. Mag. (5) XXX. 480-483.

Der Verf. sucht die Frage zu entscheiden, ob in einem Entladungsfunken die Metallatome mit der Elektricität zwischen den Elektroden oscilliren. Findet dies statt, und ist v die Lichtgeschwindigkeit, s die (positive oder negative) Geschwindigkeit eines Metallatoms zwischen den Elektroden in der Richtung der Lichtfortpflanzung, so ist das Verhältnis der geänderten zur ursprünglichen Wellenlänge nach dem Doppler'schen Princip

$$\frac{\lambda'}{\lambda}=\frac{v}{v+s}.$$

Die Schwingungsdauer der oscillatorischen Entladung einer Leidener Batterie durch einen Draht mit Funkenstrecke zwischen Eisen-Elektroden, nach der Formel $\tau = 2\pi\sqrt{CL}$ berechnet, war $= 3.10^{-7}$ Sec.; durch ein Rowland'sches Gitter wurde von den Eisenlinien ein Spectrum entworfen und photographirt, einmal wenn die Funkenstrecke auf den Spalt des Spectroskops zuging, dann wenn sie dem Spalt parallel war. Im ersteren Falle mussten die Eisenlinien bei positivem Werte von s nach dem violetten, bei negativem nach dem roten Ende hin verschoben werden, mussten sich also verbreitert zeigen. Da aber beide Photographien genau übereinstimmten, so schliesst der Verf., dass die Metallatome nicht mit der Elektricität zwischen den Elektroden oscilliren, sondern nur durch die Erschütterung zur Lichtemission veranlasst werden. Lbg.

L. SOHNCKE. Nachträgliches zur Theorie der Luftelektricität. Eine Abwehr. Münch. Ber. XX. 89-92.

Der Verf. hält seine Theorie der Luftelektricität (vgl. F. d. M. XX. 1888. 1179) der Kritik von Exner gegenüber in vollem Umfange aufrecht, wobei er auf seine a. a. O. ausgesprochene Bemerkung hinweist, dass eine zum Zwecke der Vereinfachung der Rechnung von ihm gemachte Annahme zur Erklärung der „jährlichen“ Periode des Potentialgefälles nicht ausreichend sei.

Lbg.

A. Schülke. Elektricität und Magnetismus nach den neueren Anschauungen für höhere Schulen dargestellt. **Pr. Realgymn. Osterode i. Ostpr.**

Die Abhandlung ist ein Versuch, den Begriff des Potentials sowie die Faraday'schen Anschauungen über Kraftlinien in den Schulunterricht einzuführen. Die Verwendung des Potentialbegriffs in der Lehre vom Magnetismus und der Elektricität im Schulunterricht ist gerechtfertigt, aber nur auf der obersten Stufe, wo die Begriffe der Arbeit und Energie aus der Mechanik den Schülern soweit geläufig geworden sind, dass sie einen klaren und auch quantitativ bestimmten Sinn damit verbinden können, also nur dann, wenn die Elektricitätslehre, welche ihrem experimentellen Teile nach aus äusserlichen Gründen auf der Unterstufe erledigt werden muss, auf der Oberstufe in mehr mathematischer Behandlung wiederholt werden kann, wozu aber nach dem bisher — wenigstens in Preussen — geltenden Lehrplan in der Regel die Zeit fehlen wird. Unter jener Voraussetzung dürfte gegen die Art, wie der Verf. den Potentialbegriff behandelt, nichts Wesentliches einzuwenden sein.

Um so schwereren Bedenken scheint mir die Art, wie der Verf. den Lehrstoff der Unterstufe behandelt, zu unterliegen. Was die Kraftlinien betrifft, so werden dieselben wohl ziemlich allgemein zur Darstellung der Kraftrichtung benutzt und in der Lehre vom Magnetismus auch dem Auge durch die magnetischen Curven sichtbar gemacht, ein Mittel übrigens, welches immer und namentlich in der Lehre von der Elektricität höchst unvollkommen bleibt; immerhin aber werden sie selbst in der Wissenschaft bis jetzt nur als ein Bild der Erscheinungen, nicht als der objective Grund derselben betrachtet. Wenn dagegen der Verf. die Lehre vom Magnetismus auf der Unterstufe mit der Definition der Kraftlinien als der Linien, in denen sich Eisenfeile anordnet, beginnt, ehe überhaupt von magnetischer Kraft die Rede gewesen ist, so ist dagegen einmal zu bemerken, dass die Richtung, welche ein kleiner unmagnetischer Eisenstab im Magnetfelde annimmt, eine viel zu complicirte Erscheinung ist, um darauf die Definition der magnetischen Kraftrichtung zu

gründen. Erst nachdem aus der Wirkung zweier Magnete auf einander die Definition der Wirkung auf einen einzelnen Pol, d. h. der Magnetkraft und ihrer Richtung, abgeleitet und gezeigt ist, dass ein Eisenstab im Felde selbst ein Magnet wird, wird es verständlich, in wie fern seine Richtung die Kraftrichtung angiebt. Falls der Verf. die Kraftlinien auch nur, wie bisher üblich, als Bilder der Kraftrichtung betrachtet wissen will, so thut er das jedenfalls in einer Weise, welche den Schüler zu einer nebelhaften Hypostasirung derselben zu verleiten geeignet ist. Wenn es z. B. heisst: „bei zwei entgegengesetzten Polen bilden sich die Kraftlinien fast nur in dem zwischenliegenden Raume, während sie bei gleichnamigen Polen in dem Zwischenraume fast gänzlich fehlen", und wenn von einem „Druck senkrecht gegen die Kraftlinien" die Rede ist, wonach also die Kraftlinien doch wieder nicht die Kraftrichtung angeben, so bleibt dem Schüler, falls er sich überhaupt eine Anschauung bilden will, nichts übrig, als sich die Kraftlinien als materielle Fäden vorzustellen, welche durch irgend welche geheimnisvollen Antriebe die Bewegungen im Magnetfelde bewirken. Aber vielleicht — und die Aeusserung des Verfs., dass man „Faraday's Kraftlinien überall, seine Grundanschauungen nirgends findet", scheint darauf hinzudeuten — beabsichtigt er gerade eine solche Hypostasirung der Kraftlinien; damit würde er in die ersten Anfänge eine Hypothese einführen, mit welcher sogar die Wissenschaft nach Maxwell's eigenem Geständnis bisher noch nichts Rechtes hat anfangen können, und welche vollends für den Tertianer oder Secundaner ein inhaltsleeres Wort bleibt, so lange ihm nicht angegeben werden kann, als was er sich denn diese materiellen Kraftlinien eigentlich zu denken hat. Dass in jedem Punkt des Magnetfeldes eine Kraft wirkt, kann man ihm zeigen, auch ohne ihm dabei die Vorstellung einer actio in distans aufzudrängen. Kraftlinien aber, denen selbst eine Zugkraft, und ein dazwischenliegendes Medium, dem eine Druckkraft innewohnt, kann man ihm nicht zeigen; denn eine Reihe von Eisenfeilspähnen ist doch keine Kraftlinie im Sinne eines objectiven Grundes der magnetischen Erscheinungen! Uebrigens beweist der Verf. selbst die Ueber-

flüssigkeit dieser Hypothese, indem er sie auf der zweiten Stufe vollständig fallen lässt.

Dieselben Bemerkungen gelten auch für des Verfs. Beginn der Elektricitätslehre: „Nach Faraday gehen von einem elektrisirten Körper Kraftlinien aus, welche in jedem Punkte die Richtung der wirkenden Kraft angeben". Und wenn es gleich darauf heisst: „Wir erhalten die elektrischen Erscheinungen durch die Regel, dass überall, wo Kraftlinien in einen Leiter eintreten, negative Elektricität, wo sie austreten, positive Elektricität vorhanden ist", so wird sich der Schüler entweder die falsche Vorstellung bilden, dass die Kraftlinien den Leiter durchsetzen und auf irgend eine ihm rätselhafte Weise die Elektrisirung desselben hervorbringen, oder er wird den Satz mit dem vorigen umgekehrten Satze: „wo Elektricität vorhanden ist, treten Kraftlinien aus oder ein", für identisch halten. Ebenso verwirrend und eine — wenigstens auf dieser Stufe — unnötige Hypothese enthaltend ist der weitere Satz: „Alle elektrischen Bewegungserscheinungen lassen sich durch Faraday's Annahme erklären, dass in einem elektrischen Felde ein Zug ähnlich dem eines gespannten Fadens in der Richtung der Kraftlinien, ein Druck in allen dazu senkrechten Richtungen herrscht".

Mir scheint eine derartige Behandlungsweise der ersten Anfänge eines Capitels der Physik eine neue Bestätigung des Satzes, dass es im physikalischen Unterrichte weniger auf die etwas grössere oder geringere wissenschaftliche Wahrscheinlichkeit einer Hypothese — für deren Beurteilung dem Anfänger ja doch jeder Massstab fehlt — als darauf ankommt, dass die Hypothese aus einer einfachen und anschaulichen Grundvorstellung die Erscheinungen möglichst vollständig erklärt. Lbg.

Sauter. Ueber Kugelblitze. I. Theorie der Kugelblitze. Pr. Realgymn. Ulm.

Die Abhandlung enthält eine Wiedergabe der von verschiedenen Physikern aufgestellten Erklärungen der Kugelblitze, d. h. derjenigen Art des Blitzes, welche sich von den gewöhnlichen

Zickzack-Blitzen hauptsächlich durch ihre mehr oder minder kugelförmige Gestalt, ihre lange, bis zu mehreren Minuten gehende Dauer und die geringe Geschwindigkeit der Bewegung unterscheidet. Eingehender werden die Versuche von Planté besprochen, welcher ähnliche Entladungen mittels einer sehr starken Secundärbatterie hervorbrachte, und welcher daher die Kugelblitze für aus Wasserdampf und dessen Zersetzungsproducten gebildete leuchtende Kugeln hält. Lbg.

F. Neumann. Die mathematischen Gesetze der inducirten elektrischen Ströme. (1845). Herausgegeben von C. Neumann. (Ostwald's Klassiker 10.) Leipzig. W. Engelmann. 96 S. 8°.

In einer Anmerkung macht der Herausgeber darauf aufmerksam, dass die Neumann'sche Theorie der Induction sich auf das Ampère'sche Gesetz stützt, und dass die experimentellen Fundamental-Thatsachen, auf welche Ampère sein Gesetz gegründet hat, nach W. Weber eigentlich als Hypothesen anzusehen sind; dass aber von diesen Hypothesen nur folgende notwendig sind:

1) Die Kraft ist proportional $ii'dsds'$.

2) Sie ist nur abhängig von der relativen Lage der zwei Stromelemente.

3) Sie lässt sich durch die Wirkung der Componenten der Stromelemente ersetzen.

4) Sie ist nach der Verbindungslinie gerichtet.

Dagegen sind die zwei weiteren Hypothesen, dass die Kraft proportional mit $\frac{1}{r^2}$ ist, und dass die Kraft eines geschlossenen Leiters auf dem Stromelemente senkrecht steht, überflüssig, da sie sich aus den vorhergehenden mit Zuhülfenahme des Princips der Aequivalenz eines Elementarstroms und eines magnetischen Molecüls ergeben. (Vgl. das Referat über die Abhandlung von Righi im vorliegenden Bande S. 1077. D. Ref.) Lbg.

Coulomb. Vier Abhandlungen über die Elektricität und den Magnetismus. (1785-1786). Uebersetzt und herausgegeben von W. König. (Ostwald's Klassiker 13.) Leipzig. W. Engelmann. 88 S. 8°.

Die Abhandlungen enthalten die Versuche mit der Drehwage und die Schwingungsversuche zum Nachweise des elektrischen und magnetischen Grundgesetzes; ferner die Beobachtungen über den Elektricitäts-Verlust sowie den experimentellen Nachweis, dass die Elektricität sich nur auf der Oberfläche verbreitet und sich auf zwei sich berührenden Körpern in einem nur durch ihre Gestalt bestimmten Verhältnis verteilt. Lbg.

W. Thomson. Gesammelte Abhandlungen zur Lehre von der Elektricität und dem Magnetismus. Deutsch von L. Levy und B. Weinstein. Berlin. Springer. XIV+572 S. 8°.

Das Original ist zu bekannt und seine Vortrefflichkeit zu anerkannt, als dass eine Besprechung nötig erscheinen könnte. Die Uebersetzung ist nach der unveränderten zweiten Auflage angefertigt; ob eine so wörtliche Wiedergabe des Originals, auch mit allen, stellenweise ziemlich unbequemen Bezeichnungen, zweckmässig war, dürfte fraglich sein. Lbg.

R. Ferrini. Sulle dinamo compensate. Lomb. Ist. Rend. (2) XXIII. 663-675.

F. Koláček. Beiträge zur elektromagnetischen Lichttheorie. 2te Abhandlung. Wiedemann Ann. XXXIX. 236-257.

J. Bertrand. Leçons sur la théorie mathématique de l'électricité, professées au Collège de France. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

Ausführliche Anzeige durch Hrn. Duhem in Darboux Bull. (2) XIV. 41-55.

E. Beltrami. Sull' estensione del principio di D'Alembert all' elettrodinamica. Nuovo Cimento. (3) XXVII. 46-52.

Abdruck aus Rom. Acc. L. Rend. (4) V_1. 852-856. (F. d. M. XXI. 1889. 1129.)

W. N. Shaw. Report on the present state of our knowledge in electrolysis and electrochemistry. Brit. Ass. Rep. 1890. 185-223.

Der erste Teil des Berichtes wird hier veröffentlicht. Er behandelt: I. Allgemeine elektrolytische Erscheinungen. II. Allgemein angenommene Gesetze und Principien. III. Hypothesen und Theorien der Elektrolyse. Unter diesem Titel bleiben jedoch manche Dinge für eine spätere Besprechung. Auch andere Teile des allgemeinen Themas sind noch zurückgestellt.

Gbs. (Lp.)

O. J. Lodge. The Peltier effect, and contact E. M. F. Nature XLI. 224-225.

Im Anschluss an eine Recension (Nature XLI. 5-6) des Buches von Hrn. O. J. Lodge „Modern views of electricity" (London, 1889), welches das Thema in populärer Weise behandelt (vgl. F. d. M. XX. 1888. 1191), ist zuerst eine Entgegnung des Hrn. Lodge (ibid. S. 80), dann eine Erwiderung des Recensenten (S. 102), endlich die obige Schlusserklärung des Verfassers erschienen. Es handelt sich um das Verhalten des absoluten Vacuums gegen die Elektricität, worüber drei Annahmen gemacht werden: 1) Ein vollkommenes Vacuum ist ein absoluter Nichtleiter der Elektricität. 2) Keine elektromotorische Contactkraft besteht zwischen einem Metalle und einem Vacuum. 3) Das Vacuum besitzt ein specifisches Inductionsvermögen. Alle drei sind nötig, um alle Schlüsse zu ziehen. Die Hypothesen 1) und 3) sind höchst wahrscheinlich, an 2) kann Hr. Lodge nicht glauben.

Lp.

A. Perot. Remarque sur la quantité de chaleur dégagée par les courants parcourant un système de conducteurs. Almeida J. (2) IX. 508-509.

„Die in der Gesamtheit der Leiter vermöge der Joule'schen Wirkung frei gemachte Wärmemenge ist ein Maximum.“ Lp.

G. Adler. Allgemeine Sätze über die elektrostatische Induction. Exner Rep. XXVI. 179-190, 193-220.

Abdruck aus Wien. Ber. 1888; vgl. F. d. M. XXI. 1140.

G. Chaperon. Équilibres de self-induction et de capacités sur le pont à fil et à courants alternatifs. Almeida J. (2) IX. 485-489.

J. A. Fleming. The alternate current transformer in theory and praxis. Vol. I. The induction of electric currents. London. (1889.) [Nature XLII. 49-50.]

Th. Moureaux. Sur la construction des cartes magnétiques. Ann. de chim. et phys. (6) XXI. 5-42.

Der Aufsatz beschreibt die in Frankreich jetzt üblichen Instrumente und Messmethoden, durch welche es möglich wird, in verhältnismässig kurzer Zeit die magnetischen Constanten eines Ortes zu bestimmen. Im Jahre 1889 wurden durch den Verf. ohne irgend welche Hülfe binnen 32 Tagen die magnetischen Elemente an 52 im Norden Frankreichs zerstreuten Oertern bestimmt. Lp.

J. Hopkinson. Magnetism. Nature XLI. 249-254, 273-276.

Eröffnungsvortrag vor der Versammlung der Elektrotechniker am 9. Jan. 1890; durch graphische Darstellungen der bezüglichen Gesetze wird der Gegenstand dem Verständnisse nahe geführt. Lp.

Report of the Committee on molecular phenomena associated with the magnetisation of iron. (Phenomena occurring at red heat.) Brit. Ass. Rep. 1890. 145-160.

J. A. Wing. Contributions to the molecular theory of induced magnetism. Lond. R. S. Proc. XLIX.

K. Kahle. Ein Beitrag zur Theorie von den magnetischen Kraftlinienströmen. Diss. Marburg. 32 S. 8°.

Fr. Wächter. Ueber das Gewitter und die Anlage von Blitzableitungen. Mitt. üb. Art. u. Gen. XXI. 555-578.

Capitel 4.

W ä r m e l e h r e.

A. Mechanische Wärmetheorie.

A. Rosén. Sur la notion de l'énergie libre. Stockh. Öfv. 555-564.

Nach Erwähnung der Helmholtz'schen Definition des Begriffes „freie Energie“ eines Körpers und Herleitung der von H. nachgewiesenen Relationen zwischen dieser Function und gewissen anderen für den Körper charakteristischen Grössen zeigt der Verf., wie man andere Functionen von analoger Beschaffenheit bilden kann, und welche Relationen zwischen diesen Functionen und den Grössen bestehen, welche den Zustand des Körpers bestimmen. Hierauf folgt eine einfache Anwendung auf den Zusammenhang zwischen elektrischer Endosmose und Diaphragmaströmen. Bdn.

V. v. Lang. Beitrag zur mechanischen Wärmetheorie. Wien. Ber. XCIX. 899-904.

Wenn bei einer unendlich kleinen umkehrbaren Zustandsänderung die elementare Arbeit gegeben ist durch

$$dW = A.dx + B.dy + \cdots + N.dT,$$

so gelten nach v. Helmholtz die Gleichungen:

$$A = -\frac{\partial F}{\partial x}, \quad B = -\frac{\partial F}{\partial y}, \quad \ldots, \quad N = -\frac{\partial F}{\partial T} - S,$$

wo F die freie Energie, S die Entropie bedeutet.

Hieraus ergiebt sich eine Anzahl Gleichungen von der Form

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}.$$

Diese benutzt der Verf., um gewisse Beziehungen zwischen dem Dampfdruck und anderen physikalischen Grössen: 1) der Oberflächenspannung, 2) der Elektrisirung, 3) der elektrischen Influenz zu beweisen, Beziehungen, die J. J. Thomson („Anwendungen der Dynamik auf Physik und Chemie"; Leipzig 1890) auf andere Weise bewiesen hat. Sbt.

F. Koláček. Die aerodynamischen Gleichungen und der erste Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie. Wiedemann Ann. XLI. 151-153.

Verf. erhebt Einspruch gegen eine von Lindner in dessen Werke „Theorie der Gasbewegung" ausgesprochene Behauptung, wonach die aerodynamischen Grundgleichungen mit den aus wärmetheoretischen Betrachtungen sich ergebenden Strömungsformeln im Widerspruche ständen. Sbt.

Th. Gross. Ueber die Anwendung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie auf moleculare und im besonderen auf elektrolytische Vorgänge. Exner Rep. XXVI. 473-489.

Der Verf. versucht zu zeigen, „dass die Uebertragung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie auf das moleculare Gebiet aus theoretischen und erfahrungsmässigen Gründen nicht zulässig ist." Lp.

G. Jäger. Ueber die Abhängigkeit des specifischen Volumens gesättigter Dämpfe von dem specifischen Volumen der zugehörigen Flüssigkeiten und der Temperatur. Wien. Ber. XCIX. 1028-1035.

Die Grundgleichung der Hydrostatik nimmt durch Integration die Form an:

$$\int_{v_1}^{v_2} v\,dp = \frac{a}{m},$$

wo a die Arbeit bedeutet, die ein Molecül von der Masse m leisten muss, um aus der flüssigen in die Dampfform überzugehen. Die Beziehung zwischen p und v wird in der Form

$$p = \frac{c_0^2(1+\alpha t).\left(1+\frac{\beta}{v}\right)}{3(v-b)}$$

vorausgesetzt; daraus folgt für die Abhängigkeit des specifischen Volumens v_1 des gesättigten Dampfes von dem specifischen Volumen v_2 der Flüssigkeit die Gleichung:

$$\frac{\gamma}{v_2-b}+\frac{\gamma}{b}\log n\frac{v_2}{v_2-b}+\log n\frac{v_1}{v_2} = \delta.\frac{1-\varepsilon t}{1+\alpha t}.$$

α bedeutet den Ausdehnungscoefficienten der Flüssigkeit, ε den Temperaturcoefficienten der Capillaritätsconstanten. Sind die Werte der Constanten b, γ, δ bestimmt, so kann für beliebige Temperaturen das v_1 aus dem zugehörigen v_2 berechnet werden.

Die Prüfung der Formel mit Hülfe der von Winkelmann für Wasser und Aether gegebenen Zahlen (Wiedem. Ann. IX) ergiebt als grösste Differenzen der nach beiden Methoden erhaltenen Werte für Wasser 1 Proc., für Aether weniger als 0,1 Proc.

Sbt.

G. Jäger. Zur Theorie der Dampfspannung. Wien. Ber. XCIX. 679-682.

Auf Grund feststehender Ansichten über den flüssigen und gasförmigen Zustand und unter der Annahme, dass das Maxwell'sche Verteilungsgesetz wie für den gasförmigen, so auch für den flüssigen Zustand gültig sei, entwickelt der Verf. fol-

gende, die Abhängigkeit des Dampfdruckes d von der Temperatur t ausdrückende Gleichung:

$$d = C(1+\gamma t).\int_{k.\sqrt{\frac{1-\varepsilon t}{1+\alpha t}}}^{\infty} e^{-x^2}dx.$$

C ist ein constanter Coefficient, α der Ausdehnungscoefficient der Gase, ε der Temperaturcoefficient der Capillaritätsconstanten der Flüssigkeit, γ trägt dem Einflusse der Aenderung der Zahl der Molecüle in der Oberflächeneinheit und der mittleren Geschwindigkeit derselben Rechnung; k ist gleich $\sqrt{\frac{3a_0}{mc_0^2}}$, wo a die Arbeit bedeutet, die zur Ueberwindung der Capillarkräfte nötig ist, wenn ein Molecül (mit der Masse m) aus der Flüssigkeit in Dampf übertritt, c aber die mittlere progressive Geschwindigkeit der Flüssigkeitsmolecüle bezeichnet und der Index 0 anzeigt, dass der betreffende Wert für 0° gemeint ist.

Die für Wasserdampf aus der Formel berechneten Zahlen stimmen mit den Beobachtungen von Magnus und Regnault sehr gut überein. Sbt.

G. Jäger. Die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsmolekeln. Wien. Ber. XCIX. 860-869.

In der vorher erwähnten Abhandlung war angenommen, dass die Dampfspannung der Zahl der Molecüle in der Oberflächeneinheit, die sich in Dampf verwandeln können, proportional sei; die Zahl der Molecüle, die in der Zeiteinheit aus der Flüssigkeit in Dampf übertreten und umgekehrt, war nicht in Betracht gezogen. Indem der Verf. diese jetzt berücksichtigt, findet er für die Dampfspannung die Formel:

$$d = \tfrac{4}{3}\varrho_0(1-\beta t).c_0.c_0'(1+\alpha t).\int_{k.\sqrt{\frac{1-\varepsilon t}{1+\alpha t}}}^{\infty}\sqrt{x^2-k^2.\frac{1-\varepsilon t}{1+\alpha t}}.e^{-x^2}dx.$$

Hier ist $\varrho_0(1-\beta t)$ die Masse der Volumeneinheit der Flüssigkeit; c_0 und c_0' bedeuten die mittleren Geschwindigkeiten eines Molecüls in der Flüssigkeit und im Dampfe, und die Gleichung

bietet also die Möglichkeit, die Geschwindigkeit eines Flüssigkeitsmolecüls zu berechnen. Indem für Wasser der Wert des Integrals durch ein annäherndes Verfahren bestimmt wird, erhält der Verf.:

$$d = 0{,}523 \,.\, \varrho_0(1-\beta t) \,.\, c_0 c'_0 \,.\, (1+\alpha t) \,.\left[\frac{1}{\frac{3a}{mc^2}} + \frac{0{,}726}{\left(\frac{3a}{mc}\right)^2}\right] .\, e^{-\frac{3a}{mc^2}}.$$

Aus der Gleichung $d = \frac{N'' m . c'^2}{3}$ folgt $c'_0 = 61400$ cm und dann für die Flüssigkeit $c_0 = 27800$ cm.

Auf eine zweite Weise findet der Verf. $c_0 = 26700$ cm.

Mit Hülfe von c lässt sich dann auch $\frac{a}{m}$ bestimmen, d. h. die zur Ueberwindung der Capillarkräfte erforderliche Arbeit bei der Ueberführung der Masseneinheit Flüssigkeit in die Dampfform; für Wasser wird $\frac{a_0}{m} = 25.10^8$(c.g.s). Daraus ergiebt sich weiter, dass der Druck im Innern des Wassers um 1235 Atm. grösser ist als der, welcher von aussen gegen die Oberfläche ausgeübt wird. Fick berechnete aus dem osmotischen Drucke der Lösungen den inneren Druck zu 1221 Atm.

Zum Schlusse wird nach Thomson's Methode die Grösse der Flüssigkeitsmolecüle bestimmt: der Durchmesser wird $\delta = \frac{3m\alpha}{a}$, und für Wasser $\delta = 92.10^{-9}$ cm (O. E. Meyer giebt 44.10^{-9} cm an).

Sbt.

A. Wassmuth. Ueber die Aenderung der specifischen Wärme mit der Temperatur. Monatsh. für Math. I. 473-480.

Für den Fall, dass ein Stab von der Länge l, dem Querschnitte q und dem Gewichte 1 in der Richtung von l einen Zug P erfährt, ist das thermodynamische Potential gegeben durch die Gleichung:

$$\psi = E(U-T.S) - P.l.$$

Durch Differentiation dieser Gleichung und unter Benutzung der

Gleichungen $dS = -\frac{dQ}{T}$ und $dQ = -(dU - A.P.dl)$ gelingt es, die Länge l, die Entropie S und demnächst auch den linearen Ausdehnungscoefficienten α, den Elasticitätsmodul M und die specifische Wärme C als Differentialquotienten von ψ darzustellen. Dann folgt weiter die Relation

$$\frac{1}{A.T} \cdot \frac{\partial C}{\partial P} = \left(\alpha^2 + \frac{\partial \alpha}{\partial T}\right) l,$$

aus der hervorgeht, dass sich C in Folge einer Dehnung nur unbedeutend ändert. Für die Aenderung der specifischen Wärme mit der Temperatur wird die Gleichung gefunden:

$$\frac{\partial C}{\partial T} = K_0 + K_1,$$

wo K_1 eine Constante für den betreffenden Körper bedeutet und $K_0 = 14{,}1 . \frac{M_0}{\sigma} . (b + a^2 - a\gamma)$. — ($M_0$ und σ bedeuten den Elasticitätsmodul und die Dichte bei 0°, a und b sind die Functionen von P, die in dem Ausdrucke für $\alpha = a + bt$ vorkommen; γ ist die relative Abnahme des Elasticitätsmoduls mit der Temperatur). — Ueber die Constante K_1 hat zunächst noch nichts Sicheres ermittelt werden können.

Der Verf. macht weiter die Bemerkung, dass den Beobachtungen gemäss die Abnahme des Elasticitätsmoduls mit der Temperatur für Körper mit grösserem Ausdehnungscoefficienten grösser ist, und dass diese Thatsache wohl im Einklange steht mit der aus den Formeln abgeleiteten Relation:

$$\frac{\gamma - 2\alpha}{M.\alpha} = G.\alpha^2.$$

Der Wert von G wird $6{,}3.10^6$, und hierbei ist die Zahl 6,3 bemerkenswert, die ja auch den Wert der Atomwärme darstellt.

Sbt.

E. Riecke. Beiträge zu der von Gibbs entworfenen Theorie der Zustandsänderungen eines aus einer Mehrzahl von Phasen bestehenden Systems. Gött. Nachr. 1890. 223-236.

E. Riecke. **Specielle Fälle von Gleichgewichtserscheinungen eines aus mehreren Phasen zusammengesetzten Systems.** Gött. Nachr. 1890. 342-360.

Verf. betrachtet ein System von Körpern, die in verschiedener Weise aus einer bestimmten Zahl von chemischen Componenten zusammengesetzt sind, und die sich gleichzeitig in verschiedenen Aggregatzuständen befinden. Jeden Teil des Systems, der physikalisch und chemisch homogen ist, bezeichnet er nach Gibbs als eine Phase desselben. Es bedeuten ε die gesamte Energie des Systems, η die gesamte Entropie, v das Gesamtvolumen, m'_1, m'_2, ..., m''_1, m''_2, ... die Massen der in der ersten, zweiten, ... Phase vorhandenen chemischen Componenten. Nach dem Princip von der Vermehrung der Entropie ist das System im neutralen Gleichgewicht, wenn

$$D\varepsilon - Td\eta + pdv = 0.$$

Setzt man die Aenderung der Energie $D\varepsilon = \delta\varepsilon + d\varepsilon$, wo $\delta\varepsilon$ der durch eine Aenderung von η und v, $d\varepsilon$ der durch Aenderung der Massen bewirkte Anteil der Gesamtveränderung ist, so wird

$$\delta\varepsilon = Td\eta - pdv,$$

also

$$d\varepsilon = \mu'_1 dm'_1 + \mu'_2 dm'_2 + \cdots + \mu''_1 dm''_1 + \mu''_2 dm''_2 + \cdots + \cdots = 0.$$

Die Factoren μ sind die partiellen Differentialquotienten der Energie nach den Massen und heissen nach Gibbs die Potentiale der chemischen Componenten. Wenn die Bedingung des Gleichgewichts nicht erfüllt ist, so verläuft der Process stets so, dass

$$\Sigma\mu' dm' + \Sigma\mu'' dm'' + \cdots < 0.$$

Im Gleichgewichtszustande müssen die Potentiale der einzelnen chemischen Componenten, deren Zahl k sei, in sämtlichen i Phasen je einen bestimmten constanten Wert besitzen:

$$\mu'_1 = \mu''_1 = \mu'''_1 = \cdots = \mu^i_1; \quad \mu'_2 = \mu''_2 = \mu'''_2 = \cdots = \mu^i_2; \quad \cdots$$
$$\mu'_k = \mu''_k = \mu'''_k = \cdots = \mu^i_k.$$

Dies sind $k(i-1)$ Gleichungen, zu denen i Zustandsgleichungen kommen von der Form

$$p = f'\left(T, \frac{m'_1}{v'}, \frac{m'_2}{v'}, \dots\right) = f''\left(T, \frac{m''_1}{v''}, \frac{m''_2}{v''}, \dots\right)$$
$$\dots = f^i\left(T, \frac{m^i_1}{v^i}, \frac{m^i_2}{v^i}, \dots\right).$$

Es sind aber $ik+2$ Unbekannte vorhanden: p, T und die Dichtigkeiten $\frac{m}{v}$; den Bedingungen des Gleichgewichts wird also genügt, wenn $k(i-1)+i = ik+2$, d. h. wenn $i = k+2$.

„Ist die Zahl der chemischen Componenten gleich k, so existirt ein bestimmtes System von zusammengehörigen Werten des Druckes, der Temperatur, der Dichtigkeiten $\frac{m}{v}$, bei welchem $k+2$ verschiedene Phasen sich im Gleichgewichte befinden.

Coexistenz einer grösseren Phasenzahl ist nicht möglich, da sonst die Zahl der Gleichungen die der Unbekannten übertreffen würde. Ist die Zahl der coexistirenden Phasen kleiner als $k+2$, so bleibt eine entsprechende Zahl von Variabeln unbestimmt."

Benutzt man nun ein rechtwinkliges Coordinatensystem mit den Axen p und T, so wird durch die bestimmten Werte des Drucks und der Temperatur ein Punkt A der Coordinatenebene bezeichnet, der als ein Bild für den Zustand des Systems während der Coexistenz jener $k+2$ Phasen betrachtet werden kann. Lässt man aber aus der Zahl der in A coexistirenden Phasen der Reihe nach je eine weg, so erhält man $k+2$ Curven in der Coordinatenebene, die sich im Punkte A schneiden müssen. Werden diese Curven mit c', c'', ..., c^{k+2} bezeichnet, und zwar mit c^h diejenige, längs welcher die Phase h fehlt, so ergiebt sich weiter: Zwischen den Richtungstangenten $\left(\frac{dp}{dT}\right)'$, $\left(\frac{dp}{dT}\right)''$, ..., $\left(\frac{dp}{dT}\right)^{k+2}$, welche die Curven c', c'', ..., c^{k+2} in ihrem gemeinsamen Ausgangspunkte A besitzen, bestehen $k+2$ Gleichungen, die ausdrücken, dass je eine $(k+2)$-gliedrige Determinante Null wird.

Trägt man in jedem Punkte der Curve c' senkrecht zur Ebene der p, T den zugehörigen Wert von μ'_1 auf, so entsteht eine Raumcurve A', die die Beziehung der drei Grössen p, T, μ'_1 darstellt. Die Curve A' bildet die gemeinsame Schnittlinie der

$(k+1)$Flächen f^{12}, f^{13}, ..., $f^{1,k+2}$, längs welcher je k Phasen im Gleichgewichte sind, aus deren Zahl die Phase 1 ein für allemal ausgeschlossen ist. Solcher Raumcurven sind im ganzen $k+2$ vorhanden, in jeder von ihnen schneiden sich $k+1$ Flächen; es existiren also $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$ Flächen, auf denen je k Phasen mit einander im Gleichgewichte sind.

Legt man nun durch einen Punkt B auf einer der Raumcurven, etwa A', eine Ebene parallel zur Coordinatenebene, so werden die $k+1$ von A' ausstrahlenden Flächen in $k+1$ Curven d^1 geschnitten, und auf diesen Curven sind je k Phasen im Gleichgewicht; die Phase 1 fehlt auf allen, und alle Veränderungen des Systems sind der Bedingung unterworfen, dass das Potential der ersten chemischen Componente denselben Wert behält. Die Curven d besitzen also alle Eigenschaften der Curven c, was die Neigung der Curven in ihrem Ausgangspunkte gegen die Axen der p und T betrifft. Die Fortsetzung dieser Betrachtungen führt zu dem Satze: „Ein System von i Phasen, in welchem die Potentiale von $k+2-i$ chemischen Componenten festgehalten werden, besitzt dieselben Eigenschaften wie ein System von $k+2$ Phasen bei unbeschränkter Veränderlichkeit der Potentiale.

Das durch diese allgemeinen Sätze gegebene Schema wird in der zweiten Abhandlung auf specielle Fälle angewandt: 1) auf die Zustandsänderungen einer einzigen Substanz, beispielsweise des Phosphors; 2) auf zwei chemische Componenten mit fünf verschiedenen Phasen, z. B. zwei Substanzen, die chemisch nicht auf einander wirken, und die sich im flüssigen Zustande weder mischen noch lösen; 3) auf zwei Componenten, die mit einander ein Kryohydrat bilden.

Es zeigt sich dabei, dass zur vollständigen Beschreibung der Erscheinungen noch eine gewisse Ergänzung des Schemas erforderlich ist. Es existiren ausser den (die Räume mit bestimmten coexistirenden Phasen trennenden) Hauptgrenzen, die von den allgemeinen physikalischen Constanten abhängen, noch „Grenzen zweiter Ordnung", die von den speciellen Bedingungen des Versuchs abhängig sind. Sbt.

E. Riecke. Ueber stufenweise Dissociation und über die Dampfdichte des Schwefels. Gött. Nachr. 1890. 360-366.

Die Theorie von Gibbs wird angewandt auf den Fall, dass eine Substanz sich stufenweise spaltet, und zwar so, dass die gasförmigen Molecüle von $\mathfrak{S}$ in die Gasmolecüle $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{E}_4$ und hierauf die Molecüle $\mathfrak{T}$ in $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_3$ zerfallen. Verf. entwickelt die allgemeinen (der Raumersparnis halber hier nicht wiedergegebenen) Gleichungen, aus denen die Dichten der einzelnen gasförmigen Bestandteile sowie die Dichte des in Dissociation begriffenen Gases bestimmt werden können. Diese Gleichungen werden angewandt auf die Dissociation des Schwefels, von dem es nach den Untersuchungen von Biltz wahrscheinlich ist, dass sich bei der Verdampfung unter dem Drucke einer Atmosphäre zunächst Molecüle S_8 entwickeln, dass diese sich dann spalten in S_6 und S_2, und weiter auch die Molecüle S_6 sich auflösen in je drei Molecüle S_2. Die in Form einer Curve dargestellten Ergebnisse stimmen mit den Beobachtungen gut überein. Sbt.

E. Riecke. Das thermische Potential für verdünnte Lösungen. Gött. Nachr. 1890. 437-455.

Der Inhalt dieser Abhandlung deckt sich zum Teil mit den Untersuchungen von. Planck über verdünnte Lösungen (Wiedemann Ann. XXXII); von besonderem Interesse ist aber die Anwendung der von Gibbs eingeführten Potentiale μ (der Differentialquotienten der Energie nach den Massen). Es werden zunächst die Potentiale der Componenten eines Gasgemisches, dann diejenigen der Componenten einer verdünnten Lösung bestimmt. Die gefundenen Werte werden benutzt zur Ermittelung der Gesetze über die Erniedrigung der Dampfspannung, die Erniedrigung des Gefrierpunktes, die Dissociation in verdünnter Lösung, die Verteilung eines Stoffes zwischen zwei Lösungsmitteln und über den osmotischen Druck. Endlich wird die Potentialtheorie (unter etwas hypothetischen Voraussetzungen) auch auf die Erniedrigung der Löslichkeit und das Henry-Dalton'sche Absorptionsgesetz angewandt. Sbt.

F. Mann. Das Dulong'sche Gesetz im Lichte der mechanischen Wärmelehre. Würzburg. Physik.-med. Ges., Ber. 1890. (Sep.-Abdr. 12 S.)

Durch Anwendung des mechanischen Gesetzes der lebendigen Kraft auf die Molecularbewegung, die das Wesen der Wärme ausmacht, begründet der Verf. das empirisch gefundene Dulong'sche Gesetz von der Constanz der Atomwärme. Sbt.

P. Joubin. Rapport des travaux de dilatation et d'échauffement des métaux. Almeida J. (2) IX. 554-559.

Ist E der Elasticitäts-Coefficient eines Metalles, α sein Ausdehnungs-Coefficient, C seine specifische Wärme, D sein specifisches Gewicht, so ist der Quotient $E\alpha : CD$ nahezu constant für alle Metalle, im Mittel gleich 0,230, wie an den bekannten Zahlen bestätigt wird. Aus diesem, dem Dulong-Petit'schen Gesetze über die Atomwärme vergleichbaren Satze werden mehrere theoretische Folgerungen abgeleitet. Lp.

E. Kobald. Ueber eine allgemeine Form der Zustandsgleichung. Wiener Ber. XCIX. 817-825.

Die Arbeit beschäftigt sich mit dem allgemeinen Falle, wo die Entropie gegeben ist in der Form $Af(\tau+u)$. Hierin bedeutet A das Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit, τ eine Function, die nur von der absoluten Temperatur, u eine, die nur vom Volumen abhängt. Es wird die Zustandsgleichung für diesen Fall aufgestellt und discutirt. Durch Specialisirung der drei Functionen f, τ, u ergiebt sich eine Reihe bekannter Resultate.

Br.

A. Walter. Ueber einige neuere Ansichten auf dem Gebiete der physikalischen Chemie. Pr. Realgymn. Tarnowitz.

Die Arbeit ist nicht, wie man nach dem Titel erwarten

könnte, eine historische oder kritische Besprechung. Die neueren Ansichten gehören vielmehr dem Verf. selbst an. Sie beschäftigen sich im wesentlichen mit der chemischen Energie und ihrer Bedeutung für die mechanische Wärmetheorie. Das Streben des Verfassers geht dahin, für die in Betracht kommenden Grössen und Probleme, unabhängig von geometrischen Vorstellungen über die Materie, rein analytische Formulirungen und Gesetze aufzustellen. Einige solche, ihrem Wesen nach vollständig neuartige Formeln werden mitgeteilt, jedoch ohne Ableitung. Weiter auf den Inhalt einzugehen, ist im Auszuge nicht möglich.

Br.

P. Duhem. Sur le déplacement de l'équilibre. Toulouse Ann. IV. N. 1-9.

Einfacher Beweis zweier thermodynamischen Gesetze von Van t'Hoff und Robin. Der Verf. beweist die Gesetze in der Form: 1) Erhöht man die Temperatur eines im Gleichgewicht befindlichen Systems, so tritt ein neuer Gleichgewichtszustand ein, indem die Parameter, welche den Zustand des Systems bestimmen, sich ändern. Aenderten sie sich um dieselben Grössen, während die Temperatur constant bliebe, so würde die daraus folgende Aenderung des Systems Wärme frei gemacht haben. (Erniedrigt man die Temperatur, so ist es umgekehrt.) 2) Wenn man bei constanter Temperatur den äusseren Druck auf ein System vermehrt, so tritt ein neuer Gleichgewichtszustand ein, indem die Parameter, welche das System bestimmen, neue Werte annehmen. Würden sie dieselben Werte annehmen, ohne dass der Druck sich änderte, so müsste sich das Volumen des Systems verringern. (Vermindert man den Druck, so ist es umgekehrt.)

Br.

P. Duhem. Sur les dissolutions d'un sel magnétique. Ann. de l'Éc. Norm. (3) VII. 289-322.

Es werden die Grundgleichungen für das thermodynamische Potential der Lösung eines magnetischen Salzes aufgestellt. Unter der Annahme, dass die Concentration nach Zeit und Ort

sich ändere, werden darauf in mühsamen Rechnungen die Bedingungen für das Gleichgewicht discutirt. Zum Schlusse wird angegeben, wie man die Beobachtung einer magnetischen Lösung in communicirenden Röhren, deren eine zwischen die Pole eines Magneten gebracht wird, zur Prüfung der Theorie verwenden könne. Br.

Ph.-A. Guye. La constitution moléculaire des corps au point critique. C. R. CX. 141-144.

Bezeichnet für ein Gas M das Moleculargewicht, R das specifische moleculare Brechungsvermögen und k den kritischen Coefficienten, so ist der Ausdruck $MR.\frac{1}{k}$ für alle Gase nahezu constant. Experimentelle Bestätigungen werden angeführt. Man kann das Gesetz auch benutzen, um das Moleculargewicht im kritischen Punkte zu berechnen. Eine grössere Abhandlung über denselben Gegenstand wird in Aussicht gestellt. Br.

J. Stefan. Ueber die Verdampfung und die Auflösung als Vorgänge der Diffusion. Wiedemann Ann. XLI. 725-747.

Durch die Einführung von molecularen Grössen, wie Anzahl der Molecüle in der Volumeneinheit, Molecülmasse u. s. w., an Stelle von Dichte, Concentration u. s. w. in die bekannten Formeln werden Verdampfung und Auflösung von einheitlichen Gesichtspunkten aus als Vorgänge der Diffusion dargestellt. Br.

K. Fuchs. Ueber Verflüssigung bei der kritischen Temperatur. Exner Rep. XXVI. 497-501.

„Wenn man ein Gas bei der kritischen Temperatur oder, besser gesagt, sehr nahe bei der kritischen Temperatur verflüssigt, dann zeigt sich die auffallende Erscheinung, dass die erscheinende Flüssigkeit sofort einen bestimmten Teil des Gesamtvolumens ausmacht, dass also ihr Volumen nicht vom Werte

$v=0$ an allmählich zunimmt.“ Diese Erscheinung folgert der Verf. aus der Van der Waals'schen Formel. Lp.

K. Fuchs. Ein neues Element der Verdampfungswärme. Exner Rep. XXVI. 345-349.

Der Verfasser zieht aus seinen Betrachtungen den Schluss, „dass die erfahrungsmässige Verkleinerung der Cohäsionsconstante c bei steigender Temperatur ein neuer Wärme verzehrender Factor ist“. Lp.

K. Kraïewitsch. Ueber die latente Siedewärme und ihre Abhängigkeit von anderen beobachtbaren physikalischen Grössen. Exner Rep. XXVI. 581-603.

Man bezeichne mit r die Siedewärme unter dem Drucke p in Kilogrammen und bei der absoluten Temperatur T, mit P das Moleculargewicht, mit d das specifische Gewicht bei 0°, mit c und α die specifische Wärme und den kubischen Ausdehnungscoefficienten beim Siedepunkte, mit M und N zwei Constanten, deren gemeine Logarithmen 0,36222 und 6,27983 sind, so stellt der Verf. die Formel auf

$$r = \frac{2T}{P}\cdot M \log \frac{Ndc}{p\alpha},$$

welche unter gewissen Voraussetzungen in die von Berthelot und die von Schiff für r gegebenen Relationen übergehen. Im ersten Capitel wird die Anwendung dieser Formel auf mehrere Flüssigkeiten dargethan; im zweiten dagegen werden die theoretischen Gründe auseinandergesetzt, welche zu ihrer Entwickelung gedient haben. Lp.

M. Demjanoff. Eine Notiz über Fabrikschornsteine aus Ziegeln. Nachrichten des prakt. Technologischen Instituts zu St. Petersburg. 1890. 1-32. (Russisch.)

Der Verfasser geht von der Gleichung der lebendigen Kraft und den bekannten Formeln der mechanischen Wärmetheorie aus und macht die Voraussetzung, dass die Bewegung der Gase im

Schornsteine ohne Wärmeverlust vor sich geht. Dadurch gelangt er zur Relation

$$\omega\sqrt{h} = \alpha$$

zwischen der Höhe h des Schornsteines und der Fläche ω seines Querschnitts; α bedeutet hier eine gewisse, durch die Bedingungen des Problems bestimmte Zahl.

Indem er den Wert Δ der Gasmenge bildet, welche in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit des Schornsteinquerschnittes fliesst, findet er noch:

1) dass kein absolutes Maximum der Grösse Δ in der Heizung, insofern dieselbe von der Temperatur abhängt, existirt;

2) dass Δ in der Heizung nur relative Maxima haben kann, welche von dem in der Heizung herrschenden Verdünnungsgrade abhängen;

3) dass in den ersten Augenblicken nach dem Einwerfen frischen Brennmaterials die Heizung in Bezug auf die in sie hineindringende Luftquantität sich in weniger günstigen Bedingungen befindet, als vor dem Anschüren;

4) dass hohe Schornsteine besser die relativen Maxima sichern als niedrige.

Indem der Verf. weiter die Bedingungen der Festigkeit des Schornsteins gegen Winddruck betrachtet, gelangt er zum folgenden Ausdrucke:

Beim Heizen mit Steinkohle soll:

$$h = 0{,}046\left(\frac{Qn}{p}\right)^{\frac{2}{5}},$$

beim Heizen mit Holz soll

$$h = 0{,}06\left(\frac{Qn}{p}\right)^{\frac{2}{5}}$$

sein, wo Q in Kubikmetern die Menge der für das Verbrennen des Brennmaterials per Stunde notwendigen Luft ist, p der Winddruck per Quadratmeter Fläche, n der unschädliche Druck per Quadratmeter der Ziegelmauer. Bb.

H. Lorenz. Theorie der Luftcompression mit Einspritzkühlung. Civiling. (2) XXXVI. 109-120.

Die Abhandlung beschäftigt sich mit der Theorie der Druckluftanlagen, bei welchen die Abführung der bei der Compression auftretenden Wärme durch Einspritzung von Wasser geschieht. Da dieses Verfahren zunächst nur bei solchen Anlagen angewandt wurde, bei welchen, wie bei Gesteinsbohrmaschinen für Tunnelbauten und Bergwerksanlagen, unbegrenzte Mengen von Energie zu Gebote standen, so legte man früher kein besonderes Gewicht auf eine exacte Theorie und eine genaue Berechnung des Wirkungsgrades einer solchen Anlage.

In neuerer Zeit jedoch, wo sich die Druckluftanlagen als Mittel zur Kraftübertragung immer mehr Bahn brechen, ist ein möglichst hoher Wirkungsgrad und damit eine genauere Theorie wünschenswert.

Der Verf. bespricht zuerst kurz die frühere, auf Annahme einer adiabatischen Zustandsänderung beruhende Theorie und entwickelt dann seine eigene Theorie.

Zunächst wird die Gleichung zwischen der Aenderung der Temperatur und des Volumens aufgestellt. Unter Voraussetzung polytropischer Compression wird der Wirkungsgrad berechnet und das Gesetz der Kolbenbewegung ermittelt, welches einer solchen entsprechen würde. Zum Schlusse wird die Kühlwassermenge bestimmt. F. K.

R. Mehmke. Graphische Tafel zur Ermittelung der Leistungen von Locomotiven. Centralbl. der Bauverw. X. 418.

Man kann unter Benutzung der Tafel unmittelbar die Werte der verschiedenen bei den Locomotiven in Betracht kommenden Grössen ablesen. F. K.

F. Grashof. Theoretische Maschinenlehre. III, 5. Hamburg u. Leipzig. L. Voss. 641-892.

Diese Schlusslieferung des inhaltreichen Werkes über die Kraftmaschinen bringt den Abschluss der Theorie der Dampfmaschinen und dann (S. 745-891) die Theorie der Luftmotoren.

Sbt.

D. S. Jacobus. General solution of the transmission of force in a steam engine, including friction, acceleration and gravity. Annals of Math. V. 69-83.

Verf. giebt eine allgemeinere Lösung des Problems, als sie bisher zu Gebote stand. Er setzt voraus: dass der Mittelpunkt der Kurbelwelle nicht notwendig auf der Linie liegt, auf der sich der Gelenkzapfen bewegt; dass diese Linie nicht notwendig horizontal oder vertical ist; dass der Schwerpunkt der Pleuelstange nicht notwendig auf der Linie liegt, die die Mittelpunkte des Gelenk- und Kurbelzapfens verbindet; dass die Kurbel gleichmässig rotirt; dass die Masse der sich bewegenden Teile beliebig verteilt ist; dass zwischen den bewegten Teilen Reibung vorhanden ist. Sbt.

Weitere Litteratur.

W. Wien. Die gegenwärtige Lage der Energielehre. Naturf. Ges. Bremen. LXIII. 45-47.

N. Pirogow. Ueber das Gesetz Boltzmann's. Phys. Ges. St. Petersburg. XXII. 1890. 44-83. (Russisch.) Siehe Exner's Repertorium. XXVII.

N. Pirogow. Die Grundlehren der Thermodynamik. Phys. Ges. St. Petersburg. XXII. 1890. 173-220. (Russisch.)

B. Galitzine. Ueber die kritische Temperatur. Phys. Ges. St. Petersburg. XXII. 1890. 264-268. (Russisch.)

Zaremba. Sur un problème concernant l'état calorifique d'un corps solide homogène indéfini. Thèse. Paris. Gauthier-Villars et Fils. 73 S. 4°.

N. L. S. Carnot. Reflexions on the motive power of heat, etc. From the original French. Edited by R. H. Thurston. London. Macmillan and Co. [Nature XLII. 365-366.]

R. H. Thurston. Heat as a form of energy. Boston.

E. Pochmann. „Wärme ist nicht Kälte und Kälte ist nicht Wärme". Wärme-Theorie für die gesamte organische und unorganische Welt. Linz. Fink. 25 S. 8°.

B. Gastheorie.

E. P. Culverwell. Note on Boltzmann's kinetic theory of gases and on Sir W. Thomson's address to Section A, British Association, 1884. Phil. Mag. (5) XXX. 95-99.

Boltzmann hat gezeigt, dass bei jedwedem Kraftgesetz zwischen den Teilchen eines Gases die Configuration des Gases ungeändert bleibt, falls die Anzahl der auf eine besondere Weise sich bewegenden Teilchen zu e^{-hI} proportional ist, wo I die gesamte Energie eines auf jenem Wege sich bewegenden Teilchens ist. Dies wird von dem Autor eine permanente Configuration genannt. Der Beweis dafür, dass ein System von Teilchen, das irgend welche gegebenen Anfangsbedingungen hat, im Verlaufe der Zeit sich dieser permanenten Configuration nähert, ist nie gegeben worden, obgleich Thomson in dem angezogenen Vortrage geäussert hat, er glaube, es sei streng zu beweisen, dass die ganze Translations-Energie eines vollständig elastischen Moleclüls endlich durch wiederholtes Anprallen in Schwingungs-Energie von immer höheren Knotenteilungen umgewandelt werden müsse, wenn jedes Molecül ein continuirlicher elastischer Körper ist. Wenn dieser Satz bewiesen wäre, so schlösse er wahrscheinlich in sich, dass Boltzmann's permanente Configuration diejenige ist, welche alle dynamischen Systeme endlich annehmen. Der Verf. behauptet jedoch, es sei unmöglich zu beweisen, dass, wie auch immer die Anfangsbedingungen seien, die Wirkung wiederholter intermolecularer Anpralle dahin ziele, die Energie unter den verschiedenen Graden der Freiheit auszugleichen, und zwar wegen der Eigenschaft der Umkehrbarkeit, welche alle vollständigen und rein dynamischen Systeme erfüllen. Der permanente Zustand muss eine Folge nicht der gegenseitigen Einwirkung der Molecüle unter einander, sondern derjenigen zwischen den Molecülen und dem Aether sein.

Gbs. (Lp.)

S. H. BURBURY. On some problems in the kinetic theory of gases. Phil. Mag. (5) XXX. 298-317.

In dem anfänglichen Teile dieses Aufsatzes wird das Gas entweder als in Ruhe oder als in einfacher Translation befindlich angenommen, Zustände, von denen jeder als der normale angesehen werden kann. Ein weiter Gebrauch wird von zwei Variabeln V, ϱ gemacht, die wie folgt definirt werden: V bezeichnet die Vectorgeschwindigkeit des gemeinschaftlichen Schwerpunktes zweier Molecüle, deren Massen M, m sind, und wird ihre gemeinsame Geschwindigkeit genannt. Bezeichnen R, r die Geschwindigkeit bezw. von M, m bezüglich dieses Schwerpunktes, so bedeutet ϱ die relative Geschwindigkeit von M und m derart, dass $MR = mr$, $\varrho = R+r = \frac{M+m}{m} R = \frac{M+m}{M} r$. Es wird gezeigt, dass in Maxwell's Verteilung, wenn wir alle Paare von Molecülen M und m betrachten, welche die gemeinsame Geschwindigkeit V und die relative Geschwindigkeit $R+r$ haben, für ein gegebenes V alle Richtungen von R oder r gleich wahrscheinlich sind; und dass, wenn die Molecüle bei ihrem gegenseitigen Treffen wie elastische Kugeln anprallen, dann für eine gegebene Richtung der relativen Geschwindigkeit vor dem Treffen alle Richtungen nach dem Treffen gleich wahrscheinlich sind. Folgende zwei Sätze werden bewiesen: Jede Verteilung von Geschwindigkeiten unter den Molecülen, welche der Bedingung genügt, dass für ein gegebenes V alle Richtungen von R gleich wahrscheinlich sind, bleibt ungestört durch Anpralle oder durch gegenseitige Einwirkung der Molecüle und ist daher bei Abwesenheit äusserer Kräfte stationär. Und umgekehrt, keine irgendwie geartete Verteilung von Geschwindigkeiten unter den Molecülen bleibt ungestört durch Anpralle oder gegenseitige Einwirkung der Molecüle, wofern sie nicht der Bedingung genügt, dass für ein gegebenes V alle Richtungen von R gleich wahrscheinlich sind. Die Beweise erfolgen zuerst unter der Voraussetzung, dass die Molecüle als elastische Kugeln zu behandeln sind, und dann unter der Annahme, dass die beiden Molecüle M und m auf einander mit endlichen Kräften einwirken. Der Beweis fliesst

aus dem Nachweise, dass $\frac{dH}{dt} = 0$, wo

$$H = \iiint dx\,dy\,dz\,\{F(\log F - 1) + f(\log f - 1)\}.$$

Hierin bedeutet $F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ die auf die Volumeneinheit kommende Anzahl von Molecülen von der Masse M, deren Geschwindigkeiten durch Linien vom Ursprunge nach Punkten innerhalb des Elementes $dx\,dy\,dz$ in (x, y, z) dargestellt werden, $f(x', y', z')\,dx'\,dy'\,dz'$ die entsprechende Zahl für die m. Danach werden die Störungen betrachtet, bei denen das Gas durch die Einwirkung äusserer Ursachen in einem von dem normalen Zustande verschiedenen Verhalten verharrt. Die auf die Volumeneinheit kommende Anzahl von Molecülen von der Masse M mit Geschwindigkeiten, die durch Linien vom Ursprunge nach Punkten innerhalb des Volumenelementes $\omega^2 d\omega dS$ (bestimmt durch den Fahrstrahl ω und das Kugelflächen-Element dS) dargestellt werden, wird in der Form angenommen $F(\omega)\omega^2 d\omega dS$, wo

$$F(\omega) = N\left(\frac{hM}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-hM\omega^2}\{1 + \Sigma C_i Y_i\}.$$

Hierin sind die Y_i auf den Ursprung bezogene Kugelfunctionen, die C_i Functionen von ω, und $\Sigma C_i Y_i$ ist im Vergleich zur Einheit eine kleine Grösse. In den behandelten Aufgaben sind die Kugelfunctionen nur von der ersten und zweiten Ordnung. Die Beispiele, auf welche die Anwendungen sich beziehen, betreffen die Diffusion, die Wärmeleitung in einem einzigen Gase, Zähigkeit eines einzigen Gases, Beziehung der Diffusion u. s. w. zur Temperatur. Das folgende Ergebnis werde angeführt: Unter der Annahme, dass die Molecüle als elastische Kugeln behandelt werden dürfen, variirt das Verhältnis der Wärmeleitung zwischen Punkten gleichen Drucks, aber ungleicher Temperatur, umgekehrt wie zwischen zwei Systemen mit demselben Drucke und direct wie zwischen zwei Systemen mit derselben Dichte, proportional der Quadratwurzel aus der absoluten Temperatur. Gbs. (Lp.)

P. G. Tait. On the foundations of the kinetic theory of gases. IV. Edinb. Trans. XXXVI. 257-272.

Von dieser Abhandlung war bisher nur ein Auszug in den Edinb. Proc. veröffentlicht; sie bringt eine Fortsetzung der Untersuchungen des Verfs. über die Frage. Cly. (Lp.)

A. RITTER. Beitrag zur Theorie der adiabatischen Zustandsänderungen. Dritte Abteilung. Wiedemann Ann. XL. 356-369.

Den früheren Untersuchungen (F. d. M. XXI. 1889. 1193) war die Hypothese der discontinuirlichen Zustandsänderung zu Grunde gelegt, und die erhaltenen Gleichungen waren sowohl auf den Fall der Compression als den der Expansion angewandt worden. Dabei war die Frage, bis zu welcher Grenze eine solche Anwendung zulässig sei, unerledigt geblieben. Verf. geht nun von der Annahme einer continuirlichen Zustandsänderung aus und betrachtet die discontinuirliche Aenderung als einen Grenzfall der ersten insofern, als die zur Aenderung notwendige Zeit dann bis auf 0 abnimmt. Es ergiebt sich, dass die Hypothese der discontinuirlichen Aenderung auf die Compression unbedenklich angewandt werden kann, aber nicht auf die bei der rückgängigen Kolbenbewegung eintretende Expansion.

Es wird ferner die Geschwindigkeit berechnet, die der Druck der comprimirten Luft dem zurückweichenden Kolben erteilen würde, sowohl für den Fall, dass kein äusserer Gegendruck vorhanden ist, als unter Berücksichtigung desselben; dabei ergiebt sich, dass selbst bei bedeutender Grösse des Ueberdrucks die Wirkung des atmosphärischen Gegendrucks nicht vernachlässigt werden dürfte. Sbt.

N. SCHILLER. Ueber die verschiedenen Formen der Gleichung des gasförmigen Zustandes, wie dieselben sich nach den Experimenten Thomson's und Joule's über das Abkühlen der Gase beim Ausfliessen ergeben. Arbeiten der VIII. Versammlung der russ. Naturforscher und Aerzte. 1890. St. Petersburg. Physik. 24-29.

Indem der Verf. annimmt, dass die Geschwindigkeit des

Ausfliessens gering genug ist, um die Veränderung der Energie der sichtbaren Bewegung vernachlässigen zu können, und noch voraussetzt, dass dem Gase dabei keine Wärme weder mitgeteilt noch entzogen wird, leitet er folgende allgemeine Gleichung für den Zustand des Gases ab:

$$v = \theta\left(\int \frac{C}{A}\frac{n}{\theta^3}\,d\theta + f(p)\right),$$

$$C = \theta^2 F(\theta^3 - 3np),$$

wo die Buchstaben folgende Bedeutungen haben: v ist das Volumen der Gewichtseinheit des Gases, p der Druck, θ die absolute Temperatur, C die Wärmecapacität des Gases bei constantem Drucke, $\frac{1}{A}$ das mechanische Wärmeäquivalent, n eine Constante, die von der besonderen Beschaffenheit des Gases abhängt, F und f sind willkürliche Functionen. Bb.

N. Schiller. Ueber eine mögliche, aus den Joule-Thomson'schen Abkühlungsversuchen herzuleitende Form der Zustandsgleichung für Gase. Wiedemann Ann. XL. 149-156.

Aus den Abkühlungsversuchen von Joule und Thomson, die zwischen den Druck- und Temperaturänderungen dp und $d\theta$ die Beziehung $d\theta = \frac{n}{\theta^2}dp$ ergeben, wird folgende Zustandsgleichung abgeleitet:

$$v = \frac{R.\theta}{p} - \frac{n.C_0}{3A.\theta^2}.$$

(C_0 bedeutet die Wärmecapacität bei constantem Druck, und zwar für einen gewissen Druck p_0 und eine gewisse Temperatur θ_0; A ist das Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit). Giebt man einer bei der Integration auftretenden willkürlichen Function $f(p)$ statt der Form $\frac{R}{p}$ die andere $\frac{R}{p}+\gamma$, wo R und γ Constanten bedeuten, so heisst die Zustandsgleichung:

$$v = \frac{R.\theta}{p} - \frac{n.C_0}{3A\theta^2} + \gamma.\theta.$$

Die Clausius'sche Gleichung lautet in einer der vereinfachten Formen:

$$v = \frac{R\theta}{p} - \frac{C}{R.\theta^2} + \alpha.$$

Der Unterschied liegt nur darin, dass α durch $\gamma.\theta$ ersetzt ist; das von den Capillarkräften herrührende Glied ist in beiden Gleichungen von derselben Form. Die etwas abgeänderte Clausius'sche Gleichung, die in vollständiger Form also lauten würde:

$$\left(p + \frac{b}{\theta(v+\beta)^2}\right).(v - \gamma.\theta) = R\theta,$$

entspricht durchaus den Joule-Thomson'schen Versuchen, während die Gleichung von Van der Waals

$$\left(p + \frac{b}{v^2}\right)(v - \alpha) = R.\theta,$$

oder einfacher:

$$v = \frac{R\theta}{p} - \frac{b}{R\theta} + \alpha$$

grössere Abweichungen ergiebt.

Nach den Untersuchungen von Natanson, der die Versuche von Joule und Thomson wiederholte (Wiedemann Ann. XXXI), wäre

$$d\theta = \frac{a + bp}{\theta^2} dp;$$

im Einklange mit diesem Ergebnis stände folgende Form der Zustandsgleichung:

$$\left(p + \frac{\lambda + \mu p}{\theta(v+\beta)^2}\right).(v - \gamma.\theta) = R.\theta.$$

Sbt.

B. Galitzine. Ueber das Dalton'sche Gesetz. Wiedemann Ann. XLI. 588-626, 770-800; Gött. Nachr. 1890. 22-29; Diss. Strassburg. 160 S. 8°.

Nach einer historischen Uebersicht über die früheren auf das Dalton'sche Gesetz bezüglichen Arbeiten beschreibt der Verf. die Experimentaluntersuchungen, die er im Interesse der Frage nach der Anwendbarkeit und des Gültigkeitsbereiches jenes Gesetzes angestellt hat. Es wurde die Spannkraft des gesättigten

Dampfes von Wasser, Aethyläther und Chloräthyl in lufterfüllten Räumen untersucht, und aus diesen Versuchen ergab sich: 1) dass z. B. die Spannkraft des Wasserdampfes in Luft sich von derjenigen im leeren Raume auch bei Temperaturen bis 100° nur wenig unterscheidet; 2) dass die Absorption des Wasserdampfes durch die Gefässwände in langen und engen Gefässen dessen Spannkraft beträchtlich vermindert. (Hierin hatte schon Regnault den Grund für die beobachteten Abweichungen vom Dalton'schen Gesetze gesehen.) Versuche über die kritische Temperatur von Gasgemischen (Aceton mit Aethyläther sowie Schwefelkohlenstoff mit Aethyläther in verschiedenen Mischungsverhältnissen) führten zu dem Ergebnis, dass die beobachteten Beträge, um welche die kritische Temperatur bei der Anwesenheit eines anderen Gases erniedrigt wurde, erheblicher waren als die nach einer Formel von Pawlewski berechneten Werte.

Die bei den Gasen beobachteten Abweichungen vom Mariotte-Gay-Lussac'schen sowie vom Dalton'schen Gesetze haben einen doppelten Grund: zunächst die innere Cohäsion, zu der bei Gasgemischen noch eine „wechselseitige Cohäsion" (Einwirkung der Molecüle der verschiedenen Gasarten auf einander) hinzukommt; sodann die räumliche Ausdehnung der Molecüle, die die mittlere Weglänge verkleinert und den Druck des Gases etwas erhöht (also von entgegengesetzter Wirkung ist wie die innere Cohäsion). In dem theoretischen Teile der vorliegenden Arbeit sucht nun der Verf. mit Hülfe der kinetischen Gastheorie das Verhalten von Gasgemischen zu bestimmen, was für einfache Gase ja schon von mehreren Autoren geschehen ist. Für die innere Cohäsion eines einfachen Gases hat Clausius die Formel gegeben:

$$A = \frac{a}{T} \cdot \frac{1}{\left(\frac{v}{v_0} + \beta\right)^2}.$$

Hier bedeuten a und β Constanten, T ist die absolute Temperatur, v das Volumen, v_0 dasjenige bei 0°. Wenn nun die Indices 1 und 2 sich auf die einzelnen Bestandteile eines Gasgemisches beziehen, und wenn z. B. A_{21} die Grösse bedeutet, um welche der Partialdruck des zweiten Gases durch die wech-

seitige Cohäsion zum ersten Gase vermindert wird, so sind die Resultate der vorliegenden Untersuchung durch folgende Gleichungen auszudrücken:

$$A_{22} = \frac{a_2}{T} \cdot \frac{1}{\left(\frac{v}{(v_2)_0} + \beta_2\right)^2}; \quad A_{21} = \frac{a_{21}}{T} \cdot \frac{1}{\left(\frac{v}{(v_2)_0} + \beta_{21}\right)^2};$$

$$A_{11} = \frac{a_1}{T} \cdot \frac{1}{\left(\frac{v}{(v_1)_0} + \beta_1\right)^2}; \quad A_{12} = \frac{a_{12}}{T} \cdot \frac{1}{\left(\frac{v}{(v_1)_0} + \beta_{12}\right)^2}.$$

Dabei ist

$$a_{21} = \sqrt{a_1 . a_2} \cdot \frac{(v_1)_0}{(v_2)_0}, \quad a_{12} = \sqrt{a_1 . a_2} \cdot \frac{(v_2)_0}{(v_1)_0},$$

$$\beta_{21} = \sqrt{\beta_1 . \beta_2} \cdot \frac{(v_1)_0}{(v_2)_0}, \quad \beta_{12} = \sqrt{\beta_1 . \beta_2} \cdot \frac{(v_2)_0}{(v_1)_0}.$$

Nachdem auch der Einfluss der Molecularausdehnung theoretisch bestimmt ist, erhält der Verf. folgende Schlussformeln für den Partialdruck p_1 und p_2 eines jeden der beiden Gase:

$$(p_2 + A_{22} + A_{21}) \cdot \left(\frac{v}{(v_2)_0} - b_2 - b_{21}\right) = R_2 . T,$$

$$(p_1 + A_{11} + A_{12}) \cdot \left(\frac{v}{(v_1)_0} - b_1 - b_{12}\right) = R_1 . T.$$

b_1 und b_2, R_1 und R_2 sind für jedes einzelne Gas als bekannt anzusehen; b_{12} und b_{21} sind durch folgende Gleichungen, in denen m_1 und m_2 die Massen der Molecüle bedeuten, bestimmt;

$$b_{21} = \frac{(v_1)_0}{(v_2)_0} \cdot \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{2m_1}} \cdot \left(\frac{\sqrt[3]{b_1} + \sqrt[3]{b_2}}{2}\right)^3,$$

$$b_{12} = \frac{(v_2)_0}{(v_1)_0} \cdot \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{2m_2}} \cdot \left(\frac{\sqrt[3]{b_1} + \sqrt[3]{b_2}}{2}\right)^3.$$

Die Prüfung der Theorie an Beobachtungsergebnissen von Andrews, Guglielmo und Musina, sowie von Braun zeigt befriedigende Uebereinstimmung mit den gefundenen Werten.

Für die durch Anwesenheit eines anderen Gases geänderte kritische Temperatur ergiebt sich die Formel:

$$T_2'^2 = \frac{8\,(a_2 + a_{21})}{27\,(b_2 + b_{21} + \beta) R_2}, \quad \text{wo} \quad \beta = \frac{a_2 \beta_2 + a_{21} . \beta_{21}}{a_2 + a_{21}}.$$

Sbt.

A. J. SWART. De wetten der dissocieerende gassen. Diss. Hoorn. Kapteyn & Co. 132 S.

Die Dissertation ist als Beantwortung einer Preisfrage entstanden, die von der naturphilosophischen Facultät der Universität zu Amsterdam ausgeschrieben war.

Sie handelt über die Dissociationsgesetze in Gasen mit Berücksichtigung des Volumens und der Attraction der Molecüle. Der erste Abschnitt giebt einen historischen Ueberblick über den Gegenstand und behandelt dabei die späteren Untersuchungen über die Abweichungen von dem Boyle-Gay-Lussac'schen Gesetze. In den folgenden Abschnitten entwickelt der Verfasser seine eigenen theoretischen Untersuchungen, welche sich auf die Van der Waals'sche Theorie stützen. So behandelt er nach einander die Gleichung der Isothermen und die Anwendung auf die Geschwindigkeit des Schalles, auf die Spannung des gesättigten Dampfes und der specifischen Wärme. Die Resultate der mit vieler Sorgfalt entwickelten Formeln werden mit den Versuchsergebnissen verschiedener Physiker und Chemiker verglichen und die Abweichungen erklärt. G.

G. GROSS. Zur Diffusion der Gase. Wiedemann Ann. XL. 424-437. (Auszug aus Diss. Dresden 1889).

Es wird eine Formel für den Diffusionscoefficienten aufgestellt unter der Annahme, dass eine Flüssigkeit in ein Gas verdampfe, und gezeigt, dass die neue Formel das vorliegende Beobachtungsmaterial besser darstellt, als die von O. E. Meyer. Die Betrachtung wird dann erweitert auf den allgemeinen Fall, wo ein Flüssigkeitsgemisch in ein Gasgemisch verdampft.

Br.

A. PAZIENTI. Considerazioni generali intorno alla termodinamica. (Continuazione). Ven. Ist. Mem. XXIII. 5-7, 115-117, 131-133, 147-150.

Die Arbeit enthält vergleichende Untersuchungen der auf theoretischem und experimentellem Wege gewonnenen Resultate,

sofern sie die Ausdehnung der Gase und die Fortpflanzung der Schallwellen in gasförmigen Körpern betreffen. Sbt.

J. Arbes. Die Grundformeln der dynamischen Gastheorie mit Rücksicht auf die Schallgeschwindigkeit in der Luft. Komotau. 17 S. 8°.

J. Lemoine. Calcul de l'accroissement de l'énergie interne de l'unité de masse d'un gaz qui passe de la pression p à la pression p' sans travail extérieur et sans variation de température. Almeida J. (2) IX. 99-100.

C. Wärmeleitung und Wärmestrahlung.

P. Appell. Sur la théorie de la chaleur. C. R. CX. 1061-1063.

Bei den Problemen der Wärmeleitung lässt sich mittels der Fourier'schen Formeln die Temperatur für jeden folgenden Augenblick berechnen, wenn sie für einen Anfangszustand gegeben ist. Hier wird nun (für ein einfaches Beispiel) untersucht, ob dieser Anfangszustand als die Folge eines bestimmten früheren Zustandes angesehen werden kann. Verf. findet, dass dies nur dann zutrifft, wenn die anfängliche Temperaturverteilung eine ganze, transcendente Function der Coordinaten ist.

Es folgen dann noch einige Bemerkungen über die Gleichung $\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, oder, wie Verf. sie schreibt:

$$\delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Wenn $f(x, y)$ eine Lösung der Gleichung ist, so sind auch $f(ax+b, a^2y+c)$ und $\frac{1}{\sqrt{y}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4y}} f\left(\frac{x}{y}, -\frac{1}{y}\right)$ Lösungen derselben.

Jede in Bezug auf x und y ganze Lösung ist linear zusammengesetzt aus Polynomen $V_\nu(x, y)$, die definirt sind durch die Identität:

$$e^{ax+a^2y} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{a^\nu}{\nu!} V_\nu(x, y).$$

Endlich gilt (dem Green'schen Satze in der Potentialtheorie analog) die Gleichung

$$\iint (u\delta' v - v\delta u)\,dx\,dy = \int \left(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\right) dy - u.v\,dx,$$

wo $\delta' v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial y}$. Sbt.

M. J. Boussinesq. Calcul des températures successives d'un milieu homogène et athermane indéfini, que sillonne une source de chaleur. C. R. CX. 1242-1244.

Wenn eine Wärmequelle ein unendlich ausgedehntes homogenes und athermanes Mittel von m Dimensionen durchschreitet, dabei zur Zeit τ sich an der Stelle $(\xi, \eta, \ldots)$ befindet und für die Zeiteinheit eine veränderliche, bekannte Wärmemenge $F(\tau)$ verausgabt, so ist die Temperatur zur Zeit t im Punkte $(x, y, \ldots)$, der von $(\xi, \eta, \ldots)$ die Entfernung r hat, gegeben durch die Formel:

$$u = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^m} \cdot \int_{-\infty}^{t} \frac{F(\tau)d\tau}{(\sqrt{t-\tau})^m} \cdot e^{-\frac{r^2}{4(t-\tau)}}.$$

Sbt.

O. Chwolson. Ueber die Abhängigkeit der Wärmeleitungsfähigkeit von der Temperatur. Mémoires de l'Acad. Impér. des Sc. de St. Pétersb. (7) XXXVII. N. 12. 38 p. 1890.

Cap. III dieser Arbeit enthält eine Untersuchung der stationären Wärmeverteilung in einem Cylinder für den Fall, dass die Temperatur um die Axe symmetrisch verteilt ist. An den Grundflächen ist die Temperatur gegeben als Function von r (Entfernung von der Axe). Die Lösung des Problems führt bekanntlich zu der transcendenten Gleichung

$$(1) \qquad zJ_1(z) = cJ_0(z),$$

wo $c = R\frac{h}{k}$ (R Radius des Cylinderquerschnittes, h äussere, k innere Leitungsfähigkeit); J_0 und J_1 sind die Bessel'schen Functionen mit den Indices Null und Eins. Die Wurzeln der Gleichung (1) gehen in die Lösung ein. Von besonderer Wichtigkeit ist die kleinste Wurzel z_1. Die Grösse c ist klein; für geschwärztes Kupfer und $R = 13$ ist c etwa 0,0007. Ein Näherungswert, der wohl stets genügt, ist

$$z_1 = \sqrt{\frac{8c}{4+c}}.$$

Derselbe giebt

$$J_0(z_1) = \left(\frac{4}{4+c}\right)^2,$$

wofür auch $\frac{2}{2+c}$ gesetzt werden kann.

Genauer ist

$$z_1 = \frac{12+6c}{12+6c+c^2}\sqrt{\frac{8c}{4+c}}.$$

Die übrigen Wurzeln z_i unterscheiden sich mit wachsendem i immer weniger von den Wurzeln der Gleichung $J_1(z) = 0$. Für $c = 0{,}01$ sind die Grössen: $z_2 = 3{,}83432$, $z_3 = 7{,}01702$, $z_4 = 10{,}17444$, $z_5 = 13{,}32445$, $z_6 = 16{,}4711$, $z_7 = 19{,}6166$.

Es sei t_0 die Temperatur im Centrum und t' die an der Peripherie eines Querschnittes. Für nicht äusserst schlechte Wärmeleiter ist

$$\frac{t'}{t_0} = J_0(z_1) = \left(\frac{4}{4+c}\right)^2.$$

Bb.

O. Chwolson. Ueber einen Fall von variabler Temperaturverteilung in einem Stabe. Exner Rep. XXVI. 150-157.

Um die äussere Leitungsfähigkeit eines Stabes zu studiren, kann man denselben der ganzen Länge nach bis zu einer gewissen Temperatur erwärmen und dann die allmähliche Abkühlung beobachten. Die gleichförmige Erwärmung eines langen Stabes ist nicht so ganz leicht zu erreichen, und der Verfasser

stellte sich daher die Frage, ob dieselbe nicht durch eine künstlich erzeugte, genau bekannte, stationäre, aber ungleichförmige Wärmeverteilung ersetzt werden könnte. Indem nun angenommen wird, die Temperatur des Stabes von der Länge l sei an den Enden T, in der Mitte T_0 (Ueberschuss über die der umgebenden Luft) bei der anfänglichen Wärmeverteilung, wenn der stationäre Zustand erreicht ist, berechnet der Verf. die Zeit, nach deren Verlauf die fernere Abkühlung demselben Gesetze folgt, das für den Fall der anfänglich gleichförmigen Erwärmung gilt.

Lp.

G. Jäger. Ueber die Wärmeleitungsfähigkeit der Salzlösungen. Wien. Ber. XCIX. 245-265.

Die zur Ermittelung der Wärmeleitungsfähigkeit der Salzlösungen nach verschiedenen Methoden angestellten Versuche werden beschrieben und deren Resultate mitgeteilt. Aus diesen ergiebt sich, dass sämtliche Lösungen die Wärme schlechter leiten als Wasser, und dass die Verminderung der Leitungsfähigkeit dem Salzgehalte direct proportional ist.

Verf. hat auch den von H. F. Weber aufgestellten Satz: dass durchsichtige, nicht-metallische Flüssigkeiten bei gleicher Temperatur nahezu die gleiche Leitungsfähigkeit haben, geprüft und durchaus bestätigt gefunden.

Bei der Untersuchung von Lösungsgemischen ergab sich das Gesetz: Ein in Wasser gelöstes Salzgemenge erniedrigt die Wärmeleitungsfähigkeit des Wassers um einen Betrag, welcher gleich der Summe der Verminderungen ist, die jedes einzelne Salz für sich bewirkt. Sbt.

W. Eichhorn. Ueber die Abhängigkeit der Wärmeleitung der Gase von der Temperatur. Wiedemann Ann. XL. 697-719.

Für die Temperaturcoefficienten der Wärmeleitungsfähigkeit der Gase hatte Schleiermacher (Wiedemann Ann. XXXIV) beträchtlich grössere Werte erhalten, als früher Winkelmann nach ver-

schiedenen Methoden für Luft, Wasserdampf und Kohlensäure gefunden hatte. Der Verf. hat Winkelmann's Versuche nach dessen erster Methode mit Apparaten aus dem neuen Jenenser Glas wiederholt und die Untersuchung auch auf Aethylen ausgedehnt. Er findet Winkelmann's Resultate im wesentlichen bestätigt und erklärt die Abweichungen in Schleiermacher's Zahlen dadurch, dass dieser für die Wärmeleitungsfähigkeit nicht einwurfsfreie Werte benutzt habe. Die Coefficienten sind für Luft und Wasserstoff 0,002045, Kohlensäure 0,003732, Aethylen 0,004714; oder, wenn die Zahlen mit Rücksicht auf die Veränderlichkeit der specifischen Wärmen des Glases und des Quecksilbers corrigirt werden: 0,00199; 0,00367; 0,00445. Sbt.

J. Edler. Untersuchungen über die Abhängigkeit der Strahlung der Wärme und der Absorption derselben durch Glimmerplatten von der Temperatur. Wiedemann Ann. XL. 531-560.

Verf. benutzte als strahlende Fläche ein breites Thermoelement (am besten erwies sich ein Eisen-Neusilber-Element), das an der Lötstelle erwärmt wurde, und bestimmte die Temperatur der Lötstelle aus der Intensität des erregten Stromes. Die Strahlung wurde mittels einer Thermosäule aus 45 Wismut-Antimon-Elementen gemessen. An den erhaltenen Resultaten wurden das Strahlungsgesetz von Stefan: $S = k(T_1^4 - T_0^4)$ und das von Weber: $S = k.Te^{aT}$ geprüft, und es stellte sich heraus, dass der Wert von k sich nicht constant erhielt, sondern dass der nach dem ersten Gesetz berechnete Wert etwas, der nach dem zweiten aber recht beträchtlich mit wachsender Temperatur zunahm. Dagegen bewährte sich ein vom Verf. aufgestelltes Gesetz: $S = k.t.e^{at}$ oder $\log S - \log t = \varkappa + at$ ($\varkappa = \log k$, $\alpha = a \log e$) recht gut; die Schwankungen in dem Werte von $\varkappa$ waren so klein, dass sie ganz wohl durch Beobachtungsfehler erklärt werden könnten, und auch α ergab sich als hinreichend constant. $\varkappa$ war am grössten, wenn die strahlende Fläche berusst war, kleiner, wenn sie mit Eisenoxyd, und am kleinsten, wenn sie mit Zinkweiss

überzogen war; und das stimmt mit den Beobachtungen von Melloni, Knoblauch u. a. überein. — Die Formel genügte auch den Beobachtungen von anderen Physikern: aus einer Versuchsreihe von Rossetti z. B. ergab sich $\alpha = 0{,}0020350$, $\varkappa = 0{,}46721$, und die mit diesen Zahlen aus der Formel berechneten Strahlungswerte stimmten gut mit den beobachteten Werten.

Verf. liess bei seinen Versuchen auch die Wärmestrahlen durch zwei verschieden dicke Glimmerplatten hindurchgehen, um festzustellen, ob die Absorption der Strahlen von der Temperatur der Wärmequelle abhängig sei. Es zeigte sich, dass das Verhältnis der durchgehenden Wärmemenge zu derjenigen, die der Thermosäule ohne Absorption zugestrahlt wurde, mit der Temperatur stetig zunahm. Das Ergebnis steht mit dem von Melloni im Einklange, während Knoblauch zu dem entgegengesetzten Resultate gelangt war. Sbt.

J. Tobell. Ueber die Ursachen der Lauferwärmung beim Feuern. Mitt. üb. Art. u. Gen. XXI. 401-432.

Die von dem Verfasser angestellten Untersuchungen führen mit ziemlicher Sicherheit zu dem Schlusse: Von den verschiedenen Wärmequellen, welche die Erwärmung des Laufes beim Schusse bedingen, hat die Mitteilung von Seite der Verbrennungsproducte den grössten, die Reibung zwischen Geschoss und Lauf minderen Anteil; die anderen Wärmequellen sind sehr untergeordnet und dürften für Handfeuerwaffen wohl kaum 1 Proc. der gesamten in den Lauf gehenden Wärme darthun. Insbesondere hat die von Longridge nachdrücklich verteidigte Wärmeerzeugung durch Stoss, oder die Umwandlung der Formänderungsarbeit des Laufes in Wärme, nur eine geringfügige Bedeutung. Lp.

J. Stefan. Ueber die Theorie der Eisbildung. Monatsh. f. Math. I. 1-5.

Der Verf. behandelt das Problem, den thermischen Zustand und die Dicke des Eises zu bestimmen, wenn angenommen wird,

dass von einem bestimmten Zeitpunkte ab eine auf 0° abgekühlte, ungestörte Wassermasse an ihrer Oberfläche zu frieren beginne, und wenn die Temperatur an der Oberfläche als Function der Zeit t gegeben ist. Die Aufgabe wird in der Fourier'schen Form aufgestellt und im allgemeinen Falle durch eine unendliche Doppelreihe mit zwei willkürlichen Functionen der Zeit integrirt. Die eine willkürliche Function ist die Temperatur an der Oberfläche. Die Bestimmung der anderen aus der Grenzbedingung an der unteren Fläche gelingt nur in den beiden Fällen, wo die Temperatur an der Oberfläche constant und wo sie $=\frac{A}{a}(e^{at}-1)$ ist. Im ersten Falle wächst die Eisdicke proportional der Quadratwurzel aus der Zeit, im zweiten der Zeit direct proportional. Es folgen erweiternde Betrachtungen für den Fall, wo das Wasser zu Anfang nicht auf 0° abgekühlt war. Br.

S. P. Langley and F. W. Very. The temperature of the Moon. Phil. Mag. (5) XXIX. 31-54.

Der Inhalt dieser Abhandlung hat eher ein physikalisches als ein mathematisches Interesse, ist aber in jener Beziehung von sehr grosser Bedeutung. Es dürfte sich verlohnen, das Hauptergebnis der Untersuchungen nach der Schätzung der Verfasser anzuführen, nämlich dass die mittlere Temperatur der von der Sonne belichteten Mondfläche viel niedriger ist, als man angenommen hat, und wahrscheinlich den Nullpunkt unserer Thermometer (C oder R) nicht bedeutend übertrifft. Gbs. (Lp.)

Zwölfter Abschnitt.

Geodäsie, Astronomie, Meteorologie.

Capitel 1.

G e o d ä s i e.

W. JORDAN. Handbuch der Vermessungskunde. III. 3. Auflage. Stuttgart. J. B. Metzler. VIII u. 549+49 S. 8°.

Die beiden ersten Bände der 3. Auflage des bekannten Jordan'schen Handbuchs der Vermessungskunde sind bereits in den F. d. M. XX. 1888. 1227-1228 besprochen worden. Der vorliegende III. Band behandelt die Landesvermessung und die Grundaufgaben der Erdmessung und umfasst in erweiterter Form ungefähr dasselbe Gebiet, wie der II. Band der 2. Auflage von 1877. Die ersten sieben Capitel enthalten die Technik und die mathematischen Theorien der Triangulirungen erster Ordnung mit den Coordinatensystemen für Landesvermessungen. Sie werden jedem, der mit solchen Arbeiten zu thun hat, einen ausgezeichneten Wegweiser nach jeder Richtung hin abgeben. Die in den Capiteln VIII bis XII betrachteten Grundlagen der neueren Erdmessungstheorien werden dagegen, trotzdem Verf. häufig auch eigene Wege wandelt, dem wissenschaftlichen Geodäten Helmert's Werk nicht ersetzen können. Den Schluss bilden 17 besonders paginirte numerische Hülfstafeln. Bö.

W. JORDAN. L'arte di misurare. Parte I. Calcoli di compensazione col sistema dei minimi quadrati. Traduzione sulla 3ª edizione originale di E. Ferrero e M. Albenga. Torino. Loescher. XI + 341 u. [10] S. (Die letzteren enthalten numerische Tabellen.)

A. BAULE. Lehrbuch der Vermessungskunde. Leipzig. B. G. Teubner. X u. 404 S. 8°.

Im Vergleich zu andern Lehrbüchern der Vermessungskunde (Bauernfeind, Jordan u. s. w.) besitzt das vorliegende nur einen mässigen Umfang. Der Verf., Professor an der Forstakademie zu Münden, hat sich bestrebt, in möglichst knapper Form alles zu besprechen, was für den Landmesser, Techniker, Forstmann, Militär zur Ausführung von Vermessungen zu wissen notwendig ist. Ueber die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate giebt er indessen nichts, während ein Lehrbuch der Vermessungskunde unbedingt Anweisungen für die Discussion und die Kritik der Beobachtungen geben muss. Ebenso vermisst Ref. eine Anleitung zur Berechnung und Uebertragung geographischer und geodätischer Coordinaten, Operationen, die jedem, der eigene Vermessungen an die allgemeinen Landesvermessungen nach den vorhandenen Vorschriften anzuschliessen hat, geläufig sein müssen. Wenn daher auch die Absicht des Verfs., für den Fachmann, z. B. den Landmesser, ein Lehrbuch zu schreiben, nicht erreicht ist und der Sachlage nach auf so wenig Raum nicht erreicht werden konnte, so glaubt Ref. gleichwohl, das Buch allen denen, für welche die Vermessungskunde nur Nebenfach ist, wie z. B. den Forstmännern, empfehlen zu dürfen.

Das Buch zerfällt in drei Abteilungen. Nach einer kurzen historischen und orientirenden Einleitung giebt die erste Abteilung die Lehre von den Messinstrumenten, die zweite die Lehre von den Messungen, und die dritte enthält die Elemente der Lehre vom Planzeichnen.

Für den vom Ref. eingeschränkten Leserkreis ist die erste

Abteilung besonders von Wert. Zwar werden nur Typen der Hauptinstrumente beschrieben und abgebildet, dieselben aber in ihren einzelnen Bestandteilen und deren Anwendung ausführlich behandelt. Hier ist als charakteristisch der Schlussparagraph zu erwähnen, der Vorschriften über die Behandlung der Instrumente in und ausser dem Gebrauche giebt. Den Inhalt des zweiten Abschnittes bildet die Besprechung der einfachsten geodätischen Operationen in ganz elementarer Form und durch Beispiele erläutert. Ein Anhang enthält eine Reihe von Fragen, wie sie wohl dem Forstcandidaten im Examen vorgelegt werden können, zugleich mit dem Hinweis auf die Seiten des Buches, wo dieselben behandelt sind. Bö.

J. Lüroth. Ueber die Bestimmung der Erdgestalt durch Verbindung von astronomischen und geodätischen Messungen. Jordan Z. f. V. XIX. 353-362.

Vermittelst der astronomisch bestimmten Breiten und Längen kann man die Erdoberfläche auf eine andere beliebige Fläche, die Bildfläche, derart abbilden, dass die Lotlinie des Erdortes und die Normale des entsprechenden Ortes der Bildfläche parallel werden. Die entsprechenden Meridianebenen sind dann ebenfalls parallel. Jeder Tangente in einem Erdorte O kann ferner eine Tangente im entsprechenden Punkte o der Bildfläche in bestimmter, aber willkürlicher Weise entsprechend gesetzt werden.

Um zu einer Bestimmung der Fläche zu gelangen, nimmt Verf. zunächst an, dass die Azimute entsprechender Tangenten immer gleich seien. Hierdurch kommt man schliesslich auf eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, in die die Fundamentalgrössen dritter Ordnung der Bildfläche eingehen, deren Integration dem Verf. aber nicht gelungen ist.

Führt man aber noch die weitere Bedingung ein, dass die Bogenlängen entsprechender Curven auf der Erde und auf der Bildfläche in constantem Verhältnisse stehen, so folgt, dass die Erde entweder direct oder symmetrisch der Bildfläche ähnlich ist.

Da nun der Seemann den zu fahrenden Curs einer Abbildung der Erde auf die Himmelskugel entnimmt, die unter Hinzuziehung der Compass- und Logbeobachtungen sehr nahe den eben genannten Voraussetzungen entspricht, und er so sicher zum gewünschten Ziele kommt, so lässt sich schliessen, dass die Meeresfläche nahezu Teil einer Kugelfläche ist.

Verf. nimmt ferner statt der letzten Voraussetzung über die Bogenlängen an, dass nicht nur entsprechende Tangenten gleiche Azimute haben, sondern dass auch die Azimute entfernter Orte auf der Erde und auf der Bildfläche gleich sind. Dann ist die Erde entweder der Bildfläche ähnlich, und die Lotlinien sind die Normalen der Erdoberfläche, oder die Bildfläche muss eine Kugel bezw. eine solche beliebige Fläche sein, deren Lotlinien alle durch denselben Punkt gehen.

Schliesslich macht der Verf. die Annahme, dass ausser der Gleichheit der Azimute entsprechender Tangenten vorausgesetzt werde, dass die Bildfläche eine Rotationsfläche sei. Es ergeben sich dann entweder Gleichungen, die keine einfache Deutung zulassen, oder man wird auf die Kugel und solche beliebigen Flächen geführt, deren Lotlinien wie vorher alle durch denselben Punkt gehen.

Uebrigens hat Ref. mehrere Entwickelungen des Verfs. nicht vollständig zu verificiren vermocht, insbesondere ist ihm „eine ganz beliebige Fläche, deren Lotlinien alle durch denselben Punkt gehen“, unverständlich. Bö.

W. Hergesell. Ueber die Formel von G. G. Stokes zur Berechnung regionaler Abweichungen des Geoids vom Normalsphäroid. Ein Beitrag zu den neueren Untersuchungen über die Gestalt der Erdoberfläche. Pr. Gymn. Buchsweiler. 21 S. 4°.

G. G. Stokes hat 1849 in seiner Abhandlung „On the variation of Gravity at the Surface of the Earth“ eine Formel abgeleitet, welche gestattet, die regionalen Abweichungen des Geoids vom Normalsphäroid zu berechnen. Zur scharfen Auswertung

dieser Formel ist indessen die Kenntnis der Schwerkraft auf der ganzen Erdoberfläche notwendig. Der Verf. will nun untersuchen, ob nach erneuter Discussion und Umformung der Formel eine praktische Anwendung derselben, unter Berücksichtigung der für uns erreichbaren Kenntnis des Verlaufs der Schwerkraft, möglich sei. Er kommt hierbei zu folgenden Resultaten: „1. Eine wirkliche Berechnung der Abweichung des Geoids vom Sphäroid mit Hülfe der Formel von Stokes für irgend einen Punkt der Erdoberfläche ist bis jetzt und auch in absehbarer Zeit nicht möglich. Dagegen wird man sie an denjenigen Stellen, wo starke Abweichungen stattfinden, benutzen können, um zu entscheiden, ob eine Hebung oder eine Senkung des Geoids statthat. — 2. Sie bestätigt die Hypothese von Faye, nach welcher unter dem Meeresboden eine bedeutende Verdickung und Vergrösserung der Dichtigkeit der Erdkruste vorhanden ist. — 3. Schliesslich kann sie dazu dienen, die Grenzen zu bestimmen, zwischen denen die Abweichungen des Geoids vom Normalsphäroid liegen."

Der Verf. leitet zunächst die Formel von Stokes im Anschluss an Helmert ab, wobei er jedoch statt der Abweichung Δg der wirklichen Schwerkraft g gegen die normale γ diese Schwerkräfte selbst einführt. Hierdurch gelingt es ihm, das von der normalen Schwerkraft abhängige Doppelintegral zu eliminiren und durch Einführung von Mittelwerten der Schwerkraft für gleiche sphärische Abstände von dem zu untersuchenden Punkte das von der wirklichen Schwerkraft abhängige Glied in üblicher Weise auf ein einfaches Integral zu reduciren. Für die nunmehr ermöglichte Untersuchung des Verlaufs der Werte des letzteren sind sodann drei getrennte Zonen auf der Erdoberfläche zu unterscheiden.

Das erste Resultat des Verfs. ist indessen nicht als erwiesen zu betrachten. Er berechnet nämlich für einen Pol der Erde nach der von ihm umgeformten Formel von Stokes die Erhebung N unter der Voraussetzung $g = \gamma$, indem er annimmt, dass γ von 5 zu 5 Grad sphärischen Abstand gegeben ist. Wäre dieser Abstand von 5 Grad ausreichend, so müsste eine gut angelegte

mechanische Quadratur $N = 0$ ergeben. Verf. findet jedoch $N = 80$m und schliesst daraus, dass die Schwerebestimmungen ziemlich dicht, etwa in einem sphärischen Abstande von 2 bis 3 Grad auf der ganzen Erdoberfläche angestellt werden müssten, um die Stokes'sche Formel praktisch nutzbar zu machen. Verf. übersieht jedoch, dass man bei einer etwaigen praktischen Anwendung der Formel jedenfalls auf die ursprüngliche Stokes'sche Form zurückgehen muss, und dass hierbei die von ihm constatirten Fehler der mechanischen Quadratur im Verhältnis von g zu $\varDelta g$ verkleinert auftreten werden. Hiernach erscheint die Ansicht Helmert's, dass die Stokes'sche Formel für einzelne günstig gelegene Orte in nicht allzu ferner Zeit mit Erfolg angewendet werden könne, nicht widerlegt.

Auch das zweite Resultat ist nicht ganz zwingend. Die vorhandenen Erscheinungen, z. B. die ziemlich wahrscheinliche Erhebung des Geoids nördlich der Marschallsinseln und östlich der Ladronen, würden sich auch durch andere Hypothesen als die Faye'sche erklären lassen.

Die Abweichungen des Geoids vom Normalsphäroid endlich liegen, nach des Verfs. Angaben, sicher überall unter 2800m, mit grosser Wahrscheinlichkeit aber sind sämtliche Abweichungen kleiner als 400m. Bö.

O. Callandreau. Écart entre la surface de la Terre supposée fluide et celle d'un ellipsoïde de révolution ayant mêmes axes. C. R. CX. 993-994.

Infolge von Arbeiten, die Tisserand und Radau 1884 und 1885 in den Comptes rendus veröffentlicht haben, wird der Verf. zu einer Vervollkommnung der von ihm im XIX. Bande der Annales de l'Observatoire de Paris gegebenen Lösung der fraglichen Aufgabe geführt. Die Maximaldepression der flüssigen Erde gegen das Revolutionsellipsoid erreicht hiernach unter 45° Breite höchstens 9,1 m, übereinstimmend mit dem Resultate, das Helmert im II. Bande seiner höheren Geodäsie gefunden hat.

Bö.

W. Jordan. Die algebraischen Constanten des Umdrehungs-Ellipsoids. Jordan Z. f. V. XIX. 18-21.

Sind a und b die Halbaxen der Meridianellipse, so treten in geodätischen Entwickelungen, neben anderen, hauptsächlich die Grössen

$$\alpha = \frac{a-b}{a} \quad \text{und} \quad e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$$

auf. Verf. macht darauf aufmerksam, dass auch die analogen Grössen

$$\beta = \frac{a-b}{b} \quad \text{und} \quad e'^2 = \frac{a^2-b^2}{b^2}$$

häufig von Vorteil sein können. Dieses steht damit im Einklange, dass beim Umdrehungs-Ellipsoid die Umdrehungsaxe von vornherein offenbar die bevorzugte ist. Bö.

W. Láska. Ueber die Anwendung der neueren Geometrie auf die Vermessungskunde. Jordan Z. f. V. XIX. 385-388.

Die Aufgabe, eine Gerade über ein bestehendes Hindernis zu verlängern, wird auf zwei Arten vermittelst der Doppelverhältnisse gelöst. Bö.

J. Bischoff. Bestimmung der Ellipsenaxen eines Verticalschnittes. Jordan Z. f. V. XIX. 147-149.

Ableitung der bekannten Formeln durch einfache geometrische Betrachtungen. Bö.

Biny. Méthode de correction pour la triangulation d'une carte géographique ou topographique. Assoc. Franç. Limoges XIX. 897-910.

Nach der vom Verfasser auf S. 291 der Verhandlungen gegebenen Uebersicht giebt die Methode ein sicheres Verfahren, um mit Hülfe zweier endgültigen allgemeinen Formeln einen ausgezeichneten trigonometrischen Punkt zu bestimmen, nachdem

man in praxi von diesem Punkte aus einen Umlauf im Horizonte nach einer gewissen Anzahl anderer Punkte des Terrains gemacht hat, die selbst unvollständig in ihrer Lage bekannt und auf die zu vervollständigende Karte eingetragen sind. Im Grunde ist es eine sehr vereinfachte Anwendung der allgemeinen Methode der kleinsten Quadrate, wenn die Stammgleichungen nicht linear sind. Man betrachtet dabei in der That nur zwei Unbekannte, welche die Aufgabe lösen. Diese beiden Unbekannten sind einfache Differentialfunctionen der Länge und Breite des betrachteten Punktes. Diese ungemeine Reduction der Anzahl der Unbekannten rührt ganz und gar her von der vorgängigen Aufstellung und Ableitung einer linearen Beziehung zwischen der Aenderung eines Winkels und den Aenderungen der Coordinaten des Scheitels dieses Winkels (des betrachteten Punktes) und zweier auf einem Schenkel dieses Winkels angenommenen Punkte. Die logarithmischen Rechnungen, zu denen die Endformeln Anlass geben, sind etwas lang, aber von sehr grosser Einfachheit und dem geringsten Rechner zugänglich. Ein schlagendes Beispiel bezüglich der Ermittelung des Mittelpunktes eines regelmässigen Sechsecks ist der vorgelegten Abhandlung beigefügt.

Lp.

A. M. Nell. Aequivalente Kartenprojectionen. Jordan Z. f. V. XIX. 577-588.

Unter den äquivalenten, d. h. flächentreuen, Kartenprojectionen nehmen die von Bonne und die äquivalente Kegelprojection einen hervorragenden Platz ein; jedoch haben sie den Nachteil, dass sie nur die auf einem verhältnismässig schmalen Streifen zu beiden Seiten des mittleren Meridians oder mittleren Parallels gelegenen Gebiete unverzerrt erscheinen lassen. Verf. leitet nun aus diesen beiden Projectionen eine neue äquivalente ab, die so zu sagen zwischen ihnen die Mitte hält. Eine für Europa und Afrika durchgeführte Berechnung der Coordinaten der Schnittpunkte der Meridiane und Parallelkreise für Intervalle von 5° zeigt den Nutzen dieser neuen Projectionsart, während für Asien ihre Mängel schon in merkbarer Weise hervortreten werden.

(Vgl. die Referate über äquivalente Abbildungen S. 829ff. dieses Bandes. Red.) Bö.

J. H. Franke. Ueber die Transformation rechtwinklig-sphärischer (geodätischer) Coordinaten auf neue Normalpunkte. Astr. Nachr. CXXVI. Nr. 3022. 353-358.

Will man ein System rechtwinklig-sphärischer Coordinaten, wie sie Soldner in die Geodäsie eingeführt hat, auf einen neuen Nullpunkt beziehen, so sind für den Fall, dass man auch hier als Coordinatenaxen den Meridian und sein Perpendikel wählt, die dazu nötigen Formeln allgemein bekannt. Verf. glaubt aber, dass es für viele technische Zwecke praktischer wäre, für das neue System als Ordinatenaxe den Ordinatenkreis des neuen Normalpunktes N im ursprünglichen System und als Abscissenaxe den hierzu senkrechten Schnitt in N anzunehmen. Die für diesen Fall vom Verf. entwickelten Transformationsformeln sind in der That sehr einfach und zeigen für manche technische Landesvermessungszwecke grosse Vorteile gegenüber den gewöhnlich angewandten und vom Verf. gleichfalls entwickelten Formeln. Dieses gilt auch noch für die Umkehrung der Aufgabe. Bö.

J. S. Corti. Determinacion de la latitud de un logar y del azimut de una linea sin usar mas instrumentos que un circulo azimutal. Soc. Argentinea XXIX.

Der Verfasser erörtert eine Methode zur Ermittelung der Breite eines Ortes auf der Erdoberfläche und des Azimuts einer Linie, bei welcher er bloss einen Azimutalkreis benutzt, d. h. also auf Barometer und Chronometer verzichtet. Tx. (Lp.)

J. E. Estienne. Étude sur les erreurs d'observation. Rev. d'Art. XXXVI. 235-259.

Der Verfasser will beweisen, dass als bester Wert für das Mass einer Grösse, für welche der Versuch Werte geliefert hat,

die mit zufälligen Fehlern behaftet sind, in allen Fällen der „Medianwert“ (valeur médiane) zu nehmen ist, der durch die folgende Regel geliefert wird: „Man ordnet die erhaltenen Werte nach ihrer Grössenfolge. Wenn ihre Anzahl ungerade ist, so ist derjenige der Mitte der Medianwert. Wenn ihre Anzahl gerade ist, so hat man als Medianwert die beiden der Mitte und jeden Zwischenwert.“

Capitel 1. Beweis der Regel. Capitel 2. Die Regel des Medianwertes ist unabhängig von dem Fehlergesetz und muss unter Ausschluss jeder anderen Regel angewandt werden, wie auch dieses Gesetz beschaffen sein möge. Capitel 3. Folgerungen aus der Regel vom Medianwerte. Nachtrag. Anwendung auf die Treffwahrscheinlichkeit beim Schiessen. Von der Einfachheit des Verfahrens verspricht sich der Verfasser sehr viel, ist auch von seiner Richtigkeit voll überzeugt, während andere wohl ihre Zweifel festhalten dürften. Lp.

A. Shdanow. Zur Bestimmung der mittleren Fehlerquadrate der geodätischen Polarcoordinaten. Astr. Nachr. CXXIV. Nr. 2976. 401-404.

W. Struve hat in seinem berühmten „Arc du méridien etc.“, Bd. I, S. 246, bequeme Formeln zur Berechnung geodätischer Polarcoordinaten (geodätischer Linien und Azimute) gegeben. Die Kenntnis ihrer mittleren Fehler ist für weitergehende Untersuchungen sehr erwünscht. Struve sagt a. a. O., S. 306, dass Herr Lindhagen sich der ausgedehnten Arbeit der Berechnung der mittleren Fehler der geodätischen Linien unterzogen habe. Die angewandten Formeln und Methoden sind nicht aufgeführt, indessen für den Fachmann selbstverständlich. Herr Shdanow glaubt nun sehr einfache Formeln für diese mittleren Fehlerquadrate abgeleitet zu haben, indem er die mittleren Fehlerquadrate der in den Struve'schen Formeln als gegeben auftretenden Grössen als bekannt und von einander unabhängig voraussetzt. Da aber die zweite Bedingung in Folge der Ausgleichung der Dreiecksnetze nicht erfüllt ist, so sind die entwickelten Formeln

zwar einfach, aber falsch und wertlos. Sie wären dann allein unter gewissen Modificationen richtig, wenn man im ganzen Dreiecksnetz nur die gerade notwendigen Stücke gemessen hätte.

Aus demselben Grunde beweist auch das angeführte einfache Beispiel nichts für die Richtigkeit der Entwickelungen des Verfs. Es wird also auch in diesem Falle fernerhin nichts anderes übrig bleiben, als den Gauss'schen Algorithmus zur Berechnung des Gewichts und des mittleren Fehlers von Functionen gemessener und einer Ausgleichung unterworfener Grössen anzuwenden. Bö.

N. Jadanza. Influenza degli errori strumentali del Teodolite sulla misura delle distanze zenitali. Torino Atti XXV. 148-152, 429.

Verf. leitet in einfacher Weise eine Formel für den Einfluss der Instrumentalfehler auf Zenitdistanzmessungen ab, die aber mit den in den Lehrbüchern der Geodäsie und Astronomie (Brünnow, Chauvenet, Jordan) gegebenen nicht übereinstimmt. Diese Formel beruht indessen auf einem Irrtum, wie auch in der Berichtigungsnote zugegeben wird. Bö.

W. Jordan. Bestimmung eines Maximalfehlers. Jordan Z. f. V. XIX. 559-569.

Verf. hat die in der sechsten Stelle der siebenstelligen Logarithmen der Zahlen von 10000—99999 sich befindenden Nullen abgezählt und ihr Vorkommen in den einzelnen Columnen von je 50 Logarithmen nach den Formeln der Beobachtungsfehler behandelt. Wie zu erwarten war, ist die wahrscheinlichste Anzahl solcher Nullen in einer Columne von 50 Logarithmen nahe gleich 5 gefunden worden, während die Theorie genau 5 verlangt. Ferner ergiebt sich, dass bei diesem scharf abzählbaren Beispiele für den Zweig der Fehlercurve, der den negativen Fehlern, d. h. den Werten unter 5 bis zur Null hin, entspricht, der Maximalfehler das $2^3/_4$-fache des mittleren Fehlers beträgt. Bö.

W. Láska. Ueber die Auflösung linearer Gleichungen durch Annäherung. Jordan Z. f. V. XIX. 46-48.

Die Auflösung linearer Gleichungen von der Form der in der Methode der kleinsten Quadrate auftretenden Normalgleichungen geschieht am bequemsten und schnellsten durch die Anwendung des Gauss'schen Algorithmus, auch wenn die Anzahl der Unbekannten sehr gross wird. Diese Methode ist sogar für die Berechnung von mittleren Fehlern und von Gewichten fast unumgänglich notwendig. Trotzdem glauben immer noch Fachleute, unter ihnen der Verf., irgend welche umständlichen und unübersichtlichen Annäherungsmethoden, die ja theoretisch ganz interessant sein mögen, suchen und empfehlen zu müssen. Ref. würde auch im vorliegenden Falle lieber und schneller zehn Gleichungen nach der Gauss'schen Methode, als vier nach der des Hrn. Láska auflösen. Bö.

A. Venturi. Sopra un caso generale di compensazione angolare. Palermo Rend. IV. 269-274.

Die Ausgleichung von Winkelbeobachtungen auf der Station wird in allbekannter Weise behandelt und für die Schreiber'sche Methode der Winkelmessungen specialisirt. Verf. unterlässt es indessen, die Richtigkeit der von Schreiber gegebenen Ausdrücke für die Fehlerquadratsumme und für die Gewichte der ausgeglichenen Richtungen ebenfalls nachzuweisen, obwohl sie nicht so ohne weiteres zu erkennen ist. Bö.

C. Runge. Der Schreiber'sche Satz. Jordan Z. f. V. XIX. 21-24.

Gegen den Beweis dieses Satzes über die günstigste Gewichtsverteilung bei der Ausgleichung mit Bedingungsgleichungen, wie er von Schreiber selbst gegeben ist, lässt sich nichts einwenden. Jordan hatte (Z. f. V. XVII. 643 u. ff.; F. d. M. XX. 1888. 1232) versucht, ihn auf dem sich zunächst darbietenden, vom Schreiber'schen verschiedenen Wege abzuleiten, war

aber nicht zum Ziele gelangt. Hr. Runge nimmt diesen Gedanken wieder auf. Es gelingt ihm in der That, auch auf diese Weise einen eleganten Beweis zu liefern, der indessen drei Seiten einnimmt, während der Schreiber'sche nur eine halbe Seite beansprucht. Bö.

N. Jadanza. Ancora sul modo di adoperare gli elementi geodetici dell' Istituto Geografico militare italiano. Nota seconda. Torino Atti XXV. 414-429.

Die Formeln zur Berechnung geodätischer Coordinaten', die in der ersten Note (F. d. M. XXI. 1889. 1208) entwickelt waren, werden, wie Verf. jetzt zugeben muss, nur zur Construction der topographischen Karte von Italien in einer gewissen flächentreuen Projection angewandt. Im allgemeinen Vermessungsdienste werden auch in Italien dieselben rechtwinkligen Coordinaten benutzt wie anderswo. Diese vom Verf. verschuldete Verwirrung veranlasst ihn, nun auch die im italienischen Kataster benutzten Formeln zur Berechnung gewöhnlicher rechtwinkliger geodätischer Coordinaten für kleinere Entfernungen in bekannter Weise kurz abzuleiten und durch Beispiele zu erläutern. Auch Ref. hatte schon in der oben erwähnten Besprechung der ersten Note seine Verwunderung über das scheinbar in Italien übliche Coordinatensystem ausgesprochen. Bö.

M. Lévy. Sur le nivellement général de la France. C. R. CX. 1233-1238.

Die Geschichte und die Methoden des 1878 ins Leben gerufenen neuen Hauptnivellements von Frankreich werden bei Gelegenheit der Ueberreichung des ersten Bandes des Répertoire graphique des repères dieses Nivellements an die Akademie kurz besprochen; insbesondere wird bedauert, dass der früher von Bourdaloue angenommene Nullpunkt nicht beibehalten ist. Sodann werden die in diesem Höhenverzeichnis neben einander gegebenen orthogonalen und dynamischen Coten erläutert. Die

ersteren, in Deutschland orthometrische Höhen genannt, sind schon lange bekannt, jedoch hat Frankreich sie zuerst im grossen in die Praxis eingeführt. Die dynamische Cote ist als die Arbeit der Schwere definirt, wenn der materiell gedachte Punkt bis zur Meeresfläche fällt, wobei seine Masse gleich $\frac{1}{g_0}$ (g_0 die Constante der Schwerkraft an einem beliebigen, ein für allemal gewählten Punkte) gesetzt ist. Hierdurch erhält man Zahlenwerte, die als Längen aufgefasst werden können und auch nur wenig von den orthometrischen Höhen differiren. Punkte gleicher dynamischer Höhe liegen hiernach auf derselben Niveaufläche. Jedoch ist zu bemerken, dass für beide Coten nur die regelmässigen Aenderungen der Schwerkraft berücksichtigt sind, wie sie sich aus der Annahme ergeben, dass die Niveauflächen der Erde Rotationsellipsoide seien. Eine strenge Berechnung dieser Höhen würde die Kenntnis des Verlaufs der wirklichen Schwerkraft längs aller Nivellementslinien voraussetzen. Bö.

Ch. Lallemand. Le nouveau nivellement général de la France. Assoc. Franç. Limoges XIX. 919-930.

Ch. Lallemand. L'unification des altitudes et le niveau des mers en Europe. Assoc. Franç. Limoges XIX. 930-940.

A. Nobile. Sopra una rivendicazione di proprietà scientifica. Atti dell' Accademia Pontaniana. XX. 151-152.

Der Verf. bemerkt, dass Hr. Helmert bei der Veröffentlichung der Resultate der über die jährliche Variation der Breite in Deutschland aufgestellten Beobachtungen (Astr. Nachr. Nr. 2963) seine früheren Untersuchungen (von 1883) über denselben Gegenstand nicht erwähnt hat. Vi.

F. Garibay. Estudios de los instrumentos topograficos universales. Mexico Soc. Alzate IV.

Der Gegenstand dieses Aufsatzes ist die Beschreibung und

der Gebrauch der Instrumente, welche die drei Coordinaten jeder Ecke eines Dreiecksnetzes liefern. Tx. (Lp.)

S. Finsterwalder. Ueber den mittleren Böschungswinkel und das wahre Areal einer topographischen Fläche. Münch. Ber. XX. 35-82.

Trotz mancherlei mathematischer Entwickelungen hat diese Abhandlung wohl nur für den Geographen von Fach ein gewisses Interesse. Bö.

Weitere Litteratur.

Biny. Procédé rapide permettant de vérifier à priori, d'après une carte quelconque, si deux positions géographiques élevées peuvent communiquer par la télégraphie optique. Assoc. Franç. Limoges XIX. 910-913.

J. Duplessie. Traité de nivellement, comprenant les principes généraux, la description et l'usage des instruments, les opérations et les applications. 2e éd. Paris. XIV + 341 S. (1889).

C. L. Durand-Claye, A. Pelletan et Ch. Lallemand. Lever des plans de nivellement. (Opérations sur le terrain. Opérations souterraines. Nivellement de haute précision.) Paris. 703 S. (1889).

Astronomische Arbeiten des k. k. Gradmessungs-Bureau, ausgeführt unter der Leitung von Th. v. Oppolzer. Nach dessen Tode herausgegeben von E. Weiss und R. Schram. 1. Bd. Längenbestimmungen. Leipzig. Freitag. VI u. 75 u. 163 S. 4°.

C. W. von Baur. Mathematische und geodätische Abhandlungen. Zum 70. Geburtstage des Verfassers herausgegeben von seinen früheren Schülern. Stuttgart. Wittwer. VIII + 236 S. 4°.

C. M. v. Bauernfeind. Elemente der Vermessungskunde. Ein Lehrbuch der praktischen Geometrie. 7. Aufl. 2 Bände. Stuttgart. Cotta'sche Buchhdlg. Nachf. XVI + 570, XV + 669 S. 8°.

C. M. v. Bauernfeind. Tafeln über verschiedene Gegenstände der praktischen Geometrie. Anhang der „Elemente der Vermessungskunde". Stuttgart. Cotta'sche Buchhdlg. Nachf. 53 S. 8°.

F. G. Gauss. Die Teilung der Grundstücke, insbesondere unter Zugrundelegung rechtwinkliger Coordinaten. 2. Aufl. Berlin. v. Decker's Verlag. 136 + 60 S.

Ruotolo. Corso di Topografia e sue applicazioni. Vol. I. Planimetria topografica con un breve Corso di trigonometria rettilinea. Un vol. in 8° con 381 figure nel testo.

Forti. Geometria pratica. Il metodo dei minimi quadrati e la teorica degli errori con applicazioni alle scienze d'osservazione, con doppia tavola litografica. IIª ed. con un'appendice. Un vol. in 8°.

Capitel 2.

Astronomie.

G. F. Chambers. Handbook of descriptive and practical astronomy. 4th ed. Vol. II: Instruments and practical astronomy. Oxford. XIX + 558 S.

M. Vodušek. Grundzüge der theoretischen Astronomie. Zum Selbststudium für angehende Astronomen oder auch zur einheitlichen Basis für Vorlesungen. Laibach. v. Kleinmayr u. Bamberg. VIII + 377 S. 8°.

C. A. YOUNG. The elements of astronomy. Boston and London. Ginn and Co. [Nature XLI. 485.]

H. ANDOYER. Sur les formules générales de la Mécanique céleste. Toulouse Ann. IV K. 35 S.

Diese Untersuchung setzt sich zur Aufgabe die Auffindung einer Methode, welche für die Darstellung der Bewegung der Himmelskörper nur trigonometrische Formeln mit Ausschluss irgend eines säcularen Gliedes in Anwendung bringt, und schliesst sich an frühere Arbeiten der Herren Gyldén, Tisserand und Lindstedt an. Wie auch in letzteren die wichtigste, ja die einzig ausschlaggebende Frage nach der Convergenz dieser Darstellungen gar nicht oder durchaus unbefriedigend gestellt und beantwortet worden ist, so lässt auch hier der Verfasser diesen Punkt ganz bei Seite, indem er sich, wie er sagt, darauf beschränkt, die praktische Legitimität der erhaltenen Resultate festzustellen. Soweit unter dem Begriffe Legitimität hier die richtige Durchführung der rein formalen Entwickelung in allen ihren Teilen verstanden wird, ist sie dieser Arbeit eigen; wenn aber der Verf. durch die Beschränkung „au moins pour un certain temps" zu verstehen giebt, dass er die praktische Verwertung seiner Formeln meint, so ist es dem Referenten entgangen, in welcher Weise der Beweis hier geführt worden ist. Praktisch legitimirt sind durch tausendfachen Vergleich der Rechnungen mit den Beobachtungen die Methoden von Clairaut, Lagrange, Laplace, Hansen und anderen, wenn auch theoretisch von ihnen namentlich die Convergenzfrage im Sinne des Mathematikers gar nicht gestellt worden ist und darum theoretisch die Legitimität fehlt.

Zunächst werden die Differentialgleichungen in die etwas umgestaltete Form gebracht, welche gewöhnlich die Laplace'sche heisst, thatsächlich aber zuerst von Clairaut angewandt worden ist. Darauf wird aus den Beobachtungen entlehnt, dass alle Planeten in demselben Sinne um die Sonne laufen, und zwar jeder mit einer bestimmten mittleren Geschwindigkeit, und dass ihre Entfernungen von der Sonne immer sehr nahe derjenigen bleiben,

welche aus dieser Geschwindigkeit nach dem dritten Kepler'schen Gesetze folgt. Setzt man nun die Radienvectoren r_i und die wahren Längen wie folgt an:

$$r_i = a_i(1+\varrho_i),$$
$$v_i = N_i + \lambda_i = n_i(1+\varepsilon_i)+\lambda_i,$$

so bleiben nach den Beobachtungen ϱ_i und λ_i, gleich wie die Sinus der Neigung gegen eine feste Ebene s_i, stets klein, und daher kann man die Glieder der Differentialgleichungen sämtlich nach Potenzen dieser $3n$ Grössen ϱ_i, λ_i, s_i entwickeln, wo n die Anzahl der Planeten ist. Damit sind wir am Anfange der Gyldén'schen „intermediären Bahn". Es wird nun in bekannter Weise formell gezeigt, wie die endliche Auflösung ausser den N_i noch andere der Zeit proportionale Winkel G_i, H_i einführt, welche gewöhnlich säcular periodisch, hier aber à longue période genannt werden, eine Bezeichnung, welche Laplace in einem anderen Sinne gebraucht hat.

Dann geht der Verf. auf die „elliptische oder alte Theorie" zurück und beweist auch hier die Legitimität der Resultate und zugleich das Theorem von der säcularen Unveränderlichkeit der grossen Axen, welches bis zu den zweiten Potenzen der störenden Massen gilt. Schliesslich kommt der Verf. noch auf die Drehung der Himmelskörper, um auch hier die Form der Entwickelung in trigonometrische Reihen als legitim nachzuweisen.

Zukünftige Arbeiten sollen die hier gegebenen Entwickelungen weiter ausführen. Dz.

O. Callandreau. Sur la réduction à la forme canonique des équations différentielles pour la variation des arbitraires dans la théorie des mouvements de rotation. C. R. CXI. 593-595.

Unter Anwendung der Bezeichnungen aus dem Traité de mécanique céleste, T. II, des Hrn. Tisserand wird die Aufgabe in folgender Form ausgesprochen:

Es sei das kanonische System gegeben:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial U}{\partial h}, \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial H},$$
$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial U}{\partial g}, \quad \frac{dg}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial G},$$
$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \psi'}, \quad \frac{d\psi'}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial T}.$$

Es soll ein anderes, ebenfalls kanonisches aus ihm abgeleitet werden, das aber nicht mehr mit der Unbequemlichkeit behaftet ist, t ausserhalb der Zeichen sinus und cosinus treten zu lassen.

Indem der Verfasser die von Serret erhaltenen Resultate mit der Théorie de la Lune von Delaunay vergleicht, gelangt er zu dem folgenden Systeme, in welchem $R = U - H$ als mit der neuen Willkürlichen A ausgedrückt angenommen ist:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial R}{\partial u}, \quad \frac{du}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial A},$$
$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \varphi'}, \quad \frac{d\varphi'}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial G},$$
$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \psi'}, \quad \frac{d\psi'}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial T}.$$

Lp.

O. Stone. On the motion of a planet, assuming that the velocity of gravity is finite. Annals of Math. V. 99-102.

Hr. Lehmann-Filhès hat in Astr. Nachr. 2630 (F. d. M. XVI. 1884. 1096) die Hypothese behandelt, dass die Gravitation eine endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit besitzt. Hr. Stone geht auf dieselbe Hypothese ein, behält aber die Glieder mit $\lambda . m$ bei, welche in jener Arbeit vernachlässigt sind, und nimmt weiter an, dass keine säcularen Störungen durch die Bewegung des Sonnensystems im Weltenraume veranlasst werden. Nach den Ergebnissen der jetzigen Rechnung wird der Wert der Aenderung der mittleren Länge:

$$\Delta L = -6n^2 \lambda m (t - t_0)^2.$$

Für die Erde giebt dies bei $t - t_0 = 2000$ Jahren und einer Gra-

vitationsgeschwindigkeit gleich der Lichtgeschwindigkeit

$$\Delta L = -16°.4,$$

gegen die Beobachtung. Für den Mond ist ΔL thatsächlich positiv. „Nichtsdestoweniger darf man es nicht als erwiesen annehmen, dass die Gravitation nicht von den longitudinalen Wellen in dem lichttragenden Aether herrühre, da die Geschwindigkeit derselben viel grösser sein kann als die der transversalen Wellen, welche wir als Licht und Elektricität wahrnehmen". Von der Arbeit des Hrn. v. Hepperger (Wien. Ber. XCVII, F. d. M. XX. 1888. 1251) scheint der Verf. keine Notiz genommen zu haben.

Lp.

F. Tisserand. Sur les mouvements des planètes en supposant l'attraction représentée par l'une des lois électrodynamiques de Gauss ou de Weber. C. R. CX. 313-315.

Nimmt man an Stelle des Newton'schen Gravitationsgesetzes eines der beiden Gesetze:

$$R_g = f\frac{mm'}{r^2}\left[1+\frac{1}{h^2}\left(2u^2-3\frac{dr^2}{dt^2}\right)\right],$$

$$R_w = f\frac{mm'}{r^2}\left[1+\frac{1}{h^2}\left(2r\frac{d^2r}{dt^2}-\frac{dr^2}{dt^2}\right)\right]$$

als richtig an, wobei natürlich die Constante h ausserordentlich gross sein muss, so ergeben die Zusatzglieder mit dem Coefficienten $\frac{1}{h^2}$ Störungen in den elliptischen Elementen, welche meist periodisch und dann unmerkbar sind. Nur die Perihellänge macht bei Annahme von R_w eine Ausnahme, indem ein kleines säculares Glied entsteht. Die Gauss'sche Hypothese R_g ergiebt für die Perihellänge ein ähnliches, aber beinahe doppelt so grosses Glied, während noch das Element ε eine kleine, aber unbedeutende Säcularstörung enthält. Es ist interessant, dass die Annahme der Richtigkeit eines dieser beiden Gesetze die von Leverrier mit völliger Sicherheit festgestellte Abweichung zwischen der beobachteten und berechneten Säcularbewegung des Mercurperihels, welche ihn zu der Hypothese des intramercuriellen Pla-

neten veranlasst hat, durchaus erklären würde, ohne sonst im geringsten die Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Theorie zu stören. Der Verf. beschränkt sich darauf, dies zu sagen, ohne zu behaupten, dass das Gauss'sche Gesetz nun auch wirklich das richtige sei. Dz.

M. Lévy. Sur l'application des lois électrodynamiques au mouvement des planètes. C. R. CX. 545-551.

M. Lévy. Sur les diverses théories de l'électricité. C. R. CX. 741-742.

Im Anschluss an die Arbeit von Tisserand (vgl. das vorige Referat) betrachtet der Verf. noch als drittes Gesetz das von Riemann.

Das Potential P_1 der Kraft hat bei Weber den Ausdruck:

$$(1)\qquad P_1 = f\frac{m\mu}{r}\left[1-\frac{1}{h^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right],$$

das Potential P_2 dagegen bei Riemann:

$$(2)\qquad P_2 = f\frac{m\mu}{r}\left(1-\frac{1}{h^2}v^2\right)$$

$$= f\frac{m\mu}{r}\left(1-\frac{1}{h^2}\left[\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{dw}{dt}\right)^2\right]\right)$$

Beide erklären die Gesetze der geschlossenen elektrischen Ströme gleich vollkommen und ebenso also das aus ihnen zusammengesetzte Potential

$$(3)\qquad P = P_1+\alpha(P_2-P_1).$$

Legt man den letzteren Ausdruck der allgemeinen Anziehung zu Grunde, so ergiebt sich für die säculare Bewegung des Perihels der Ausdruck:

$$P.w = \frac{f\mu}{h^2a}(1+\alpha)nt,$$

und man hat daher α nur so zu bestimmen, dass α mit dem Unterschied zwischen der Rechnung nach dem Newton'schen Gesetz und der Beobachtung übereinstimmt. Es folgen noch einige allgemeine Bemerkungen über das allgemeinst mögliche, mit den bekannten elektrischen Thatsachen übereinstimmende elektrodynamische Grundgesetz. Dz.

B. Mlodziewsky. Ueber die Bestimmung von Doppelsternbahnen. Arbeiten der phys. Section der Kaiserl. Gesellschaft für Freunde der Naturkunde. Moskau. III. Hft. 2. 17-19. (Russisch.)

In einem Sternpaare, das einen Doppelstern bildet, geben die Beobachtungen die auf der Himmelskugel verzeichneten centralen Projectionen der elliptischen Bahn des einen Sterns in Bezug auf den anderen und des einen der Brennpunkte dieser Bahn. Der Verfasser zeigt, wie man aus diesen Datis die Lage und Gestalt der Bahn selbst finden kann. Bb.

J. J. Astrand. Hülfstafeln zur leichten und genauen Auflösung des Kepler'schen Problems. Mit einer Einleitung von H. Bruns. Leipzig 1890. 110 S. 8°.

Die erste dieser beiden Tafeln ist nach aufsteigender Excentricität von $e = 0{,}01$ bis $e = 1{,}00$ um 0,01 fortschreitend geordnet, während M von 0 bis 20° in halben Graden und von 20° bis 180° in ganzen Graden fortschreitet. Die zugehörigen Werte von E sind bis zu 0,001 Grad genau angegeben und daneben die Differenzen der E gebildet worden. Diese Differenzen dienen zur Interpolation für die M, während die Interpolation für die Excentricitäten von dem Benutzer der Tafeln selbst ausgeführt werden muss. Wie die Einleitung zeigt, genügt in der Regel in beiden Fällen eine Interpolation mit einfachen Differenzen.

Die zweite Tafel dient für sehr grosse Excentricitäten, weil hier die Anwendung der ersten Tafel mit Schwierigkeiten verbunden sein würde. Sie enthält den Logarithmus der Hülfsgrösse:

$$A = \frac{E - \sin E}{\sin^3 E} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\sin^2 E}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\sin^4 E}{7} + \cdots$$

auf sieben Stellen und die Differenzen, während der Eingang der Tafel durch $x = l\sin E$, von 5,00 bis 9,800 in Einheiten erst der zweiten und von 8,800 an der dritten Decimale fortschreitend, gebildet wird. Dz.

H. BRUNS. Note zur Störungstheorie. Hamb. Mitt. II. 1-8.

Die absoluten Störungen irgend eines Grades in Bezug auf die störenden Massen werden durch Auflösen eines Systems linearer Differentialgleichungen gefunden, bei welchem der Coefficient der Unbekannten für alle Grade derselbe ist und nur die Zusatzglieder für jeden Grad sich ändern. In dieser Note wird eine sehr elegante Form für die Auflösung gegeben, welche freilich neun Integrationen erfordert, während sonst nur sechs solche notwendig sind. Dz.

H. BRUNS. Ueber das Problem der Säcularstörungen. Berl. Ber. 543-545.

Beschränkt man sich in den Störungsfunctionen auf den rein säcularen Teil, welcher für alle Planeten derselbe ist, so ist die Gleichung

$$\sum_{a} k_a \sqrt{a_a} \,.\, \cos\varphi_a \,.\, \cos J_a = \text{constant},$$

in welcher k_a von den Massen abhängige Constanten, a_a die halben grossen Axen der Bahnen, φ_a die Excentricitätswinkel und J_a die Neigungen der Bahnen gegen eine feste Ebene sind, streng richtig. Dann sind aber auch die a_a constant, und die linke Seite wird für φ_a und $J_a = 0$ ein wirkliches Maximum, woraus nach Dirichlet's Schlussweise folgt, dass diese Grössen, wenn sie einmal zugleich hinreichend kleine Werte besitzen, beständig klein bleiben. Dz.

C. V. L. CHARLIER. Einige Bemerkungen über die Convergenz der Reihen in der Störungstheorie. Astr. Nachr. CXXII, No. 2913. 161-168.

Die Störungsfunction wird gewöhnlich in eine doppelt unendliche Reihe entwickelt, welche nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen der mittleren Anomalien des störenden und des gestörten Planeten fortschreiten. Die Coefficienten dieser Entwickelung, welche absolut und gleichförmig convergirt, kann man für kleine Werte der Excentricitäten und Neigungen nach

Potenzen derselben ordnen. Die Integrale, welche von Laplace in der Form:

$$\frac{\sin \nu t}{\nu}\int Q\cos \nu t\,dt - \frac{\cos \nu t}{\nu}\int Q\sin \nu t\,dt$$

und in ähnlichen einfachen Ausdrücken dargestellt werden, in denen Q die Störungsfunction selbst oder aus ihr abgeleitete Functionen sind, kann man natürlich ebenfalls in dieselbe Form bringen. Dabei treten aber bekanntlich die Nenner auf von der Form

$$in - jn',$$

welche bei passender Wahl der ganzen Zahlen i und j jeden Grad der Kleinheit annehmen können. Diesem Umstande trägt der Verfasser dadurch Rechnung, dass er in jedem Gliede einzeln eine Integrationsconstante hinzufügt, welche für einen bestimmten Wert t_0 von t dieses Glied verschwinden lässt. Damit wird für jeden solchen kleinen Nenner ein entsprechender kleiner Zähler gebildet und für die Störung selbst eine für alle Werte von t convergente Reihe, aber nicht von gleichmässiger Convergenz hergestellt. Es wird noch darauf hingewiesen, dass unter Umständen die einzelnen Störungen, nach Potenzen der Massen geordnet, eine divergente Reihe bilden können, während ihre Summe gleichwohl zu einer convergenten Gesamtreihe zusammengestellt werden mag. Dz.

K. G. Olsson. Bemerkungen über die Integrationsmethoden der Zeitreduction in der Gyldén'schen Theorie. Archiv for Math. og Naturvidenskab. XIV. 1-10.

K. G. Olsson. Ueber die Convergenz der Annäherungen in der Gyldén'schen Störungstheorie. Ibid. 232-239.

In dem erstgenannten Aufsatze wird gezeigt, dass eine in der Gyldén'schen Störungstheorie durch partielle Integration erhaltene Reihe für die „Zeitreduction" unter gewissen Umständen divergirt, und dass die Anwendung elliptischer Functionen nicht geeignet ist, diesen Uebelstand zu beseitigen. Im zweiten Aufsatze verallgemeinert der Verfasser seinen Divergenzbeweis, indem er zu zeigen sucht, dass die partielle Integrationsmethode

in der That immer zu absolut divergirenden Reihen führt. Wegen des Näheren muss auf die Aufsätze selbst hingewiesen werden. Bdn.

O. Backlund. Die kleinen Divisoren bei elementaren Gliedern in der Theorie der Planetenbewegungen. Astr. Nachr. CXXII. No. 2920-21. 272-302.

Es werden nur zwei Planeten betrachtet und die Differentialgleichungen ihrer Bewegung in die von Tisserand ausführlich auseinandergesetzte Form gebracht, für welche in den Differentialgleichungen für beide Planeten dieselbe Störungsfunction gilt. Die Integrale werden in der von Laplace, Mécanique céleste Livre II Ch. VI, angegebenen Form angenommen und nun für die Radienvectoren und die Anomalien andere Veränderliche eingeführt. Darauf wählt der Verf. aus der Störungsfunction zuerst nur ein einziges Glied aus und bestimmt die Integrale durch aufeinander folgende Annäherungen, wobei das Hauptgewicht auf die „elementaren Glieder" von langer Periode, welche bei dieser Art der Entwickelung schon in erster Annäherung auftreten, gelegt wird. Die ursprünglich angenommenen willkürlichen Constanten werden so bestimmt, dass eine Irrationalzahl in die Betrachtung eingeht, mit deren Hülfe der Verfasser den Maximaleinfluss der Divisoren schätzt. Schliesslich wird noch auf die Bewegung der Knoten eingegangen, welche bei dieser Art der Betrachtung durch eine letzte Quadratur gefunden wird.

Dz.

A. Weiler. Die Störungen der Planeten in der neuen Theorie. Astr. Nachr. CXXII, No. 2908-2909. 49-104.

Die Differentialgleichungen der Bewegung werden durch Einführung einer grossen Zahl von neuen Veränderlichen umgeformt, um dann die Entwickelung nach Potenzen der störenden Massen folgen zu lassen. Den Schluss bildet eine Polemik gegen die Beweisführung des Herrn Gyldén dafür, dass bei Zugrundelegung der Ellipse als intermediärer Bahn die Störungen eine divergente Reihe bilden. Dz.

G. W. Hill. The secular perturbations of two planets moving in the same plane; with application to Jupiter and Saturn. Annals of Math. V. 177-213.

Wenn nur zwei Planeten in derselben Ebene um die Sonne kreisen, so kann man das Problem der Bestimmung der Säcularstörungen auf eine einzige Quadratur zurückführen, da in der Störungsfunction als Veränderliche nur drei Grössen, nämlich die beiden Excentricitäten und die Differenz der beiden Perihellängen, vorkommen und zwischen ihnen bereits zwei Integrale, das Flächenintegral und das Integral der lebendigen Kraft, bekannt sind. Indem der säculare Teil der Störungsfunction mit Zuhülfenahme der excentrischen Anomalie nach Potenzen der Excentricitäten bis zum sechsten Grade entwickelt und alles auf eine Variable x reducirt wird, erhält man für diese eine Differentialgleichung von der Form

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\sqrt{f(x)}}{\varphi(x)},$$

wo $f(x)$ und $\varphi(x)$ nach ganzen Potenzen von x in Reihen entwickelt gegeben sind. Durch Einsetzen numerischer Werte findet man für Jupiter und Saturn, dass zwei Werte von x die erste Function $f(x)$ zu Null machen, und dass für alle dazwischen liegenden Werte $f(x)$ positiv ist und $\varphi(x)$ sein Vorzeichen beibehält. Hieraus folgt nach einer von Weierstrass herrührenden Schlussweise, dass x und somit die beiden Excentricitäten beständig zwischen zwei festen Grenzen sich bewegen. Sind die Excentricitäten und die Differenz der Perihellängen bestimmt, so ergeben sich durch eine letzte Quadratur die Perihellängen selbst. Dz.

J. v. Hepperger. Integration der Gleichungen für die Störungen der Elemente periodischer Kometen von geringer Neigung (Biela'scher Komet) durch die Planeten Erde, Venus und Mercur. Wien. Ber. XCIX. 89-103.

Diese Arbeit schliesst sich derjenigen desselben Verfassers in Bd. XCIII der Sitzungsberichte an und lehrt, wie man mit

Aufgeben der Strenge doch einen bedeutenden Teil der Störungen der Elemente finden kann, indem man innerhalb gewisser Grenzen das Differential der Zeit durch das des Längenunterschiedes des Kometen und störenden Planeten ersetzt und den Radiusvector und die Länge des Kometen als lineare Functionen dieses Längenunterschiedes ansetzt. Dz.

P. Harzer. Ueber die Rückwirkung der von dem Monde in der Bewegung der Sonne erzeugten Störungen auf die Bewegung des Mondes. Astr. Nachr. CXXIII, No. 2941. 193-200.

Das Theorem, welches den Gegenstand dieser Abhandlung bildet, liegt, wie dem einen recht umständlichen und gewundenen Beweis bringenden Verfasser entgangen zu sein scheint, so nahe, dass wohl aus diesem Grunde die Astronomen seiner nicht erwähnt haben mögen, wenn dies nicht doch bereits irgendwo geschehen sein sollte. Denn führt man ausser den Coordinaten x, y, z des Mondes in Bezug auf den Schwerpunkt der Erde noch die Coordinaten x'', y'', z'' der Sonne in Bezug auf den Schwerpunkt von Erde + Mond ein, so werden die Componenten der störenden, auf den Mond wirkenden Kraft durch partielle Differentiation der Function $V =$

$$\mu'\left(\frac{1}{(1-\mu).\sqrt{(x''-(1-\mu)x)^2+(y''-(1-\mu)y)^2+(z''-(1-\mu)z)^2}} - \frac{1}{(-\mu).\sqrt{(x''-(-\mu)x)^2+(y''-(-\mu)x)^2+(z''-(-\mu)z)^2}}\right),$$

wo $\mu' = \frac{m'}{1+m}$, $\mu = \frac{m}{1+m}$ und m, m', 1 die Massen des Mondes, der Sonne und der Erde sind.

Entwickelt man nun nach Kugelfunctionen:

$$\frac{1}{\sqrt{(x''-x)^2+(y''-y)^2+(z''-z)^2}} = \frac{1}{r''}\cdot\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\frac{r}{r''}\right)^n . P_n(s),$$

also auch:

$$\frac{1}{\sqrt{(x''-ax)^2+(y''-ay)^2+(z''-az)^2}} = \frac{1}{r''}\cdot\sum_{n=0}^{n=\infty} a^n . \left(\frac{r}{r''}\right)^n . P_n(s),$$

so folgt sofort

$$V = \frac{\mu'}{r''} \sum_{n=1}^{n=\infty} \chi^n(\mu) \left(\frac{r}{r''}\right)^n . P_n(s),$$

wo $\chi^n(\mu)$ die Zahl $(1-\mu)^{n-1}-(-\mu)^{n-1}$ ist. Dz.

K. Bohlin. Ueber eine neue Annäherungsmethode in der Störungstheorie. Stockh. Vet. Ak. Bih. 56 S. (1889).

M. Brendel. Ueber die Anwendung der Gyldén'schen absoluten Störungstheorie auf die Breitenstörungen einer gewissen Klasse kleiner Planeten, nebst numerischem Beispiel für den Planeten (46) Hestia. Diss. Berlin. 26 S. 4°.

Frhr. E. von Haerdtl. Die Bahn des periodischen Kometen Winnecke in den Jahren 1858-1886. Astr. Nachr. CXXII, No. 2914. 177-186.

Diese Abhandlung beschäftigt sich hauptsächlich mit den Störungen des Mercur auf den Kometen und mit einer sich daran schliessenden Untersuchung über den wahrscheinlichen Wert dieser Masse, welcher sich ziemlich nahe an den von Le Verrier aus den Störungen der Länge der Venus herausgerechneten $\frac{1}{5310000}$ anschliesst. Zum Schluss wird der Komet Encke herangezogen und unter Annahme zweier verschiedenen Werte für die Accelerationsconstante aus seinen Störungen die Masse des Mercur berechnet. Dz.

B. Buszynski. Ueber hyperbolische Bahnen heller Meteore. Diss. Erlangen. 30 S. 8°.

Der Verfasser beginnt mit dem Satze, dass die neueren Rechnungen für die Bahnen der hellen Meteore im Gegensatz zu den gewöhnlichen Sternschnuppenschwärmen fast ausschliesslich Hyperbeln ergeben haben. Bedenkt man aber, dass die Zeitangaben naturgemäss nur ungenau sein können und damit

besonders die Geschwindigkeit des Meteors in weiten Grenzen beliebig angenommen werden kann, so ist es notwendig, diese zu variiren. Nach Ableitung der Formeln für die Elemente der Meteorbahn werden die Differentialformeln für veränderliche Geschwindigkeit entwickelt. Die Schrift bildet die Fortsetzung zu: „Ueber die Bahnen der am 11. Dec. 1852 und am 3. Dec. 1861 in Deutschland beobachteten hellen Meteore". (F. d. M. XVIII. 1886. 1102.) Dz.

O. Callandreau. Études sur la théorie de la capture des comètes périodiques. C. R. CX. 625-627.

O. Callandreau. Études sur la théorie des comètes périodiques. C. R. CXI. 30-31.

Beide Abhandlungen enthalten eine kurze Angabe über die Untersuchungen des Verfassers, welche sich auf die periodischen Kometen und die Hypothese beziehen, dass ihre ursprünglich parabolischen Bewegungen durch Jupiter in elliptische umgewandelt worden seien. Es wird auf das Erscheinen der ausführlichen Arbeit in den Annales de l'Observatoire de Paris. Tome XX hingewiesen. Dz.

Hamy. Remarques sur la théorie générale de la figure des planètes. Journ. de Math. (4) VI. 69-143.

Nach einer Einleitung, in welcher die Theorie einiger von Lamé unter Zugrundelegung elliptischer Raumcoordinaten aufgestellten Functionen gegeben wird, welche als Verallgemeinerungen der Kugelfunctionen auf Ellipsoide anzusehen sind und kurz Lamé'sche Functionen genannt werden, folgt die eigentliche, in drei Capitel geteilte Arbeit.

In dem ersten wird das Potential eines heterogenen Ellipsoids in Bezug auf einen äusseren Punkt nach Lamé'schen Functionen entwickelt, wenn für die Dichtigkeit in jedem Punkte diese Entwickelung gegeben ist. Dann wird eine Anwendung auf das homogene Ellipsoid gemacht und ein sehr einfacher Ausdruck des Potentials in Lamé'schen Coordinaten aufgestellt,

von dem dann nachgewiesen wird, dass er im Grunde mit der bekannten Dirichlet'schen Formel zusammenfällt. Dann werden die Trägheitsmomente in Bezug auf die drei Axen zunächst wieder eines heterogenen Ellipsoides bestimmt und nachgewiesen, dass dieses, falls die Dichte nach Lamé'schen Functionen entwickelt gegeben ist, nur von drei Coefficienten dieser Entwickelung abhängt. Darauf wird Anwendung von diesen Formeln auf einen Körper gemacht, welcher begrenzt wird von einem Ellipsoid und aus einem inneren, völlig unbekannten Kern besteht, der von einer Flüssigkeit allseitig bedeckt ist. Ausserdem wird vorausgesetzt, dass das Ellipsoid sich gleichmässig um eine Hauptaxe drehe, so dass zum Potential der Anziehung noch das der Centrifugalkraft hinzukommt und jenes Ellipsoid also eine Niveaufläche für das Gesamtpotential ist. Es ergiebt sich, dass, wie auch sonst die Verteilung der Massen in dem Kern sei, doch der Schwerpunkt mit dem Mittelpunkte und die freien Axen mit den Hauptaxen des Ellipsoids zusammenfallen müssen, dass ferner die Differenzen der Trägheitsmomente um die Hauptaxen ebenfalls von dieser Verteilung unabhängig sind. Selbstverständlich ist auch das Potential in Bezug auf alle äusseren Punkte durch Daten an der Oberfläche bestimmt, wie durch die Untersuchungen von G. G. Stokes ganz allgemein bewiesen worden ist.

Im zweiten Capitel wird eine Anwendung auf das abgeplattete Rotationsellipsoid gemacht und eine Formel für die Beschleunigung g abgeleitet, welche unter der Voraussetzung eines unbekannten Kerns für jeden Wert der Abplattung gilt und für geringe Abplattungen die bekannte Clairaut'sche Gleichung zwischen Abplattung, Unterschied der Schwere am Aequator und Pol und dem Verhältnis der Centrifugalkraft zur Anziehung am Aequator giebt. Dann wird die Formel von Clairaut und Laplace für die Differenz der Trägheitsmomente um die grosse und kleine Axe und für das Verhältnis dieser Differenz zu einem dieser Trägheitsmomente abgeleitet und unter der Annahme, dass die Dichte nach innnen niemals abnimmt, hieraus eine untere Grenze 7,39 für die Dichte im Mittelpunkte der Erde ermittelt.

Im letzten Capitel endlich wird das Theorem bewiesen, dass die Oberflächen zweier Flüssigkeiten von verschiedener Dichte, welche über einander einen unbekannten Kern bedecken, confocale Ellipsoide sein müssen, wenn sie überhaupt Ellipsoide und zugleich Niveauflächen sind. Es wird bewiesen, dass dies nur dann möglich wäre, wenn inwendig Schichten von geringerer Dichte als an der äussersten Schicht vorkämen, was für die Erde kaum anzunehmen ist. Dz.

Hamy. Sur la théorie de la figure des planètes. C. R. CX. 124-125.

Es werden einige Resultate der Arbeit Remarques sur la théorie générale de la figure des planètes (siehe das vorangehende Ref.) angegeben und einige Bemerkungen zu den Lamé'schen Functionen gemacht. Dz.

W. Sellmeier. Die Sonne unter der Herrschaft der drei Planeten Venus, Erde und Jupiter. Halle a. S. 1890. 21 S.

Die Planeten bewirken auf der Sonne eine Flut, welche die grossen Eruptionen auf ihr nach Meinung des Verfassers auslöst. Durch Einsetzen der Zahlen folgt, dass in dieser Hinsicht Venus und Jupiter den stärksten Einfluss, Mercur und Erde etwa einen halb so grossen Einfluss haben. Wird der Mercur bei Seite gelassen, so zeigt eine einfache Rechnung, dass nach etwa 11 Jahren die drei anderen Planeten ungefähr dieselbe relative Lage zur Sonne haben. Da im Jahre 1814 die mittleren Längen dieser Planeten um ganze Vielfache von 180° sich unterschieden, so muss hier ein Maximum der Flutenhäufigkeit sein und dieses sich etwa alle 11 Jahre wiederholen, was auch der Fall ist. Dz.

A. Belopolsky. Ueber die Analogie zwischen den Bewegungen auf der Sonnenoberfläche und den Circulationen in einer rotirenden flüssigen Kugel. Arbeiten der VIII. Versammlung der russ. Naturforscher und Aerzte. 1890. St. Petersburg. Math. und Astronomie. 31-35. (Russisch.)

Herr Belopolsky teilt die Resultate seiner experimentellen Untersuchungen über die Bewegungen von Stearinteilchen längs der Oberfläche eines rotirenden Glasballons mit, welcher mit Wasser oder einer starken Zuckerlösung nebst in dieser Flüssigkeit schwimmenden feinen Stearinteilchen gefüllt ist. Diese Experimente liessen eine Analogie bemerken zwischen den Bewegungen auf der Sonnenoberfläche (aus Beobachtungen der Sonnenflecken abgeleitet) und den Bewegungen einer Flüssigkeit mit innerer Reibung, die in einer kugelförmigen Höhlung eines rotirenden Körpers eingeschlossen ist. Herr Belopolsky citirt in seinem Berichte Herrn Joukowsky's Arbeit: „Ueber die Bewegung eines starren Körpers, welcher mit Flüssigkeit gefüllte Höhlungen hat“, die im XVII. Bde. des Journ. der Russ. Phys. chem. Ges. für das Jahr 1885 abgedruckt ist. **Bb.**

R. Radau. Remarques relatives à une cause de variation des latitudes. C. R. CXI. 558-559.

Es wird nach dem Einfluss gefragt, welchen die Ebbe und Flut, sowie die Niederschläge, wenn sie sich in fester Form irgendwo auf der Erde anhäufen, auf die Variation der Breite haben können, und nachgewiesen, dass derselbe, wenn diese Niederschläge die Masse von etwa 2000 Kubikkilometer Wasser erreichen, im Maximum etwa 0,20″ betragen kann. **Dz.**

A. Gaillot. Sur les variations constatées dans les observations de la latitude d'un même lieu. C. R. CXI. 559-562.

Die in Potsdam, Berlin und Prag unternommenen Beobachtungen über die jährliche Variation der Breite haben mit völliger Sicherheit eine solche von $\pm$ 0,25″ um den mittleren Wert ergeben, was mit einem Resultat, welches in Paris aus den Beobachtungen der Jahre 1856-1861 hergeleitet worden, völlig stimmt. Es werden zwei Theorien für die Erklärung dieser Erscheinung besprochen. Die erste, dass die Rotationsaxe sich im Innern

der Erde verändert, so dass der Pol einen Kreis von etwa 7·8m beschriebe. Dann müsste die Variation der Breite für Orte von sehr verschiedener Länge allerdings im ganzen von derselben Grösse bleiben, aber die Epochen durchaus verschieden ausfallen, ja für Längenunterschiede von 180° gerade entgegengesetzt sein. Die zweite Theorie erklärt die Breitenänderungen aus den Refractionserscheinungen, da vielleicht die Unregelmässigkeiten in der Dichte der Luft im Sommer anders ausfallen als im Winter. Dann müsste die Epoche der Variation für alle Orte dieselbe, die Grösse aber voraussichtlich für Orte verschiedener Breite verschieden sein. Daher wird dem Vorschlage des Herrn Fergola auf dem Congress zu Rom zugestimmt, Orte mit sehr verschiedener Länge als Stationen zu wählen; die Annahme desselben würde die Verwerfung einer der beiden Theorien entscheiden. Dz.

Weitere Litteratur.

F. Folie. À l'occasion des variations de latitude constatées à Berlin, à Potsdam et à Prague. Belg. Bull. (3) XX. 438-439.

Die Aenderungen hängen vielleicht von den periodischen Gliedern der systematischen Abirrung ab. Mn. (Lp.)

F. Folie. Sur la période astronomique dite déci-mensuelle. Belg. Bull. (3) XX. 28-32.

Die von den Astronomen den Aenderungen der Breite zugeschriebene Periode von 305 Tagen muss durch eine Periode von 336,7 mittleren Tagen ersetzt werden. Mn. (Lp.)

G. V. Schiaparelli. La rotacion de Mercurio. Mexico Soc. Alzate III.

Uebersetzung der Abhandlung über die Umdrehung des Mercur aus den Memorie della Società degli Spettroscopisti italiani. Tx. (Lp.)

J. Guillaume. Observations physiques de la planète Mars, en 1890 faites à Peronnas, près Bourg en Bresse. Belg. Bull. (3) XX. 535-538.

F. TERBY. Rapport. Belg. Bull. (3) XX. 528-529.

F. TERBY. Faits démontrant la permanence des taches sombres de Vénus et la lenteur de leur mouvement de rotation. Ibid. 709-729.

F. TERBY. Sur de nouvelles observations des canaux de Mars et de leur gémination. Ibid. 37-49.

M. WOLF. Sur les termes élémentaires dans l'expression du rayon-vecteur. Habil.-Schrift Heidelberg. 50 S. 4°.

H. GYLDÉN. Bevis för en Sats, som berör fragan om Planetssystemets Stabilitet. Stockh. Vet. Ak. Bih. 27 S.

H. MATZAT. Eine neue Gleichung für die Sonnenfinsternis des Runius. Weilburg. 6 S. 4°.

LOEWY et PUISEUX. Sur la théorie du système optique formé par une lunette et un miroir plan mobile autour d'un axe. C. R. CX. 761-767.

LOEWY et PUISEUX. Sur la théorie du système optique formé par un double miroir plan installé devant l'objectif d'un équatorial et mobile autour d'un axe. C. R. CX. 818-825.

LOEWY et PUISEUX. Sur l'application d'un double miroir plan à la mesure précise des distances des astres. C. R. CX. 1097-1105.

R. DE SOUSA PINTO. Continuação dos estudos instrumentaes. Coimbra.

Diese Schrift bildet die Fortsetzung einer anderen von demselben Verfasser, welche in F. d. M. XIX. 1887. 1206 angezeigt ist. Der Verf. führt die Untersuchung der Meridianfernrohre auf der Sternwarte von Coimbra weiter fort. Tx. (Lp.)

A. A. MICHELSON. On the application of interference methods to astronomical measurements. Phil. Mag. (5) XXX. 1-21.

Capitel 3.
Mathematische Geographie und Meteorologie.

S. Günther. Handbuch der Mathematischen Geographie (Bibliothek geographischer Handbücher). Stuttgart. Engelhorn. XVI u. 793 S. Mit 155 Abbildungen. 8°.

Das Buch ist dazu bestimmt, dem Geographen das Eindringen in die eigentümliche Methodik der mathematischen Erdkunde möglichst zu erleichtern, und es ist deshalb die Anwendung höherer Rechnung auf diejenigen Capitel beschränkt worden, welche einer elementaren Behandlung nicht, oder doch nur auf grossen Umwegen, zugänglich erscheinen. In einer methodologischen Einleitung wird die Aufgabe der mathematischen Erdkunde dahin präcisirt, dass sie die Frage, wo befindet sich in gegebener Zeit ein gegebener Erdort, allgemein zu lösen habe. Damit sind aber drei Unterabteilungen von selbst gegeben. Man muss wissen, welches die Grösse und Gestalt der Erde ist; man muss, nachdem dies festgestellt ist, einen beliebigen Punkt auf ein festes Coordinatensystem, das dem Erdkörper selbst angehört, beziehen können; und man muss drittens den Ort des Anfangspunktes dieses Coordinatensystems im Raume zu fixiren vermögen. Im ersten Hauptabschnitte wird somit von der sinnlichen Anschauung ausgegangen; es werden die Gründe für die sphärische und später für die sphäroidische Gestalt der Erde erörtert, und zuletzt wird die moderne Theorie mathematisch begründet, dass das Geoid, d. h. die durch einen absolut bewegungslosen Wasserspiegel gekennzeichnete Niveaufläche der Schwer- und Schwungkraft, der geometrisch regelmässigen Form überhaupt entbehre. Dem zweiten Hauptabschnitte sind folgerichtig die Höhenmessung, sowie die Bestimmung der geographischen Breite und Länge zugewiesen, während im dritten die Bewegungsverhältnisse des Erdplaneten — ältere Weltsysteme, Rotation und Revolution, Kepler'sche Gesetze, Präcession und Nutation, Eigenbewegung des Sonnensystems — in Betracht gezogen worden sind. Gr.

O. Riedel. Die Grundlehren der Astronomischen Geographie und ihre unterrichtliche Behandlung. Wittenberg. R. Herrosé. XII u. 178 S. 8°.

Eine im wesentlichen klare, aber etwas zu weitschweifige und mit mancherlei — zumal poetischem — Ballast bebürdete populäre Astronomie, die ihren Hauptzweck, an Lehrerseminarien verwendet zu werden, wohl erreichen kann. Gr.

J. Thiede. Einführung in die Mathematische Geographie und Himmelskunde. Freiburg i. Br. Herder. V u. 62 S. 8°.

Eine kurze, klare und nichts Wesentliches ausser Acht lassende Darstellung der Grundlehren der astronomischen Geographie, durch gut gezeichnete, teilweise neue Figuren erläutert. Nicht genügend erscheint die lediglich auf einen Specialfall bedacht nehmende Erklärung der Aberration, und verfehlt ist der kurze Abschnitt über die Mercator-Projection, welche der Verf. mit der gnomonischen Uebertragung der Kugelfläche auf den äquatorialen Tangentialcylinder verwechselt. Gr.

E. Vogt. Aufgaben aus der Mathematischen Geographie. Pr. Gymn. Speier a. Rh.

Eine sehr brauchbare und verdienstliche Zusammenstellung, von welcher allerdings nur diejenigen Lehranstalten vollen Gebrauch zu machen in der Lage sind, welche in der Verwendung der sphärischen Trigonometrie nicht über Beschränkung zu klagen haben. Zunächst erhalten wir Beispiele über die Transformation der Raumcoordinaten in Verbindung mit der Bestimmung der geographischen Breite (Methode von Douwes); hierauf wird unter verschiedenen Voraussetzungen die Sichtbarkeits- und Unsichtbarkeitsdauer der Sterne und der Sonne berechnet, woran sich dann wieder Aufgaben über die Dämmerungsdauer anschliessen. Nunmehr kommt die Erdoberfläche an die Reihe: es wird ermittelt, wie man Distanzen auf der kugelförmigen Erde bestimmt, und welchen Teil der Erde man von erhabenen Punkten aus zu übersehen vermag. Sehr eingehend

wird die Parallaxenberechnung abgehandelt, und auch einige gnomonische Aufgaben finden sich vor, was wir nur billigen können. Endlich begegnen wir einer recht ausführlichen und doch in keiner Weise über den Standpunkt eines Primaners hinausgehenden Darstellung des Finsterniscalculs. Numerische Fälle sind allenthalben beigegeben, alle Rechnungen sind an einfachen Figuren versinnlicht; kurz, die kleine Schrift eignet sich vortrefflich dazu, von dem Lehrer der mathematischen Geographie neben dem natürlich unentbehrlichen systematischen Compendium zu Rate gezogen zu werden. Gr.

K. Heller. Beitrag zum Unterricht in der Mathematischen Geographie. Pr. Realgymn. Halberstadt.

Der wesentliche Zweck dieser Abhandlung ist der, eine möglichst elementare, auch für Schüler der höheren Klassen verständliche Auflösung des Kepler'schen Problems zu erlangen. Die zu lösende transcendente Gleichung ist, die bekannten Bezeichnungen vorausgesetzt,

$$\vartheta - e\sin\vartheta = \frac{2\pi t}{n};$$

indem mittels der Gleichungen

$$\sin\vartheta = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}{1+e\cos\varphi} \quad \text{und} \quad \frac{e\sin\vartheta}{\sqrt{1-e^2}} = \operatorname{tg}\lambda$$

die zwei neuen Winkel ϑ und λ eingeführt werden, kann man an Stelle der ursprünglichen Gleichung die folgende betrachten:

$$\varphi = \lambda + \arcsin\left(\frac{\sin\lambda}{e}\right).$$

Der Verf. nimmt die Reihe für arcsin als bekannt an, wogegen freilich die Mehrzahl der Gymnasiallehrer Protest erheben dürfte, und findet so

$$\arcsin\left(\frac{\sin\lambda}{e}\right) = \frac{\sin\lambda}{e} + \frac{1}{2.3}\cdot\frac{\sin^3\lambda}{e^3} + \frac{1.3}{2.4.5}\cdot\frac{\sin^5\lambda}{e^5} + \cdots$$
$$= \sin\vartheta + \frac{1}{2.3}\sin^3\vartheta + \cdots$$
$$+ \tfrac{1}{2}e^2\sin 2\vartheta\cos\vartheta\left(1 + \tfrac{1}{2}\sin^2\vartheta + \frac{1.3}{2.4}\sin^4\vartheta + \cdots\right).$$

Durch Einsetzung und mehrfache Umformung ergiebt sich (angenähert)

$$\varphi = \vartheta + e \sin\vartheta + \frac{e^2}{4} \sin 2\vartheta + \frac{e^3}{2} \sin\vartheta - \frac{e^3}{3} \sin^3\vartheta,$$

oder zuletzt

$$\varphi = \frac{2\pi t}{n} + 2e \sin\frac{2\pi t}{n} + \frac{5}{4} e^2 \sin\frac{4\pi t}{n} + \frac{e^3}{12}\left(13 \sin\frac{6\pi t}{n} - \sin\frac{2\pi t}{n}\right).$$

Anwendungen werden gemacht, um die Zeitgleichung, sowie die Aequatorialcoordinaten eines Planeten für einen gegebenen Zeitpunkt zu berechnen. Gr.

G. Egidi. **Note sulla soluzione pratica di alcuni problemi gnomonici.** Rom. Acc. P. d. N. L. XLII. 225-238; XLIII. 41-52, 63-78.

Die behandelten Aufgaben sind durchweg solche, welche durch sphärische Trigonometrie oder durch einfache Rechnung mit orthogonalen Coordinaten aufgelöst werden können; sie erwecken also gerade kein höheres mathematisches Interesse, sind aber für die Ausgestaltung der Gnomonik an sich nicht unwichtig. Zuerst wird die Zeit bestimmt, während welcher eine Sonnenuhr überhaupt von den Sonnenstrahlen getroffen wird und ihrem Zwecke als Uhr dienen kann. Von weiteren Fragen seien die folgenden genannt: Wie kann man Fusspunkt und Länge des Stilus finden, wenn solche nicht unmittelbar gegeben sind? Welches ist die vom Endpunkte des Schattens beschriebene krumme Linie? Wie lässt sich, wenn ein gewisser Schattenendpunkt nachmittags gegeben ist, derjenige ermitteln, welcher für den Vormittag einem gleich hohen Sonnenstande entspricht? Wie lässt sich der Winkel zwischen consecutiven Stundenlinien als Function der Sonnenhöhe ausdrücken? Wenn der von der Uhrebene mit dem Horizonte gebildete Winkel bekannt ist, welches sind die Neigungen gewisser Stundenlinien gegen den Horizont? Der Kegelschnitt, den der Endpunkt des Schattens beschreibt, ist übrigens schon oftmals zum Gegenstande eingehender Unter-

suchungen gemacht worden, worüber in Chasles' „Geschichte der Geometrie" viele Mitteilungen zu finden sind. Gr.

F. Buchholtz. Die einfache Erdzeit mit Stundenzonen und festem Weltmeridiane als Zifferblatt ohne Störung der Tageszeiten für alle Länder und Völker der Erde. Berlin. Conrad. 31 S. 8°.

Der hier ausgesprochene und im einzelnen durchgeführte Gedanke, die sphärische Erdoberfläche durch äquidistante Meridiane in Zweiecke zu zerlegen, für deren ganzen Innenraum die Zeit die nämliche sein soll, während immer an der Begrenzungslinie ein Sprung von einer Stunde stattfände, hat manches für sich, ist aber keineswegs neu. Weniger glücklich ist die Wahl des Ausdrucks „Stundenzonen", der zwar leider sehr verbreitet, geometrisch jedoch gänzlich unzulässig ist, und auch der Vorschlag, den Nullmeridian in die Beringsstrasse zu verlegen, hat heutzutage keine Aussicht auf Verwirklichung. Dem Verf. scheint es entgangen zu sein, dass Bouthillier de Beaumont für dieses Project seit geraumer Zeit Stimmung zu machen versucht hat, ohne viel Entgegenkommen zu finden. Gr.

C. E. M. Rohrbach. Ueber mittlere Grenzabstände. Vorschläge zur arithmetischen und graphischen Darstellung und Vergleichung geographischer Verhältnisse. Petermann's Geogr. Mitteilungen. 76-84, 89-93.

Die schon zu wiederholten Malen von Geographen und Mathematikern gemachten Versuche, für das, was unbestimmt durch die Ausdrücke „Küstenentwickelung" oder „Aufgeschlossensein eines Landes gegen das Meer" charakterisirt werden sollte, scharfe Begriffsbestimmungen zu schaffen, werden vom Verf. geprüft und als zu wenig eindeutig oder aus anderen Gründen verworfen. Er ersetzt die für diesen Zweck angegebenen Formeln durch das geometrische Bild, indem er für jede Kontur eine Anzahl „chorigraphischer Curven" construirt. Man kann unendlich

viele Kreise von an sich gleichen, sonst aber beliebigen Halbmessern construirt denken, deren jeder die Küstenlinie berührt, und die Enveloppe aller dieser Kreise ist dann eine Curve der bezeichneten Art. Je ähnlicher eine für eine grössere Küstendistanz verzeichnete chorigraphische Curve der Hauptumrisslinie ausfällt, um so schwieriger gestaltet sich im allgemeinen die Zugänglichkeit der inneren Partien des betreffenden Landes vom Meere aus. Gr.

E. Reimann. Beiträge zur Bestimmung der Gestalt des scheinbaren Himmelsgewölbes. Pr. Gymn. Hirschberg i. Schl.

Aelteren theoretischen Untersuchungen über die Gestalt des Firmamentes, wie sie besonders von Rob. Smith und Drobisch vorliegen, folgt hier eine genaue autoptische Bestimmung nach. Mit Drobisch nimmt der Verf. das scheinbare Himmelsgewölbe als die Kalotte einer Kugel an, deren Mittelpunkt auf der vom Standpunkte des Beobachters nach dessen Nadir gezogenen geraden Linie gelegen ist, so dass also nur, wenn a die Entfernung des Centrums vom Beobachter, r den Halbmesser der fraglichen Kugel bedeutet, das Verhältnis $a:r$ zu ermitteln bleibt, oder auch der Wert des Verhältnisses $\sqrt{r^2-a^2}:r$. Letzteren Wert findet man, wenn man mit möglichster Schärfe den Höhenwinkel misst, unter welchem der Halbirungspunkt eines vom Zenit nach dem Horizonte gezogenen Hauptkreisbogens dem Auge erscheint; alles Weitere liefert eine Rechnung, die bei Hrn. Reimann wesentlich vereinfacht worden ist. Aus zahlreichen Beobachtungen ergiebt sich der charakteristische Winkel in Mondscheinnächten gleich 27°, in mondlosen Nächten gleich 30°, an heiteren Tagen im Mittel gleich $22\frac{1}{2}$°, und je nachdem man mit einer dieser drei Zahlen in die Schlussformel eingeht, wird

$$\sqrt{1-\left(\frac{a}{r}\right)^2} = \frac{2{,}80}{4{,}42} \quad \text{oder} \quad = \frac{2{,}27}{3{,}30} \quad \text{oder} \quad = \frac{3{,}48}{6{,}55}$$

gefunden. Gr.

G. Maurer. Kosmologie. II. Pr. Gymn. Neuburg a. D.

Während der erste Teil dieser „Kosmologie“ der mathema-

tischen Geographie gewidmet war, hat es diese Fortsetzung mit der physikalischen Geographie zu thun. Der siebente Abschnitt handelt von der inneren Erdwärme und ihrer Messung, von artesischen Brunnen (warum diese hier?) und Thermen, von den Vulkanen und vom geognostischen Aufbau der Erdkruste, sowie von den in der Configuration der Erde angeblich hervortretenden Gesetzmässigkeiten; der achte von der verticalen Abnahme der Temperatur mit der Höhe, von der Schneegrenze, den Gletschern und Lawinen; der neunte von der Verteilung der Wärme auf der Erdoberfläche, der zehnte von Wind und Wetter, der elfte von den Hydrometeoren, von Gewitter, Hagel und Quellbildung, der zwölfte vom Luftdruck (etwas verspätet), der dreizehnte von den Meeresströmungen, der vierzehnte endlich von den atmosphärisch-optischen Erscheinungen. Die Darstellung ist klar, wird aber durch die wenig systematische Gliederung des Stoffes hie und da beeinträchtigt; auch sind die Vorlagen, nach denen der Verf. arbeitete, teilweise schon veraltet, wie z. B. das viel benützte und für seine Zeit auch wirklich recht verdienstliche Werk von Zamminer. So sind denn manche Abschnitte, wie z. B. über die paläozoische Gebirgsformation, über die physikalische Theorie des Föhnwindes, über Beschaffenheit der Nebelbläschen u. s. w., mit den Ergebnissen der neueren Forschung nicht in Einklang zu bringen. Die Falb'sche Hypothese scheint der Verf. in einem viel zu günstigen Lichte zu betrachten. Gr.

R. S. Woodward. The mathematical theories of the Earth. Smithsonian Inst. Rep. (1890). 183-200; Amer. Ass. Adv. Sci. XXXVIII.

H. Hennessy. On the physical structure of the Earth. Smithsonian Inst. Rep. (1890.) 201-219; Abdruck aus Phil. Mag. (5) XXII. 233-251, 328-331. (1886).

A. Hoffmann. Mathematische Geographie. Ein Leitfaden zunächst für die oberen Klassen höherer Lehranstalten. 4. Auflage, bearbeitet von J. Plassmann. Paderborn. Ferd. Schoeningh. VIII u. 174 S. 8°.

J. Ruefli. Leitfaden der Mathematischen Geographie. 2. Aufl. Bern. Schmid, Franke u. Co. VI u. 96 S. 8°.

A. Bechstein. Aufgaben aus der astronomischen Geographie. Görlitz. 11 S. 4°.

H. Friedel. Zur Darstellung der Mondbahn. Zugleich eine Kritik der Mondbahnzeichnungen in unseren Büchern und Atlanten. Jena. Mauke. 8 S. 8°.

L. Baur. Elemente der Mathematischen Geographie zugleich als erläuternder Text für die Wandtafeln der Mathematischen Geographie. Ravensburg. Dorn. VI u. 36 S. 8°.

L. Baur und W. Boehm. Wandtafeln zur Mathematischen Geographie. Ravensburg. Dorn. Drei farbige Tafeln. Quer gr. Fol.

M. Geistbeck. Leitfaden der Mathematischen und Physikalischen Geographie für Mittelschulen und Lehrerbildungsanstalten. 11. Aufl. Freiburg i. Br. Herder. VIII u. 165 S. 8°.

J. R. Boyman. Grundlehren der Mathematischen Geographie und Uebersicht des Weltgebäudes für Gymnasien, Realschulen und andere höhere Lehranstalten. Düsseldorf. Schwann. 56 S. 8°.

J. Liagre. Quelques mots à propos de la notice de M. E. Ronkar: Sur l'entraînement mutuel de l'écorce et du noyau terrestre en vertu du frottement intérieur. Belg. Bull. (3) XIX. 54-60.

F. Folie. Réponse à la note du général Liagre. Belg Bull. (3) XIX. 353-361.

E. Ronkar. Sur l'entraînement mutuel du noyau et de l'écorce terrestre en vertu du frottement. Belg. Bull. (3) XIX. 431-444.

E. Ronkar. Sur l'épaisseur de l'écorce terrestre déduite de la nutation diurne. Belg. Bull. (3) XIX. 399-431.

F. Folie, Lagrange, De Tilly. Rapports sur ces mémoires. Belg. Bull. (3) XIX. 328-338.

1. Hr. Liagre versucht eine explicite Fassung der Hypothesen, auf welche sich Hr. Ronkar in einer früheren Arbeit stützt. Er meint übrigens, dass der Erdkern und die Erdrinde derartig in einander greifen, dass sie sich gleichzeitig und zusammen drehen.

2. Hr. Folie beruft sich darauf, dass die Beobachtungen der dem Pole zunächst gelegenen Sterne das Vorhandensein der täglichen Nutation zu beweisen scheinen. Damit sie möglich sei und Hr. Ronkar Recht habe, genügt es, als Erdkern den nicht in die Erdrinde eingreifenden Teil zu nehmen.

3. Hr. Ronkar nimmt in der dritten Arbeit der Ueberschrift in gründlicher Weise die Frage des gegenseitigen Mitführens der Erdrinde und des Erdkerns wieder auf.

4. In der folgenden leitet er aus der als Postulat angenommenen schwachen täglichen Nutation mit Hülfe von ergänzenden Hypothesen die Dicke der Erdrinde her.

5. Die Berichter betonen die von Hrn. Ronkar erzielten Ergebnisse, ohne die noch möglichen zu erhebenden Einwände zu vertuschen. Mn. (Lp.)

E. Ronkar. Sur l'entraînement mutuel de l'écorce et du noyau terrestre en vertu du frottement intérieur. Réponse à la notice de M. Liagre. Belg. Bull. (3) XIX. 746-758.

C. Lagrange. Rapport. Ibid. 734-736.

Hr. Ronkar verteidigt seinen Satz, indem er die Hypothesen scharf bestimmt, auf denen derselbe ruht; gerade dadurch scheint sich aber seine Tragweite abzuschwächen. Mn. (Lp.)

O. Fisher. Physics of the Earth's crust. Second edition. London. Macmillan and Co. XVI + 391 S.

Eine sehr vollständige und anerkennende Besprechung dieses

Buches, auf welche hier verwiesen werden mag, steht in Phil. Mag. (5) XXIX. 211-214. Gbs. (Lp.)

S. GÜNTHER. Die Knotenlinien der Atmo- und Hydrosphäre. Hamb. Mitt. II. 15-25.

Berechnet man nach den Grundsätzen der sogenannten statischen Gezeitentheorie und unter der Voraussetzung, dass der anziehende Himmelskörper sich irgendwo in der Verlängerung der Erdaxe befinde, die Fluthöhe für einen unter der geographischen Breite φ gelegenen Ort, so wird dieselbe durch eine Reihe dargestellt, deren erstes Glied, unter a eine Constante verstanden, den Wert $a(\frac{1}{3}-\sin^2\varphi)$ hat. Begnügt man sich also mit einer Annäherung, so ist die Fluthöhe für die Polhöhe $\alpha = \arcsin\sqrt{\frac{1}{3}} = 35^\circ 16'$ (appr.) gleich Null, und die beiden Parallelkreise von $\pm 35^\circ 16'$ trennen, wenn wir uns die Erdkugel von einem allenthalben gleich dicken Flüssigkeitsmantel bedeckt denken, die Partien, in denen gerade Flut herrscht, von den im Ebbezustande befindlichen. Da erstens mehrere der Wahrheit nicht völlig entsprechende Annahmen gemacht werden mussten, und da zweitens Mond und Sonne vom Aequator um viel weniger als 90° abweichen, so erleidet das theoretische Resultat natürlich mehrfache Abschwächungen; indessen sprechen doch hydrographische und meteorologische Anzeichen dafür, dass in der That den erwähnten Parallelkreisen die Eigenschaft von Knotenlinien in gewissem Sinne unter allen Umständen zugesprochen werden muss. Gr.

Second report of the Committee appointed to investigate the action of waves and currents on the beds and foreshores of estuaries by means of working models. With 18 plates. Brit. Ass. Rep. 512-534.

G. H. DARWIN. On the harmonic analysis of tidal observations of high and low water. Lond. R. S. Proc. XLVIII. 278-340.

K. Weihrauch. Fortsetzung der Neuen Untersuchungen über die Bessel'sche Formel und deren Verwendung in der Meteorologie. (Schriften herausg. von der Naturforscher-Gesellschaft bei der Universität Dorpat.) Leipzig. K. F. Koehler. 78 S. 8°.

Im Anschlusse an seine neue Auffassung der Bessel'schen Reihe geht der — inzwischen leider verstorbene — Autor auf gewisse specielle Fälle ein und zeigt zunächst, wie man, wenn die gegebenen Beobachtungsdaten keine äquidistanten sind, ein System von äquidistanten Beobachtungen dem ersteren zu substituiren im Stande ist. Oder es können auch bloss Mittelwerte vorliegen; dann leitet der Verf. aus diesen die Constanten der Reihenentwickelung ab. Endlich wird diese Herleitung auch für den Fall noch angenähert durchgeführt, dass man von vorn herein bloss mit gewissen Grenzwerten bekannt ist, zwischen denen die Constanten gelegen sein müssen. Gr.

M. Dechevrens. Nouvelle méthode de calcul pour l'interpolation et la correction des observations météorologiques. C. R. CX. 1021-1024.

Die auch sonst nichts weniger denn unbekannten Bedenken gegen die Anwendung der Bessel-Fourier'schen Formel auf Fragen der physikalischen Geographie führt der Verf. des näheren aus, um sodann folgende Modification in Vorschlag zu bringen. Jede ebene Curve von periodischem Charakter kann als Combination von Sinuscurven entstanden gedacht werden; durch eine geometrische Betrachtung folgert der Verf. hieraus, dass jedes Glied der Reihe, welche er für die gewöhnliche Interpolationsreihe einsetzen will, bloss die Form $\text{const.}\sin(n.45^\circ)(n \geqq 1, \leqq 8)$ anzunehmen brauche. Dass mit einer solchen Substitution von $\Sigma\text{const.}\sin(n.45^\circ)$ für den bekannten Ausdruck $a+b_i\sin(u_i+ina)$, wo α einen aliquoten Teil von 360° bedeutet, eine sehr ins Gewicht fallende Rechnungsersparnis erzielt würde, leuchtet ein; allein über die dem neuen Verfahren innewohnende Genauigkeit erhält man keine weiteren Aufschlüsse. Gr.

H. v. Helmholtz. Die Energie der Wogen und des Windes. Berl. Ber. 1890. 853-872; Wiedemann Ann. XLI. 641-6..

Die Untersuchung der Vorgänge, die sich an der Grenze von zwei verschieden dichten, an einander entlang strömender Schichten von Flüssigkeit oder Luft abspielen (F. d. M. XX 1274 und XXI. 1237), wird hier fortgesetzt und unter neuer Gesichtspunkten behandelt. Es werden wieder stationäre Wellen vorausgesetzt, und es wird zunächst angenommen, dass die Strömungsmengen constant seien, nämlich die Volumina von Flüssigkeit, die in der Zeiteinheit durch jeden Querschnitt zwischen der Wellenfläche einerseits und der oberen und unteren horizontalen Grenzfläche der beiden Flüssigkeiten andererseits hindurchströmen. Der physikalischen Bedingung, dass der Druck auf beiden Seiten der trennenden Wellenlinie der gleiche ist, entspricht die mathematische Forderung, dass die durch eine kleine Aenderung der Grenzlinie bedingte Variation der Differenz aus der potentiellen und kinetischen Energie, $\delta(\Phi-L)$, verschwindet. Die Gesetze der stationären geradlinigen Wellen werden damit auf ein Variationsproblem zurückgeführt. Wird $\Phi-L$ ein Minimum, so ist das Gleichgewicht der stationären Wellenform stabil. Nimmt dieselbe Grösse bei einer anderen Curvengestalt ein Maximum oder einen Sattelwert an, so ist das Gleichgewicht labil; und dies giebt sich bei den Wasserwellen im Schäumen und Branden der Wellenkämme zu erkennen. (Es ist bemerkenswert, dass es sich bei diesem Problem um die verschiedenen Fälle des Gleichgewichts nicht bei ruhenden, sondern bei dauernd bewegten, und zwar in stationärer Bewegung begriffenen Massen handelt). — Es zeigt sich ferner, dass stationäre Wellen von gegebener Wellenlänge sich nur erhalten können, wenn die Strömungsgeschwindigkeiten unterhalb gewisser oberer, aber auch oberhalb gewisser unterer Grenzen liegen.

Die Untersuchung der Gleichgewichtsbedingungen für die Fälle, dass die Geschwindigkeitspotentiale oder die Bewegungsmomente constant erhalten werden, führt auf eine vollkommene Analogie dieser Variationsprobleme mit den vom

Verf. in seiner Theorie der polycyklischen Systeme entwickelten Sätzen.

Die erhaltenen Gleichungen werden vereinfacht unter der Annahme, dass die verticale Ausdehnung der beiden Schichten sich der Grenze ∞ nähert. Dem entspricht der Fall, dass der Wind über die Oberfläche von hinreichend tiefem Wasser weht. Für die Strömungsgeschwindigkeiten der Luft und des Wassers ergeben sich unter der Voraussetzung, dass das Bewegungsmoment unveränderlich bleibt, einfache Formeln. Aus diesen folgt z. B., dass bei einer Windgeschwindigkeit von 10 m: $a_1 = 9{,}98709$ m, $a_2 = 0{,}01291$ m und die Wellenlänge $\lambda = 0{,}082782$ m wird. Diese (doch von einem ziemlich frischen Winde erregten) kurzen Wellen bedeuten nur die erste Kräuselung der Wasserfläche. Aus dieser können sich erst, wenn der Wind längere Zeit weht und einen Teil des Bewegungsmomentes langer Luftstrecken abgiebt, Wellen mit grösseren Werten der Fortpflanzungsgeschwindigkeit, Länge und Höhe entwickeln, und dies ist offenbar nur möglich, wenn der Wind eine grössere Geschwindigkeit hat als die Wellen. Dabei wird der Wind auch Energie an das Wasser abgeben, die zur Hebung der Oberfläche und zur Erzeugung der lebendigen Kraft des Wassers verbraucht wird. Auch daraus geht hervor, dass erst lange Luftstrecken vorüberziehen müssen, ehe es zur Bildung grösserer Wellen kommt. Diese wird ähnlich der Entstehung von Combinationstönen das Resultat von mannigfaltigen Interferenzen der verschiedenen erzeugten Wellensysteme sein.

Der Verf. suchte die Folgerungen der Theorie durch Beobachtungen zu bestätigen, die er im April 1890 am Cap d'Antibes anstellte. Es zeigte sich in der That ein Zusammenhang zwischen der Windstärke und der Zahl der ankommenden Wellen; diese Zahl war aber immer etwas kleiner, als nach der Stärke des Uferwindes zu erwarten war, — was dadurch zu erklären wäre, dass der Wind auf hoher See stärker geweht hätte. Dabei ergab sich auch, dass die Nachwirkung eines starken Windes mehrere Tage dauern kann. Sbt.

W. v. Bezold. Zur Theorie der Cyklonen. Berl. Ber. 1890. 1295-1317.

Die theoretische Forschung richtet sich in der Meteorologie neuerdings vor allem auf die Erscheinungen, die aus dem Zusammenwirken der allgemeinen Circulation der Atmosphäre und der localen Ursachen für die Entstehung und Fortpflanzung der Cyklonen und Anticyklonen hervorgehen. Die vorliegende Abhandlung ist ein Beitrag zur Lösung der hierauf bezüglichen Probleme, die in ihrer Allgemeinheit natürlich der Untersuchung ganz ungeheure Schwierigkeiten darbieten.

Der Verf. giebt nach einer einleitenden Uebersicht über den Umschwung, der sich in den Grundanschauungen über atmosphärische Bewegungen seit den bezüglichen Arbeiten von Ferrel, Hann und W. v. Siemens vollzogen hat, eine Skizze von dem vorerwähnten Zusammenwirken, insofern es in dem Verlaufe der mittleren Jahres- und Monatsisothermen der Erde zu erkennen ist. (Man sehe die Abhandlung S. 1298-1299 oder einen Auszug des Verfs. in der meteorologischen Zeitschrift 1891, S. 241 ff.) Er wendet sich dann zu der Frage, ob bei gegebenen Cyklonen oder Anticyklonen die Temperatur- und Feuchtigkeitsverhältnisse allein zur Erklärung der Thatsachen ausreichen, oder ob die Mitwirkung von Bewegungen zu berücksichtigen ist, die ausserhalb des betrachteten Wirbels oder des gerade betrachteten Teiles eines Wirbels liegen. „Sind die Bewegungen in der Cyklone ausschliesslich Folge der in ihrem Centrum vorhandenen Luftverdünnung, oder ist umgekehrt die letztere ganz oder teilweise die Folge dieser Bewegungen, die alsdann ihre Ursache natürlich ausserhalb finden müssen?"

Das Letztere trifft sicherlich zu, wenn der Wind in der Richtung der Isobaren weht oder gar eine Componente gegen den Gradienten hat; denn dann ist Arbeit zu leisten, die unmöglich von der Gradientkraft geleistet werden kann. Die mathematische Behandlung der Aufgabe wird auf sogenannte „centrirte Cyklonen" beschränkt, d. h. auf Cyklonen mit kreisförmigen Isobaren und mit Winden, die in die Richtung der Isobaren fallen.

Die einfache Bedingung für die Erhaltung eines centrirten

Wirbels ist:

$$p_c + p_i + \Gamma = 0,$$

wenn p_c die Centrifugalkraft, p_i die ablenkende Kraft der Erdrotation, Γ die Gradientkraft bezeichnet. Die Summe ist eine algebraische, und den drei Grössen ist in den vier verschiedenen Fällen, die möglich sind, das richtige Zeichen zu geben. Praktische Bedeutung hat unter den vier Fällen nur der eine, derjenige der cyklonalen Rotation mit einwärts gerichteten Gradienten; in diesem Falle ist

$$p_c + p_i - \Gamma = 0.$$

p_c und p_i können mit Hülfe der Windgeschwindigkeit v, des Radius der Trägheitsbahn r, der (mittleren) geographischen Breite φ und der Dauer der Erdrotation T leicht ausgedrückt werden; dann ergiebt sich Γ oder auch $\gamma = \frac{\Gamma}{m}$, also die Beschleunigung der Gradientkraft, in folgender Weise:

$$\gamma = \frac{v^2}{r} + vk.\sin\varphi,$$

wo

$$k = \frac{4\pi}{T} = 0{,}0001458.$$

Andererseits ist

$$\gamma = \frac{G}{111\,111} \cdot \frac{13{,}6}{\varrho} \cdot g = 0{,}00012237.G.\frac{g}{\varrho},$$

wenn G der Gradient, d. h. der Unterschied der Barometerstände an zwei Punkten, die in der Richtung des grössten barometrischen Gefälles einen Abstand von einem Meridiangrad haben, und wenn ϱ die in einem cbm Luft enthaltene Masse ist. Drittens ist, wie der Verf. zeigt, $\gamma = g.\mathrm{tg}\,\alpha$, wo α der Winkel ist, den die Flächen gleichen Druckes mit der Horizontalebene bilden, — im allgemeinen ein sehr kleiner Winkel (für ein bestimmtes Beispiel berechnet der Verf. $\alpha = 0^\circ\,1'\,36''$), so dass man statt $\mathrm{tg}\,\alpha$ auch $\sin\alpha$ setzen könnte; dann wäre die Beschleunigung dieselbe wie die eines Körpers, der ohne Reibung auf den Flächen gleichen Druckes hinabgleitet. — Die Gleichungen, die man erhält, wenn man die Werte von γ einander gleich setzt, zeigen,

dass zwischen der Druckverteilung und den Windgeschwindigkeiten bestimmte Beziehungen vorhanden sein müssen, wenn der Wirbel fortbestehen soll: einer bestimmten Druckverteilung entsprechen bestimmte, sogenannte „kritische" Geschwindigkeiten, gegebenen Geschwindigkeiten aber „kritische Druckflächen" und diesen zugehörige „kritische Gradienten". „Im centrirten Wirbel müssen die Druckflächen mit den kritischen Flächen zusammenfallen und die effectiven Gradienten gleich den kritischen Gradienten sein". Je nachdem die Neigung der Druckflächen grösser oder kleiner als die der kritischen Flächen ist, herrscht centripetale oder centrifugale Bewegung.

Die Untersuchung lehrt nun, dass centrirte Cyklonen, wenigstens solche, die an der Basis centrirt sind, thatsächlich vorkommen können und auch gar nicht zu den Seltenheiten gehören. Dagegen ist es höchst unwahrscheinlich, dass die Cyklonen auch in grösserer Höhe centrirt bleiben; vielmehr hat man dort centrifugale Bewegung zu erwarten, selbst wenn sie gegen den Gradienten erfolgen sollte. Alsdann muss aber die Energie der Bewegung ihren Ursprung anderswo haben als in dem betreffenden Teile der Cyklone. — Es kann geschehen, dass am Erdboden centripetale, von einer gewissen Höhe ab aber centrifugale Bewegung herrscht, während die Cyklone in der Trennungsschicht centrirt ist. Wenn diese Schicht dem Erdboden sehr nahe ist, dann können im Innern der Cyklone durch saugende Wirkung des unteren luftverdünnten Teiles absteigende Bewegungen herbeigeführt werden. Hieraus ist vielleicht das „Auge des Sturmes", die in den Wetterkarten zuweilen nachweisbare Abnahme der Bewölkung bei Annäherung des Centrums und die gelegentlich beobachtete Trockenheit im Innern der Cyklone zu erklären.

Bei den Tornados müssen die kritischen Flächen ausserordentlich grosse Neigung haben und enorme Gradienten vorhanden sein, wenn die Kreisbewegung nicht in eine centrifugale übergehen soll. Deswegen ist centripetale Bewegung und ein Aufsteigen der Luft in dem Axenkanal des Wirbels höchst unwahrscheinlich. Absteigende Bewegungen sind wohl denkbar,

aber nicht aus dem Herabsteigen des Wolkenschlauches zu folgern; dies kommt daher, dass zuerst oben eine sehr beträchtliche Geschwindigkeit herrscht, die dann Verdünnung der Luft und Condensation des Wasserdampfes zur Folge hat. Sbt.

A. Sprung. Ueber die Theorien des allgemeinen Windsystems der Erde, mit besonderer Rücksicht auf den Antipassat. Met. Zeitschr. VII. 161-177.

Der Verfasser stellt der Reihe nach dar: I. Die Theorie von Werner Siemens (Berl. Ber. 1886, „Ueber die Erhaltung der Kraft im Luftmeere der Erde", F. d. M. XVIII. 1064). II. Die Theorie von William Ferrel („The motions of fluids and solids on the Earth's surface", 1858 - 1860). III. Eine Vergleichung der theoretischen Ergebnisse beider Forscher. IV. Die Ergebnisse der Theorie, durch die wirklichen Verhältnisse modificirt, unter Bezugnahme auf einschlägige Veröffentlichungen der Herren Pernter und Oberbeck. Endlich wird im V. Abschnitte der Abhandlung der Versuch gemacht, einen Einblick in das Wesen des Vorganges zu eröffnen. Dabei wird betont, dass bei einer Verschiebung von Luftmassen in andere Breiten Arbeit zu leisten ist, und dass diese Arbeit in einer notwendigen Vergrösserung der kinetischen Energie dieser Luftmassen zur Erscheinung kommt. Lp.

W. von Siemens. Ueber das allgemeine Windsystem der Erde. Berl. Ber. 1890. 629-638, Met. Zeitschr. VII. 321-328.

Erwiderung auf die vergleichende Kritik des Hrn. Sprung in dem eben besprochenen Aufsatze. Der Satz von der Erhaltung des Rotationsmomentes oder der Flächensatz kann bei der Luftbewegung nicht platzgreifen, weil keine Kraft vorhanden ist, welche, wie bei den Centralbewegungen der Astronomie, die Erhaltung der Flächen bedingt. Ferner kann auf geneigten Flächen gleichen Luftdrucks ein Hinabgleiten der überlagernden Luftschichten nicht stattfinden. Vielmehr beruhen alle Luft-

bewegungen auf Störungen des indifferenten Gleichgewichts der Atmosphäre und bezwecken die Wiederherstellung desselben. Diese Störungen werden bewirkt durch Ueberhitzung der dem Erdboden zunächst liegenden Luftschichten durch Sonnenstrahlung, durch unsymmetrische Abkühlung der höheren Luftschichten durch Ausstrahlung und durch Anstauung bewegter Luftmassen beim Auftreten von Strömungshindernissen. Die Theorie des allgemeinen Windsystems wird am Schlusse in neun Sätzen zusammengefasst. Lp.

M. Möller. Die Anwendung des Gesetzes der Flächen auf atmosphärische Strömungen. Met. Zeitschr. VII. 411-418.

M. Möller. Verhältnis der Luftbewegungen zur Verteilung der Rotationsmomente und der potentiellen Temperaturen in der Atmosphäre. Met. Zeitschr. VII. 418-421.

Der zweite Artikel ist eine Mitteilung aus einem autographischen Schriftstücke, enthaltend einen Vortrag, den Hr. Möller am 30. Juni 1888 im Zweigverein der Deutschen Meteorologischen Gesellschaft zu Hamburg gehalten hat. Der erste Artikel commentirt die Abhandlung des Herrn Werner Siemens: „Ueber das allgemeine Windsystem der Erde“ (vergl. den vorangehenden Bericht S. 1241). Nach einer historischen Einleitung wird zuerst in elementarer Weise das Gesetz der Flächen oder die Erhaltung des Rotationsmomentes erläutert. Danach werden die zur Erhaltung des Rotationsmomentes der atmosphärischen Luft zur Verfügung stehenden Kräfte aufgesucht. Der Verf. zieht hierbei zunächst die Schwerkraft heran; denn „bei der Verschiebung eines materiellen Punktes vom Aequator zum Pole auf der Erdoberfläche senkt sich der materielle Punkt in Richtung der Anziehungskraft der Erde um 11000m. Die geleistete Arbeit beträgt für je 1kg Masse den Wert 11000mkg“. Referent vermag die Bündigkeit dieses Schlusses nicht anzuerkennen. Wenn die Erdoberfläche, wie man dies annimmt, eine Niveaufläche für das Massensystem der Erde ist, so erfolgt die vom Verfasser angenommene Verschiebung lediglich innerhalb einer

Niveaufläche. Da aber nach den Fundamentalsätzen aus der Potentialtheorie von einer Kraft, die ein Potential hat, eine Arbeit nur beim Uebergange von einer Niveaufläche zu einer anderen geleistet wird, so ist die bei jener Verschiebung durch die Schwerkraft geleistete Arbeit Null.

Die Bemerkungen über andere in Betracht zu ziehende Kräfte beschränken sich auf kurze Erläuterungen. Lp.

SCHNEIDEMÜHL. Abhängigkeit der Rotations-Geschwindigkeiten und der Rotations-Momente von der geographischen Breite und dem Bewegungszustande der Luft. Met. Zeitschr. VII. 394-397.

Mit Rücksicht auf die Bedeutung, welche das Rotationsmoment (doppelte Flächengeschwindigkeit) durch die neueren Arbeiten der Herren von Helmholtz und Sprung für die theoretische Meteorologie gewonnen hat, ist vom Verf. auf Wunsch der Schriftleitung der Zeitschrift eine Tabelle zusammengestellt, welche einen Ueberblick über die numerischen Werte der dabei in Betracht kommenden Grössen gestattet. Lp.

A. KURZ. Einfluss der Erddrehung auf die Windrichtung. Exner Rep. XXVI. 565-569.

Vergleich des Bruns'schen Artikels: „Die Trägheitsbahn auf der Erdoberfläche" (Math. Ann. XXII, F. d. M. XV. 1883. 817) mit der neunten Vorlesung von Kirchhoff's Mechanik. Am Schlusse bezieht sich der Verfasser auch noch auf einen Artikel über eine elementare Behandlung des Problems in den Blättern für das bayerische Realschulwesen desselben Jahres. Lp.

J. M. PERNTER. Der Antipassat in den Tropen nach der mathematischen Theorie der allgemeinen Circulation der Atmosphäre. Met. Zeitschr. VII. 177-180.

Auf Grund der neueren Theorien hatte Hr. Pernter in einem

Vortrage in Wien den Satz für die Tropen aufgestellt, dass „in diesem Gebiete der Antipassat gänzlich fehlt“. Wegen des Widerspruches dieses Satzes mit den Beobachtungen kommt der Verf. auf die Frage zurück, um den Nachweis zu führen, dass dieser vermeinte Widerspruch nicht existirt, und dass daher der Annahme der (Oberbeck'schen) Theorie nichts im Wege stehe.

Lp.

M. Möller. Das allgemeine Windsystem der Erde und der Krakatau-Ausbruch. Met. Zeitschr. VII. 265-268.

Nach Hrn. Sprung ergeben die Theorien der allgemeinen Luftcirculation, welche die Reibungen am rauhen Erdboden voll berücksichtigen, nur mässige Ostwindgeschwindigkeiten in äquatorialen Breiten. Dagegen ist gelegentlich des Krakatau-Ausbruches das Vorhandensein sehr starker ostwestlicher Windströmungen für grosse Höhen und in bedeutender Breitenausdehnung erwiesen. Der Widerspruch zwischen der Theorie und den Ergebnissen der Beobachtung ist indessen, wie der Verf. zu zeigen versucht, nur ein scheinbarer; der Gegensatz entsteht durch den Vergleich zweier der Jahreszeit nach verschiedenen atmosphärischen Zustände.

Lp.

Ad. Schmidt. Ueber die doppelte tägliche Oscillation des Barometers. Met. Zeitschr. VII. 182-184.

Der Verfasser fasst die Ergebnisse seiner auf theoretischen Ueberlegungen beruhenden Untersuchungen in der Formel zusammen:

$$-42\sin\varphi.\sin(2\tau+141{,}8^\circ)+216(\sin^2\varphi-\tfrac{1}{3})\sin(2\tau+128{,}0^\circ),$$

in der φ die geographische Breite, τ die Greenwicher Zeit bedeutet. „Der erste Teil stellt eine stehende Welle mit einer Knotenlinie am Aequator dar, bei welcher an dem einen Pole die grösste Verdichtung herrscht, wenn an dem anderen der Luftdruck am geringsten ist. Der zweite Teil giebt eine Schwingung mit Knotenlinien bei $\varphi = \pm 35^\circ 16'$, bei welcher die Phase

an beiden Polen gleich und entgegengesetzt derjenigen am Aequator ist." Lp.

F. Klitzkowski. Untersuchungen über die Ursachen der unperiodischen Luftdruckschwankungen. Met. Zeitschr. VII. 441-455.

Auf Grund der Abhandlung von Werner von Siemens „Ueber die Erhaltung der Kraft im Luftmeere der Erde" zeigt der Verfasser im ersten Abschnitte seiner Arbeit, dass allein durch gewisse Störungen des adiabatischen Zustandes der Atmosphäre nach einiger Zeit solche Druckänderungen an der Erdoberfläche bemerkbar werden müssen, welche den beobachteten Luftdruckschwankungen jeder Grösse entsprechen. Im zweiten Abschnitte werden als Ursachen der Störung des indifferenten Gleichgewichts der Atmosphäre warme Luftströme betrachtet, welche in Folge ihres geringeren Gewichtes nach Verdrängung der vorhandenen Luftmassen Druckverminderungen erzeugen. Den Inhalt des dritten Abschnittes bildet eine kurze Anwendung der Ergebnisse erstens auf den Aequatorialstrom, zweitens auf feuchte Luftströme, deren Wasserdampf überkühlt ist. Lp.

A. Gadoline. Ueber das Gesetz der Veränderung des Windes. Petersb. Abh. LXII. No. 4. 1-145. Mit 5 Figurentaf. (Russisch.)

Lord Rayleigh. On the vibrations of an atmosphere. Phil. Mag. (5) XXIX. 173-180.

Der Fall eines Gases, das dem Boyle'schen Gesetze folgt, und in welchem die Schichten gleicher Dichtigkeit parallele Ebenen sind, wird hier erörtert. Das gewöhnliche Gesetz $\sigma = \sigma_0 e^{-gz/a^2}$, welches die Dichte σ in der Höhe z liefert, wird zuerst abgeleitet. Die Gleichung für die Bewegung kleiner Schwingungen in der Richtung der (verticalen) z-Axe wird darauf bestimmt und unter gewissen Einschränkungen gelöst; die allgemeinere Gleichung für den Fall, in welchem die Schwin-

gungen nicht auf eine Dimension beschränkt sind, wird dagegen später betrachtet. Meteorologische Fragen werden im Verlauf der ganzen Abhandlung berücksichtigt. Gbs. (Lp.)

M. Margules. Ueber die Schwingungen periodisch erwärmter Luft. Wien. Ber. XCIX. 204-227.

Ihr wesentliches Interesse empfängt die vorliegende Untersuchung durch ein Problem der Meteorologie.

Bekanntlich kann man die von unperiodischen Einflüssen befreite tägliche Schwankung des Barometers nahezu ausreichend durch die Uebereinanderlegung zweier Wellenzüge darstellen, von denen eine eine ganztägige, die andere eine halbtägige Periode hat. Während die erste ganz augenscheinlich mit der Schwankung der Temperatur im unmittelbaren Zusammenhang steht, tritt die andere mit einer solchen Regelmässigkeit und Gleichmässigkeit auf, dass es schwer erscheint, sie durch die vergleichsweise geringe zwölfstündige Temperaturwelle zu erklären.

Setzt man für den Druck p, die Dichtigkeit μ, die Temperatur T die Werte

$$p = p_0(1+\varepsilon), \quad \mu = \mu_0(1+\sigma), \quad T = T_0(1+\tau),$$

so erhält der Verfasser für horizontale Schwankungen die Gleichung

$$\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2} - RT_0\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\tau}{\partial t^2}$$

resp.

$$\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2} - RT_0\frac{C_p}{C_v}\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2} = \frac{1}{C_vT_0}\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2},$$

welche für τ oder Q gleich Null in die Newton'sche oder Laplace'sche Differentialgleichung übergehen.

Setzt man die Temperaturschwankung

$$\tau = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{\theta}+\frac{x}{L}\right),$$

so wird

$$\varepsilon = A\frac{L^2}{L^2-c^2\theta^2}\sin 2\pi\left(\frac{t}{\theta}+\frac{x}{L}\right),$$

wo c den Newton'schen Wert der Schallgeschwindigkeit bezeichnet. Ist $V = \frac{L}{\theta} > c$, so ist dieser Ausdruck positiv und um so grösser im Vergleich zu τ, je kleiner V ist.

Nach verschiedenen anderen Specialfällen behandelt der Verfasser die ganztägige Welle bei rotirenden Kugeln. Sind r die Entfernung vom Erdmittelpunkte, λ die Poldistanz, ω die Breite, so sind ε und τ verbunden durch die Gleichungen: (S Erdradius)

$$-\frac{RT_0}{S}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} = \frac{\partial b}{\partial t} - 2n\cos\omega c, \quad -\frac{RT_0}{S\sin\omega}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \lambda} = \frac{\partial c}{\partial t} + 2n\cos\omega b,$$

$$S\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial \tau}{\partial t}\right) + \frac{1}{\sin\omega}\left(\frac{\partial b \sin\omega}{\partial \omega} + \frac{\partial c}{\partial \lambda}\right) = 0.$$

Man setzt nun

$$\tau = A(\omega)\sin(n\tau + \lambda), \quad \varepsilon = E(\omega)\sin(nt+\lambda), \quad C = \varphi(\omega)\cos(nt+\lambda),$$
$$c = \psi(\omega)\sin(nt+\lambda),$$

und bestimmt die Functionen durch Reihenentwickelung für $A(\omega) = C\sin\omega$ und $A(\omega) = C\sin^2\omega$.

Dann behandelt der Verfasser die halbtägigen Wellen in ganz ähnlicher Weise. Es ergiebt sich, dass, wie bei der zuerst behandelten und hier genauer wiedergegebenen Aufgabe, das Verhältnis der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwankung zur Schallgeschwindigkeit von wesentlichem Einfluss auf die Amplitude der Druckschwankung ist. Liegt nämlich $4k = 4\frac{n^2S^2}{RT_0}$ unter 11,1, so ist die Phase der Druckschwankung entgegengesetzt derjenigen der Temperaturschwankung, und die Amplitude wird um so grösser, je näher $4k$ der fraglichen Grenze kommt. Wenn aber $4k$ grösser ist als 11,2, so sind die beiden Phasen gleich, und die Amplitude der Druckschwankung nimmt mit wachsendem $4k$ ab. Zwischen den beiden fraglichen Werten liegt das k der freien Druckschwankungen, bei welchem also erzwungene Druckschwankungen eine unendlich grosse Amplitude haben müssten. Im vorliegenden concreten Falle hat für $T_0 = 273°,0$ $4k$ den Wert 10,94, liegt also in der Nähe des kritischen Wertes.

Zum Vergleich zieht der Verfasser schliesslich die durch Sonne und Mond bewirkte Ebbe und Flut der Atmosphäre heran.

F. K.

A. Schmidt. Ueber die Ursache der Abnahme der Temperatur mit der Höhe der Atmosphäre. Böklen Mitt. III. 23-37.

Der Verf. vergleicht die Ansichten, welche sich verschiedene der namhaftesten Meteorologen (Guldberg-Mohn, v. Bezold, Sprung u. a.) hinsichtlich der erwähnten Erscheinung gebildet haben, und spricht sich gegen die meist übliche Anwendung der Sätze der mechanischen Wärmetheorie aus. Der danach berechnete Gradient der verticalen Temperaturverminderung stimme deshalb nicht gut mit der Erfahrung überein, weil man die specifische Wärme bei constantem Druck zu Grunde lege, während in Wahrheit die specifische Wärme bei constantem Volumen in die Rechnung einzugeben hätte.

Gr.

E. Korselt. Untersuchungen über das Gesetz der Temperaturabnahme in der Verticalen auf Grund verschiedener Formeln zur barometrischen Höhenmessung. Exner Rep. XXVI. 261-311, Diss. Jena. 58 S. 8°.

Mit Hülfe der barometrischen Höhenformeln kann man einigen Aufschluss über das Gesetz der Temperaturabnahme in einer Verticale erhalten. Denn da die Ableitung einer richtigen Höhenformel und das Gesetz des Temperaturganges mit der Höhe, im Grunde genommen, identisch sind, und man durch trigonometrische Messungen die Höhen vieler Orte bestimmt hat und noch bestimmen kann, so ist es möglich, durch Umkehrung der Aufgabe und gleichzeitige Anwendung barometrischer Höhenformeln auf solche Orte Rückschlüsse auf die Temperaturabnahme in verticaler Richtung für diese Orte und für die betreffende Beobachtungszeit zu machen. Dieser Weg wird vom Verfasser eingeschlagen.

Lp.

A. KURZ. Die barometrische Höhenformel. Zweite Mitteilung. Exner Rep. XXVI. 574-579.

Vom Verfasser wird als „endgültige Formel“ aufgestellt:

$$z_o - z_u = 18400 \log \frac{b_u}{b_o} \left\{1 + \alpha t + \tfrac{3}{8}k + \frac{\cos 2\varphi}{400} + \frac{z_o + z_u}{r}\right\},$$

worin, ausser den leicht verständlichen Grössen, $k = e/b$ (e die Feuchtigkeit), r der Erdradius ist. Lp.

W. JORDAN. Zur barometrischen Höhenformel. Met. Zeitschr. VII. 354-355.

Verweis auf die zweite Auflage des „Handbuchs der Vermessungskunde“ (1877) vom Verf. betreffs der Formel:

$$h = 18400 \log \frac{B}{b}(1 + 0{,}003665t)\left[1 + 0{,}377\left(\frac{e_1}{B} + \frac{e_2}{b}\right)\right]$$
$$\times (1 + 0{,}00265 \cos 2\varphi)\left(1 + \frac{H_1 + H_2}{r}\right).$$

Lp.

J. MAURER. Zur Frage der Sternenstrahlung. Met. Zeitschr. VII. 18-25.

Auf Grund einer mathematischen Betrachtung und einer kritischen Besprechung der einschlägigen Beobachtungen kommt der Verf. zu der Ansicht: „Alles deutet darauf hin, dass die Energiemenge, welche uns aus dem interplanetaren Raume vermöge der Radiation von Körpern hoher und niedriger Temperatur zugestrahlt wird, jedenfalls und namentlich im Vergleich zur Sonnenwärme und zur eigenen Strahlung der Atmosphäre, von der sie, obigen Erörterungen zufolge, gar nicht zu trennen, ganz belanglos ist. Dass die Sternenwärme aber jemals zur Erklärung gewisser meteorologischer Vorgänge an der Erdoberfläche, die eine ausserirdische, also kosmische Ursache verlangen, mit Erfolg herbeigezogen werden könne, daran ist noch viel weniger zu denken“. Lp.

K. Weihrauch. Bildung von Taupunkt-Mitteln. Met. Zeitschr. VII. 429-432.

Wenn auch bei einer einzelnen Beobachtung der Taupunkt definirt ist als diejenige Temperatur, zu welcher der beobachtete Dampfdruck als Spannungsmaximum gehört, so gilt doch, wie der Verf. beweist, diese Beziehung niemals für die Mittelwerte des Dampfdruckes und des Taupunktes, sondern man hat vielmehr den folgenden Satz: Zu dem als Spannungsmaximum betrachteten arithmetischen Mittel einer Reihe von Dampfdrucken gehört eine Temperatur, welche immer höher ist als das arithmetische Mittel der den einzelnen Dampfdrucken entsprechenden Temperatur. Die Untersuchung war veranlasst durch einen Versuch des Herrn Brückner, durch die Verwertung von Taupunkt-Mitteln die Frage zu beantworten, ob die Temperatur der Schneedecke an ihrer Oberfläche tiefer oder höher ist als der Taupunkt der darüber lagernden Luft. Lp.

C. Crantz. Ueber eine Beziehung zwischen dem Newton-Weber'schen Gesetz und einigen meteorologischen Erscheinungen. Met. Zeitschr. VII. 399-400.

Die Beobachtungen haben ergeben, dass die Nordlichterscheinungen ein Maximum zur Zeit der Tag- und Nachtgleichen, ein Minimum zur Zeit der Sonnenwenden aufweisen. Der Verfasser ist auf theoretischem Wege vom Weber'schen Gesetze aus auf dieselben Tage für ein Maximum oder Minimum der elektrischen Inductionswirkung der Sonne gegenüber der Erde geführt worden, falls ein elektrisches Potential auf ersterer vorausgesetzt wird. Der bezügliche Gedankengang wird entwickelt. Lp.

J. M. Pernter. Die Theorie des ersten Purpurlichtes. Exner Rep. XXVI. 406-418, Met. Zeitschr. VII. 41-50.

Gegen die von Hrn. Kiessling begründete, von Hrn. Riggenbach eingehender durchgeführte Theorie des Purpurlichtes in den Dämmerungserscheinungen als eines Diffractions-Phänomens

sind durch die Herren Riccó, Rollo Russel und E. Douglas Archibald Einwände erhoben worden. Der Verf. erörtert alle Gründe, welche zur Aufstellung jener Theorie geführt haben, widerlegt die Gegengründe und kommt zu dem Schlusse: „Alle diese Einwände erschüttern nicht im geringsten die Kiessling-Riggenbach'sche Theorie, und wenn auch, besonders wegen Mangels einer genügenden Anzahl messender Beobachtungen, einzelne Punkte heute noch nicht vollständig erschöpfend klargestellt werden können, im wesentlichen scheint die Auffassung des ersten Purpurlichtes als Beugungserscheinung wohlbegründet zu sein“. Lp.

G. Lippmann. Sur la théorie et la mode de l'emploi des appareils séismographiques. C. R. CX. 440-444.

Schwingungen des Erdbodens werden gemeiniglich durch solche Pendel notirt, deren Aufhängungspunkt mit dem Boden fest verbunden ist, während die Spitze der Pendellinse auf bewegtem Papiere eine Curve verzeichnet. Diese Curve ist nun offenbar das Ergebnis der Uebereinanderlagerung zweier Bewegungen: derjenigen, welche der Boden gerade ausführt, und derjenigen, welche die bereits oscillirende Pendelkugel auch ohne neuen Anstoss ausgeführt haben würde. Es wird nach Poincaré eine Differentialgleichung aufgestellt und discutirt, welche diesen verwickelten Bewegungszustand genau darstellt; integriren lässt sich dieselbe natürlich nur angenähert, doch genügt die eine näher untersuchte Lösung, um aus ihr Winke für die beste Ausführung eines seismographischen Pendelapparates abzuleiten.

Gr.

Ch. Lagrange. Ueber den Magnetismus der Weltkörper. Naturwissenschaftliche Rundschau V. 121-123.

Der Artikel ist ein Bericht des Referenten über eine Reihe von Arbeiten des Verfassers in belgischen Zeitschriften nach einer zusammenfassenden Uebersicht in Jahrgang XXIV der Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft durch den

Verfasser. Die Grundanschauung ist die, dass die mit Elektricität geladene Sonne durch ihre Rotation ein Magnet geworden ist, in dessen Felde die Planeten rotiren und somit dem inducirenden Einflusse der Sonne unterliegen. Lp.

T. Bertelli. Delle vibrazioni sismiche e delle indicazioni sismometriche. Nota I[a]. Rom. Acc. P. d. N. L. Atti XLII. 95-119, Nota II[a] Rom. Acc. P. d. N. L. Mem. VI. 67-221.

Anhang.

J. G. Hagen. Synopsis der höheren Mathematik. Erster Band. Arithmetische und algebraische Analyse. Berlin. Felix L. Dames. VIII u. 398 S. gr. 4°. (1891).

Ueber den Plan dieses Werkes, dessen Verfasser Director der Sternwarte des Georgetown College, Washington, ist, berichten wir am besten mit den Worten des Verfassers aus der Vorrede.

Der Zweck ist eine Rundschau, eine Durchmusterung der höheren Mathematik. Die Synopsis ist also weder ein Lehrbuch, noch eine Sammlung von Formeln oder Tafeln, sondern ein Nachschlagebuch, gleichsam ein Wegweiser, der einen Ueberblick giebt, einerseits, wie die einzelnen Teile dieser Wissenschaft sich dem ganzen Bau anfügen, und andererseits, wie weit der Ausbau eines jeden Teiles bis jetzt gediehen ist, mit Hinweis auf die hauptsächlichsten Bearbeiter und mit Andeutung der noch vorhandenen Lücken. Das Werk liesse sich demnach auch als Encyklopädie der höheren Mathematik bezeichnen. Als Grenze des aufzunehmenden Stoffes sind die mássgebenden Lehrbücher betrachtet, die, wenn auch Jahrzehnte hinter den Vorlesungen und Zeitschriften zurückbleibend, doch allein den bearbeiteten Gegenstand in einem gewissen Abschlusse darstellen. Die Verweisungen auf Zeitschriften und grössere Werke sind meist denselben Werken entnommen, aber, soweit dieselben zugänglich waren, sämtlich nachgesehen und berichtigt. Die Er-

klärungen und Beweise der zusammengestellten Definitionen und Sätze findet der Leser in den benutzten Lehrbüchern, deren Titel jedem Bande beigefügt und deren Verfasser im Anfange jedes Abschnittes noch besonders namhaft gemacht sind. Sachkundige Leser werden begreifen, dass die Ausführung des Planes die Kräfte eines Einzelnen beinahe übersteigt.

Der vorliegende erste Band des Werkes behandelt in zwölf Abschnitten die Theorie I. der Zahlen, II. der complexen Grössen, III. der Combinationen, IV. der Reihen, V. der Productreihen und Facultäten, VI. der Kettenbrüche, VII. der Differenzen und Summen, VIII. der Functionen, IX. der Determinanten, X. der Invarianten, XI. der Substitutionsgruppen, XII. der Gleichungen. Jeder Abschnitt ist wieder in eine grössere oder geringere Zahl von Hauptstücken zerlegt. Am Schlusse findet man ein Inhaltsverzeichnis, ein Verzeichnis der hauptsächlichsten benutzten Werke, 56 Autoren enthaltend, sowie der verglichenen 21 Zeitschriften, endlich ein alphabetisches Sachverzeichnis von 14 Seiten.

Erstaunlich ist es in der That, dass ein einziger Mann einen Stoff von solchem Umfange hat bewältigen können und guten Mutes daran geht, in den folgenden Bänden die übrigen Teile der Mathematik in einem Werke zu behandeln, welches die Anzeige in Darboux's Bulletin, in Anlehnung an die Vorrede, nicht unpassend mit einem Baedeker der Mathematik verglichen hat. Für den zweiten Band ist die Geometrie in Aussicht gestellt. Die Möglichkeit der Ausführung liegt eben wohl darin, dass der Verfasser sich an die von ihm bezeichneten Lehrbücher gehalten hat. Hierin ist die Erklärung für die guten Eigenschaften des Werkes gegeben, das bei dem Mangel an übersichtlichen Zusammenfassungen in der Mathematik in der That „sowohl Lehrern wie Schülern als willkommener Leitfaden dienen“ kann. Hierin findet man aber auch den Grund für manche Auslassungen, manche Aufnahmen, manche eigentümlichen Darstellungen. Beim Durchlesen des Verzeichnisses der benutzten Werke sowie der im Texte gegebenen Citate fragt man sich oft vergebens, warum denn nicht andere sehr bekannte Werke auch benutzt worden sind, insbesondere diejenigen neueren Autoren, welche,

wie Cantor, die Geschichte der Mathematik ausschliesslich behandeln.

Ueber die Einteilung des Stoffes und die Abgrenzung der Teile gegen einander lässt sich erst dann urteilen, wenn das Ganze vorliegt. Die Schwierigkeiten empfindet derjenige am lebhaftesten, welcher, wie der Referent, alljährlich vor derselben Aufgabe betreffs der Jahreslitteratur steht. Wenn aber z. B. die „Theorie der Functionen" zwischen der Theorie der Differenzen und Summen (mit Interpolation und Differenzengleichungen) einerseits und der Theorie der Determinanten andererseits steht, so dürfte diese Anordnung doch etwas wunderbar scheinen und nur dadurch begreiflich werden, dass dieser Abschnitt durchaus nicht etwa die Functionentheorie im gewöhnlichen Sinne des Wortes behandelt, sondern nach Besprechung der allgemeinen Definitionen, nach Erklärung der Functionen mit complexen Veränderlichen und ihrer Eigenschaften auf Riemann'schen Flächen nebst dem Problem der Umkehrung der Functionen, auf die Functionaldeterminanten, Resultanten und Discriminanten, homogene, symmetrische und alternirende Functionen und die linearen Substitutionen eingeht, also auf Gebiete, die mit den nachfolgenden Abschnitten über die Determinanten, Invarianten, Substitutionsgruppen in der That eng zusammenhängen.

Die Ausstattung des Werkes ist vortrefflich; doch fürchten wir, dass der dadurch bedingte hohe Preis dem Absatze Eintrag thun wird. Lp.

Des Ingenieurs Taschenbuch. Herausgegeben vom akademischen Verein „Hütte". Fünfzehnte völlig umgearbeitete Auflage. I u. II. Berlin. Wilhelm Ernst und Sohn. X u. 816, XVI u. 728 S. 8°.

Nachdem im vorigen Jahrgange des Jahrbuchs S. 1247 die vierzehnte Auflage des Taschenbuchs angezeigt ist, können wir uns darauf beschränken, die inzwischen erfolgte vollständige Ausgabe der damals bereits zum Teile erschienenen fünfzehnten mitzuteilen. Die Taschenbuch - Commission der Hütte hat sich, wie immer, bemüht, das Werk mit den Ansprüchen der Zeit in

Uebereinstimmung zu bringen; allerdings ist der Umfang des Ganzen dadurch um neun Bogen vergrössert worden. Für die Leser des Jahrbuchs heben wir nur hervor, dass in der ersten Abteilung (Mathematik) zum grösseren Teile wohl auf Wunsch von Herrn Mehmke hinzugekommen sind: sein zeichnerisches Verfahren zur Lösung algebraischer Gleichungen ersten Grades sowie für die näherungsweise Lösung von Gleichungen, Formeln und Tafeln für die Hyperbelfunctionen, einige Curven höherer Ordnung, Inhalte von Flächen und Körpern in Tafelform neu bearbeitet, die Umarbeitung der Parallel-Perspective. Die Correctheit des Werkes hat seit der letzten Auflage gewonnen. Es bleibt indessen in dieser Hinsicht noch manches zu thun, und da der Taschenbuch-Commission der Rat erfahrener und tüchtiger Männer nicht vorenthalten wird, so darf man hoffen, dass das viel benutzte Werk die ihm in dieser Hinsicht anhaftenden Mängel immer mehr abstreifen wird. Es ist ja sehr schwer, ein von einer grossen Anzahl einzelner Mitarbeiter bearbeitetes Werk in allen Teilen gleichmässig genau herzustellen. Daher verzichtet Ref. darauf, die von ihm gefundenen Einzelheiten hier besonders zu bezeichnen. Der Weltruf, dessen sich des Ingenieurs Taschenbuch erfreut, bezeugt ohnehin die Brauchbarkeit und Nützlichkeit der getroffenen Einrichtungen. Lp.

A. Halkowich. Ueber Rechenmaschinen. Mitt. üb. Art. u. Gen. XXI. 35-76.

Auf Grund einer kurzen historischen Uebersicht über die Geschichte der Rechenmaschinen unterscheidet der Verf. zwei Typen von Rechenmaschinen: 1) die Tabellen-Rechenmaschinen nach dem Gedanken Babbage's, resp. nach Ausführung Scheutz's; 2) diejenigen Rechenmaschinen, welche den Zweck verfolgen, gewisse Rechenoperationen (als Addition, Subtraction, Multiplication u. s. w.) fallweise auszuführen. Demgemäss führt er das Princip, die Einrichtung und Wirkungsweise dieser beiden Gruppen getrennt vor, beginnt mit den bisher minder ausgebildeten und für die allgemeine Verwendung unwichtigeren Tabellen-

Rechenmaschinen und schliesst als Repräsentanten der zweiten Richtung das Arithmometer von Thomas und die Rechenmaschine von Selling an. Lp.

Arnoux. Calcul graphique et mécanique. Mém. de la soc. des Ing. civ. 1890. I. 361-369.

Giebt die Theorie verschiedener Apparate zur mechanischen Berechnung, namentlich der Integratoren. F. K.

K. Eisschill. „Vega“, ein Instrument zum Ersatz für trigonometrische Tafeln. Mitt. üb. Art. u. Gen. XXI. 110-111 (Notizen).

Beschreibung der Einrichtung und des Gebrauchs eines Rechenschiebers, mit dessen Hülfe man den Wert von cotgγ:

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=\operatorname{cotg}\gamma$$

aus α und β in einfacher Weise bestimmen kann. Lp.

G. F. Matthews. Manual of logarithms treated in connection with arithmetic, algebra, plane trigonometry, and mensuration, for the use of students preparing for army and other examinations London. Macmillan and Co. VIII + 126 S. gr. 8°.

Ein Schulbuch zur praktischen Unterweisung im Rechnen mit Logarithmen. Wenn der Verf. in der Vorrede über die Vernachlässigung dieses Unterrichtszweiges in England klagt, so müssen wohl die englischen Aufgabensammlungen anders geartet sein als die deutschen und französischen. Unter den vielen Beispielen, deren Zahl das Vorwort auf mehr als 1300 angiebt, und deren Lösungen in einem Anhange sich finden, dürften für deutsche Lehrer besonders diejenigen interessant sein, die ohne die Hülfe der Tafeln vermittelst weniger gegebenen Logarithmen nebst den zugehörigen Differenzen zu bearbeiten sind. Gerade

diese Art von Aufgaben scheint für die militärischen Prüfungen in England sehr beliebt zu sein. Lp.

O. SCHLÖMILCH. Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Galvanoplastische Stereotypie. 10. verb. Aufl. Braunschweig. Vieweg und Sohn. VI u. 151 S. 8°.

Die Tafel zeichnet sich durch ein bequemes Format und sehr deutlichen Zifferndruck aus. Wenn die letzte Stelle erhöht ist, so wird dies durch einen darüber gesetzten Strich angedeutet. Die Haupttafeln enthalten: I. die Briggs'schen Logarithmen der natürlichen Zahlen von 1 bis 10909, II. die Länge der Kreisbogen für die einzelnen Grade, Minuten und Secunden für den Halbmesser 1, III. die natürlichen goniometrischen Functionen der Winkel von 10 zu 10 Minuten, IV. Reduction der Tangenten auf Tangenten der halben Winkel, V. die Logarithmen der goniometrischen Functionen der Winkel von Minute zu Minute, VI. Reciproke Werte, Quadrat- und Kubikwurzeln, natürliche Logarithmen und Ellipsenquadranten. Lp.

BREMIKER's logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit sechs Decimalstellen. Neu bearbeitet von TH. ALBRECHT. 11. Ausg. Berlin. Nicolai'sche Verlagshdlg. XVIII + 598 S. 8°.

L. SCHRÖN. Siebenstellige gemeine Logarithmen der Zahlen von 1 bis 108000 und der Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten aller Winkel des Quadranten von 10 zu 10 Secunden. 21. Aufl. Tafel I u. II des Gesamtwerkes in 3 Tafeln. Braunschweig. Vieweg u. Sohn. VIII u. 4, 20 u. 474 S. Lex. 8°.

L. SCHRÖN. Siebenstellige gemeine Logarithmen der Zahlen von 1 bis 108000. 21. Aufl. Taf. I des Gesamtwerkes in 3 Tafeln. Braunschweig. Vieweg u. Sohn. VIII + 4, 20 u. 202 S. Lex. 8°.

A. SICKENBERGER. Vierstellige logarithmisch - trigonometrische Tafel zum Schul- und Handgebrauch. 2. Aufl. München. Th. Ackermann. 20 S. 12°.

J. T. BOTTOMLEY. Four figure mathematical tables. Second edition. London. Macmillan and Co. [Nature XLI. 510-511.]

W. CAWTHORNE. Short logarithms and other tables. 4th ed. London. E. and F. N. Spon. [Nature XLII. 518.]

LALANDE. Tables de logarithmes, étendues à sept décimales, par Marie, précédées d'une instruction par le baron Reynaud. Nouvelle édition, augmentée de formules pour la résolution des triangles, par Bailleul, typographe. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

GUILLEMO B Y PUGA. Tablas de refraccion de minuto en minuto. Mexico Soc. Alzate IV.

Die erste Tafel enthält den Logarithmus der Brechung für jede Minute des Zenitabstandes von 0° bis 90°, die zweite den Logarithmus der Correction für den Luftdruck, die dritte und vierte geben die Logarithmen der Thermometer-Correctionen.

Tx. (Lp.)

A. JAROMILEK. Der mathematische Schlüssel zu der Pyramide des Cheops. Wochenschr. östr. Ing. XV. 188, 193, 203.

Behandelt die Frage, ob in den Dimensionen der Cheopspyramide die geometrischen Kenntnisse der alten Aegypter zum Ausdrucke gelangen.

F. K.

J. SCHUBERT. Mathematisches Repetitorium für Studirende der Forstwissenschaft. Berlin. J. Springer. IV u. 55 S. 8°.

Das Büchelchen umfasst etwa den Lehrstoff der elementaren Mathematik eines Realgymnasiums, giebt aber nur die Definitionen, Formeln und die Sätze an einander gereiht ohne Beweise.

Namenregister.

Berichtigungen.

Seite	51	Zeile	11	von	oben	lies	G. A. Hirn statt G. H. Hirn.
„	97	„	7	„	„	„	Porcelli statt Porcalli.
„	197	„	9	„	„	„	Chicca statt Chissa.
„	387	„	8	„	unten	„	Köpcke „ Köbcke.
„	407	„	4	„	oben	„	(3) VII „ (3) VI.
„	470	„	5	„	„	„	XX. 1888. 457 statt XX. 1888. 467.
„	560	„	6	„	„	„	wird statt werden.
„	566	„	9	„	„	„	Boyman statt Boymann.
„	632	„	4	„	„	„	Küppers „ Küpper.
„	862	„	15	„	„	zu	Monatsh. f. Math. zuzufügen I.